Бак С. М., Білик Ю. П.

# ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ, РОЗМІЩЕНИХ НА ДВОВИМІРНІЙ РЕШІТЦІ

**Вступ.** У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній решітці. Нехай $q_{n,m}(t)$ - узагальнена координата *(n,m)*-го осцилятора в момент часу *t*. Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\begin{gathered}\ddot{q}_{n,\,m} = -U'_{n,\,m}(q_{n,\,m}) + a_{n-1,\,m}\left(q_{n-1,\,m} - q_{n,\,m}\right) - a_{n,\,m}\left(q_{n,\,m} - q_{n+1,\,m}\right) + \\ + b_{n,\,m-1}\left(q_{n,\,m-1} - q_{n,\,m}\right) - b_{n,\,m}\left(q_{n,\,m} - q_{n,\,m+1}\right),\ \left(n,\,m\right) \in \mathbb{Z}^2.\end{gathered}, \qquad (1)$$

Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n,\,m\to\pm\infty} q_{n,\,m}(t) = 0, \qquad (2)$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Подібні системи є цікавими з огляду на численні застосування у фізиці [3], [4], [7]. В статті [8] вивчались періодичні розв’язки для системи осциляторів на двовимірних решітках. Питання коректності задачі Коші для ланцюгів нелінійних осциляторів вивчалося в [1] і [5], а для систем осциляторів на двовимірних решітках – не розглядалося.

У цій статті отримано умови існування та єдиності локального розв’язку задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв’язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці.

**Основні припущення.** Потенціал $U_{n,m}(r)$ запишемо у вигляді

$$U_{n,m}(r) = -\frac{d_{n,m}}{2} r^2 + V_{n,m}(r)$$

і покладемо

$$c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}.$$

Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$\begin{gathered}\ddot{q}_{n,\,m} = a_{n-1,\,m}q_{n-1,\,m} + a_{n,\,m}q_{n+1,\,m} + b_{n,\,m-1}q_{n,\,m-1} + b_{n,\,m}q_{n,\,m+1} + \\ + c_{n,\,m}q_{n,\,m} - V'_{n,\,m}(q_{n,\,m}),\ (n,\,m) \in \mathbb{Z}^2.\end{gathered} \tag{3}$$

Враховуючи граничні умови (2), це рівняння зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q) \tag{4}$$

де

$$(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} - a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m}$$

(такі оператори вивчалися в [3]), а нелінійний оператор $B$ визначається формулою

$$(B(q))_{n,m} = V'_{n,m}(q_{n,m}) \tag{5}$$

в просторі дійсних послідовностей $q = \{q_{n,m}\}$ зі скалярним добутком

$$(q^{(1)}, q^{(2)}) = \sum_{n,m\in Z} q^{(1)}_{n,m} q^{(2)}_{n,m}$$

Позначимо цей простір $l_{2,2}$. Скалярний добуток і норму в $l_{2,2}$ позначатимемо $(\cdot,\cdot)$ і $\|\cdot\|$ відповідно.

Далі нам також знадобиться простір $l^\infty$ - банахів простір обмежених послідовностей з нормою

$$\|q\|_{l^\infty} = \sup_{n,m\in Z} |q_{n,m}|$$

Відмітимо, що рівняння (3) у просторі $l^\infty$ можна подати у гамільтоновому вигляді

$$\begin{cases}\dot{p} = -H'_q(p,q), \\ \dot{q} = -H'_p(p,q);\end{cases}$$

з гамільтоніаном

$$H(p,q)=\frac{1}{2}\left(\|p\|^2-(Aq,q)\right)+\sum_{n,m\in Z}V_{n,m}\left(q_{n,m}\right)$$

Гамільтоніан $H(p,\ q)$ задає повну енергію системи, тобто суму кінетичної і потенціальної енергії, причому $\frac{1}{2}\|p\|^2$— визначає кінетичну енергію, а $\sum_{n,m\in Z}V_{n,m}\left(q_{n,m}\right)-\frac{1}{2}(Aq,q)$ потенціальну.

За означенням, розв'язком (4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від t зі значенням в $l_{2,2}$.

Припускається, що виконуються умови

*$(i)$ послідовності $\{a_{n,m}\}$ і $\{c_{n,m}\}$ дійсних чисел обмежені;*

($ii$) $V_{n,m}(r)$ *- функція класу $C^1$ на R***,** *причому* $V_{n,m}(0)=V'_{n,m}(0)=0$ *і для* будь-якого *R>0 існує таке C=C(R)=0, що для всіх* $(n,m)\in Z$

$$\left|V'_{n,m}(r_1)-V'_{n,m}(r_2)\right|\le C|r_1-r_2|,\quad |r_1|,|r_2|\le R \tag{6}$$

З умови ($i$) випливає, що $A$ є обмеженим самоспряженим оператором в $l_{2,2}$.

**Лема 1.** *Нехай виконується умова* ($ii$), тоді *оператор B є обмеженим оператором в $l_{2,2}$. Більше того, оператор B є неперервним за Ліпшицем на кожній кулі простору $l_{2,2}$.*

Задача Коші для рівняння (4) полягає у знаходженні розв'язку, який задовольняє початкові умови:

$$q(0)=q^{(0)},\ \dot{q}(0)=q^{(1)}. \tag{7}$$

**Основний результат.** Для отримання основного результату нам знадобиться теорема, яка є наслідком зі стандартного результату про існування та єдиність глобального розв'язку.

Розглянемо в банаховому просторі $E$ нелінійне рівняння

$$\frac{dx}{dt}=f(x). \tag{8}$$

**Теорема 1 (глобальна).** *Нехай існують* $M_0 > 0$, $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ *такі, що*

$$\|f(x)\| \le M_1 + M_0\|x\| \text{ і } \|f(x_2) - f(x_1)\| \le M_2\|x_2 - x_1\|.$$

*Тоді для будь-якого* $x_0 \in E$ *рівняння (6) має один і тільки один розв'язок* $x = x(t)$ *визначений при всіх* $t \in \mathbb{R}$, *який задовольняє початкову умову* $x(0) = x_0$.

Щоб скористатися теоремою 1 зведемо рівняння (2) до рівняння першого порядку в просторі $E = l_{2,2} \times l_{2,2}$

$$\dot{x} = Gx, \tag{9}$$

де $x = (q, p)$ і $Gx = (p, Aq - B(q))$

З теореми 1 випливає основний результат статті про існування та єдиність глобального розв'язку:

**Теорема 2.** *Нехай виконуються умови* $(i)$ *та* $(ii)$ *з константою* $c$, *яка не залежить від* $R$. *Тоді для будь-яких* $q^{(0)} \in l_{2,2}$ *і* $q^{(1)} \in l_{2,2}$ *задача (4), (7) має єдиний розв'язок класу* $C^2$, *який визначений при всіх* $t \in \mathbb{R}$.

**Доведення.** Враховуючи обмеженість операторів A та B, для всіх $\|x\|_E \le R$ маємо:

$$\|Gx\|_E = (\|p\|^2 + \|Aq - B(q)\|^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= (\|p\|^2 + \|Aq\|^2 - 2(Aq, B(q)) + \|B(q)\|^2)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le (\|p\|^2 + \|Aq\|^2 + 2\|Aq\|\|B(q)\| + \|B(q)\|^2)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le (\|p\|^2 + 2\|Aq\|^2 + 2\|B(q)\|^2)^{\frac{1}{2}} \le (\|p\|^2 + C_1\|q\|^2 + C_2\|q\|^2)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le (C_0\|p\|^2 + C_0\|q\|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{C_0}\,\|x\|_E = M_1\|x\|_E,$$

де $C_0 = \max\{1; C_1 + C_2\}$, $M_1 = \sqrt{C_0}$.

Аналогічно для $\|x_1\|_E$, $\|x_2\|_E \le R$, де $x_1 = (q^{(1)}, p^{(1)})$, $x_2 = (q^{(2)}, p^{(2)}) \in E$,

Враховуючи обмеженість оператора A і лему 1 маємо:

$$Gx_1 - Gx_2 = \left(p^{(1)}, Aq^{(1)} - B\left(q^{(1)}\right)\right) - \left(p^{(2)}, Aq^{(2)} - B\left(q^{(2)}\right)\right) =$$

$$=\left(p^{(1)}-p^{(2)}, A\left(q^{(1)}-q^{(2)}\right)+B\left(q^{(2)}\right)-B\left(q^{(1)}\right)\right),$$

$$\left\|Gx_1-Gx_2\right\|_E=\left(\left\|p^{(1)}-p^{(2)}\right\|^2+\left\|A\left(q^{(1)}-q^{(2)}\right)+B\left(q^{(2)}\right)-B\left(q^{(1)}\right)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\left\|p^{(1)}-p^{(2)}\right\|^2+\left\|A\left(q^{(1)}-q^{(2)}\right)\right\|^2+2\left(A\left(q^{(1)}-q^{(2)}\right), B\left(q^{(2)}\right)-B\left(q^{(1)}\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\left\|B\left(q^{(2)}\right)-B\left(q^{(1)}\right)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\left(\left\|p^{(1)}-p^{(2)}\right\|^2+2\left\|A\left(q^{(1)}-q^{(2)}\right)\right\|^2+2\left\|B\left(q^{(2)}\right)-B\left(q^{(1)}\right)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\left(\left\|p^{(1)}-p^{(2)}\right\|^2+2C_1\left\|\left(q^{(1)}-q^{(2)}\right)\right\|^2+2C\left\|B\left(q^{(2)}\right)-B\left(q^{(1)}\right)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\left(C_0\left\|p^{(1)}-p^{(2)}\right\|^2+C_0\left\|\left(q^{(1)}-q^{(2)}\right)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\sqrt{C_0}\left\|x_1-x_2\right\|_E=M_2\left\|x_1-x_2\right\|_E,$$

де $C_0=\max\{1;2C_1+2C_2\}$, $M_2=\sqrt{C_0}$ .

Таким чином, за теоремою 1 для $x_0=\left(q^{(0)},q^{(1)}\right)\in E$ рівняння (9) має єдиний розв'язок $x=x(t)=\left(q(t),p(t)\right)$, який задовольняє початкову умову $x(0)=x_0$,

тобто $\left(q(0),q(0)\right)=\left(q^{(0)},q^{(1)}\right)$.

Теорему доведено.

## Література:


1. Бак С.Н. О динамических уравнениях системы линейно связанных нелинейных осцилляторов / С.Н. Бак, А. А. Панков //Український математичний журнал. — 2006. — №6. — Т.58. — С.723— 729.

2. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю.М. Березанский. — К.: Наукова думка, 1965.— 798 с.
3. Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — М: Наука, 1970.—534 с.
4. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and *y/* quantization //Physica D. — 1997. — 103. — P. 201—250.
5. Bak S. Well-posedness of initial value problem for discrete nonlinear wave equations / S. Bak, G. N'Guerekata, A. Pankov // Communications in Mathematical Analysis. — 2010. —Volume 8, Number 1. — P. 79—86.
6. Braun O.M. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model / O.M. Braun, Y.S. Kivshar//Physics Repts. — 1998. — 306. — P. 1 — 108.
7. Braun O.M. The Frenkel-Kontorova model / O.M. Braun, Y.S. Kivshar — Berlin: Springer, 2004. — 427 p.
8. Srikanth P. On periodic motions of two-dimentional lattices / P. Srikanth //Functional analysis with current applications in science, technology and industry. — 1998.—Volume 377.—P. 118—122.

Стаття присвячена вивченню нескінченної системи диференціальних рівнянь, яка описує нескінченний ланцюг лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Отримано результати про існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші.

*Ключові слова: нелінійні осцилятори, двовимірна решітка, задача Коші, глобальний розв'язок.*