УДК 517.97 **С. М. Бак, О.О. Дьогтєва**

ІСНУВАННЯ СТОЯЧИХ ХВИЛЬ З ПЕРІОДИЧНОЮ АМПЛІТУДОЮ В РІВНЯННІ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА

Анотація

У даній статті отримано умови існування стоячих хвиль з періодичною амплітудою для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю. Для отримання умов існування таких розв'язків реалізовано варіаційний підхід із використанням многовиду Нехарі.

В данной статье получены условия существования стоячих волн с еприодической амплитудой для дискретного нелинейного уравнения типа Шредингера с насыщаемой нелинейностью. Для получения условий существования таких решений реализован вариационный подход с использованием многообразия Нехари.

In this paper we obtained results on existence of standing waves with periodic amplitude in Discrete Nonlinear equation of Shrodinger type with saturable nonlinearity. Calculus of variations and Nehari manifold are employed to establish the existence of these solutions.

Ключові слова: дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера, стоячі хвилі, многовиди Нехарі.

Вступ. У даній статті вивчається дискретне нелінійне рівняння типу Шредінгера із насичуваною не лінійністю

$$i\dot{\psi}_n - a_n\psi_{n+1} - a_{n-1}\psi_{n-1} - b_n\psi_n + \frac{\mu|\psi_n|^2}{1+|\psi_n|^2}\psi_n = 0, \tag{1}$$

де $\mu \neq 0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

Будемо розглядати так звані стоячі хвилі, тобто розв'язки вигляду

$$\psi_n = \exp(-i\omega t)u_n, \tag{2}$$

де амплітуда $u_n \in \mathbb{R}$. Тоді, підставивши розв'язок (2) в рівняння (1), матимемо рівняння

$$Au_n - \omega u_n = f(u_n), \tag{3}$$

де $f(u_n) = \dfrac{\mu u_n^3}{1+u_n^2}$, $\mu \neq 0$ і $(Au)_n = a_n u_{n+1} + a_{n-1}u_{n-1} + b_n u_n$.

Подібні рівняння є цікавими з огляду на численні фізичні застосування [1], [2]. Особливо цікавими є рівняння вигляду (1) з оператором

$$(Au)_n = -u_{n+1} - u_{n-1} + (2 + v_n)u_n = -\Delta u_n + v_n u_n,$$

де $\Delta = u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n$ – одновимірний дискретний оператор Лапласа і v_n – задана дійсна послідовність (потенціал). Такі оператори виникають, наприклад, у нелінійній оптиці. Результати про існування стоячих хвиль у випадку, коли $A = -\Delta$ отримано в недавній роботі [6]. Відмітимо також статті [5], [6], в яких досліджено нелінійні рівняння типу Шредінгера із не лінійністю степеневого типу. Як і в [6], у цій статті використовується варіаційний метод, який ґрунтується на многовиді Нехарі.

Слід відмітити, що варіаційні методи використовувалися і в інших дискретних задачах, таких як ланцюги Фермі-Паста-Улама та ланцюги нелінійних осциляторів [3], [7] – [10].

Постановка задачі та основні припущення. Будемо розглядати рівняння

$$Au_n - \omega u_n = f(u_n), \tag{3*}$$

із деякою нелінійністю $f(u_n)$ та його розв’язки, які задовольняють умову

$$u_{n+k} = u_n. \tag{4}$$

Нехай $F(t)$ є первісною функцією для функції $f(t)$, тобто $F(t) = \int_0^t f(s)ds$. Тоді всюди далі припускається, що виконуються наступні умови:

(a_1) *послідовності* $(a_n), (b_n)$ *дійсних чисел періодичні, тобто* $a_{n+N} = a_n, b_{n+N} = b_n$ *і нижньою межею спектра оператора* A *є число* 0;

(a_2) $f(t) = o(t),\ t \to 0$ *і* $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \dfrac{f(t)}{t} = l < \infty$;

(a_3) $f \in C^1(\mathbb{R})$ *і* $f(t)t < f'(t)t^2,\ t \neq 0$;

(a_4) $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\left(\dfrac{1}{2}f(t)t - F(t)\right) = \infty.$

Нехай $k \geq 2$ – ціле число. Тоді позначимо через

$$Q_k := \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid -\left[\frac{k}{2}\right] \le n \le k - \left[\frac{k}{2}\right] - 1 \right\},$$

де $[\cdot]$ – ціла частина числа. Позначимо через X_k – простір всіх k-періодичних послідовностей (умова(4)). Це скінченно вимірний простір з нормою $\|u\|_k = \left(\sum_{n\in Q_k} |u_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Іноді ми будемо розглядати l^p-норму на X_k: $\|u\|_{l_k^p} = \left(\sum_{n\in Q_k} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \le p \le \infty$. Нагадаємо, що при $1 \le p \le q \le \infty$

$$\|u\|_{l_k^q} \le \|u\|_{l_k^p}. \tag{6}$$

Позначимо через L_k оператор, який діє в просторі X_k:

$$L_k = A - \omega. \tag{7}$$

Оператор L є обмеженим і самоспряженим в просторі X_k. На цьому просторі розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2}(L_k u, u)_k - \sum_{n\in Q_k} F(u_n). \tag{8}$$

Неважко перевірити, що похідна цього функціоналу визначається формулою

$$\langle J_k'(u), v \rangle = (L_k u, v)_k - \sum_{n\in Q_k} f(u_n) v_n, \quad v \in X_k, \tag{10}$$

а його критичні точки є k-періодичними розв'язками рівняння (3*).

Допоміжні леми. Для початку означимо многовид Нехарі, який відповідає функціоналу (8):

$$N_k := \left\{ v \in X_k \mid \langle J_k'(v), v \rangle = 0,\ v \ne 0 \right\} \subset X_k.$$

Введемо позначення $I_k(u) = \langle J_k'(u), u \rangle$. Це C^1-функціонал, похідна якого визначається формулою

$$\langle I_k'(u), v \rangle = 2(L_k u, v)_k - \sum_{n\in Q_k} \left(f(u_n) + f'(u_n) u_n \right) v_n. \tag{12}$$

Лема 1. *Нехай виконуються умови* $(a_1)-(a_4)$ *і* $\omega - l < 0,\ \omega \neq 0$. *Тоді множина* N_k *є непорожнім замкненим* C^1*-підмноговидом в* X_k, *на якому похідна* $I_k'(u) \neq 0$. *Крім того, існує* $\beta_0 > 0$ *таке, що* $\|u\|_k \geq \beta_0$, $u \in N_k$.

З (8) слідує, що на N_k

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{2} I_k(u) = \sum_{n \in Q_k} \left(\frac{1}{2} f(u_n) u_n - F(u_n) \right), \tag{14}$$

Лема 2. *Існує число* $\alpha_0 = \alpha_0(k) > 0$ *таке, що* $J_k(u) \geq \alpha_0$ *для всіх* $u \in N_k$.

Лема 3. *Якщо* $u \in N_k$, *то функція* $J_k(tu)$, $t > 0$ *має єдину критичну точку при* $t = 1$.

За лемою 3 точки мінімуму функціоналу J_k на N_k є розв'язками рівняння (3*). Тому природно розглянути наступну задачі мінімізації

$$m_k = \inf \{ J_k(v) \mid v \in N_k \}. \tag{16}$$

Лема 4. *Нехай виконуються умови* $(a_1)-(a_4)$ *і* $l + \omega > 0,\ \omega < 0$. *Тоді задача (16) має розв'язок.*

Доведення. Нехай (u^j), $u^j \in N_k$ – мінімізуюча послідовність для J_k, тобто $J_k'(u^j) \to m_k$. З рівності (14) маємо

$$J_k(u^j) = \sum_{Q_k} \left(\frac{1}{2} f(u_n^j) u_n^j - F(u_n^j) \right).$$

Тоді умова (a_4) означає, що $\|u^j\|_{l^\infty}$ обмежена. Оскільки простір X_k є скінченно вимірним, а l^∞-норма еквівалентна евклідовій нормі на X_k, то послідовність (u^j) є обмеженою. Переходячи до підпослідовності, ми можемо вважати, що (u^j) збігається до $u \in X_k$. Оскільки множина N_k замкнена і функціонал J_k є неперервним, то ми отримали $u \in N_k$ і $J_k(u) = m_k$. Лему доведено. □

Основні результати. З леми 4 випливає наступна теорема

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(a_1)-(a_4)$ *і* $\omega + l > 0,\ \omega < 0$. *Тоді для будь-якого* $k \geq 2$ *рівняння (3*) має нетривіальний* k*-періодичний розв'язок* $u^{(k)} \in X_k$. *Крім того, якщо функція* f *непарна, то рівняння (3*) має два нетривіальних розв'язки* $\pm u^{(k)}$.

Оскільки насичувана нелінійність $f(u_n) = \dfrac{\mu u_n^3}{1+u_n^2},\ \mu \neq 0$ задовольняє умови $(a_2)-(a_4)$, то з теорем 1 та 2 випливають основні результати даної статті

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (a_1) *і* $\omega + \mu > 0,\ \omega < 0$. *Тоді для будь-якого* $k \geq 2$ *рівняння (3) має два нетривіальних* k*-періодичних розв'язки* $\pm u^{(k)} \in X_k$.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization. //Physica D. – 1997. – 103. – P.201-250.

[2] Henning D., Tsironis G. Wave transmission in nonliniear lattices //Physics Repts. – 1999. – 309. – P. 333 – 432.

[3] Pankov A. Travelling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices. – The Imperial College Press. –London. – 2005. – 196 p.

[4] Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations// Nonlinearity. – 2006. – 19. – P. 27-40.

[5] Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations II: A generalized Nehari manifold approach// Discr. Cont. Dyn. Syst. – 2007. – 19. – P. 419-430.

[6] Pankov A., Rothos V. Periodic and Decaying Solutions in DNLS with saturable nonlinearity//Proc. Roy. Soc. A. – To appear.

[7] Бак С.Н., Панков А.А. О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов //Доповіді НАН України. – 2004. –№9. – С.13-16.

[8] Бак С.Н. Метод условной минимизации в задаче о колебаниях цепочки нелинейных осцилляторов //Математическая физика, анализ, геометрия. – 2004. – №3. – Т.11. – С. 263-273.

[9] Бак С.М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів //Математичні студії. – 2006. – Т. 26, №2. – С. 140-153.

[10] Bak S.M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators// Communications in Mathematical Analysis. – 2007. – Volume 3, Number 1. – P. 19–26.

[11] Teschl G. Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices// Amer. Math. Soc., Providence, 2000. – 251 p.