ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО
ІНСТИТУТ ПЕРСПЕКТИВНИХ ТЕХНОЛОГІЙ, ЕКОНОМІКИ І
ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ НАУК

АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ ВИРОБНИЧИХ ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ, ЕКОНОМІКИ І ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ НАУК

ЗБІРНИК НАУКОВИХ ПРАЦЬ

ВИПУСК 2

ВІННИЦЯ – 2005

С.М. Бак
м. Вінниця

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ЛАНЦЮГА НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

В даній роботі вивчаються рівняння, що описують динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Нехай q_n – узагальнена координата n-го осцилятора. Рівняння його руху при відсутності взаємодії з сусідніми осциляторами має вигляд:

$$\ddot{q}_n = -U'_n(q_n),\ n \in Z.$$

Припускається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з двома своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд:

$$\ddot{q}_n = -U'_n(q_n) + a_{n-1}(q_{n-1} - q_n) - a_n(q_n - q_{n+1}),\ n \in Z. \qquad (1)$$

Рівняння (1) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь. Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n \to \pm\infty} q_n(t) = 0, \qquad (2)$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Подібні системи представляють інтерес у зв'язку з численним фізичним застосуванням [1], [2]. В роботі [3] вивчались біжучі хвилі в таких ланцюгах, а в [4, 5] – періодичні по часу розв'язки. Огляд відомих результатів про такі системи зроблено в [6].

В даній роботі розглядаються питання коректності задачі Коші для системи (1).

2. Потенціал U_n запишемо у вигляді:

$$U_n(r) = -\frac{c_n}{2} r^2 + V_n(r)$$

і покладемо

$$b_n = c_n - a_n - a_{n-1}.$$

Тоді рівняння (1) прийме вигляд:

$$\ddot{q}_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n - V'_n(q_n),\ n \in Z. \qquad (3)$$

Враховуючи граничні умови (2), при підходящих припущеннях це рівняння природно розглядати як диференціально-операторне рівняння:

$$\ddot{q} = Aq - B(q) \qquad (4)$$

в гільбертовому просторі l^2 дійсних двохсторонніх послідовностей $q = \{q_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, де

$$(Aq)_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n,$$

а нелінійний оператор B визначається формулою:

$$B(q)_n = V'_n(q_n).$$

Скалярний добуток і норма в l^2 позначаються $(\cdot, \cdot)$ і $\|\cdot\|$ відповідно.

За означенням, розв'язком (4) вважається двічі неперевно диференційована функція від t зі значенням в l^2.

Припускається, що

(i) *послідовності* $\{a_n\}$ *і* $\{c_n\}$ *дійсних чисел обмежені;*

(ii) $V_n(r)$ – *функція класу* C^1 *на* $\Re$, $V_n(0) = V'_n(0) = 0$ *і для будь-якого* $R > 0$ *існує таке* $C = C(R) > 0$, *що для всіх* $n \in Z$

$$|V'_n(r_1) - V'_n(r_2)| \le C|r_1 - r_2|,\ |r_1|,\ |r_2| \le R. \qquad (5)$$

В цих умовах неважко бачити, що A є обмежений самоспряжений оператор в l^2, а оператор B обмежений і неперервний по Ліпшицю на кожній кулі простору l^2. Тоді, як наслідок стандартного результату про існування та єдиність локальних розв'язків, має місце:

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (i) *та* (ii). *Тоді для будь-яких* $q^{(0)} \in l^2$ *і* $q^{(1)} \in l^2$ *рівняння (3) має єдиний розв'язок класу* C^2, *визначений на деякому інтервалі* $(-t_0; t_0)$, *такий, що задовольняє початкові умови:*

$$q(0)=q^{(0)},\ \dot q(0)=q^{(1)}. \tag{6}$$

Наступне твердження про існування та єдиність розв'язків задачі Коші випливає з теореми 1.2, розділу 8 [7].

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (i) *та* (ii) *з константою, що не залежить від* R. *Тоді для будь-яких* $q^{(0)}\in l^2$ *і* $q^{(1)}\in l^2$ *задача (4), (6) має єдиний розв'язок, визначений для всіх* $t\in\Re$.

3. Умови теореми 2 означають, зокрема, що потенціал V_n на нескінченності має старший показник степеня не більший другого. Щоб послабити цю умову, відмітимо, що рівняння (4) може бути записане в гамільтоновому виді з гамільтоніаном

$$H(p,q)=\frac{1}{2}\left[\|p\|^2-(Aq,q)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}V_n(q_n)\right],$$

де $p=\dot q$. В припущеннях (i) та (ii) $H(p,q)$ – функціонал класу C^1 на $l^2\times l^2$ і пряме обчислення показує, що H – інтеграл рівняння (4), тобто для будь-якого розв'язку $q(t)$ рівняння (4) $H(p,q)$ не залежить від t.

Теорема 3. *Додатково до умов* (i) *та* (ii), *припустимо, що оператор* A *від'ємний, тобто* $(Aq,q)\le 0$ *для будь-якого* $q\in l^2$. *Крім того, нехай виконується одна з наступних двох умов:*

(a) $V_n(r)\ge 0$ *для всіх* $n\in Z$ *та* $r\in\Re$;

(b) існує така неспадаюча функція $h(r),\ r\ge 0$, *що* $\lim\limits_{n\to+\infty}h(r)=+\infty$ *та* $V_n(r)\ge h(|r|)$ *для всіх* $n\in Z$ *та* $r\in\Re$.

Тоді для будь-яких $q^{(0)}\in l^2$ *і* $q^{(1)}\in l^2$ *задача (4), (6) має єдиний розв'язок, визначений для всіх* $t\in\Re$.

Доведення. Випадок (a). Нехай $q(t)$ – локальний розв'язок задачі (4), (6), що існує в силу теореми 1. Для того, щоб довести, що $q(t)$ визначений на всій осі, достатньо показати, що $\|q(t)\|+\|\dot q(t)\|$ залишається обмеженою на будь-якому скінченому інтервалі $(-a,a)$ існування розв'язків (див., наприклад, [8], теорема X.74).

Маємо

$$H(\dot q(t),q(t))=H(q^{(1)},q^{(0)}).$$

В силу умов теореми і означення гамільтоніана,

$$\frac{1}{2}\|\dot q(t)\|_{l^2}^2\le H(q^{(1)},q^{(0)}).$$

Отже, $\|\dot q(t)\|$ обмежена на $(-a,a)$. Так як

$$q(t)=\int_0^t\dot q(\tau)d\tau+q^{(0)},$$

звідки випливає, що $\|q(t)\|$ обмежена.

Випадок (b). Нехай $H_0\ge 0$ таке, що $H(q^{(1)},q^{(0)})\le H_0$ та $\bar r>0$ – розв'язок рівняння $h(r)=H_0$ (він очевидно існує). Із означення H і умов теореми випливає, що $h\left(\left|q_n^{(0)}\right|\right)\le H_0$ і, отже, $\left|q_n^{(0)}\right|\le\bar r$. Нехай $\psi(r)$ – деяка функція, визначена рівністю:

$$\psi(r)=\begin{cases}1, & 0\le r\le\bar r,\\ -r+\bar r+1, & \bar r\le r\le\bar r+1,\\ 0, & r\ge\bar r+1.\end{cases}$$

Покладемо

$$\widetilde V_n(r)=\int_0^r[\psi(\rho)V_n'(\rho)+(1-\psi(\rho)]d\rho.$$

Неважко перевірити, що модифіковане рівняння (3) з потенціалом $\widetilde V_n$ задовольняє умови теореми 2 і, отже, має глобальний розв'язок $q(t)$ з початковими даними $q^{(0)}$, $q^{(1)}$. Елементарні обчислення показують, що $\widetilde{V}_n(r) \geq \widetilde{h}(r)$, де

$$\widetilde{h}(r) = \begin{cases} h(r), & 0 \leq r \leq \bar{r}, \\ (\bar{r}+1-r)h(r) + \int\limits_{\bar{r}}^{r} h(\rho)d\rho + \left(\frac{r^3}{3} - \bar{r}\frac{r^2}{2} + \frac{\bar{r}^3}{6}\right), & \bar{r} \leq r \leq \bar{r}+1, \\ r^2 + \int\limits_{\bar{r}}^{\bar{r}+1} h(\rho)d\rho + \left(\frac{(\bar{r}+1)^2}{3} + \frac{\bar{r}^3}{6}\right), & r \geq \bar{r}+1. \end{cases}$$

Для модифікованого гамільтоніана $\widetilde{H}$ маємо $\widetilde{H}(p(t), q(t)) = \widetilde{H}\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right)$. Так як $\left|q_n^{(0)}\right| \leq \bar{r}$, то $\widetilde{H}\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right) \leq H_0$. Отже, $\widetilde{h}\left(\left|q_n\right|\right) \leq H_0$. Так як $\widetilde{h}(r) \geq \widetilde{h}(\widetilde{r}) = h(\widetilde{r}) = H_0$, то $\left|q_n\right| \leq \widetilde{r}$. Так як для $q(t)$ модифіковане рівняння співпадає з вихідним, теорему доведено.

Аргументи п. 3 можна застосувати і у випадку сингулярних потенціалів типу Леннарда-Джонса [9].

ЛІТЕРАТУРА

[1] Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization //Physica D. – 1997. – 103. – P.201-250.

[2] Braun O.M., Kivchar Y.S. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model //Physics Repts. – 1998. – 306. – P.1-1-8.

[3] Ioos G., Kirchgassner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators //Commun. Math. Phys. – 2000. – 211. – P.439-464.

[4] Бак С.Н., Панков А.А. О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов //Доповіді НАН України. – 2004. –№9. – С. 13-16.

[5] Бак С.Н. Метод условной минимизации в задаче о колебаниях цепочки нелинейных осцилляторов //Математическая физика, анализ, геометрия. – 2004. – №3. – Т.11. – С.263-273.

[6] Pankov A. Travelling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices. – The Imperial College Press. –London. – 2005. – 196 p.

[7] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

[8] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: в 4-х т. – М.: Мир, 1978. – Т.2. – 395 с.

[9] Friesecke G., Wattis J. Existence theorem for solitary waves on lattices //Commun. Math. Phys. – 1994. – 161. – P.391-418.