Владислав Кирилюк

ТЕОРЕМИ МЕНЕЛАЯ ТА ЧЕВИ ЯК СПОСІБ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Анотація. *Стаття присвячена узагальненню теорем Менелая та Чеви на тривимірний простір. Було розглянуто вказані теореми на площині, а також їхні аналоги в просторі. Тривимірні теореми Менелая та Чеви подавалися разом з доведенням. Наприкінці даної публікації сформовано добірку задач, які розв’язуються за допомогою просторових аналогів теорем Менелая та Чеви.*

Ключові слова: *тетраедр, теорема Менелая, теорема Чеви.*

Виклад основного матеріалу. У поглибленому курсі геометрії 8 класу вивчаються теореми Менелая та Чеви на площині:

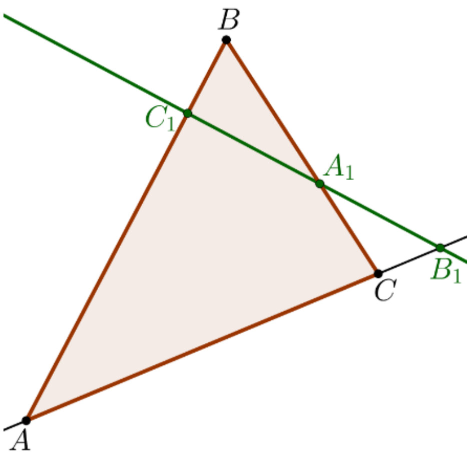
Теорема 1 (теорема Менелая на площині). *На сторонах AB і BC трикутника ABC вибрано відповідно точки C_1 і A_1, а на продовженні сторони AC – точку B_1, (а), рис. 1). Для того, щоб точки A_1, B_1 і C_1 лежали на одній прямій, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (1)$$

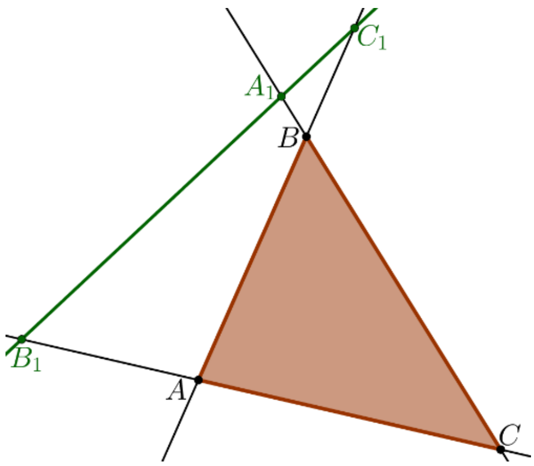
Зауважимо, що ***Теорема 1*** є справедливою і коли всі три точки A_1, B_1 та C_1 лежать за межами сторін трикутника ABC (на прямих, що містять ці сторони). Тобто теорему Менелая можна записати в ширшому вигляді:

Теорема 1' (теорема Менелая на площині). *На сторонах AB, BC, CA трикутника ABC, або на продовженнях цих сторін вибрано відповідно точки C_1, A_1, B_1, як показано на рис. 1. Для того, щоб точки A_1, B_1 і C_1 лежали на одній прямій, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (1)$$



а)



б)

Рис. 1

Означення 1. *Чевіаною* у трикутнику назвемо деякий відрізок, який сполучає деяку вершину трикутника із точкою на протилежній стороні. Тоді правильне твердження:

Теорема 2 (теорема Чеви на площині). *Для того, щоб чевіани* AA_1, BB_1 *і* CC_1 *деякого трикутника* ABC *перетиналися в одній точці (рис. 2), необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність:*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (1)$$

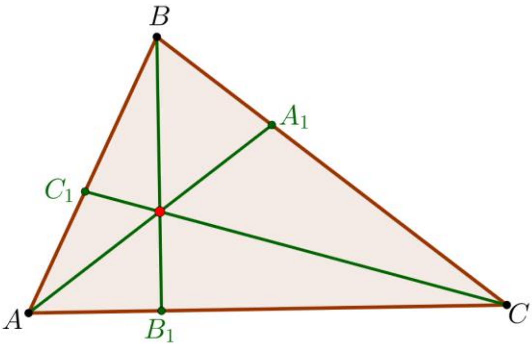


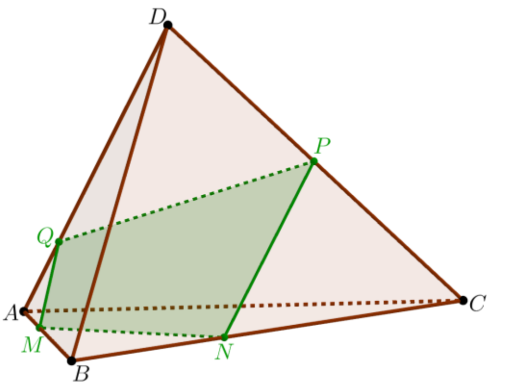
Рис. 2

Доведення вище вказаних теорем, а також більше матеріалів з даної теми можна знайти у джерелі [4, с.122-126].

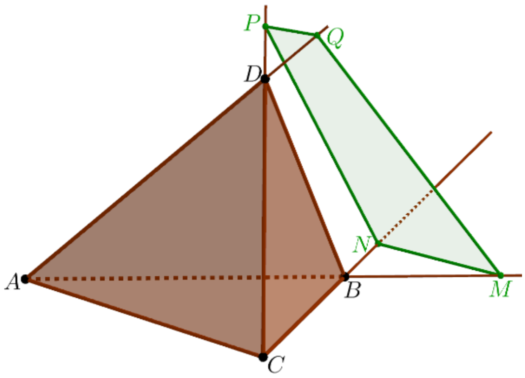
Менш відомими є теореми Менелая та Чеви, узагальнені на тривимірний простір (у шкільній програмі вони не вивчаються). Проаналізувавши джерела [1-3; 5-6] опишемо нижче ці теореми, та подамо відповідні доведення.

Теорема 3 (аналог теореми Менелая для простору). *На прямих, що містять ребра* AB, BC, CD *та* DA *тетраедра* $ABCD$ *позначено відповідно точки* M, N, P *та* Q *(рис. 4). Для того, щоб ці чотири точки були компланарними (лежали на одній площині), необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність*

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DQ}{QA}=1. \qquad (2)$$



а)



б)

Рис. 3

Доведення. Розглянемо випадок *а)* з р*ис. 3*, коли всі дані точки M, N, P, Q належать ребрам тетраедра.

Необхідність. Нехай точки M, N, P, Q – компланарні. Доведемо рівність (2).

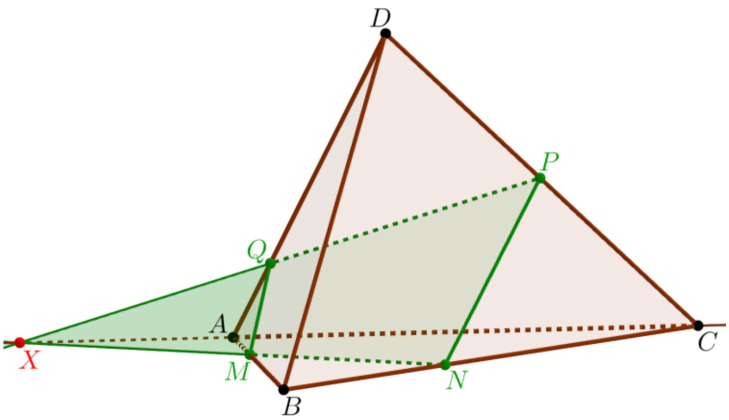


Рис. 3.1

На рис. 3.1 бачимо, що $(ABC)\cap(ADC)=AC$, $(MNP)\cap AC=X$. Можемо застосувати ***<u>Теорему 1</u>*** для трикутників ABC, ADC відповідно:

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CX}{XA}=1. \qquad (3.1)$$

$$\frac{AQ}{QD}\cdot\frac{DP}{PC}\cdot\frac{CX}{XA}=1. \qquad (3.2)$$

Із лівих частин формул (3.1) та (3.2) виразимо однаковий множник $\frac{CX}{XA}$:

$$\frac{CX}{XA}=\frac{MB\cdot NC}{AM\cdot BN}; \qquad (3.1')$$

$$\frac{CX}{XA}=\frac{QD\cdot PC}{AQ\cdot DP}. \qquad (3.2')$$

Оскільки ліві частини (3.1′) та (3.2′) рівні, то прирівняємо їх праві частини:

$$\frac{MB\cdot NC}{AM\cdot BN}=\frac{QD\cdot PC}{AQ\cdot DP}; \qquad (3.3)$$

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DQ}{QA}=1, \qquad (3.3')$$

що і треба було довести.

Достатність. Нехай умова (2) виконується. Доведемо, що M, N, P, K – компланарні точки (лежать на одній площині).

Повернемося до рис. 3.1. Нехай $MN\cap AC=X$.

За ***<u>Теоремою 1</u>*** для ∇ABC:

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CX}{XA}=1. \qquad (3.1)$$

Із лівих частин формул (2) та (3.1) виразимо $\left(\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\right)$:

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}=\frac{PD\cdot QA}{CP\cdot DQ}. \qquad (2')$$

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}=\frac{XA}{CX}. \qquad (3.1'')$$

Оскільки ліві частини (2′) та (3.1″) рівні, то прирівняємо їх праві частини:

$$\frac{PD\cdot QA}{CP\cdot DQ}=\frac{XA}{CX}; \qquad (3.4)$$

$$\frac{AQ}{QD}\cdot\frac{DP}{PC}\cdot\frac{CX}{XA}=1. \qquad (3.2)$$

Враховуючи ***<u>Теорему 1</u>*** для ∇ADC та рівність (3.2), можемо казати про те, що точки Q, P, X лежать на одній прямій.

Отже, можна зробити висновки, що прямі MN і PQ перетинаються в точці X, що свідчить про компланарність чотирьох даних точок.

Теорему доведено. ■

Зауваження! *Доведення* ***Теореми 3*** *для випадків, коли деякі з даних точок лежать на продовженнях ребер тетраедра (наприклад б), Рис. 3) аналогічне, лише варто зазначити, що тоді замість* ***Теореми 1*** *доцільно використовувати* ***Теорему 1'****.*

Означення 2. *Чевіанною площиною* у тетраедрі назвемо таку площину, яка визначається ребром тетраедра та деякою точкою протилежного ребра цього тетраедра.

Тоді правильне твердження:

Теорема 4 (аналог теореми Чеви для простору). *Для того, щоб чевіанні площини (AMB), (BNC), (CPD) і (DQA) тетраедра $ABCD$ перетинались в одній точці, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DN}{NA}=1. \qquad (2)$$

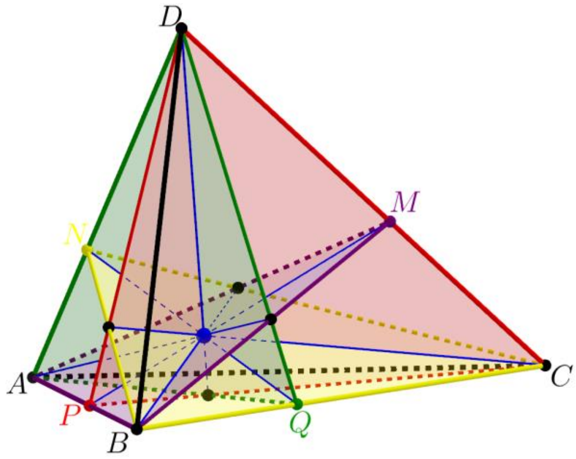


Рис. 4

Доведення.

Необхідність. Нехай чевіанні площини (AMB), (BNC), (CPD) і (DQA) тетраедра $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 4.1). Доведемо, що умова (2) виконується.

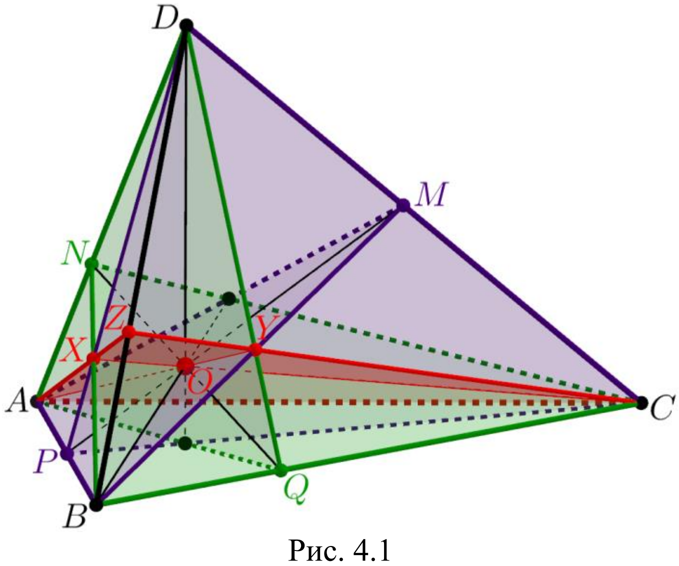


Рис. 4.1

Нехай $BN\cap DP=X$, $BM\cap DQ=Y$.

Помічаємо, що $AY=(AMB)\cap(DQA)$, $CX=(BNC)\cap(CPD)$. Це свідчить про те, що $AY\cap CX=O$, звідки точки A, X , Y , C – компланарні. Тому якщо $AX\cap BD=Z$, то і $CY\cap BD=Z$.

Можемо застосувати ***Теорему 2*** для $\mathrm{V}ABD$ та $\mathrm{V}BCD$ відповідно:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BZ}{ZD}\cdot\frac{DN}{NA}=1. \tag{4.1}$$

$$\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DZ}{ZB}=1. \tag{4.2}$$

Почленно перемножимо рівності (4.1) та (4.2) між собою:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BZ}{ZD}\cdot\frac{DN}{NA}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DZ}{ZB}=1. \tag{4.3}$$

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DN}{NA}=1, \tag{2}$$

що і треба було довести.

(Достатність). Нехай умова (2) виконується. Доведемо, що чевіанні площини (AMB), (BNC), (CPD) і (DQA) тетраедра $ABCD$ перетинаються в одній точці.

Повернемося до рис. 4.1. Нехай $BN\cap DP=X$, $AX\cap BD=Z$.

За ***Теоремою 2*** для $\mathrm{V}ABD$:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BZ}{ZD}\cdot\frac{DN}{NA}=1. \tag{4.1}$$

Із лівих частин формул (2) та (3.1) виразимо $\left(\frac{AP}{PB}\cdot\frac{DN}{NA}\right)$:

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{DN}{NA}=\frac{QC\cdot MD}{BQ\cdot CM}. \tag{2''}$$

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{DN}{NA}=\frac{ZD}{BZ}. \tag{4.1'}$$

Оскільки ліві частини (2″) та (4.1′) рівні, то прирівняємо їх праві частини:

$$\frac{QC\cdot MD}{BQ\cdot CM}=\frac{ZD}{BZ}; \tag{4.4}$$

$$\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CM}{MD}\cdot\frac{DZ}{ZB}=1. \tag{4.2}$$

Враховуючи ***Теорему 2*** для $\mathrm{V}BCD$ та рівність (4.2), можемо казати про те, що чевіани BM, CZ, DQ цього трикутника перетинаються в одній точці:

$$BM\cap CZ\cap DQ=Y. \tag{4.5}$$

Отже, $AX\cap CY=Z$, тобто точки A, X, Z, Y, C – компланарні. Тоді нехай $O=AY\cap CX$. Так як $AY=(AMB)\cap(DQA)$, $CX=(BNC)\cap(CPD)$, то:

$$(AMB)\cap(BNC)\cap(CPD)\cap(DQA)=O. \tag{4.6}$$

Теорему доведено. ■

Зауваження! *Варто зазначити, що **Теорема 4** працюватиме не для будь-яких чотирьох чевіанних площин. Точки, які власне і визначають чевіанну площину (на вказаному рис. 4.1 це точки M, N, P, Q), обов'язково вибираються на попарно протилежних ребрах тетраедра.*

Сформуємо добірку нестандартних стереометричних задач, які розв’язуються за допомогою ***просторових теорем Менелая та Чеви***:

1. **[15-та Білоруська Республіканська Математична Олімпіада, 1965]** *Навколо сфери описано просторовий чотирикутник. Довести, що точки дотику лежать в одній площині.*
2. **[Окружна Олімпіада, Москва, 2008]** *Точки A_1 і A_3 розміщені по один бік від площини α, точки A_2 і A_4 – по інший. Нехай відрізки A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 і A_4A_1 перетинають площину α в точках B_1, B_2, B_3 та B_4 відповідно. Обчисліть:*
$$\frac{A_1B_1}{B_1A_2}\cdot\frac{A_2B_2}{B_2A_3}\cdot\frac{A_3B_3}{B_3A_4}\cdot\frac{A_4B_4}{B_4A_1}.$$
3. **[Турнір Міст, 2009]** *Кожне ребро деякого тетраедра дотикається до даної сфери. Доведіть, що відрізки, які з’єднують точки дотику попарно протилежних ребер цього тетраедра, перетинаються в одній точці.*
4. **[Іспанська Математична Олімпіада, 2011]** *Нехай A, B, C, D – чотири точки простору, що не лежать на одній площині. Прямі AB, BC, CD і DA є дотичними до деякої сфери. Доведіть, що відповідні чотири точки дотику компланарні.*
5. **[6-та Олімпіада Ейлера учителів математики Санкт-Петербургу та Північно-Західного регіону, 2012]** *Доведіть, що площина, яка проходить через середини двох протилежних ребер тетраедра, ділить об’єм цього тетраедра навпіл.*

Висновки. Тема даної публікації є невід’ємною складовою нестандартних задач у курсі стереометрії. Навіть базові теореми Менелая та Чеви (на площині) нерідко використовуються при розв’язуванні різноманітних досить складних стереометричних задач. Просторові аналоги цих теорем насправді є їхніми наслідками. Безумовно вони також мають своє застосування в олімпіадній математиці. Тому оскільки теореми Менелая та Чеви не включені в основний курс шкільної геометрії, а в курсі поглибленого вивчення загалом розглядають лише планіметричні їх форми, то є підстави вважати, що ця стаття може стати в пригоді для учнів старших класів, студентів або вчителів, які вивчають стереометрію та цікавляться позашкільним матеріалом.

Список використаних джерел

1. Габович И. Теорема Менелая для тетраэдра / И. Габович // Квант. – 1996. – №6. – С. 34-36.
2. Эрдниев Б. Теоремы Чевы и Менелая / Б. Эрдниев, Н. Манцаев // Квант. – 1990. – №3. – С. 56-59.
3. Качалкина Е. Применение теорем Чевы и Менелая // Математика. Издательский дом «Первое сентября» – 2004. – №13. – С. 23-26.
4. Мерзляк А. Г. Геометрія: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів з поглибл. вивч. математики / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2016. – 224 с. : іл.
5. Koichu B. 3-D Dynamic Geometry: Ceva’s Theorem in Space. / B. Koichu, A. Berman // International Journal of Computers for Mathematical Learning. – 2004. – №9. P. 95-108.
6. Paiva, R. E. B. Problems Olympics in geometry space: exploring Ceva and Menelaus with geogebra 3D // Geogebra International Journal of Romania, v. 5, p. 149-156, 2016.

MENELAUS’S AND CEVA’S THEOREMS AS A METHOD OF SOLVING NON-STANDARD STEREOMETRIC PROBLEMS

Annotation. *The article is devoted to the generalization of Menelaus’s and Ceva’s theorems to three-dimensional space. It were considered these theorems on the plane and also theirs analogues in the space. The three-dimensional Menelaus’s and Ceva’s theorems were presented with the proof. At the end of this publication, it was formed a selection of problems, which are solved using the space analogues of Menelaus’s and Ceva’s theorems.*

Keywords: *tetrahedron, Menelaus’s theorem, Ceva’s theorem.*