Наталя Українець, Сергій Бак, Галина Ковтонюк

БІЖУЧІ ХВИЛІ В МОДЕЛІ ТИПУ ФРЕНКЕЛЯ-КОНТОРОВОЇ

Анотація. *В статті описано модель Френкеля-Конторової та її азагальнення, яке описується дискретним рівнянням типу синус-Ґордона з нелінійною взаємодією. За відповідних умов в таких рівняннях існують розв'язки у вигляді біжучих хвиль. За допомогою варіаціних технік встановлено існування гетероклінічних і гомоклінічних біжучих хвиль в таких рівнянннях.*

Ключові слова: *модель Френкеля-Конторової, рівняння синус-Ґордона, дискретне рівняння синус-Ґордона, біжучі хвилі, гомоклінічні і гетероклінічні хвилі.*

Універсальні моделі, які здатні описати велику різноманітність фізичних явищ, зустрічаються досить рідко. Такі моделі користуються особливою увагою, оскільки вони дозволяють давати найбільш прості описи фізичних явищ. Найпростішим прикладом такої моделі є модель маятника. Тверді тіла як правило описуються складними моделями з великим числом ступенів свободи і, отже, достатньо складними рівняннями. Однак у наш час відносно проста модель, зараз відома як модель Френкеля–Конторової (див. [1; 9; 10]), стала одним із фундаментальних інструментів низькорозмірної нелінійної фізики. Ця модель описує ланцюг класичних частинок, зв'язаних зі своїми сусідами, який взаємодіє із зовнішнім періодичним потенціалом.

Метою статті є опис моделі Френкеля-Конторової, її узагальнення та встановлення умов існування біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус-Ґордона.

Модель Френкеля-Конторової і дискретне рівняння синус-Ґордона. Класична модель Френкеля–Конторової була запропонована російськими фізиками Я. Френкелем та Т. Конторовою у 1938 році для опису структури і динаміки кристалічної ґратки ([10]).

На рис. 1 зроблено схематичне представлення моделі Френкеля–Конторової – ланцюг частинок, зв'язаних гармонічними пружинами з коефіцієнтом жорсткості g, який взаємодіє із зовнішнім періодичним потенціалом періоду a_s, причому a_0 – рівноважний крок.

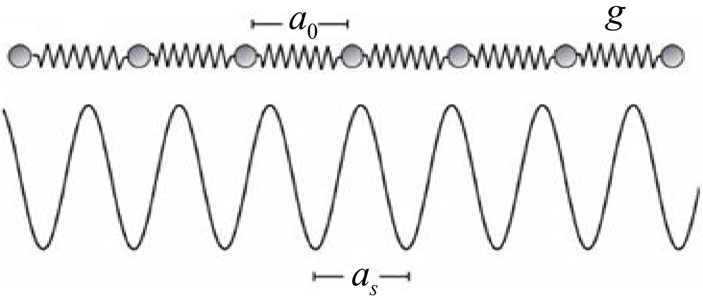

Рис. 1

У безрозмірних координатах із зовнішнім потенціалом вигляду $U(r) = 1 - \cos r$ ця модель описується рівняннями:

$$\ddot{x}_n - g\Delta x_n + \sin x_n = 0,\ n \in \mathbb{Z}, \qquad (1)$$

де $x_n = x_n(t)$ – координата n-ої частинки в момент часу t, $\left(\Delta x\right)_n = x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n$ – одновимірний дискретний оператор Лапласа.

Це рівняння є дискретним варіантом так званого рівняння синус–Ґордона (див. [11]). Тобто у континуальному наближенні модель Френкеля–Конторової зводиться до точно інтегровного рівняння синус–Ґордона:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin\phi = 0\,. \qquad (2)$$

Рівняння (2) належить до нелінійних гіперболічних рівнянь з частинними похідними. Таку назву це рівняння отримало завдяки подібності з відомим рівнянням Клейна–Ґордона (див. [8]). Вперше це рівняння було розглянуто в диференціальній геометрії ще в XIX столітті в зв’язку з вивченням псевдосфер, які належать до поверхонь зі сталою від’ємною кривиною. Пізніше з’ясувалося, що рівняння синус–Ґордона має досить універсальний характер та описує низку фізичних явищ (поширення імпульсів в дворівневих резонансних середовищах, поведінка блохівських стінок у феромагнітних кристалах, рух дислокацій та ін.).

Узагальненням рівняння (1) є рівняння з нелінійним зв’язком:

$$\ddot{x}_n\left(t\right) = V'(x_{n+1}\left(t\right) - x_n\left(t\right)) - V'\left(x_n\left(t\right) - x_{n-1}\left(t\right)\right) - K\sin x_n\left(t\right),\ n \in \mathbb{Z}\,, \qquad (3)$$

з константою $K > 0$, де $x_n\left(t\right)$ – узагальнена координата n-го атома. Аргументом потенціалу взаємодії $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є дискретний зсув $x_{n+1}\left(t\right) - x_n\left(t\right)$. Подібні системи представляють інтерес у зв'язку із застосуваннями у фізиці [3], [9], [10]. Зауважимо, що рівняння (3) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь. Крім того, якщо потенціал взаємодії є квадратичним, тобто $V(r)=\frac{c_0^2}{2}r^2$ ([11]), то рівняння (3) описуватиме загально відому модель Френкеля-Конторової.

Біжучі хвилі. Зазначимо, що біжуча хвиля має вигляд

$$x_n(t)=u(n-ct),\ n\in\mathbb{Z},$$

де $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ – називається профілем хвилі, а $c>0$ – швидкість хвилі. Для профілю біжучої хвилі рівняння (1) набуває вигляду

$$c^2u''(s)=V'\big(u(s+1)-u(s)\big)-V'\big(u(s)-u(s-1)\big)-K\sin u(s), \tag{4}$$

де $s=n-ct$.

Зазначимо, що в працях [6] та [14] вивчались біжучі хвилі для подібного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів та систем Фермі-Пасти-Улама. В статтях [2; 4; 5; 7] вивчались біжучі хвилі в дискретних рівняннях типу синус-Ґордона на двовимірній ґратці.

З рівнянням (4) пов'язується функціонал

$$J(u):=\int_{\mathbb{R}}\left[\frac{c^2}{2}\big(u'(\tau)\big)^2-V\big(u(\tau+1)-u(\tau)\big)+K\big(1+\cos\big(u(\tau)\big)\big)\right]d\tau,$$

критичні точки якого є розв'язками рівняння (4).

За відповідних умов існують два типи розв'язків:

- гетероклінічні біжучі хвилі: $\lim\limits_{s\to-\infty}u(s)=-\pi$ та $\lim\limits_{s\to+\infty}u(s)=\pi$, (5)

- гомоклінічні біжучі хвилі: $\lim\limits_{s\to-\infty}u(s)=\lim\limits_{s\to+\infty}u(s)=\pi$. (6)

Гетероклінічні хвилі. Припустимо, що виконуються наступні умови:

(i) $V\in C^1(\mathbb{R}), V(0)=0$ *і* $V(x)\geq 0$ *для всіх* $x\in\mathbb{R}$*;*

(ii) *потенціал взаємодії є зростаючим на нескінченності:*

$$\lim_{|r|\to\infty}V(r)=\infty;$$

(iii) *існує скінченна границя* $\lim_{r\to 0}\left|\frac{V(r)}{r^2}\right|$;

(iv) *швидкість хвилі задовольняє нерівність*

$$c^2 > c_1^2 := \sup_{|r|<6\pi}\left|\frac{V(r)}{r^2}\right|.$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(i)-(iv)$ *і швидкість* c *така достатньо велика, що* $\delta < \pi$, *де* $\delta := \frac{4c_1^2}{c^2 - c_1^2 + c\sqrt{c^2 - c_1^2}}$. *Тоді рівняння (4) має розв'язок* $u \in C^2(\mathbb{R})$, *який задовольняє умови (5).*

Доведення теореми полягає у використанні варіаційного методу і принципу концентрованої компактності ([12; 13]).

Гомоклінічні хвилі. Розглянемо тепер рівняння (4) з гомоклінічними граничними умовами (6), що еквівалентно, враховуючи $\sin(u+\pi) = -\sin u$,

$$\left.\begin{aligned} &c^2u''(\tau) = V'(u(\tau+1) - u(\tau)) - V'(u(\tau) - u(\tau-1)) + K\sin(u(\tau)),\\ &\lim_{\tau\to-\infty} u(\tau) = \lim_{\tau\to+\infty} u(\tau) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Надалі передбачається, що потенціал задовольняє умову:

(v) $V(r) = \frac{c_0^2}{2}r^2 + f(r)$, $i = 1, 2$, *де* $f \in C^1(\mathbb{R})$, *причому* $f(0) = f'(0) = 0$ *і* $f'(r) = o(|r|)$ *при* $r \to 0$, *та існує таке* $\mu > 2$, *що*

$$0 < \mu f(r) \le rf'(r),\ r \ne 0.$$

Одержання наступного результату (теорема 2) ґрунтується на використанні теореми про гірський перевал ([12; 14; 15]).

Теорема про гірський перевал. *Нехай I – функціонал класу C^1 на гільбертовому просторі H, який задовольняє умову Пале-Смейла:*

(PS) *якщо послідовність* $u_n \in H$ *така, що* $I'(u_n)$ *обмежена, то вона містить збіжну підпослідовність.*

Припустимо, що існують $e \in H$ *і* $r > 0$ *такі, що* $\| e \| > r$ *і*

$$\beta := \inf_{\|\upsilon\|=r} I(\upsilon) > 0 = I(0) \geq I(e).$$

Тоді існує така критична точка $u \in H$ *функціоналу I, що* $I(u) \geq \beta$. *При цьому* $I(u) \leq \sup\limits_{\tau \geq 0} I(\tau e)$.

Покладемо $f(u) := \frac{1}{2}\left(\max\left\{ 0, \left(|u| - \frac{\pi}{2} \right) \right\} \right)^2$ і означимо функціонал

$$\tilde{J}(u) := \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{c^2}{2}(u'(\tau))^2 - V(u(\tau+1) - u(\tau)) + K(1 - \cos(u(\tau)) + f(u(\tau))) \right] d\tau .$$

Очевидно, що $J(u) = \tilde{J}(u)$ для всіх u з $\|u\|_{L\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{\pi}{2}$. Крім того,

$$f \in C^1(\mathbb{R}),\ 1 - \cos(u) + f(u) \leq \frac{1}{2}u^2,$$

існує стала $\kappa > 0$, яка залежить тільки від α, така, що для всіх $u \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\kappa u^2 \leq 1 - \cos(u) + \frac{1}{\alpha} u \sin(u) + f(u) - \frac{1}{\alpha} u f'(u). \quad (8)$$

Нехай виконується умова (v). Тоді існує послідовність Пале-Смейла, тобто послідовність $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R})$ така, що для $n \to \infty$

$$J(u_n) \to d \text{ та } \|J'(u_n)\|_{L(H^1(\mathbb{R}),\mathbb{R})} \to 0,$$

для деякого

$$d \in [m, M] \quad (9)$$

з константами $m, M \in \mathbb{R}$, які можна визначити явно.

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (v) *і нехай параметри такі, що існує* $\varepsilon_0 > 0$ *таке, що виконується нерівність*

$$\sqrt{\frac{2M}{\min\left\{ \frac{\alpha-2}{2\alpha}\left(c^2 - c_0^2\right), kK \right\}}} < \frac{\pi}{2} - \varepsilon_0,$$

з $k > 0$ *як в (8) і M як в (9). Тоді рівняння (4) має несталий розв'язок* $u \in C^2(\mathbb{R})$, *який задовольняє умови (6).*

Таким чином, у цій статті описано модель Френкеля-Конторової, її узагальнення та одержано умови існування гетероклінічних і гомоклінічних біжучих хвиль для дискретного рівняння синус-Ґордона з нелінійною взаємодією.

Список використаних джерел:

1. Бак С. М. Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці : дис. ... докт. фіз.-мат. наук : 01.01.02. Вінниця, 2020. 336 с.

2. Бак С.М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні sin-Гордона на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць*. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. Вип. 9. С. 5-10.

3. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization. *Physica D*. 1997. Vol. 103. P. 201-250.

4. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 217, № 2 (August). P. 187-197.

5. Bak S. M. Homoclinic traveling waves in discrete sine–Gordon equation with nonlinear interaction on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2019. Vol. 52, № 2. P. 176-184.

6. Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators. *Communications in Mathematical Analysis*. 2007. Vol. 3, № 1. P. 19–26.

7. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice. *Journal of mathematical physics, analysis, geometry*. 2018. Vol. 14, № 1. P. 16-26.

8. Bates P.W., Zhang C. Traveling pulses for the Klein-Gordon equation on a lattice or continuum with long-range interaction. *Discrete Contin. Dyn. Syst*. 2006. Vol. 16, № 1. P. 235-252.

9. Braun O.M., Kivshar Y.S. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model. *Physics Repts*. 1998. Vol. 306. P. 1-108.

10. Braun O.M., Kivshar Y.S. The Frenkel-Kontorova model. Berlin: Springer, 2004. 427 p.

11. Kreiner C.-F., Zimmer J. Heteroclinic travelling waves for the lattice sine-Gordon equation with linear pair interaction. *Discrete and continuous dynamical systems*. 2009. Vol. 25, № 3. P. 1-17.

12. Kreiner C. F., Zimmer J. Travelling wave solutions for the discrete sine–Gordon equation with nonlinear pair interaction. *Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications*. 2009. Vol. 70, № 9. P. 3146–3158.

13. Lions P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case I, II. *Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire*. 1984. Vol. 1. P. 223-238.

14. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices. London – Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.

15. Willem M. Minimax theorems. Boston: Birkhäuser Boston Inc. 1996. 162 p.

TRAVELING WAVES IN FRENKEL-KONTOROVA TYPE MODEL

Abstract. *The article describes the Frenkel-Kontorova model and its generalization, described by the discrete sine-Gordon type equation with a nonlinear interaction. Under appropriate conditions, such equations have solutions in the form of traveling waves. With the help of variational techniques, the existence of heteroclinic and homoclinic traveling waves in such equations is established.*

Keywords: *Frenkel-Kontorova model, sine-Gordon equation, discrete sine-Gordon equation, traveling waves, homoclinic and heteroclinic waves.*