ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

Науково-популярний альманах
«МАТЕМАТИКА ТА ІНФОРМАТИКА НАВКОЛО НАС»

Випуск 2

До 85-річчя кафедри математики та інформатики

Вінниця – 2018

УДК 378:[51+004](06)
М 34

Рекомендовано до друку вченою радою факультету математики, фізики і технологій (протокол №4 від 17 грудня 2018 р.)

Науково-популярний альманах «Математика та інформатика навколо нас» / Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського; [редкол.: М.М. Ковтонюк (голова) та ін.]. – Вінниця: ФОП Рогальська І.О., 2018. – Вип. 2. – 314 с.

В альманасі друкуються науково-популярні статті, які стосуються математики та інформатики, їх становлення, розвитку, вивчення, застосування, нових досліджень тощо.

УДК 517.97

Бак Сергій
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
доцент кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського
Печериця Іван
студент факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ІСНУВАННЯ СТОЯЧИХ ХВИЛЬ З ПЕРІОДИЧНОЮ АМПЛІТУДОЮ В ДИСКРЕТНОМУ НЕЛІНІЙНОМУ РІВНЯННІ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Анотація: *В статі розглянуто дискретне нелінійне рівняння типу Шредінгера на двовимірній ґратці. Було наведено умови існування періодичних стоячих хвиль.*

Ключові слова: *Дискретне нелінійне рівняння Шредінгера, двовимірна ґратка, стоячі хвилі.*

Abstract: *In the article a discrete nonlinear Schrödinger equation on a two-dimensional lattice is considered. Conditions of the existence of periodic standing waves were given.*

Keywords: *The discrete nonlinear Schrödinger equation, a two-dimensional lattice, standing waves.*

У 1895 році датські вчені Д. Кортевег і Г. де Фріз (де Вріз) вивели рівняння для опису довгих хвиль на воді. Принцип суперпозиції розв’язків (сума розв’язків є також розв’язком) для рівняння Кортевега-де Фріза не виконується, і тому це рівняння є нелінійним і описує нелінійні хвилі. Розв’язок рівняння Кортевега-де Фріза є біжучою хвилею.

Нелінійне рівняння Шредінгера, як і рівняння Кортевега-де Фріза, також має широку поширеність при описі хвиль у різних областях фізики. Це рівняння було запропоновано в 1926 році видатним австрійським фізиком Ервіном Шредінгером для аналізу фундаментальних властивостей квантових систем і спочатку було використано при описі взаємодії внутріатомних частинок. Узагальнене або нелінійне рівняння Шредінгера описує сукупність явищ у фізиці хвильових процесів. Наприклад, воно використовується для опису ефекту самофокусування при впливі потужного лазерного променя на нелінійне діелектричне середовище і для опису розповсюдження нелінійних хвиль в плазмі.

У цій статті будемо вивчати дискретне нелінійне рівняння Шредінгера на плоскій цілочисловій ґратці з кубічною нелінійністю

$$i\dot{\psi}_{n,m}(t) = -\Delta\psi_{n,m}(t) - x_{n,m}\left|\psi_{n,m}(t)\right|^2\psi_{n,m}(t), \quad n,m\in\mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $\psi_{n,m}(t)$ – хвильова функція n,m-ї частинки, а

$$(\Delta\psi)_{n,m} = \psi_{n+1,m} + \psi_{n-1,m} + \psi_{n,m+1} + \psi_{n,m-1} - 4\psi_{n,m}$$

двовимірний дискретний оператор Лапласа.

Припускається, що послідовність $(x_{n,m})\subset\mathbb{R}$ є N-періодичною, тобто $x_{n+N,m} = x_{n,m+N} = x_{n,m}$.

Стоячі хвилі в цьому випадку мають вигляд

$$\psi_{n,m}(t) = u_{n,m}\exp(-i\omega t), \tag{2}$$

де $(u_{n,m})\subset\mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega\in\mathbb{R}$ – частотою. Такі розв’язки іноді називають бризерами або лакунарними солітонами (за аналогією до лакунарних солітонів у фотонних кристалах).

Підставляючи (2) в (1) матимемо рівняння

$$-\Delta u_{n,m} - \omega u_{n,m} = x_{n,m}\left|u_{n,m}\right|^2 u_{n,m}. \tag{3}$$

Розглянемо більш загальне рівняння

$$Lu_{n,m} - \omega u_{n,m} = x_{n,m} \left| u_{n,m} \right|^2 u_{n,m}, \tag{4}$$

де

$$L = a_{n,m} u_{n+1,m} + a_{n-1,m} u_{n-1,m} + b_{n,m} u_{n,m+1} + b_{n,m-1} u_{n,m-1} + c_{n,m} u_{n,m}.$$

З рівнянням (4) пов'язується функціонал

$$J(u) = \frac{1}{2}(Lu - \omega u,\, u) - \frac{1}{4} \sum_{n,\, m \in \mathbb{Z}} x_{n,m} u_{n,m}^4, \tag{5}$$

визначений на гільбертовому просторі $E := l^2$ зі скалярним добутком $(u,\, v) = \sum_{n,\, m \in \mathbb{Z}} u_{n,m} v_{n,m}$, та нормою $\|u\| = \left(\sum_{n,\, m \in \mathbb{Z}} \left| u_{n,m} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Зафіксуємо $k \in \mathbb{N}$ і позначимо через E_k простір всіх kN-періодичних послідовностей. Це є kN-вимірний гільбертів простір зі скалярним добутком $(u,\, v)_k = \sum_{n \in Q_k} u_{n,m} v_{n,m}$, та нормою $\|u\|_k = \left(\sum_{n,\, m \in Q_k} \left| u_{n,m} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$,

де

$$Q_k = \left\{ n \in \mathbb{Z} : -\left[\frac{kN}{2} \right] \le n \le kN - \left[\frac{kN}{2} \right] - 1 \right\},$$

На просторі E_k розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2}(L_k u - \omega u,\, u) - \frac{1}{4} \sum_{n \in Q_k} x_n u_n^4. \tag{6}$$

В силу періодичності коефіцієнтів оператора L критичні точки оператора J є kN-періодичні розв'язки рівняння (4).

Нам знадобляться наступні леми.

Лема 1. *Похідні функціоналів J та J_k визначаються за формулами*

$$\left\langle J'(u),\, h \right\rangle = (Lu - \omega u,\, h) - \sum_{n,\, m \in \mathbb{Z}} x_{n,m} u_{n,m}^3 h_{n,m},\ u,\, h \in E,$$

$$\left\langle J_k'(u),\, h \right\rangle = (L_k u - \omega u,\, h)_k - \sum_{n,\, m \in Q_k} x_{n,m} u_{n,m}^3 h_{n,m},\ u,\, h \in E_k,$$

а їх критичні точки є розв'язками рівняння відповідно з просторів E та E_k.

Допоміжні леми. Наступна лема дає умови неіснування нетривіальних критичних точок.

Лема 2. *Нехай $x_{n,m} > 0$ та $b = +\infty$. Тоді $u = 0 \in E$ (відповідно $u = 0 \in E_k$) єдина критична точка функціоналу J (відповідно J_k).*

Щоб довести існування kN-періодичних розв'язків нам знадобиться наступна лема.

Лема 3. *Для будь-яких нетривіальних критичних точок $u \in E$ та $u^{(k)} \in E^k$ відповідно функціоналів J та J_k з критичними значеннями $c = J(u)$ і $c^{(k)} = J_k\left(u^{(k)}\right)$ правильні нерівності $\|u\| \le 4\delta^{-1} M m^{-\frac{3}{4}} c^{\frac{3}{4}}$ і $\left\|u^{(k)}\right\|_k \le 4\delta^{-1} M m^{-\frac{3}{4}} \left(c^{(k)}\right)^{\frac{3}{4}}$, де $M = \max\{x_n\}$ і $m = \min\{x_n\}$.*

Нам також потрібні низькі оцінки для нетривіальних критичних точок і критичних значень. Їх нам дасть лема 4.

Лема 4. *За умов леми 3 правильні нерівності $\|u\|^2 \ge 2^{-\frac{1}{2}} \delta M^{-1}$, $c \ge 2^{-3} \delta^2 \overline{m}^{-2} m,$ і $\left\|u^{(k)}\right\|_k^2 \ge 2^{-\frac{1}{2}} \delta M^{-1}$, $c^{(k)} \ge 2^{-3} \delta^2 M^{-2} m.$*

Для того щоб довести існування нетривіальних kN-періодичних розв'язків рівняння (4) згідно леми 1, достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k. Нам знадобиться теорема про зачеплення ([8], [11]).

Нехай H – гільбертів простір, $H = Y \oplus Z$. Нехай також $\rho > r > 0$ і $z \in Z : \|z\| = r$. Позначимо

$$M = \left\{ u = y + \lambda z : y \in Y,\ \|u\| \le \rho,\ \lambda \ge 0 \right\}$$

і

$$M_0 = \left\{ u = y + \lambda z : y \in Y,\ \|u\| = \rho \text{ і } \lambda \ge 0,\ \textit{або } \|u\| \le \rho \text{ і } \lambda = 0 \right\},$$

тобто M_0 – межа $M\left(\partial M\right)$. Нехай

$$N := \{u \in Z : \|u\| = r\}.$$

Розглянемо функціонал φ на H і припустимо, що

$$\beta := \inf_{u \in N} \varphi(u) > \alpha := \sup_{u \in M_0} \varphi(u).$$

В такому випадку говорять, що функціонал φ задовольняє *геометрії зачеплення*.

Теорема 1 (про зачеплення). *Нехай φ – функціонал класу C^1 на гільбертовому просторі H, що задовольняє геометрії зачеплення та умові Пале-Смейла:*

(PS) *якщо послідовність $u_n \in H$ така, що $\varphi'(u_n) \to 0$ і $\varphi(u_n)$ обмежена, то вона містить збіжну підпослідовність.*

Нехай

$$b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)),$$

де

$$\Gamma := \{\gamma \in C(M; H) : \gamma = id \text{ на } M_0\}.$$

Тоді b – критичне значення φ і

$$\beta \le b \le \sup_{u \in M} \varphi(u).$$

Зауважимо, що послідовність (u_n) точок гільбертового простору H називається послідовністю Пале-Смейла функціоналу φ рівня b, якщо $\varphi(u_n) \to b$ і $\varphi'(u_n) \to 0$ при $n \to \infty$ ([6]).

Лема 5. *Функціонал J_k задовольняє умову Пале-Смейла, тобто будь-яка послідовність Пале-Смейла містить збіжну підпослідовність.*

Лема 6. *Для достатньо великого $\rho > 0$ $J_k(u) \le 0,\ u \in M_0$, а при $r^2 \le \overline{m}^{-1}\delta : J_k(u) \ge \frac{\delta}{4} r^2,\ u \in N$. Більше того, існує константа $C > 0$, незалежна від k і така, що $J_k(u) \le C,\ u \in M$.*

Наступна теорема дає існування нетривіальних періодичних розв'язків рівняння (4).

Теорема 2. *Нехай* $x_{n,m} > 0$, $\omega \in (a; b)$ *та* $b \neq +\infty$. *Тоді для будь-якого* $k \geq 1$ *рівняння (6) має нетривіальний* kN*-періодичний розв'язок* $u^{(k)} \in E_k$. *Більше того, існує константа* $C > 0$, *незалежна від* k *і така, що* $n\left\| u^{(k)} \right\|_k \leq C$, $J_k\left(u^{(k)}\right) \leq C$.

Таким чином, у цій статті за допомогою методу критичних точок і теореми про зачеплення встановлено умови існування стоячих хвиль з періодичною амплітудою для дискретного нелінійного рівняння Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці.

Література:

1. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуванню нелінійністю / С. М. Бак // Математичні студії. – 2010. – Т. 33, №1. – С. 78-84.
2. Бак С.М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. – 2012. – Т. 37, №1. – С. 76-88.
3. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization / S. Aubry // Physica D. – 1997. – 103. – P. 201-250.
4. Braun O. M. The Frenkel-Kontorova model / O. M. Braun, Y. S. Kivshar. – Berlin: Springer, 2004. – 427 pp.
5. Henning D. Wave transmission in nonliniear lattices / D. Henning, G. Tsironis // Physics Repts. – 1999. – 309. – P. 333-432.
6. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations / A. Pankov // Nonlinearity. – 2006. – 19. – P. 27-40.
7. Pankov A. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity / A. Pankov, V. Rothos // Proc. Royal Society A. – 2008. – 464. – P. 3219-3236.

8. Rabinowitz P. Minimax methods in criticsl point theory with applications to differential equations / P. Rabinowitz. – Providence: Amer. Math. Soc., 1986. – 100 p.

9. Srikanth P. On periodic motions of two-dimentional lattices // Functional analysis with current applications in science, technology and industry / P. Srikanth. – 1998. – Volume 377. – P. 118-122.

10. Teschl G. Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices / G. Teschl. – Providence: Amer. Math. Soc., 2000. – 251 p.

11. Willem M. Minimax theorems / M. Willem. – Boston: Birkhauser, 1996. – 162 p.

УДК 514.12.01

Бевз Дар'я

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницький державний педагогічний університет

імені Михайла Коцюбинського

ГРА «АЗИМУТАЛЬНИЙ ХІД» - ВЕКТОРИ НАВКОЛО НАС

Анотація: *У статті представлена самостійна робота для учнів 9-го класу, що навчаються за програмою поглибленого вивчення математики. Виконання даної роботи сприятиме кращому засвоєнню учнями властивості комутативності додавання векторів. Також подано приклад закріплення вказаної властивості через інтеграцію в урок географії, а саме за допомогою гри «Азимутальний хід».*

Ключові слова: *вектор, координати, лінійні операції над векторами.*

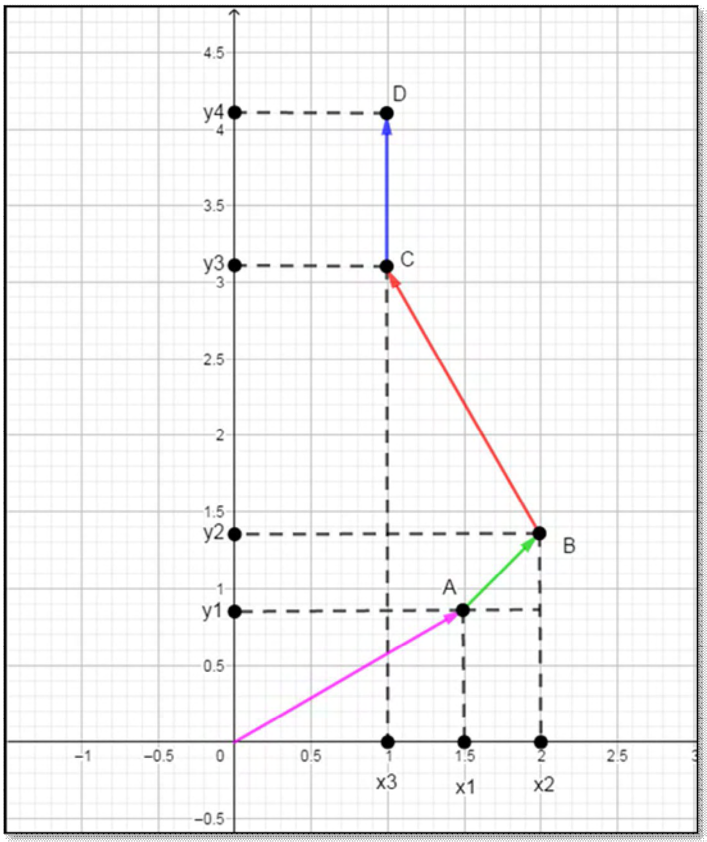
Abstract: *The article is an independent work for students of the 9th grade of study in the program of in-depth study of mathematics. Thanks to this independent work students learn the property of the commutativity of the vectors. Also, the article*

gives an example of fixing this property through integration into a geography lesson, namely, the game "Azimutal Progress".

***Keyword:**. Commutativity of vectors, vector.*

За програмою поглибленого вивчення математики у 9 класі на тему «Вектори на площині» відводиться 19 годин. Дана тема є потужним прикладним інструментарієм для багатьох дисциплін. Тому під час вивчення теми важливо забезпечувати міжпредметні зв'язки, використовувати задачі практичного змісту, а також продемонструвати роль векторів у розв'язуванні задач. Учні мають усвідомити, що за допомогою векторного методу полегшується розв'язування досить складних задач, які вони розв'язували раніше з використанням властивостей конкретних геометричних фігур та їх елементів. [1, с. 11]

Не всі учні досить добре запам'ятовують лінійні операції над векторами і до того ж не розуміють їх практичного застосування. Тому, для кращого засвоєння даного матеріалу, пропонуємо один із уроків або факультативних занять провести у вигляді інтегрованого уроку математики з географією, а саме за допомогою гри «Азимутальний хід». Але перед цим доцільно, на нашу думку, провести самостійну роботу для учнів 9-го класу з теми «Вектори на площині».



Введемо позначення: (a,α), де a – довжина вектора, α – кут нахилу вектора до додатної осі Ox.

Варіант 1. Знайти координати точки D, в яку показуватиме вектор $1{,}90^{\circ}$ після побудови попередніх трьох векторів. За початок брати точку з координатами $(0;0)$.

$(\sqrt{3}, 30^\circ)$,

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 45^\circ)$,

$(2, 120^\circ)$,

$(1, 90^\circ)$.

Вказівка: Покроково виконати такі побудови: $x_1 = \cos 30^\circ \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}$, $y_1 = \sin 30^\circ \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тоді $A(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$; далі $x_2 - x_1 = \cos 45^\circ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$, $y_2 - y_1 = \sin 45^\circ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$, тоді $B(2; \frac{\sqrt{3}+1}{2})$; аналогічно $x_2 - x_3 = \cos 60^\circ \cdot 2 = 1$, $y_3 - y_2 = \sin 60^\circ \cdot 2 = \sqrt{3}$, $C(1; \frac{3\sqrt{3}+1}{2})$; $x_3 = 1$, $y_4 - y_3 = 1$, тобто $D(1; \frac{3\sqrt{3}+3}{2})$.

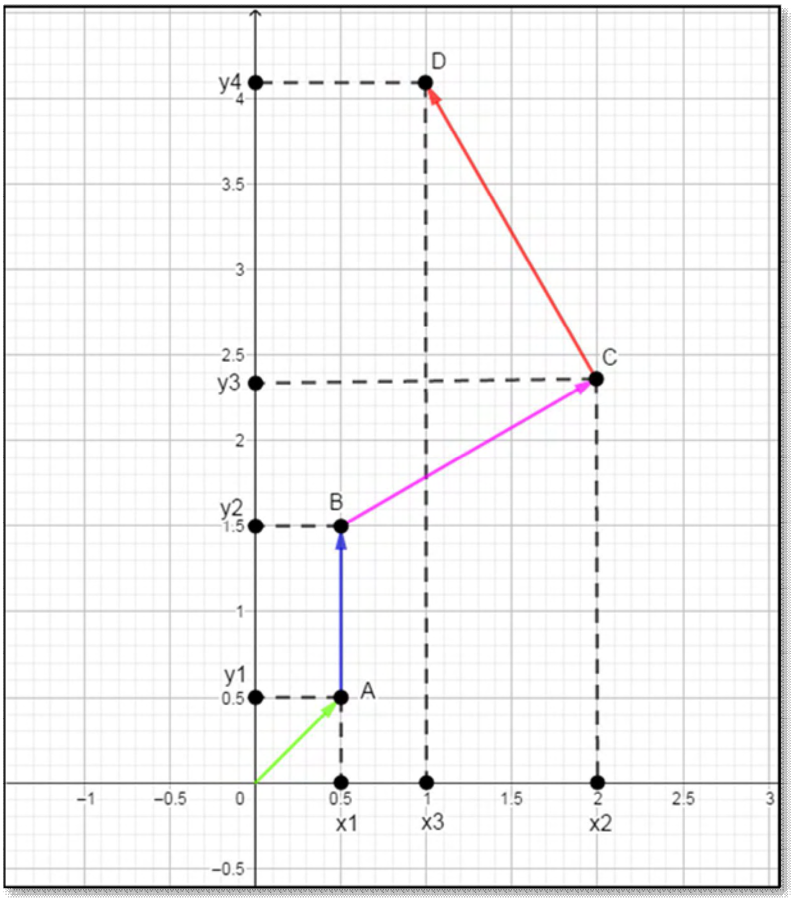
Варіант 2. Знайти координати точки D, в яку показуватиме вектор $2, 120^\circ$ після побудови попередніх трьох векторів. За початок брати точку з координатами $(0;0)$.

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 45^\circ)$

$(1, 90^\circ)$

$(\sqrt{3}, 30^\circ)$

$(2, 120^\circ)$



Вказівка. Покроково виконати такі побудови: $x_1 = \cos 45^\circ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$, $y_1 = \sin 45^\circ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$, тоді $A(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$; далі $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 - y_1 = 1$, тоді $B(\frac{1}{2};\frac{3}{2})$; аналогічно $x_2 - x_1 = \cos 30^\circ \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}$, $y_3 - y_2 = \sin 30^\circ \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $C(2;\frac{\sqrt{3}+3}{2})$; $x_2 - x_3 = \cos 60^\circ \cdot 2 = 1$, $y_4 - y_3 = \sin 60^\circ \cdot 2 = \sqrt{3}$, тобто $D(1;\frac{3\sqrt{3}+3}{2})$.

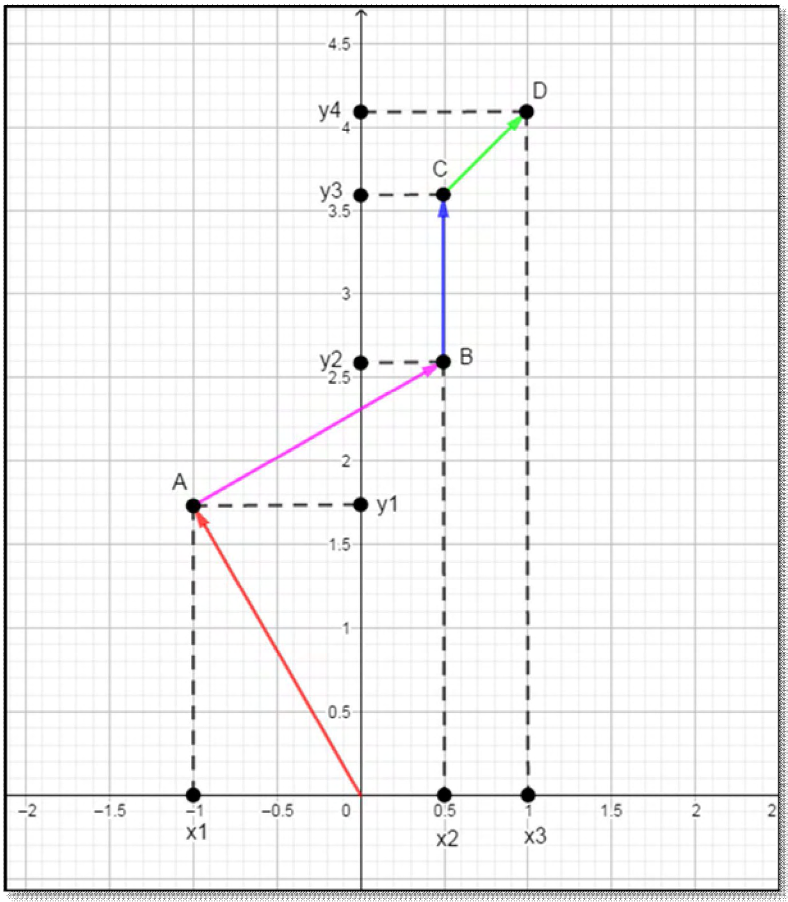
Варіант 3. Знайти координати точки D, в яку показуватиме вектор $\frac{\sqrt{2}}{2}, 45^\circ$ після побудови попередніх трьох векторів. За початок брати точку з координатами $(0;0)$.

$(2, 120^\circ)$,

$(\sqrt{3}, 30^\circ)$,

$(1, 90^\circ)$,

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, 45^\circ)$



Вказівка. Покроково виконати такі побудови: $x_1 = -\cos 60^\circ \cdot 2 = -1$, $y_1 = \sin 60^\circ \cdot 2 = \sqrt{3}$, тоді $A(-1;\sqrt{3})$; далі $x_2 + |x_1| = \cos 30^\circ \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}$, $y_2 - y_1 = \sin 30^\circ \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тоді $B(\frac{1}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2})$; аналогічно $x_2=\frac{1}{2}$, $y_3-y_2=1$, $C(\frac{1}{2};\frac{3\sqrt{3}+2}{2})$; $x_3-x_2=\cos 45^\circ\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$, $y_4-y_3=\sin 45^\circ\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$, тобто $D(1;\frac{3\sqrt{3}+3}{2})$.

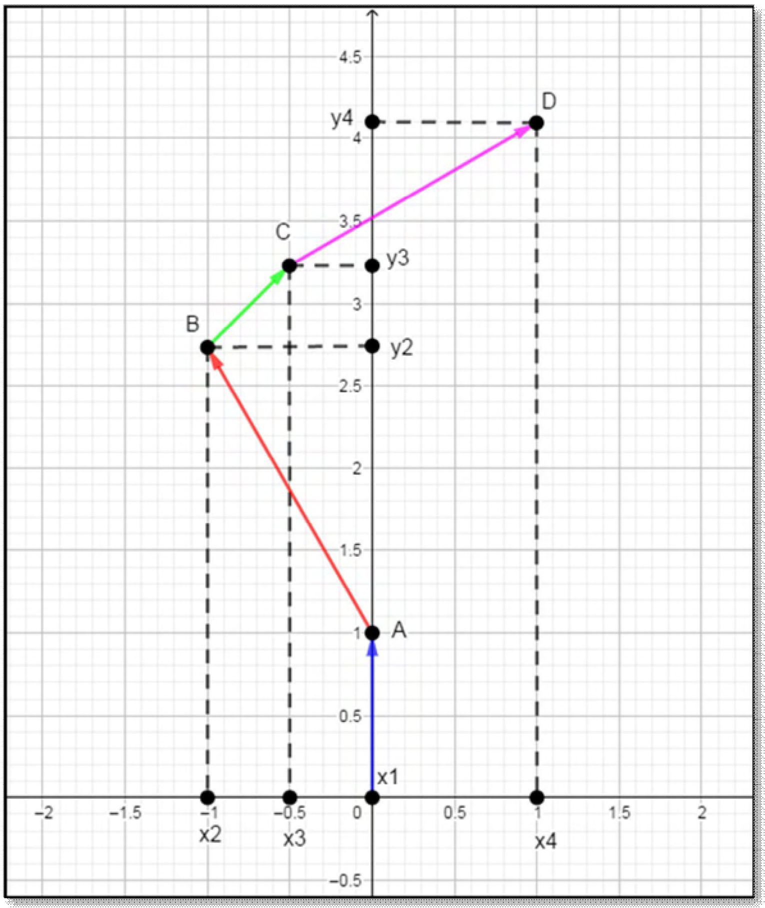
Варіант 4. Знайти координати точки D, в яку показуватиме вектор $\sqrt{3},30^\circ$ після побудови попередніх трьох векторів. За початок брати точку з координатами $(0;0)$.

$(1,90^\circ)$

$(2,120^\circ)$

$(\frac{\sqrt{2}}{2},45^\circ)$

$(\sqrt{3},30^\circ)$



Вказівка. Покроково виконати такі побудови: $x_1=0$, $y=1$, тоді $A(0;1)$; $x_2=-\cos 60^\circ\cdot 2=-1$, $y_2=\sin 60^\circ\cdot 2=\sqrt{3}$, тоді $B(-1;1+\sqrt{3})$; аналогічно $|x_2|-|x_3|=\cos 45^\circ\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$, $y_3-y_3=\sin 45^\circ\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$, $C(-\frac{1}{2};\frac{3+2\sqrt{3}}{2})$; $x_4+|x_3|=\cos 30^\circ\cdot\sqrt{3}=\frac{3}{2}$, $y_4-y_3=\sin 30^\circ\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, тобто $D(1;\frac{3\sqrt{3}+3}{2})$.

Як бачимо, у кожному з варіантів самостійної роботи точка D виявилась із тими самими координатами. На цей факт обов'язково потрібно звернути увагу учнів, проаналізувавши розв'язки кожної задачі і повторивши властивість комутативності векторів. Після цього можна запропонувати учням гру «Азимутальний хід».

Нагадаємо, що азимут – це кут між північним напрямком географічного (дійсного) меридіана і напрямком на певну точку. Його відлічують за ходом годинникової стрілки.

Гра полягає в тому, що є кінцева мішень (аналогія нашої точки D) та початок ходу (аналогія центру координат). Учні повинні, вимірюючи компасом азимут, пройти певну кількість кроків за цим азимутом. Що є аналогічним заданню вектора в самостійній роботі (тобто за допомогою довжини вектора та кута нахилу вектора до додатної осі Ox).

Розділимо учнів знову на чотири групи. У кожної групи на аркушах паперу буде написаний, наприклад, ось такий перелік (тільки в різній послідовності):

25 кроків, азимут 43°,

41 крок, азимут 114°,

17 кроків, азимут 258°,

52 кроки, азимут 14°.

Правильно пройшовши весь азимутальний хід, учні дійдуть до однієї мішені і остаточно переконаються у достовірності властивості комутативності векторів. Зможуть краще запам'ятати лінійні операції над векторами і розумітимуть практичне застосування цієї теми.

Література:

1. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf

2. Гриньов Б.В., Кириченко І.К. Векторна алгебра: підручник. – Х.: Гімназія, 2008. – 163 с.

3. Кушнир И.А. Координатный и векторный метод решения задач. – К.: Астарта, 1996. – 413 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Тютюн Любов Андріївна

УДК 519.21

Білик Олександра

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

МЕТОД МОНТЕ – КАРЛО ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Анотація: *В роботі розкрито сутність методу Монте-Карло і його застосування при моделюванні дискретних та неперервних випадкових величин.*

Ключові слова: *метод Монте-Карло, випадкова величина, закон розподілу, ймовірність випадкової події.*

Absract: *The essence of the Monte Carlo method and its application in the modeling of discrete and continuous random variables are revealed in the paper.*

Keyword: *Monte Carlo method, random variable, distribution law, probability of a stochastic event.*

У теорії ймовірностей виводяться правила, які дозволяють за ймовірностями одних випадкових подій обчислювати імовірність інших, за тієї умови, якщо вони одержуються з перших в результаті виконання над ними певних операцій. Також існують правила, які за числовими характеристиками та законами розподілу одних випадкових величин дозволяють обчислювати числові характеристики і закони розподілу інших випадкових величин. І цілком логічним є бажання мати можливість організувати і провести серію дослідів, результатами яких будуть значення випадкової величини із заданим наперед законом розподілу. Уміння здійснити проведення такого досліду, тобто змоделювати випадкову величину, дасть можливість оцінити числові характеристики випадкової величини, не знаходячи її закону розподілу, і одержувати вибірку із генеральної сукупності з відомим законом розподілу.

Задача моделювання випадкових величин є основною складовою частиною чисельного методу розв'язування математичних задач, який носить назву методу Монте-Карло. Даний метод дає змогу побудувати модель, мінімізуючи кількість данних, а також максимізувати значення данних, які використовуються в моделі. У деяких випадках метод Монте-Карло є єдиним, за яким можна дістати наближені розв'язки задач, які не можна проаналізувати іншими аналітичними чи чисельними методами. У спрощеному вигляді алгоритм розв'язування задачі методом Монте-Карло описується так.

Нехай нам необхідно обчислити невідому величину a. Побудуємо випадкову величину ξ, математичне сподівання якої дорівнює a. Імітуємо проведення n дослідів, результатом яких є значення $x_1, x_2, ..., x_n$. Тоді в силу закону великих чисел:

$$a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k .$$

Отримаємо оцінку точності наближення. Якщо $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ - незалежні однаково розподілені випадкові величини, причому закон розподілу кожної з них збігається із законом розподілу випадкової величини ξ, то при достатньо великих n згідно з центральною граничною теоремою випадкова величина:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$

має закон розподілу близький до нормального з параметрами: na і $n\sigma^2$, де σ^2 - дисперсія випадкової величини ξ. Тоді:

$$P = \left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a\right| < \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 2\Phi(3) \approx 0,997.$$

Отже, з ймовірністю 0,997 невідома величина a приблизно дорівнює: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$, причому абсолютна похибка при цьому не перевищує $\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$.

При моделюванні випадкових величин з відомим законом розподілу основною є рівнормірно розподілена на відрізку $[0;1]$ випадкова величина U, тобто випадкова величина із щільністю розподілу імовірності:

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, якщо x < 0, \\ x, якщо 0 \le x \le 1, \\ 0, якщо x > 1. \end{cases}$$

До такого розподілу приходимо, якщо розглянемо дослід, результатом якого є вибір точки з відрізка $[0;1]$, і вважатимемо, що для будь-яких a і $b\,(0 \le a < b \le 1)$ імовірність того, що ця точка буде вибрана з відрізка $[a;b]$, дорівнює $b-a$. Тоді значення випадкової величини U є координата вибраної точки, тобто конкретне значення цієї випадкової величини можна дістати, вибравши наугад число з відрізка $[0;1]$.

Однак згеренувати випадкове значення з нескінченним числом значущих цифр в принципі неможливо, і тому необхідний перехід від використання подання $U = 0,\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n...$ до використання подання:

$$U = 0,\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n,$$

із скінченним числом значущих цифр. Можливість такого переходу обргрунтовується такими двома твердженнями. [1, с. 257-258]

Теорема 1. *Випадкова величина*

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha_k}{2^k} + \frac{U}{2^{n-1}}$$

рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$.

Теорема 2. *Для* $n = 2,3,...$

$$P(\beta_n < x) - F_0(x) \le \frac{1}{2^{n-1}},$$

де $F_0(x)$ *- функція розподілу випадкової величини* U.

Висновок. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{2^k} < x\right) = F_0(x),$$

то вибір наугад числа з відрізка $[0;1]$ можна замінити вибором наугад одного з чисел $\frac{k}{2^n}$, де $k = 0,1,...,2^n - 1$. Останнє можна здійснити, кидаючи *n* разів правильну монету.

Аналогічно, оскільки

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{10^k} < x\right) = F_0(x),$$

То вибір наугад числа з відрізка $[0;1]$ замінюється вибором наугад одного з чисел виду

$$0,\alpha_1,\alpha_2...\alpha_n,$$

де $\alpha_k (k = \overline{1,n})$ одна із цифр. Останню рівність можна розглядати як повторну, упорядковану вибірку об'єму n з 10 елементів [2, с. 260].

Отже, задача моделювання випадкової величини U зводиться до моделювання дискретної, рівномірно розподіленої величини. Отримавши такі значення, можна скласти таблиці випадкових величин.

Розглянемо моделювання випадних величин із заданим законом розподілу.

1. Моделювання дискретних випадкових величин

Нехай маємо дискретну випадкову величину ξ з рядом розподілу:

ξ	*1*	*2*	...	*r*

$P(\xi = x_k)$	p_1	p_2	...	p_r

Нам необхідно дістати n значень цієї випадкової величини, тобто провести (імітувати проведення) n дослідів, результатом кожного з яких є її конкретне значення.

З цією метою інтервал (0;1) ми розіб'ємо на r інтервалів точками $p_1, p_1 + p_2, ..., p_1 + p_2 + ... + p_{r-1}$ довжини яких дорівнюють відповідно $p_1, p_2, ..., p_r$. Заради зручності занумеруємо їх, а саме нехай

$$I_k = (p_1 + p_2 + ... + p_{k-1}; p_1 + p_2 + ... + p_k).$$

Щоразу, коли проводиметься дослід, результатом якого буде значення випадкої величини ξ, будемо брати випадкове число u і визначатимемо, якому інтервалу воно належатиме. Якщо $u \in I_k$, то вважатимо, що у цьому досліді виподкова величина ξ набрала значення x_k. Підставою для такого рішення є те, що, з одного боку, згідно з означенням

$$P(\xi = x_k) = p_k$$

і, з іншого боку,

$$P(U \in I_k) = P(p_1 + p_2 + ... + p_{k-1} < U < p_1 + p_2 + ... + p_k) = p_{k,}$$

тобто події $\xi = x_k$ і $U \in I_k$ мають однакові ймовірності.

2. Моделювання подій.

Для того, щоб змоделювати випадкову подію $\boldsymbol{A}$, з ймовірністю $\boldsymbol{p}$, досить змоделювати випадкову величину з рядом розподілу:

ξ	*0*	*1*
$P(\xi = x_k)$	*1-p*	*p*

Якщо випадкове число u попаде в інтервал $(0; p)$ вважатимемо, що подія A відбулася. Якщо ж u попаде в інтервал $(p;1)$– подія A не відбулася. У такий же спосіб моделюють повну групу попарно несумісних подій $A_1, A_2, ..., A_r$, імовірність появи яких дорівнюють відповідно $p_1, p_2, ..., p_r$, тобто моделюємо випадкову величину з рядом розподілу

ξ	*1*	*2*	...	r
$P(\xi = x_k)$	p_1	p_2	...	p_r

Якщо випадкове число $u \in (p_1 + p_2 + ... + p_{k-1}; p_1 + p_2 + ... + p_k)$, то вважаємо, що відбулась подія A_k.

3. Моделювання неперервних випадкових величин

Нехай маємо неперервну випадкову величину ξ щільністю розподілу $f(x)$. Вважатимемо, що $f(x) > 0$ на деякому проміжку і $f(x) = 0$ поза ним. На такому проміжку функція розподілу $F(x)$ цієї випадкової величини буде зростати і на ньому її можна обертати. Якщо позначити через $F^{-1}(x)$ функцію обернену до $F(x)$ на тому проміжку, де $f(x) > 0$, то на ньому

$$F\left(F^{-1}(\mathrm{x})\right) = F^{-1}(F(x)) = x.$$

Розглянемо випадкову величину $F(\xi)$.Оскільки для всіх x $0 \le F(\xi) \le 1$, то якого б значення не набрала випадкова величина ξ значення випадкової величини $F(\xi)$ належить відрізку $[0;1]$. Отже, її функція розподілу має вигляд: $\tilde{F}(x) = P(F(\xi) < x) =$

$$= \begin{cases} 0, якщо x \le 0, \\ P(\xi < F^{-1}(x)), \text{якщо}\, 0 < x \le 1, \\ 1, якщо x > 1, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{якщо}\, x \le 0, \\ F(F^{-1}(x)), \text{якщо}\, 0 < x \le 1, \\ 1, \text{якщо}\, x > 1, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{якщо}\, x \le 0, \\ x, \text{якщо}\, 0 < x \le 1, \\ 1, \text{якщо}\, x > 1, \end{cases}$$

тобто випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$.

Теорема 3. *Якщо випадкова величина* ξ *має щільність розподілу імовірністі* $f(x)$ *і функція розподілу* $F(x)$, *то випадкова величина*

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f(t)dt$$

рівномірно розподілена на відрізку $[0;1]$, *і якщо и значення випадкової величини* U, *то корінь рівняння*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = u$$

є значенням випадкової величини ξ. [1, с. 267-268]

Саме цей факт і є основним при моделюванні неперервних випадкових величин.

Таким чином ми розглянули теоретичні основи методу Монте-Карло , а також його застосування при моделюванні дискретних та неперервних випадкових величин.

Література:

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей/ Б.В.Гнеденко. – М., Наука, 1988. - 368с.

2. Томусяк А.А. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики / А.А. Томусяк, В.С Трохименко , Н.М.Шунда.– Вінниця, 2001. – 332 с.

3. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло/ И.М. Соболь. – М., Наука, 1973. – 312с.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Вотякова Леся Андріївна

УДК 517.957

Боднар Олена

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

МЕТОДИ ДИХОТОМІЇ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІЙ

Анотація: *У статті розглядається два методи для знаходження екстремумів функцій: метод дихотомії з похідними і метод дихотомії без похідних; розкривається їх перевага перед іншими методами.*

Ключові слова: *метод дихотомії, екстремум функції, унімодальна функція.*

Abstract: *In the article two methods for finding the extremums of functions are considered: the method of dichotomy with derivatives and the method of dichotomy without derivatives; their advantage over other methods is revealed.*

Key words: *dichotomy method, extremum of a function, unimodal function.*

Сучасна математика інтенсивно проникає у всі сфери діяльності людини, об'єктивно відображаючи універсальні закони оточуючого світу.

Задачі пошуку екстремуму однієї змінної частково вивчають у курсі математичного аналізу. На перший погляд ці задачі видаються простими і добре вивченими. Однак методи диференціального числення мають обмежене застосування і не завжди зручні для реалізації на ЕОМ. [1,115] У цій роботі зупинимося на декотрих методах, які достатньо добре себе проявили на практиці.

1. Метод дихотомії з похідними.

Нехай $g(\alpha)$ — неперервно диференційовна, $g(\alpha) < 0$. Нехай існує таке $\bar{\alpha}$, що для $\alpha \geq \bar{\alpha}$ маємо $g'(\alpha) > 0$.

Отже, існує принаймні одна точка α^*, в якій похідна функції $g(\alpha)$ перетворюється в нуль і мова йде про знаходження такої точки. Взагалі, точка α^* буде локальним мінімумом функції $g(\alpha)$ на $[0, +\infty)$.

Означення 1. Кажуть, що функція $g(\alpha)$ є унімодальна на дійсному інтервалі $[A, B]$, якщо вона має мінімум $\bar{\alpha} \in [A, B]$ і якщо

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [A, B](\alpha_1 < \alpha_2)$, тоді виконується співвідношення

$\alpha_2 \leq \bar{\alpha} \Rightarrow g(\alpha_1) > g(\alpha_2)$,

$\alpha_1 \geq \bar{\alpha} \Rightarrow g(\alpha_1) < g(\alpha_2)$.

Унімодальна функція на $[A, B]$ володіє такою властивістю, що вона має єдиний локальний мінімум. Але вона не зобов'язана бути диференційовною — вона навіть не зобов'язана бути неперервною.

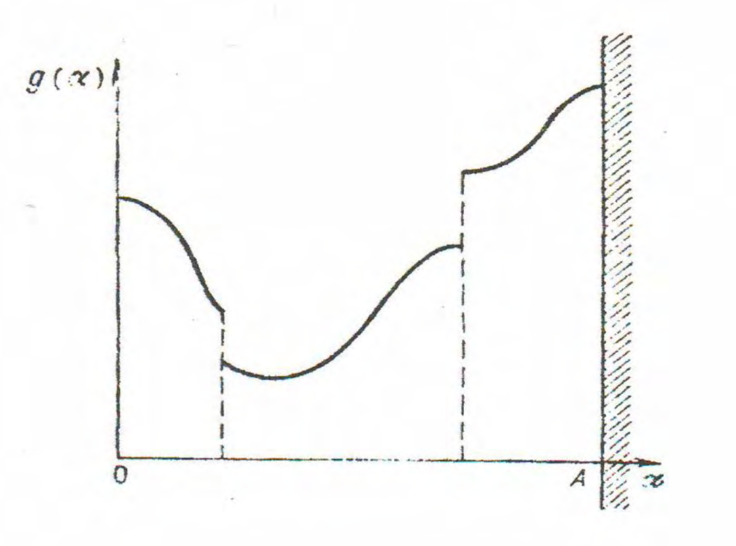


Рис. 1

Отже, якщо накласти умову, щоб функція $g(\alpha)$ була унімодальною, то α^* буде (єдиним) глобальним мінімумом функції $g(\alpha)$ на $[0, +\infty)$.

Метод складається з визначення першого інтервалу $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$, для якого $g'(\alpha_{min}) < 0, g'(\alpha_{max}) > 0$, а потім з прогресивного зведення цього інтервалу за допомогою дихотомії до отриманого скінченного інтервалу з досить малою амплітудою $\leq \varepsilon$.

Більш точно, з одною заданою ітерацією обчислюється $g'(\alpha_1)$ в точці

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_{min} + \alpha_{max}}{2}.$$

Якщо $g'(\alpha_1) > 0$, то α_{max} змінюється значенням α, і виконується ітерація.

Якщо $g'(\alpha_1) < 0$, то α_{min} змінюється значенням α_1, і виконується ітерація.

Оскільки довжина інтервалу на кожній ітерації ділиться на 2, то звідси виводимо, що метод дихотомії лінійно збігається з множником збіжності 0,5.

Для визначення початкового інтервалу $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ можна використовувати наступний алгоритм:

1) $h - h_0$ – фіксований крок переміщення, $\alpha_{min} = 0$;

2) обчислити $g'(h)$;

якщо $g'(h) < 0$, то зробити $\alpha_{min} \leftarrow h, h \leftarrow 2h$ і повернутись до 2);

якщо $g'(h) > 0$, то зробити $\alpha_{max} = h$. Кінець [2, 9].

2. Метод дихотомії без похідних.

Принцип цього методу подібний попередньому, але тут ми припускаємо, що або інформації про похідні не має, або функція не диференційовна.

Цей метод дозволяє на кожному кроці зменшувати вдвічі довжину інтервалу, який містить оптимум, до того ж значення функції $g(\alpha)$ обраховують з цією метою у двох визначених точках. Якщо над функцією $g(\alpha)$ виконано n обрахунків, то довжину інтервалу можна зменшити в $2^{\frac{n-3}{2}}$ рази. Спочатку розбиваємо інтервал $[a_0, b_0]$. Беремо середину $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, потім дві точки $d_0 = \frac{a_0 + c_0}{2}$, $e_0 = \frac{b_0 + c_0}{2}$; отримуємо п’ять точок, віддалених на рівні відстані $\delta_0 = \frac{b_0 - a_0}{4}$.

Враховуючи унімодальність, легко бачити, що завжди можна виключити два із чотирьох під інтервалів (оскільки точка оптимуму не може в них міститись) і що залишаються тільки два суміжних під інтервали $[a_1, c_1]$ і $[c_1, b_1]$.

Таким чином, все зводиться до тієї ж задачі на відрізку $[a_1, b_1]$ половинної довжини ([2, с. 10]).

Окрім вище поданих методів, існує ряд інших. Наприклад, метод Ньютона-Рафсона, метод січних, метод золотого перерізу, метод Фібоначчі, метод градієнта (найшвидшого спуску або метод Бокса-Уілсона) та інші.

Література:

1. Валєєв К. Г. Вища математика: Навчальний посібник: У 2-х ч./ Валєєв К. Г., Джалладова І. А. − К.: КНЕУ, 2002. − Ч.2. − 451 с.
2. Полищук А.П. Численные методы в объектно-ориентированной методологии. Учебное пособие./ Полищук А.П., Семериков С.А – Кривой Рог: КГПИ, 1998. – 29 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – Москва: Наука, 1969. – 607 с.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Бак Сергій Миколайович

УДК 519.11/.16

Горбачова Юлія

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ В КОМБІНАТОРНОМУ АНАЛІЗІ

Анотація: *Стаття присвячена застосуванню похідної при доведенні комбінаторних тотожностей.*

Ключові слова: *комбінаторні тотожності, похідна, функція, біном Ньютона.*

Abstract: *The article is devoted to the application of the derivative in the proof of combinatorial identities.*

Keywords: *combinatorial identities, derivative, function, Newton bin.*

Комбінаторика або комбінаторний аналіз – розділ дискретної математики, який вивчає комбінації і перестановку предметів, взаємне розташування частин скінчених множин, а також нескінчених множин, які задовольняють деякі умови підпорядкованості [3, с. 408].

Одним із розділів комбінаторного аналізу є доведення комбінаторних тотожностей. Комбінаторними тотожностями називають тотожності, які містять біномні коефіцієнти – числа C_n^k. Найпростішими і разом із тим найважливішими комбінаторними тотожностями є формула бінома Ньютона $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ та правило Паскаля $C_n^k = C_{n-1}^k + +C_{n-1}^{k-1}$.

Серед методів доведення комбінаторних тотожностей варто відзначити такі:

1. Метод комбінаторних міркувань.
2. За допомогою факторіальної формули $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
3. Метод математичної індукції.
4. Метод Малікова.

Також можна доводити комбінаторні тотожності за допомогою похідної та інтегралу [2, с. 3-4].

Продемонструємо доведення формули бінома Ньютона за допомогою похідної [1, с. 64-66]:

Нехай дана ціла раціональна функція

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_n x^n. \quad (1)$$

При $x = 0$ отримаємо: $a_0 = f(0)$.

Покажемо, що інші коефіцієнти цього многочлена виражаються через похідні від $f(x)$в точці $x = 0$.

Так маємо:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^3 + 4a_4 x^3 + \ldots + k a_k x^{k-1} + \ldots + n a_n x^{n-1} \quad (2)$$

Підставивши в цю рівність $x = 0$, отримаємо $a_1 = f'(0)$.

Продиференціювавши обидві частини рівності (2), матимемо:

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^3 + \ldots + k(k-1) a_k x^k + \ldots + n(n--1) a_n x^{n-2}.$$

Підставивши в цю рівність $x = 0$, отримаємо:

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{f''(0)}{2!}.$$

Продовжуючи цей процес, дістанемо:

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!},\ \ a_4 = \frac{f^{(4)}}{4!}, \dots, a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Так, якщо $f(x)$ – многочлен n-ї степені, то

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (3)$$

Точно так само виводиться більш загальне рівняння:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

яке називається формулою Тейлора для многочлена $f(x)$.

Застосуємо формулу (3) до цілої раціональної функції $f(x) = (1+x)^n$.

Маємо:

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1},$$

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2},$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3},$$

……………………………………….

$f^{(k)}(x) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-n+1)(1+x)^{n-k},$

$f^{(n)} = n!$

Тоді

$$a_0 = f(0) = 1,$$

$$a_1 = f'(0) = n,$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2!},$$

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!},$$

…………………………

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-n+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Таким чином, по формулі (3) отримуємо:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n!}{k!(n-k)!}x^k + \ldots + x^n. \quad (4)$$

Зазвичай позначають

$$n = C_n^1,\ \frac{n(n-1)}{2!} = C_n^2,$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = C_n^3, \ldots, \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Тоді формула перепишеться у вигляді

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^n x^n \quad (5)$$

або

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Отримана рівність називається формулою Ньютона, а коефіцієнти 1, C_n^1, C_n^2, …, C_n^k,…,C_n^n – біноміальними.

Підставимо в рівність (5) $x = \frac{b}{a}$: $(1 + \frac{b}{a})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\frac{b}{a})^k$, звідки

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Отже, похідна займає важливе місце в математиці, зокрема в комбінаторному аналізі.

Література:

1. Виленкин Н.Я Математический анализ. Дифференциальное исчисление / Виленкин Н.Я., Куницкая Е.С., Мордкович А.Г. – М.: Просвещение, 1978. — 161 с.

2. Ушаков Р. П. Комбінаторні тотожності / Ушаков Р. П. – Х.: Вид. група «Основа», 2004. – 112 с.

3. Бондаренко М. Ф. Комп’ютерна дискретна математика: підручник / М. Ф. Бондаренко, Н. В. Білоус, А. Г. Руткас. – Харків: «Компанія СМІТ», 2004. - 480 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Захарченко Наталія Вікторівна

УДК 373.5.091.33:514.112

Дяк Дмитро
студент факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ОСОБЛИВІ ТОЧКИ РІШЕННЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЛОРЕНЦА

Анотація: *На прикладі системи Лоренца описаний метод і наведені деякі результати чисельних розрахунків з дослідження особливих точок рішення автономних систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з нелінійною правою частиною. Метод може бути застосований для опису стохастичних рішень подібних систем, отриманих методом Гальоркіна.*

Ключові слова: *диференціальне рівняння, система Лоренца, змінна, полюс, компонента, комплексна площина, дивний атрактор.*

Abstract: *On the example of the Lorentz system, the method is described and some results of numerical calculations are given for the study of singular points of solving autonomous systems of ordinary differential equations of the first order with a nonlinear right-hand side. The method can be used to describe stochastic solutions of similar systems obtained by the Galerkin method.*

Keywords: *differential equation, Lorentz system, variable, pole, component, complex plane, strange attractor.*

Система Лоренца – динамічна система, яка була досліджена Е.Лоренцем в 1963 р. Вона створювалася з метою побудувати спрощену модель атмосферної конвекції для вирішення питання про те,чи можливий довгостроковий прогноз погоди. Фактично до роботи Лоренца ненадійність прогнозу погоди пояснювали головним чином відсутністю досить потужною ЕОМ. Вважалося, що в детермінованою системі завжди можна передбачити стан системи

(Наприклад, дати надійний прогноз погоди), незважаючи на малі похибки вимірювання початкового стану системи, які завжди існують на практиці.

Він написав комп'ютерну програму для її вирішення. Згідно опису чисельного експерименту, що належить самому Лоренцу, він обчислював значення рішення протягом тривалого часу,а потім зупинив рахунок. Його зацікавила деяка особливість рішення, яка виникла десь в середині інтервалу розрахунку, і тому він повторив обчислення з цього моменту. Результати повторного розрахунку, очевидно, збіглися б з результатами первинного розрахунку, якби початкові значення для повторного рахунку в точності дорівнювали отриманим раніше значенням для цього моменту часу. Однак Лоренц злегка змінив ці значення, зменшивши число вірних десяткових знаків. Помилки, введені таким чином, були вкрай невеликі. Але найнесподіваніше було попереду. Знову те перелічене рішення деякий час добре узгоджувалося зі старим. Однак, у міру рахунку розбіжність зростала, і поступово стало ясно, що нове рішення зовсім не нагадує старе. Лоренц знову повторював і повторював обчислення, перш, ніж усвідомив важливість експерименту.[4]

Дослідженню пошуку особливих точок, розв'язків системи рівнянь Лоренца присвячено наукові праці таких авторів, як А.Б. Рубін, Ю.А. Данилов, Г. Ніколіс, Дж. М Сміт, В. Т. Гринченко, В. Т. Маципура, А. А. Снарський та інші.

Основною метою даної статті є пошук і дослідження особливих точок рішення системи Лоренца і аналіз їх поведінки різними методами.

Розглянемо систему вигляду

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots, x_N), \qquad n = 1, 2, \ldots, N,$$

змінні x_n вважаються комплексними функціями комплексного змінної t. Нехай f_n - поліноми з дійсними коефіцієнтами. Тоді компоненти розв'язку цієї системи.

$$x_n = x_n(t, c_1, \ldots, c_N), \qquad n = 1, 2, \ldots, N,$$

суть функції аналітичні в деякій області комплексної площини. Зокрема, для систем, отриманих наближенням за методом Гальоркіна реальних фізичних завдань, це повинна бути область, витягнута я уздовж дійсної осі. Поза цією областю у розв'язку можуть бути особливі точки, число яких може бути кінцевим або рахунковим, зокрема, і при завданні початкових умов на дійсній осі.

На всій площині, за винятком особливих точок,

$$\Delta \operatorname{Re} x_n = \Delta \operatorname{Im} x_n = \Delta x_n = 0,$$

де

$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial \operatorname{Re} t)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial \operatorname{Im} t)^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial t \, \partial \bar{t}}.$$

Складемо функцію такого вигляду:

$$F(\operatorname{Re} t, \operatorname{Im} t) = \sum_{n=1}^{N} x_n \bar{x}_n.$$

Ця функція вже не аналітична, але

$$\Delta F = 2 \sum_{n=1}^{N} \left[\left(\frac{\partial \operatorname{Re} x_n}{\partial \operatorname{Re} t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \operatorname{Re} x_n}{\partial \operatorname{Im} t} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial \operatorname{Im} x_n}{\partial \operatorname{Re} t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \operatorname{Im} x_n}{\partial \operatorname{Im} t} \right)^2 \right],$$

тобто $\Delta F \geqslant 0$; всередині області, в якій виконана ця умова, функція не може досягати локального максимуму. Знаючи координати точки фазового простору $x_1, \ldots, x_N$, визначаємо напрямок на комплексній площині, за яким похідна цієї функції екстремальна:

$$dt = e^{i\varphi} ds, \qquad |dt| = ds,$$

$$\frac{d}{ds} = e^{i\varphi} \frac{d}{dt} = e^{-i\varphi} \frac{d}{d\bar{t}};$$

тобто

$$e^{i\varphi}\dot{\bar{x}}_n = e^{i\varphi}\frac{d\bar{x}_n}{dt} = e^{-i\varphi}\frac{d\bar{x}_n}{d\bar{t}} = e^{-i\varphi}\bar{\dot{x}}_n,$$

з використанням цього маємо

$$\frac{dF}{ds} = e^{i\varphi}\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{N} x_n\bar{x}_n = \sum_{n=1}^{N}(e^{i\varphi}\dot{x}_n\bar{x}_n + e^{-i\varphi}x_n\bar{\dot{x}}_n).$$

Позначимо

$$Q = \sum_{n=1}^{N}\dot{x}_n\bar{x}_n;$$

тоді

$$\frac{dF}{ds} = Qe^{i\varphi} + \bar{Q}e^{-i\varphi},$$

похідна цієї функції за напрямом

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{dF}{ds} = i(Qe^{i\varphi} - \bar{Q}e^{-i\varphi}) = 0,$$

звідки $\varphi = -\operatorname{arctg}(\operatorname{Im} Q/\operatorname{Re} Q) = -\arg Q$. Кут φ задає шуканий напрямок, а Q залежить тільки від точки фазового простору.

Якщо рухатися по комплексній площині в бік максимального зростання F, що задається кутом φ або $-\varphi$, то цей шлях з найменшими витратами веде до найближчої особливої точки, де розв’язок разом з функцією F спрямовується в безкінечність. Чисельний метод пошуку особливих точок влаштований наступним чином. З дійсними початковими умовами система розв’язується на комплексній площині, причому на кожному кроці напрямок наступного кроку вибирається за формулою

$$\varphi = \pm\arg Q.$$

Знаючи наближене значення Q, яке обчислюється безпосередньо в процесі розв’язку, за його різким зростанням можна судити про те, що особлива точка знаходиться на відстані близько величини кроку. Після того, як найближча з особливих точок знайдена, система розв'язується з точки початку пошуку уздовж дійсної осі вправо на відрізок довжини *T*, і знову організовується пошук. Кожна особлива точка може бути знайдена, починаючи з різних позицій на дійсній осі, для уточнення її положення, величина *T* вибирається з розрахунком на те, щоб рухатися якнайшвидше і не пропустити будь-яку точку. [2]

Цим простим методом можна порівняно швидко шукати особливі точки, що лежать поблизу дійсної осі часу, оскільки при вирішенні фізичної задачі цікаво знати поведінку рішення саме на цій осі, де воно також буде дійсним, а особливі точки будуть розташовуватися комплексно-сполученими парами. Всі ці факти є наслідком того, що коефіцієнти поліномів дійсні, так само як і початкові умови.

Слід зазначити, що пропонований метод пошуку особливих точок, може бути застосований для систем більш широкого класу: не автономних і з довільними аналітичними правими частинами, якщо наявна інформація про те, що особливі точки мають тип полюс. [2, 3, 5]

Наступний метод був випробуваний на системі рівнянь Лоренца

$$\dot{x}=\sigma(y-x), \quad \dot{y}=rx-my-xz, \quad \dot{z}=-bz+xy,$$

де $\sigma,\ r,\ m,\ b$ - додатні параметри. Як відомо, при певній комбінації цих параметрів всі положення рівноваги системи втрачають стійкість, але поблизу них утворюється множина, обмежена за розмірами, має міру нуль в тривимірному просторі і потужність континууму, що притягує фазові траєкторії, але всередині якого не може бути жодного стійкого граничного циклу: це – дивний - аттрактор. [1, 4, 7, 8]

Якщо задати початкові умови близько нуля, то по закінченні порівняно невеликого проміжку часу фазова точка починає рухатися поблизу аттрактора, все більше наближаючись до нього. З цього моменту був організований пошук особливих точок, найближчих до дійсної осі часу (в тому сенсі, що між ламаної, що з'єднує ці точки, і віссю, інших особливих точок немає). На фіг. 1

представлені графіки двох перших компонент рішення і відповідна карта особливих точок на проміжку дійсної осі часу від 1000 до 2000 для наступної комбінації внутрішніх параметрів і початкових умов

$$\sigma=0.2, \quad m=0.003, \quad r=0.5, \quad b=0.06,$$
$$x(0)=0.17, \quad y(0)=0.17, \quad z(0)=0.49.$$

Положення кожної особливої точки, в силу автономності системи, характеризується лише двома величинами: уявної координатою і відстанню вздовж дійсної осі до найближчої іншої особливої точки. При перевірці на кореляційний тест ці величини поводяться як незалежні випадкові. Причиною є те, що рекурентні залежності, що зв'язують їх, сильно відрізняються від лінійної. На фіг. 2 показано, як залежить удавана координата точки від уявної координати попередньої. На фіг. 3 показана залежність відстані уздовж дійсної осі до наступної особливої точки від уявної координати даної.

Тепер про характер особливостей. Передбачалося, що це полюса. Для визначення їх порядків і амплітуд підставимо в систему рішення у вигляді рядів:

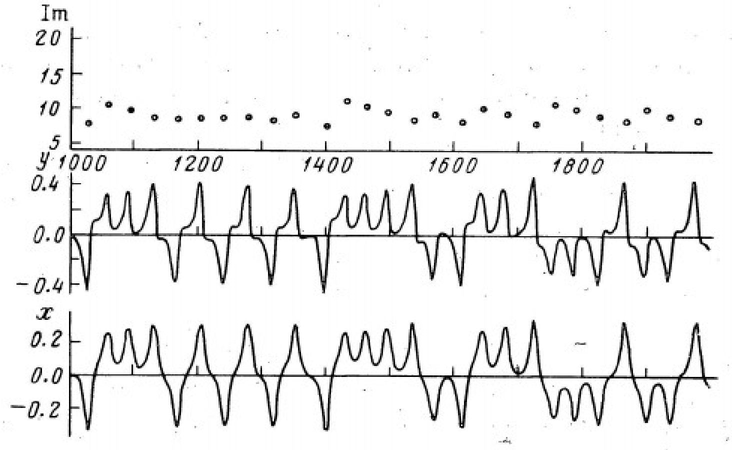
$$x=A/t^a+\ldots, \quad y=B/t^b+\ldots, \quad z=C/t^c+\ldots,$$

після прирівнювання порядків і амплітуд отримаємо

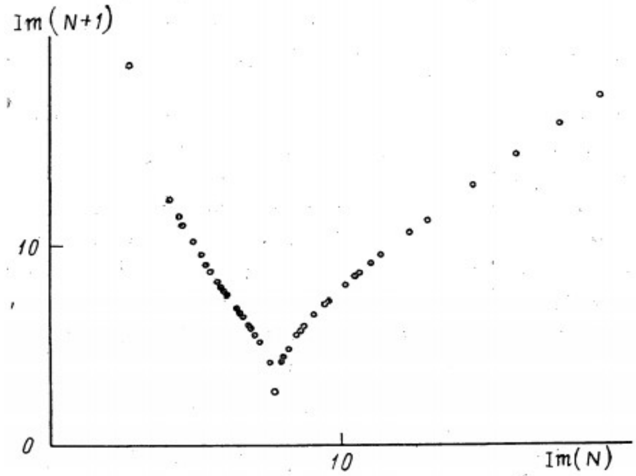
$$a+1=b, \quad b+1=a+c, \quad c+1=a+b,$$
$$-A=\sigma B, \quad 2B=AC, \quad -2C=AB,$$

звідки знаходяться порядки

$$a=1, \quad b=2, \quad c=2,$$



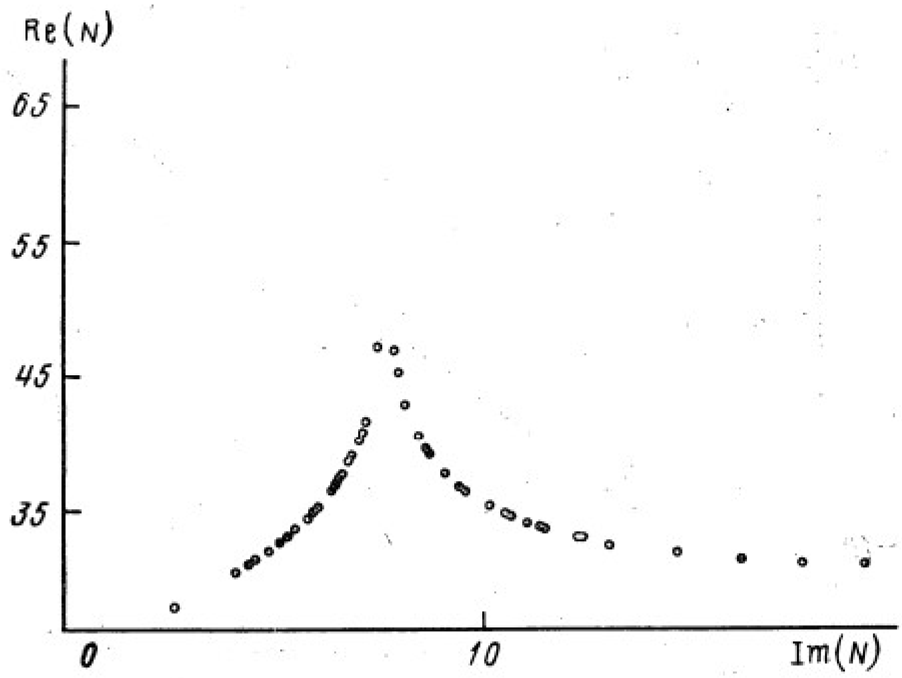
Фіг. 1



Фіг. 2

і амплітуди з точністю до сполучення

$$A = \pm 2i, \qquad B = \mp 2i/\sigma, \qquad C = -2/\sigma.$$



Фіг. 3

Система Лоренца володіє тим властивістю, що якщо до нескінченності наближається хоча б одна з компонент, то аналогічно поводяться і дві інші, тобто можна говорити про полюси системи, маючи на увазі, що це полюса будь-яких порядків для кожної з компонент. Виникла неоднозначність у визначенні амплітуд є наслідком того, що можливі комплексно сполучені пари особливих точок двох сортів. У кожній парі сполучень ця особливість має пов'язану амплітуду, якщо розглянути тільки точки, що лежать у верхній півплощині, і приписати уявній координаті точки знак уявної частини її амплітуди, наприклад для компоненти x, а фактично - групу знаків, що виникають в неоднозначності при визначенні амплітуд (верхня чи нижня), то виникає питання, як залежить не тільки стан, але й знак уявної координати особливої точки від положення і знака попередньої.

На це питання відповідає фіг. 4, де показана рекурентність залежність між уявними координатами двох сусідніх особливих точок з урахуванням їх знаків. Знаки амплітуди також їх наближені значення можна визначати чисельно на останньому кроці пошуку особливої точки, тобто в безпосередній близькості від неї. Точні асимптотичні формули мають такий вигляд для полюса першого порядку

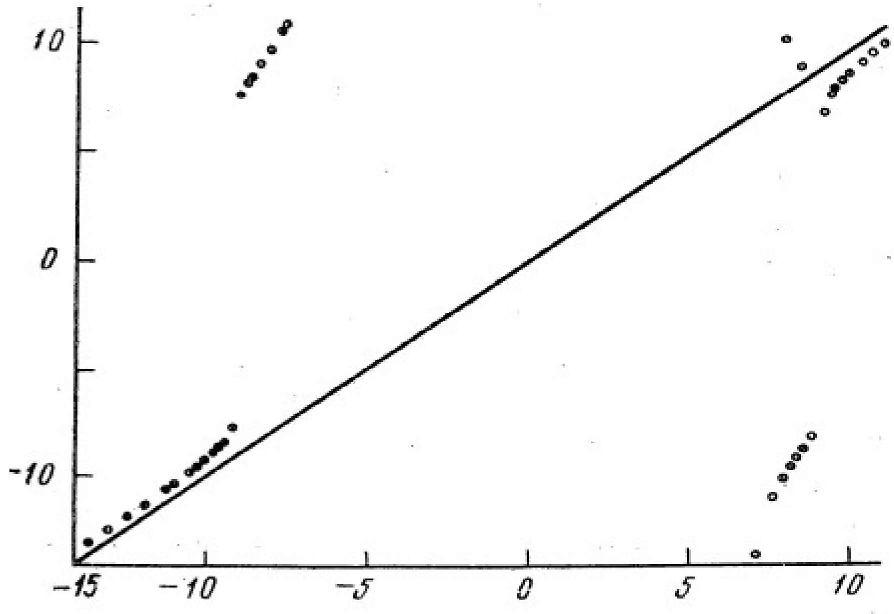
$$A = -\lim_{t \to t_0} \frac{x^2}{\dot{x}}, \qquad x = \frac{A}{t - t_0} + \dots ,$$

для полюсу другого порядку

$$B = \lim_{t \to t_0} \frac{4y^3}{\dot{y}^2}, \quad y = \frac{B}{(t - t_0)^2} + \dots ,$$

$$C = \lim_{t \to t_0} \frac{4z^3}{\dot{z}^2}, \quad z = \frac{C}{(t - t_0)^2} + \dots .$$

Знайдені таким чином чисельні значення добре збігаються з теоретичними. [6]



Фіг. 4

Висновки. Слід зазначити, що така рекурентна залежність, в розташуванні особливостей не є простим наслідком автономності і детермінованості системи. Дійсно, координати будь-яких спеціальних очок залежать від початкових умов, але для системи Лоренца це три числа, а положення особливої точки залежить тільки від одного числа – уявної координати попередньої. Подібний факт, з поясненням причини, вже був раніше встановлений, але не для особливих точок, а для модулів екстремальних значень рішення.

Література:

1. Рубин А.Б. Биофизика. / М.: из - во «Университет». 1999. Т.1.С.106 - 116.

2. Данилов Ю.А. Лекции по нелинейной динамике. /М.: из - во «Постмаркет». 2001. с.189.

3. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного. /М.: из - во «Мир». 2000.С. 12 - 20.

4. Смит Дж. М. Модели в экологии./ М.: из - во «Мир». 1996. с. 181.

5. Данилов Ю. А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. – М.: КомКнига, 2006. 208 с.

6. Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 264 с.

7. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.

8. Деменюк С. Л. Просто хаос. – СПб.: ООО «Страта», 2013. 232 с.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Тимошенко Олександр Захарович

УДК 373.5.091.33:514.112

Дяк Дмитро

студент факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОРЕНЦА: ЕВОЛЮЦІЯ ПІДХОДІВ ДО ВИВЕДЕННЯ ТА ІНТЕРПРЕТАЦІЇ У ПЕРІОД СТАНОВЛЕННЯ ТЕОРІЇ ВІДНОСНОСТІ

Анотація: *У статті розглянуті різні підходи до виведення перетворень Лоренца в роботах Л. Й. Кордиш і А. П. Грузинцева, Ч. Бялобржеського, І. Огієветського в період становлення теорії відносності. Проведено їх порівняльний аналіз, зроблено висновки про характер еволюції уявлень про перетворення Лоренца.*

Ключові слова: *перетворення Лоренца, спеціальна теорія відносності, метрика простору.*

Abstract: *Different approaches to the derivation of Lorentz transformations are considered in the works of L. Y. Kordish and A. P. Georgins'ev, C. Bialobrzhesky and I. Ogievetsky in the period of formation of the theory of relativity. Their comparative analysis was carried out, conclusions were drawn about the nature of the evolution of representations about the Lorentz transformation.*

Keywords: *Lorentz transformation, special theory of relativity, metric space.*

Ключовою метою цієї статті є дослідження різних підходів до виведення та інтерпретації перетворень Лоренца у період становлення теорії відносності.

Дослідженню перетворень Лоренца присвячено наукові праці таких авторів, як Е. Уїтекер, У. Франкфурт, Л. Кордиш, А. Грузинцев та інших.

На межі XIX та XX сторіччя формування нової фізичної картини світу почалося з вирішення питань, що повстали з теорії електродинаміки середовищ, що рухаються. А саме розв’язок питань, що пов’язані з рухом тіл крізь матеріальне середовище – ефір, викликав появу спеціальної теорії відносності. Рівняння Лоренца, що виникли при цьому відіграли роль тих фундаментальних принципів, які описують наш простір та час.

Історія створення теорії відносності, та як її частини, перетворень Лоренца, розкрита і проаналізована в численній науковій літературі: Е. Уіттекер [1], У. Франкфурт [2]. та інші. Інтегральна картина еволюції підходів до їх виведення має досить багато прогалин, зокрема випали роботи вчених, що працювали в Україні, і були в силу історичних обставин або забуті, або належним чином не оцінені. У статті проаналізовані оригінальні роботи вітчизняних вчених, які у період становлення теорії відносності працювали в Україні.

Історія виникнення рівнянь така: рівняння Максвела, що характеризують електромагнітне поле, не інваріантні відносно перетворень Галілея. У класичній механіці просте перетворення переводить одну систему відліку в іншу, але при такому перетворенні рівняння Максвела не зберігають свій вид. Ще В. Фогт у 1887 році показав, що рівняння типу $\phi = 0$ зберігає свою форму при переході до нових просторово-часових змінних при перетвореннях типу. $x' = x - vt,\ y' = \frac{y}{\gamma}.z' = \frac{z}{\gamma}, t' = t - vx/c^2$ точністю до масштабного множника це були майбутні перетворення Лоренца. Але згадана робота була маловідомою науковій громадськості. Так уже Фіцджеральд і Лоренц розуміли, що для пояснення досліду Майкельсона – Морлі необхідно введення нового постулату – скорочення розмірів тіл, що рухаються. У 1900 р., через десять років після того, як Герц і Хевісайд надали рівнянням Максвела красивої математичної форми, Лармор знайшов перетворення, при якому рівняння залишаються інваріантними. Лоренц незалежно від Лармора запропонував такий спосіб перетворень однієї системи відліку в іншу, при яких рівняння Максвела зберігають свій вигляд. Перетворення, що зараз мають назву перетворень Лоренца, які при цьому були використані, дозволили по іншому подивитися на фундаментальні поняття часу та простору. Хоч ефірно-польова теорія Лоренца математично збігалася зі спеціальною теорією відносності А. Ейнштейна, але на відміну від Г. Лоренца А. Ейнштейн „наважився" надати перетворенням Лоренца фізичний сенс, тобто надати їм такі характеристики, що описують простір та час. Як писав Г.Лоренц у 1912 р. „Заслуга Ейнштейна полягає у тому, що він перший висловив принцип відносності у вигляді загального строго і точно діючого закону" [2].

Виведення рівнянь спеціальної теорії відносності були проаналізовані за роботами вчених, що працювали на той час в Україні: Л. Й. Кордиша і О. П. Грузінцева, Ч. Бялобржескаго, І. Огієвецького. В чому ж полягали їх підходи?

Робота Л. Кордиша „Елементарний висновок основних формул теорії відносності” [3], вийшла друком у 1911 році. Вона починається з формулювання „одного основного положення - принципу відносності”, що автор подає у такий спосіб: „формулювання того закону, за яким відбувається яке-небудь явище, не залежить від того, щодо якої системи координат оцінювати явище; узяті системи координат можуть знаходитися у відносному спокої, чи у відносному рівномірному поступальному руху”.

До цього додають ще один постулат – сталість швидкості світла. На думку Л.Й. Кордиша, цей постулат виявляється зайвим, тому що він „виходить як необхідний наслідок першого”. Аналогічних висновків щодо другого постулату окрім М. Планка, Л. Кордиша незалежно дійшли Ігнатовський, П. Франк (Franck), Розе (Rothe).

Виведення перетворень Лоренца Л. Кордиш проводить у такий спосіб. Уявимо, що у момент збігу систем координат I та II з їх загального початку був випущений світловий сигнал. Виходячи з визначення принципу відносності, як спостерігач системи відліку I, так і спостерігач системи відліку II повинні будуть побачити поширення світлової хвилі з центрами A (для I системи координат) и B (для II системи координат). Система II рухається відносно системи I зі швидкістю v . Для спостерігача I рівняння сфери розповсюдження хвилі буде:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$$

Для спостерігача II рівняння сфери: $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$.

Показання годинника системи II є функція координат, тобто t'можна представити у вигляді: $t' = At + Bx + Cx + Dz$, де, x y z , , – координати годинників відносно I, а A B C D , , , – деякі сталі. Припускаємо, що залежність може бути більш складна:

$$t' = At + Bx + Cx + Dz + Kt^2 + Mx^2 + \cdots + Ltx$$

Нехай у момент t = 0 координати годинника будуть x=l, y=z=0, показання годинників, що рухаються, будуть $t_1' = Bl + Ml^2$. Так як через t секунд система зміститься на відстань vt, показання годинників, що рухаються, будуть

$$t_2' = At + B(l + vt) + Kt^2 + Ml^2 + Lt(l + vt);$$
$$\Delta t = t_2' - t_1' = At + Bvt + Kt^2 + M(2vtl + t^2) + Lt(l + vt).$$

Виходить, що показання годинників залежать від їхнього місця розташування l в системі, чого бути не може, отже $M = L = 0$.

Доведення того, що коефіцієнт K = 0, вчений проводить наступним чином. Досліджується тривалість явища, з припущенням, що це явище відбувається повторно у різні моменти часу, потім порівнюється тривалість цього явища у системах I та II. При $t = 0$ обидві системи збігаються і годинник у системі II знаходиться на відстані x від початку координат. Нехай явище відбувається Θ секунд (за годинником системи I), тоді показання годинника будуть

$$t_1' = A\Theta + B(x + v\Theta) + K\Theta^2;$$
$$t_2' - t_1' = A\Theta + Bv\Theta + K\Theta^2.$$

Повторимо наш дослід в інший час, коли на годиннику системи I буде час t, нехай координата годинника, що рухається, буде $x = l$. Тоді:

$$t_1' = At + Bl + Kt^2$$

У кінці явища, показання годинника, що рухається, буде

$$t_2' = A(t + \theta) + B(l + v\theta) + K(t + \theta)^2;$$
$$t_2' - t_1' = A\theta + Bv\theta + K(2t\theta + \theta^2).$$

Відлік часу проводився за годинником системи II, але тривалість цього явища різна, що за умовами експерименту не можливо. Тобто повинно мати місце перетворення:

$$x' = L(x - vt);$$
$$y' = My;$$
$$z' = Mz.$$

Користуючись формулами переходу, Л. Кордиш одержує

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad B = \frac{v}{c}\sqrt{\frac{1}{c^2-v^2}} \quad M = N = 1$$

Тобто отримуємо перетворення Лоренца:

$$x' = \beta(x - vt);$$
$$y' = y;$$
$$z' = z;$$
$$t' = \beta\left(1 - \frac{v}{c^2}x\right),$$

де

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Робота Ч. Т. Бялобржескаго [4] 1910 року, була одна з не багатьох, що підтримувала ідеї теорії відносності на початку її становлення. Але вона відрізнялась від роботи Л. Кордиша за підходом до основних фізичних понять, а саме введенням «абсолютного часу». Метою статті було: «утримати по можливості зв'язок з дослідом і залишитись вірним теорії Лоренца - Ейнштейна» [4, с.220]. Бялобржеский зосередив свою увагу на математичному виведенні поняття відносності відстані та часу. Принцип відносності він формулює у такий спосіб: «немає ніякої можливості визначити відносний рух, за який можна прийняти рух у порожньому просторі чи у нерухомому ефірі»; [4, с. 224] - «фізичний час тече таким чином, що швидкість світла є однаковою, незалежно від того в якому стані спокою чи рівномірного та прямолінійного руху знаходиться друг відносно друга спостерігач та джерело світла» [4, с. 224].

Застосовуючи вищезазначені принципи, вчений проводить розрахунки довжини променів світла у дослід Майкельсона –Морлі. Джерело світла знаходиться у точці А. Система відліку рухається у напрямку В. Промінь світла проходить у напрямку до дзеркала В, яке зміщується у B_1, тоді промінь світла наздоганяє дзеркало з відносною швидкістю $c - v$. Після того, як промінь відбився від дзеркала, зворотній шлях промінь проходить зі швидкістю $c + v$ та потрапляє до спостерігача у точці A_1, куди за час руху зміститься точка А. $AB_1 > A_1B_1$, тому промінь запізнюється в порівнянні з часом у нерухомій системі. У поперечному розповсюдженні промінь пройде шлях АСА .

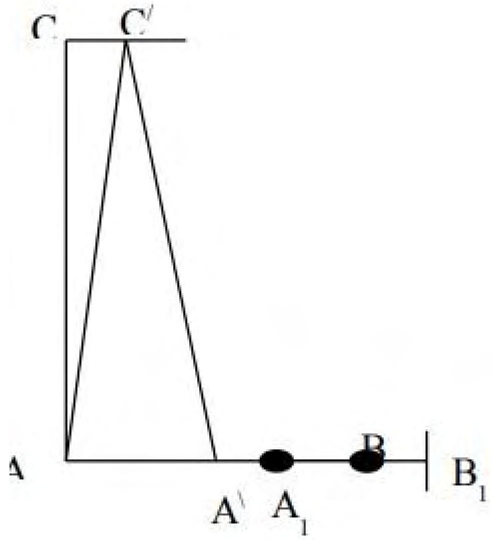


Рис. 1

Розрахунок довжини проводився таким чином:

$$AB_1A_1 = ABA + 2BB_1 - AA_1 \text{, але } \frac{BB_1}{AB_1} = \frac{v}{c} \text{ та } \frac{AA_1}{AB_1A_1} = \frac{v}{c} \Rightarrow,$$

$$2BB_1 - AA_1 = (2AB_1 - AB_1A_1)\frac{v}{c} = AA_1\frac{v}{c} = AB_1A_1\frac{v^2}{c^2},$$

тобто

$$\frac{AB_1A_1}{ABA} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Як пише автор: «таке подовження шляху, коли система прийшла до руху зі швидкістю v » [4, с.225] має вигляд:

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 \Rightarrow 1 - \frac{CC'^2}{AC'^2} = \frac{AC^2}{AC'^2}$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{AC^2}{AC'^2} \Rightarrow \frac{AC'A'}{ACA} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{, якщо } AB = AC\ \frac{AB_1A_1}{AC'A'} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Зв’язок між часом, у системі, що рухається t′ , та «абсолютним часом t, за який приймемо час спостерігача, що вважає себе, таким що знаходиться у стані спокою» [4, с.226].

Припустимо, що у точках А та В нерухомої системи знаходиться годинники. У момент часу t = t′ = 0 з точки А до В спрямовано сигнал. Годинники А та В є синхронними, якщо у момент отримання сигналу годинник В «показує час l / c ». Розрахунки абсолютного часу, тобто «з точки зору спостерігача, що знаходиться у стані спокою» вчений проводить таким чином: абсолютна відстань між А та В дорівнює l / k , відносно В сигнал рухається зі швидкістю $c-v$, тобто проміжок часу через який світловий сигнал дійде до точки В буде $\frac{l}{k(c-v)}$. Час t′ на часах В буде $t-\frac{l}{k(c-v)}$, так як з моменту прибуття сигналу пройшов «абсолютний час», тобто «відносний час» $\frac{1}{k}(t-\frac{l}{k(c-v)})$, «так як одиниця часу у рухомій системі подовжена у k разів». Тобто $t'=\frac{l}{c}+\frac{1}{k}\left[t-\frac{l}{k(c-v)}\right]=\frac{1}{k}t-\frac{v}{c^2}l$. Покладемо, що в початковий момент обидва спостерігача знаходяться у точці А. Змінимо позначення l = x′ . У момент t «абсолютна відстань x» точки В, що рухається зі швидкістю v від нерухомого спостерігача буде $x=\frac{x'}{k}+vt\Rightarrow\ x'=k(x-vt)$, якщо ввести цю величину у формулу для t′ то отримуємо $t'=k\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)$.

Висновки. Аналіз підходів до виведення перетворень Лоренца свідчить, що вони мали еволюційний характер, який був пов’язаний з розширенням можливостей їх застосування для різних фізичних систем і середовищ, та ступенем розвитку математичного апарату. Поступово відбувається перехід від розгляду можливостей застосування перетворень Лоренца для процесів, що відбуваються у вакуумі, до поширення їх на процеси у середовищах з різними властивостями. Поступово, перетворення Лоренца стали повсякденним інструментом дослідження фізичних систем, до яких можуть застосовуватися ідеї спеціальної теорії відносності.

Література:

1. Уиттекер Э. История теории эфира и электричества: Современные теории (1900-1926). – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2004. – с.464.

2. Франкфурт У. И. Специальная и общая теория относительности. – М.: Наука. – 1968. – 320 с.

3. Кордыш Л.Й. Элементарный вывод основных формул теории относительности // Изв. Киев. политехн. ин-та. – 1911. – Год 11. – Кн. 1. – С. 43-51.

4. Бялобржеский Ч.Ф. Принцип относительности и его применение к механике. – Физическое обозрение. – 1910. – т.11. – №1-6. – с. 220-232.

5.Огиевецкий И. Е. Эволюция геометрии физического мира.–Записки Дніпропетровского инст.нар освыти. – 1927. – т.1 –с. 75-98.

6. Грузинцев А. П. Преобразования Лоренца и принцип относительности // Сообщения ХМО. – Сер. 2.- Харьков, 1911. – Т. 12, № 6. – С. 269-288. То же. – Харьков, 1911. – 20 с. (отд. оттиск).

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Тимошенко Олександр Захарович

УДК 512.57

Ігнатко Віта

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

МНОЖИНА МАТРИЦЬ $M_4^{\mathrm{ct}}(\mathrm{R})$ ЯК АЛГЕБРА РАНГУ 3

Анотація: *У статті розглядається множина матриць третього порядку, у яких сума елементів кожного рядка є сталим числом. Досліджено основні властивості множини цих матриць і показано, що вона за своєю алгебраїчною структурою є алгеброю скінченного рангу 4.*

Ключові слова: *матриця, множина, алгебра скінченного рангу, власний проектор.*

Abstract: *The article deals with a set of matrices of the third order, in which the sum of the elements of each line is a constant number. The main properties of the set of these matrices are investigated and it is shown that, in its algebraic structure, it is an algebra of finite rank 4.*

Keywords: *matrix, set, algebra of finite rank, own projector.*

Нехай маємо множину квадратних матриць порядку 3 такого вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a-b & 0 \\ c & d & a-c-d \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

де *a, b, c, d*$\in R$. Очевидно, що у такої матриці сума елементів кожного рядка є сталою і дорівнює *a*. Число, яке є сумою елементів кожного рядка матриці А, називають [1] *характеристикою матриці* А і позначають *ch*A:=*a.*

Множину всіх матриць вигляду (1.1) позначимо через $M_4^{\mathrm{ch}}(\mathrm{R})$, тобто

$$M_4^{\mathrm{ct}}(\mathrm{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a-b & 0 \\ c & d & a-c-d \end{pmatrix} \middle| \; \mathrm{a, b, c, d} \in \mathrm{R} \right\} \tag{1.2}$$

<u>Теорема 1.1.</u> Операції додавання, множення матриць множини $M_4^{\mathrm{ct}}(\mathrm{R})$ і множення таких матриць на дійсне число не виводять за межі цієї множини, причому для будь-яких $A_1, A_2 \in M_4^{\mathrm{ct}}(\mathrm{R})$ і $\forall \alpha \in \mathrm{R}$ виконуються рівності:

$$ch(A_1 + A_2) = ch(A_1) + ch((A_2),$$

$$ch(A_1 \cdot A_2) = ch(A_1) \cdot ch((A_2), \tag{1.3}$$

$$ch(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot ch(A).$$

<u>Доведення:</u>

Нехай $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ -3 & -4 & 10 \end{pmatrix}$

Доведемо, що виконується $ch(A_1 + A_2) = ch(A_1) + ch((A_2)$ для матриць вигляду (1.1).

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & 0 \\ -4 & -6 & 15 \end{pmatrix}$$

$5 = 2 + 3$

Перевіримо виконання умови $ch(A_1 \cdot A_2) = ch(A_1) \cdot ch((A_2)$

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -9 & 15 & 0 \\ -14 & -30 & 50 \end{pmatrix}$$

$6 = 2 \cdot 3$

Перевіримо чи $ch(\alpha \cdot A_1) = \alpha \cdot ch(A_1)$

$$\alpha \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ -\alpha & 3\alpha & 0 \\ -\alpha & -2\alpha & 5\alpha \end{pmatrix}$$

$2 \cdot \alpha = \alpha \cdot 2$

Що і треба було довести. ■

Врахувавши, що додавання матриць комутативне та асоціативне, а множення асоціативне і дистрибутивне відносно додавання, маємо, що $M_4^{ct}(\mathrm{R})$ є підкільце M_4, причому з одиницею. Якщо ще врахувати, що операція множення матриці на число і множення у кільці переставні, то $M_4^{ct}(\mathrm{R})$ є *алгебра*.

Матриці

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, E_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&-1\end{pmatrix}, E_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix},$$

лінійно незалежні у лінійному просторі $M_4^{\mathrm{ct}}(\mathrm{R})$, причому кожен елемент $A\in M_4^{\mathrm{ct}}(\mathrm{R})$, подається у вигляді

$$A=aE+bE_1+cE_2+dE_3\,.$$

Таким чином, $M_4^{\mathrm{ch}}(\mathrm{R})$ є алгеброю рангу 3, і таблиця множення матиме вигляд

	E	E_1	E_2	E_3
E	E	E_1	E_2	E_3
E_1	E_1	$-E_1$	θ	θ
E_2	E_2	θ	$-E_2$	$-E_3$
E_3	E_3	E_2-E_3	$-E_2$	$-E_3$

Табл. 1.1 Множення матриць множини $M_4^{\mathrm{ct}}(\mathrm{R})$

де $\theta=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ *– нуль матриця.*

Отже, щоб перемножити елементи з множини $M_4^{\mathrm{ct}}(\mathrm{R})$ можна користуватись таблицею (1.1).

Розглянемо на прикладі застосування вищенаведеної таблиці під час виконання множення матриць.

Приклад 1. Обчислити добуток

$$A_1=\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&3&0\\-1&-2&5\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}3&0&0\\-2&5&0\\-3&-4&10\end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$A_1A_2=(2E-E_1-E_2-2E_3)(3E-2E_1-3E_2-4E_3)=6EE-4EE_1-6EE_2-8EE_3-3E_1E+$$
$$+2E_1E_1+3E_1E_2+4E_1E_3-3E_2E+2E_2E_1+3E_2E_2+4E_2E_3-6E_3E+4E_3E_1+6E_3E_2+$$
$$+8E_3E_3=6EE+2E_1E+3E_2E_2+8E_3E_3-7EE_1-9EE_2-14EE_3+5E_1E_2+4E_1E_3+$$
$$+4E_3E_1+4E_2E_3+6E_3E_2=6E-2E_1-8E_3-7E_1-9E_2-14E_3+5\theta+4\theta+4E_2-4E_3-$$
$$-6E_2=6E-9E_1-14E_2-30E_3=$$
$$=6\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-9\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}-14\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}-30\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0\\-9&15&0\\-14&-30&50\end{pmatrix}$$

Множина $M_4^{0t}(\mathrm{R})=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\b&b&0\\c&d&-c-d\end{pmatrix}\,\middle|\ \mathrm{b,c,d}\in\mathrm{R}\right\}$

Є *підалгеброю групи* $M_4^{ct}(\mathrm{R})$, але без одиниці, а множина

$$M_4^{1t}(\mathrm{R})=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\b&1-b&0\\c&d&1-c-d\end{pmatrix}\,\middle|\ \mathrm{b,c,d}\in\mathrm{R}\right\}$$

відносно множення є *напівгрупою*. В силу (1.3) підалгебра $M_4^{0t}(\mathrm{R})$ є *ідеал алгебри* $M_4^{ct}(\mathrm{R})$. Множина матриць з $M_4^{ct}(\mathrm{R})$, у кожної з яких визначник дорівнює одиниці, відносно множення є *група.*

Нехай $A\in M_4^{ct}(\mathrm{R})$. Тоді її характеристичний многочлен має вигляд

$$\Delta(\lambda)=|\lambda E_0-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a&0&0\\-b&\lambda-a+b&0\\-c&-d&\lambda-a+c+d\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-a+b)(\lambda-a+c+d).$$

Теорема 1.2. Якщо характеристичний многочлен матриці A має прості корені $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, то

$$A^n=\lambda_1^nP_1+\lambda_2^nP_2+\lambda_3^nP_3, \tag{1.15}$$

де P_1,P_2,P_3 – власні проектори матриці A, що відповідають власним числам $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$.

Доведення. Доведемо за допомогою методу математичної індукції.

1) Для $n=1$:

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a-b & 0 \\ c & d & a-c-d \end{pmatrix}$$, тобто (1.15) – виконується.

2) Припустимо, що (1.15) виконується для всіх $n=k,$де $n \in N$.

3) Доведемо за припущенням, що рівність (1.15) виконується для $n=k+1$, тобто

$$A^{k+1} = \lambda_1^{k+1} P_1 + \lambda_2^{k+1} P_2 + \lambda_3^{k+1} P_3$$

$$A^{k+1} = A^k \cdot A = \left(\lambda_1^k P_1 + \lambda_2^k P_2 + \lambda_3^k P_3\right) \cdot \left(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3\right) = \lambda^{k+1} P_1 P_1 + \lambda_1{}^k \lambda_2 P_1 P_2 + \lambda_1{}^k \lambda_3 P_1 P_3 + \\ + \lambda_2{}^k \lambda_2 P_2 P_1 + \lambda_3{}^k \lambda_1 P_3 P_1 + \lambda_3{}^k \lambda_2 P_3 P_2 + \lambda_3{}^{k+1} P_3 P_3 = \lambda_1{}^{k+1} P_1 + \lambda_2{}^{k+1} P_2 + \lambda_3{}^{k+1} P_3,$$

бо $P_i P_i = P_i, P_i P_j = \theta$.

Що і треба було довести. ■

<u>Теорема 1.3.</u> Якщо характеристичний многочлен має один простий і один кратний корінь, то для матриці А має місце подання:

а) $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{c}{c+d} & \frac{d}{c+d} & 0 \end{pmatrix} + (a-c-d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c}{c+d} & -\frac{d}{c+d} & 1 \end{pmatrix}$,

коли $b=0$ і $a \neq a-c-d$;

б) $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{c}{b} & -\frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix} + (a-b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{c}{b} & \frac{c}{b} & 0 \end{pmatrix}$,

коли $d=-c$ і $a \neq a-b$;

в) $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (a-c-d) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -d & d & 0 \end{pmatrix}$,

коли $b=c$ і $a \neq a-b$.

<u>Теорема 1.3.</u> Для *n-го* степеня матриці А має місце подання у випадку а)

$$A^n = a^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{c}{c+d} & \frac{d}{c+d} & 0 \end{pmatrix} + (a-c-d)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c}{c+d} & -\frac{d}{c+d} & 1 \end{pmatrix};$$

у випадку б)

$$A^n = a^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{c}{b} & -\frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix} + (a-b)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{c}{b} & \frac{c}{b} & 0 \end{pmatrix};$$

у випадку в)

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (a-c-d) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -d & d & 0 \end{pmatrix}.$$

Висновки. Отже ми побудували матричну алгебру рангу 4. Дослідили властивості цієї алгебри, знайшли основні характеристики її елементів. А через канонічне подання матриці вивели формулу для піднесення її до $n-го$ степеня.

Література:

1. Гантмахер Ф.Р. Теорія матриць. – М.: Наука., 1966. – 576с.
2. Літнарович Р.М. Алгебра матриць. Курс лекцій.– Р.: МЕГУ, 2007. – 112 с.
3. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричний аналіз: Перевод с англ. – М.: Мир.,1989. – 655 с.
4. Вотякова Л.А. Матрична алгебра M_2 // Наукові записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2003 – №4. – с. 14-17.
5. Панасенко О.Б. Лекції з лінійної алгебри: електронний навчальний посібник – 273 с. [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://amnm.vspu.edu.ua/wp-content/uploads/2016/10/Panasenko-lin-alg.pdf

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Вотякова Леся Андріївна

УДК 373.004

Ізеринська Наталія

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

вчитель початкових класів

Ялтушківської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів

ПЕРСОНАЛЬНИЙ САЙТ ВЧИТЕЛЯ ЯК ЗАСІБ УПРОВАДЖЕННЯ НОВІТНІХ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Анотація: *У даній статті ми розглядаємо сучасні підходи до впровадження інформаційних технологій на основі створення персонального сайту вчителя, функціональні можливості використання персонального сайту вчителя в освітньому процесі, зокрема, вчителя інформатики. З цією метою використовуємо безкоштовний сервіс uCoz, складовими якого є вбудована система керування сайтом, макроблок розробки навчально-методичного комплексу у закладі загальної середньої освіти.*

Матеріали, що розміщені на сайті, можуть використовуватись учнями, вчителями, іншими користувачами та сприяють підготовці до практичних та лабораторних робіт. Учні мають змогу повторити чи опрацювати матеріали, що вивчаються на уроках, пройти тестування, переглянути презентації по темі та додаткові матеріали підвищеної складності.

Створення таких сайтів та використання їх у навчальному процесі значною мірою оптимізує управління освітнім процесом, забезпечує вищий рівень підготовки учнів, допомагає вчителю зберігати матеріали для економії часу, тощо.

Ключові слова: *персональний сайт вчителя; інноваційні технології; навчально-методичний комплекс; конструктор сайту uCoz.*

Annotation: *In this article we consider modern approaches to the introduction of information technology based on the creation of a personal site of the teacher, the functional capabilities of using the personal site of the teacher in the educational process, in particular, the teacher of informatics. To this end, we use the free uCoz service, the components of which are the built-in site management system, the macroblock of the development of the teaching-methodical complex in the institution of general secondary education.*

Materials posted on the site can be used by students, teachers, other users and facilitate the preparation for practical and laboratory work. Students have the opportunity to repeat or process materials learned in the classroom, go through testing, review presentations on the topic and additional materials of increased complexity.

Creating such sites and using them in the learning process greatly optimizes the management of the educational process, provides a higher level of student training, helps the teacher to store materials for saving time, and so on.

Keywords: *personal site of the teacher; innovative technologies; educational-methodical complex; site designer uCoz.*

Постановка проблеми. У сучасному світі електронно-обчислювальні машини та Інтернет стали чи не одним із найбільших досягнень людства XX століття. На сьогоднішній день заклади загальної середньої освіти не можуть залишатися осторонь від цих інновацій. Інформаційні технології набувають швидкого поширення і світ потребує особистостей, що обізнані у цій сфері. Кожна особистість повинна вміти здобувати, опрацьовувати інформацію, а також вміти використати свої знання для розв’язання певних проблем. І взагалі, бути комп’ютерно-грамотним, прагнути до самовдосконалення та розвитку.

Науково-технічних прогрес, нові засоби навчання та сучасні методи сприяють вдосконаленню та оновленню змісту освітніх програм предметів з метою підготовки компетентнісних особистостей, покращенню якості навчання. Саме новітні інформаційні технології можуть стати одним із способів розв’язання поставленого завдання у сучасних умовах. За допомогою IT (інформаційні технології) можна значно підвищити ефективність роботи учасників освітнього процесу навчання.

Одним із завдань вчителя інформатики є демонстрація можливостей використання Всесвітньої мережі Інтернет. Тобто, потрібно показати те, що мережу Інтернет можна використовувати не лише для перегляду фільмів, прослуховування музики, спілкування у соціальних мережах чи для ігрових задоволень, а й для полегшення навчання, засвоєння знань, розв'язання навчальних завдань.

Концепція загальної середньої освіти передбачає формування інформаційних компетентностей як обов'язковий актив учня сучасної школи XXI століття. У світі стрімкими темпами збільшується обсяг різноманітної інформації, а можливості засвоювання її людиною значно обмежуються. Набуті на одному уроці знання, учні не вміють застосувати на іншому. Випускаючись зі школи учні не орієнтуються у бібліотечних каталогах і картотеках, не можуть впоратися з алгоритмами розв'язання пошукових завдань. Це є важливою причиною того, що світні заклади мають формувати в учнів не лише мотивацію, а уміння вчитися, здійснювати пошук інформації, критично її оцінювати і вміти використати. Іншими словами – організатори навчального процесу повинні формувати в учнів інформаційну культуру.

У XXI столітті ресурси Інтернет набувають широкої популярності. На разі це є основним джерелом пошуку нової інформації. Саме тому впровадження методів і навичок роботи в мережі забезпечує покращення освітнього процесу, підвищення мотивації до вивчення предмету, урізноманітнення прийомів та методів викладання.

Майбутній випускник, а згодом, можливо спеціаліст повинен вміти самостійно здобувати знання, корегувати та здійснювати контроль власних дій. Засоби новітніх інформаційних технологій, які дають можливість створення і використання персональних сайтів помітно допомагають вчителям чи викладачам.

На сьогодні не лише організатори навчального освітнього процесу мають доступ до створення власних сайтів, а будь-хто, хто має хоча б мінімальні навички роботи на ПК. Створені навчальні відео-уроки з розробки персональних сайтів на різних платформах. Також самі веб-хостинги мають доступні інтерфейси, що дозволяють без значних утруднень сконструювати власний сайт. Користувачеві, а в майбутньому адміністратору, на допомогу надаються інформаційно-технічні бази, електронний простір, модулі, системи управління створеним сайтом, шаблони оформлення.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Інформатизація освіти полягає у використанні нових інформаційних технологій, забезпеченні самоосвіти і саморозвитку всіх учасників освітнього процесу, удосконаленні форм та методів організації навчального процесу.

У працях з інформатизації навчального процесу представили свої розробки багато науковців і дослідників. Так, І. Колеснікова зауважує, що важливим показником і формою становлення відкритого суспільства є інтенсивний розвиток відкритої освіти. Розвиваючись в руслі тенденцій інформатизації, демократизації, глобалізації, сучасна система освіти використовує принцип відкритих інформаційних мереж, модифікуючи відомі форми навчання за допомогою інформаційно-комунікаційних технологій. За повідомленням Ж. Чупахіної «Інформатизація суспільства повинна бути узгоджена з новими формами організації освіти. Однією з таких форм, що відображають наслідки інформатизації, є відкрита освіта». В. Моїсєєв наголошує, що актуальною вимогою освіти сьогодення є: гуманізація, безперервність, фундаменталізація освіти, доступність освіти, випереджаючий характер освіти та інформатизація освіти, яка безпосередньо пов’язана з її відкритістю. У роботах науковців як В. Биков, О. Клочко, В. Кухаренко, А. Хуторський представлено обґрунтування такого застосування в професійній освіті. А С. Гончаров, Р. Гуревич, І. Захарова та інші описали у своїх працях розробки і упровадження електронних навчально-методичних предметних комплексів.

Наказом Міністерства освіти і науки молоді та спорту України № 1060 від 01.10.2012 затверджено «Положення про електронні освітні ресурси». На сьогодні були внесені зміни за наказом № 1662 від 22.12.2017 зареєстровано в Міністерстві юстиції України 16 січня 2018 р. за № 66/31518 «Про внесення змін до положення про електронні освітні ресурси»[18] за яким в освітній процес вводиться електронне видання як електронний аналог друкованого видання, електронний підручник як електронне навчальне видання, що відповідає освітній програмі та забезпечує інтерактивну взаємодію. Електронний освітній ігровий ресурс як різновид електронного освітнього ресурсу навчального призначення, що поєднує розвивальну та пізнавальну функції, тобто подача в ігровій формі.

Результати дослідження.

У зв'язку зі стрімким накопиченням обсягів даних шкільні підручники не здатні вмістити усі відомості сучасності. Брак коштів не дозволяє постійно оновлювати фонд бібліотек. Тим більше, що часто інформація втрачає актуальність і не можна бути впевненим у тому, що набуті знання будуть корисними протягом життя чи, навіть, на коротший термін. Враховуючи описане вище, чітко вимежовується актуальність створення сайтів, на яких можна розміщувати нову інформацію, змінювати, доповнювати тощо. Такі особисті сайти будуть справжньою допомогою для вчителя, де можна буде розмістити усі необхідні матеріали. Однією із переваг є можливість встановлення зворотного зв'язку з учнями.

Скориставшись персональним сайтом вчителя можна удосконалювати навчально-методичне забезпечення предметів, обмінюватись досвідом з іншими учасниками освітнього процесу. Батьки мають можливість контролювати досягнення та успішність своїх дітей.

На сьогоднішній день існує декілька способів створення сайту.

1. Одним із поширених способів є використання технологій Web 2.0. Засоби Web 2.0 не потрібно встановлювати на робочій станції, оскільки вони розміщенні на віддаленому сервері.

2. Ще один спосіб – створення сайтів за допомогою конструктора сайтів на основі шаблонів. Перевага у тому, що такі програми можуть надаватись користувачеві на безкоштовній основі, але при цьому зменшуються можливості оформлення сайту.

3. Також можна додатково встановити програму, що буде керувати інформацією на сайті в режимі on-line (CMS) – системи управління контентом.

4. Створення сайту за допомогою HTML. Тут потрібно орієнтуватись у особливостях роботи з HTML-документами, CSS, скриптовими мовами.

Отже, для вчителя, який має хоча б початковий рівень підготовки з комп'ютерних технологій, не буде складно створити власний сайт та його наповнення.

Користуючись Інтернет ресурсами ми робимо крок у майбутнє, адже, і надалі цей інформаційний ресурс розширює свою можливості. Користуватися таким ресурсом зручно й економно відносно часу. На сьогодні кожний освітній заклад, майже кожний вчитель має свій персональний сайт, який постійно наповнюється новою, актуальною інформацією. Проте, хоча кожен має власне бачення свого веб-сайту, потрібно пам'ятати про декілька вимог, яким повинен відповідати будь-який сайт. Отже:

1. Персональний сайт повинен відповідати принципам логічності і послідовності викладу матеріалу. Він має органічно сприйматися. Адміністратору потрібно уникати граматичних помилок та необ'єктивної інформації. Регулярне оновлення веб-сайту покращує пошук його у пошукових системах.

2. Сайт повинен бути ергономічним, мати зручну структуру. Бажано забезпечити пошук по сайту, щоб легко було знайти потрібну інформацію.

3. Однією з умов є зворотній зв'язок: електронна адреса, телефон, поштова адреса чи Skype, за якими можна було б легко зв'язатися з вчителем учням, батькам чи відвідувачам сайту.

Маючи свій персональний сайт можна розв'язати ряд проблем, з якими стикається вчитель. Наповнивши сайт інформацією, відеоматеріалами, аудіо записами, матеріалами, необхідними для організації і вдосконалення освітнього процесу, електронними навчально-методичними комплексами предмету, посиланнями на готові електронні матеріали, що вже розміщенні в мережі Інтернет – це урізноманітнить навчальний процес, що в свою чергу покращить як сприйняття так і засвоєння інформації.

Ще однією перевагою веб-сайтів є те, що учні, вчителі чи гості мають змогу працювати/відвідати не лише в класі, а в будь-якому зручному місці для користувача. На сайті може також розміщуватись інформація, що стосується виховного характеру: позаурочні заходи, конкурси, квести, інформація для батьків і учнів, оголошення, чат для обміну думками чи спілкування тощо.

Проведено дослідження роботи сайту, який був мною створений для Ялтушківської ЗОШ І-ІІІ ступенів.

Веб-сайт призначений для представництва школи в мережі і також містить інформацію для учнів: відео, тести, зразки тематичних тестових завдань, відомості про події, які відбуваються регулярно у стінах закладу. Також тут можна знайти методичну допомогу, критерії оцінювання, накази та розпорядження, звіти директора, навчальні програми з предметів, відомості про школу, про адміністрацію, прослідкувати роботу психолога та соціального педагога. Меню містить галузі (напрями) (рис.1 Головна сторінка, рис.2 Фізико-математичний напрям, рис.3 Повчальні відео для дітей).

Рис.1 – Головна сторінка

Я як адміністратор розміщую усі матеріали у файловий менеджер. Учні та колеги мають змогу переглядати, завантажувати та роздруковувати із веб-сторінки.

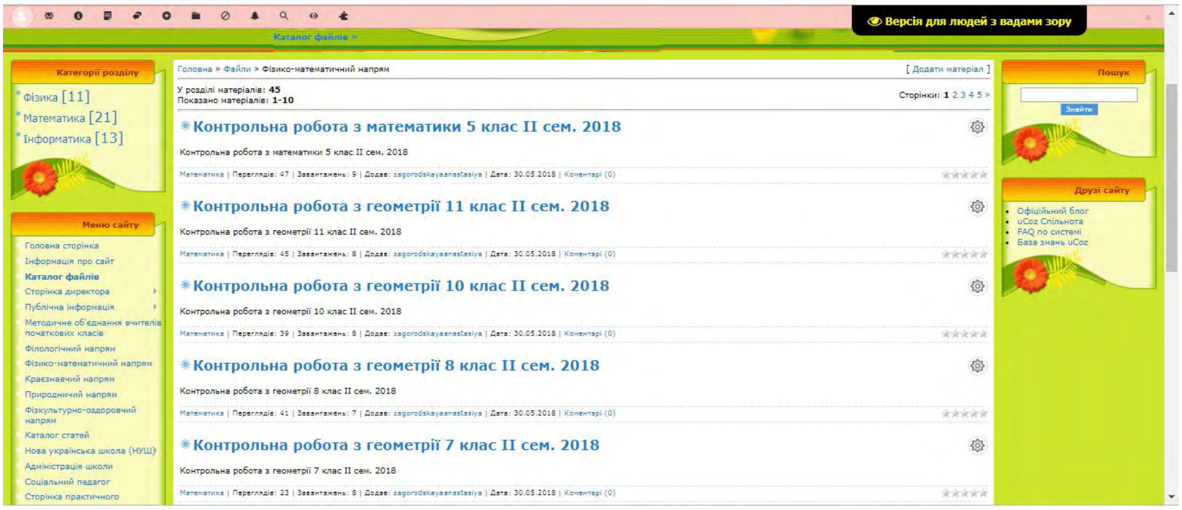


Рис.2 Фізико-математичний напрям

Сайт школи був створений на основі проекту uCoz. Сервіс надає ряд можливостей. Насамперед, це конструктор сайтів, які надалі розміщуються на дисковому просторі порталу. Це один із найдоступніших, найпопулярніших і легших проектів, який має для початку 400 Мб простору, що збільшується з часом. Передбачене резервне копіювання, завантаження файлів через веб-інтерфейс. Конструктор сайтів містить готові шаблони для оформлення інтерфейсу і модулі як «Каталог файлів», «Каталог статей», «Блог», «Опитування», «Гостьова сторінка», «Форум», «Дошка оголошень» тощо. Усі ці модулі адміністратор може змінити на свої розділи змінивши назви. Також можливо створювати нові розділи з категоріями за різною структурою.

Система uCoz підтримує взаємозв'язок з іншими популярними сервісами як Depositfiles - файлообмінник, YouTube – медіа канал (Рис.3), Google maps - сервіс карти, платіжні системи WebMoney і PayPal тощо.

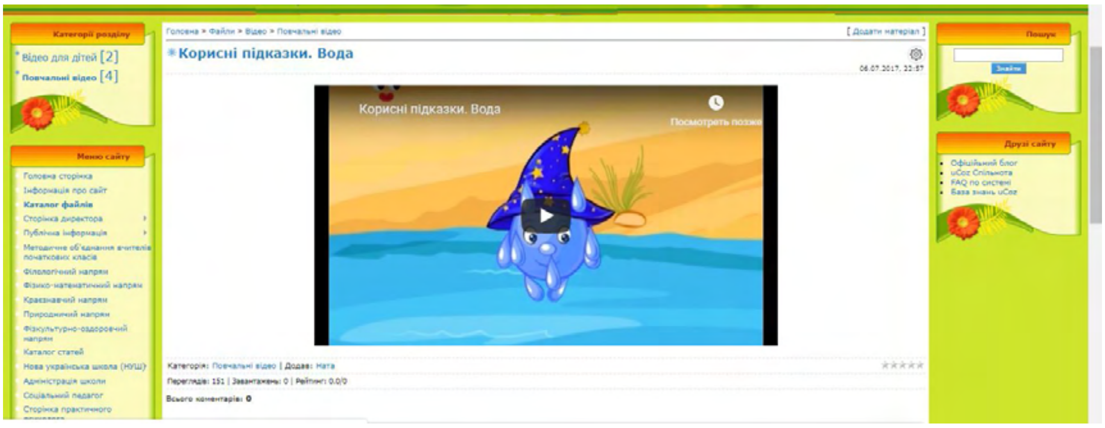


Рис.3 Повчальні відео для учнів

Матеріали сайту часто переглядають та скачують вчителі, учні, гості сайту, про що свідчить кількість переглядів та скачувань (Рис.4 Перегляди та завантаження).

Рис.4 Перегляди та завантаження

Учні можуть вдосконалювати свої знання та тренуватись з різних предметів виконуючи завдання (Рис.5 Зразки тематичних робіт).

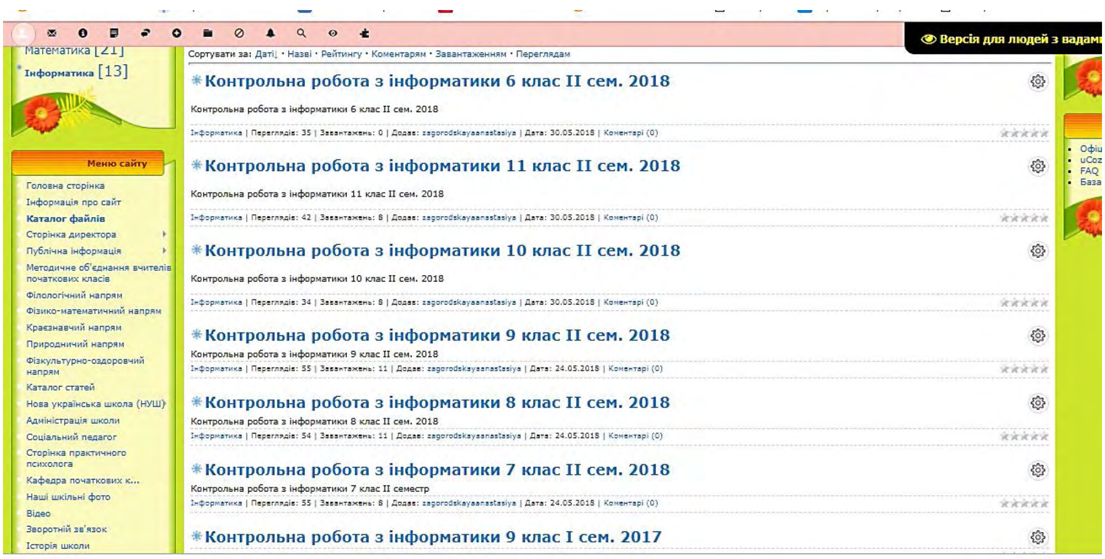


Рис.5 Зразки тематичних робіт

Планується в найближчий термін розмістити модуль, що забезпечить контроль навчальних досягнень учнів.

Висновки та перспективи подальших досліджень.

Сьогодні впроваджуються інновації в сфері ІТ-технологій. Це потребує від вчителів та інших учасників навчального процесу кардинальних змін та впроваджень новітніх інформаційних технологій у освітню діяльність. Як ми зазначали, сучасні технології з використанням мережі Інтернет відіграють велику роль в організації навчання. Велика увага повинна бути приділена майстерності викладання з використанням сучасних методик. Із власного досвіду можу сказати, що створення і використання персональних сайтів в освітніх закладах є важливим, необхідним ресурсом для використання як у стінах закладу освіти, так і у процесі самоосвіти.

Література:

1. Григорьев С. Г. Технология информационного интегрирования в разработке учебников и учебных пособий для Интернет / Григорьев С. Г., Гриншкун В. В. //Материалы VIII конференции представителей региональных научно-образовательных сетей «Relarn – 2001». – Петрозаводск : Изд-во Петрозаводского университета, 2001. – 150 с.

2. Жук Л. Г. Интернет-технологии как средство организации самостоятельной работы студентов технических вузов (на материале обучения иностранному языку) : дисс. … канд. пед. наук :
13.00.03 / Л. Г. Жук. – СПб, 2006. – 192 с.

3. Карташова Л. А. Особистий сайт педагога – вимога часу // Освіта. – 3–10 лютого, 2010. – С. 6.

4. Клокар Н. І. Організаційно-педагогічні засади створення електронних навчально-методичних комплексів для учнів [Електронний ресурс] //Інформаційні технології і засоби навчання. – 2010. – № 6 (20). – Режим доступу : http://www.ime.edu-ua.net/em20/emg.html.

5. Кривонос О. М. Використання сучасних інформаційних технологій при розробці електронних посібників з програмування / Кривонос О. М.,

Мануйлова О. Д. // Інформаційні технології і засоби навчання : електронне наукове фахове видання [Електронний ресурс] / Ін-т інформ. технологій і засобів навчання НАПН України, Ун-т менеджменту освіти НАПН України ; гол. ред.: В. Ю. Биков. – 2011. – № 4(24). – Режим доступу : http://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/494/431.

6. Методичні рекомендації щодо створення навчально-методичного комплексу навчальної дисципліни (Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича) [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://bio.chnu.edu.ua/dekanat/metodrada/nmk.doc.

7. Положення про електронні освітні ресурси МОН України. Наказ від 22.12.2017 №1662. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0066-18

8. Положення про організацію навчального процесу в кредитно-модульній системі підготовки фахівців // [розробники В. В. Грубінко, І. І. Бабін, О. В. Гузар]. – Тернопіль : Вид-во ТНПУ ім. В. Гнатюка, 2004. – 48 с.

9. Селевко Г. К. Энциклопедия общеобразовательных технологий : в 2 т. / Г. К. Селевко. – М. : НИИ школьных технологий, 2006. – Т. 2. – 2006. – 816 с.

10.Співаковський О. В. Теорія і практика використання інформаційних технологій у процесі підготовки студентів математичних спеціальностей : монографія / О. В. Співаковський. – Херсон : Айлант, 2003. – 229 с.

11.Спірін О. М. Критерії і показники якості інформаційно-комунікаційних технологій навчання / О. М. Спірін // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2013. – № 1 (33). [Електронний ресурс]. – Режим доступу до журналу : http://journal.iitta.gov.ua.

12.Стеценко Г. В. Педагогічний потенціал вікі-енциклопедії та її використання в навчально-виховному процесі // Наукові записки Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка. Серія : Педагогіка. – 2008. – № 7. – С. 53–57.

13. Ткачук Г. В. Методика використання освітніх веб-ресурсів у процесі підготовки майбутніх учителів інформатики : монографія / Г. В. Ткачук. – Умань : Видавець «Сочінський», 2011. – 177 с.
14. Яшина Т. С. Оценка качества образовательных веб-сайтов как фактор развития единого информационного образовательного пространства : дисс. … канд. пед. Наук : 13.00.01 / Т. С. Яшина. – Воронеж, 2005. – 205 с.
15. Моисеев В. Открытое образование: идеология формирования сети / В. Моисеев // Высшее образование в России – 2002. – № 6. – С. 78 - 83.
16. Чупахина Ж. Н. Перспективы формирования открытого образования в России / Ж. Н. Чупахина // Информационные системы и технологии. – 2004. – № 4 (5). – С. 62 - 65.

Науковий керівник: докт. пед. наук, доцент Клочко Оксана Віталіївна

УДК 37.001:004

Іщенко Вадим, Чеховська Юлія, Сорока Антон
студенти факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

STEM-ОСВІТА ЯК ОДИН З ГОЛОВНИХ ТРЕНДІВ ІННОВАЦІЙНОЇ ОСВІТИ

Анотація: *У статті розглядається впровадження STEM-освіти у закладах освіти України, а також переваги та недоліки інноваційних STEM-технологій у сучасній освіті. Реалізація STEM-освіти в українських школах.*

Ключові слова: *STEM-освіта, STEM-технології, сучасний урок.*

Annotation: *The article deals with the introduction of STEM-education in Ukrainian educational institutions, as well as the advantages and disadvantages of*

*innovative STEM-technologies in modern education.Implementation of STEM-education in Ukrainian schools***.**

Keywords: *STEM-education, STEM-technologies, modern lesson.*

Світові тенденції еволюції технологій визначили нові акценти у вітчизняній системі освіти через зростання високотехнологічних підприємств для яких потрібні висококваліфіковані спеціалісти технічних та інженерних спеціальностей, які мають креативне, аналітичне та високоорганізованого мислення, вміють ефективно розв'язувати проблеми, приймати рішення, ефективні в комунікаціях, співробітництві, роботі в командних проектах, інформаційно досвідчені, та соціально відповідальні. Ці якості, навички та компетенції повинна сформувати нова освітня STEM – педагогіка в контексті національної політики STEM-освіти.

На сьогодні освіта стає одним з ключових чинників розвитку економіки України, тоді як STEM-освіта – одним з головних трендів інноваційної освіти, адже ефективне провадження системи STEM-освіти продиктовано вимогою «Нової економіки XXI ст.», де панує конкурентоспроможність, тоді як професії близького майбутнього пов'язані з технологічним виробництвом, з природничими науками (біо- та нанотехнології), де фахівці мають бути всебічно підготовлені в різноманітних освітніх галузях природничих наук, інженерії та технології [1, с. 4].

Питаннями впровадження інноваційних технологій в сучасну освіту України займаються вітчизняні вчені: М. Головань, Ю. Горошко, А. Єршов, О. Клочко, В. Монахов, Т. Чепрасова та інші. Проблему мотивації суб`єктів навчання до науково-дослідної діяльності при викладанні природничо-наукових дисциплін досліджували вітчизняні науковці: Андрущенко Т. І., Величко В. Ю., Гальченко С. А., Гончарова Н. О., Глоба Л. С., Гуляєв К. Д., Камишин В. В., Клімова Е. Я., Комова О. Б., Лісовий О. В.,Ніколенко Л. Г., Норчевський Р. В., Поліхун Н. І., Постова К. Г., Попова М. А., Приходнюк В. В., Рибалко М. Н., Сліпухіна І. А., Стрижак О. Є., Чернецький І. С., Шаповалов Є. Б. та ін. Їх розробки стали базою для системного впровадження STEM-освіти у практику сучасних закладів [2, с. 182].

STEM-освіта в закладах освіти України

В Україні STEM-підходи реалізуються в багатьох школах. Позашкільна STEM-освіта в державі – це й різноманітні олімпіади, «Мала Академія наук», інших закладів позашкілля, і різноманітні конкурси і заходи: Intel Techno Ukraine; Intel Eco Ukraine; Фестиваль науки Sikorsky Challenge; наукові пікніки, хакатони і багато іншого [4].

STEM – це великий вибір можливостей професійного розвитку, надання учням доступу до технологій. Сьогодні, коли світ перетинається комп'ютерними мережами, діти створюють цифровий контент, обмінюються ним та використовують його в великих масштабах. Вони запускають веб-сайти, знімають фільми на телефони, створюють власні гейм-середовища тощо.

STEM-технології вимагають від учнів великих здібностей до критичного мислення, вміння працювати як в команді так і самостійно. В нашій школі при вивченні багатьох дисциплін, зокрема, математики, інформатики, фізики, зроблені перші кроки впровадження системи навчання STEM, як в урочній роботі так і в позашкільній – це інтерактивні уроки, олімпіади різних рівнів, діяльність «Малої Академії наук», участь учнів у різноманітних проектах, конкурсах та заходах STEM-освіта ставить перед учителями завдання інтеграції навчальних предметів, забезпечення тісного взаємозв'язку суміжних наук у процесі навчання. Інтегровані заняття спонукають до осмислення й пошуку причинно-наслідкових зв'язків, до розвитку логіки, мислення, комунікативних здібностей.

Одне з основних завдань, яке повинен розв'язувати вчитель – це організація та підтримка цілеспрямованої пізнавальної діяльності учнів, формування у них умінь та навичок здійснювати наукові дослідження. Головна мета науково-орієнтовної освіти школярів – це створення системи навчання на основі компетентнісного підходу, яка орієнтована на самореалізацію особистості молодого науковця. Використовуючи елементи STEM-технології вчитель створює для дітей такі можливості, які дозволяють їм бути більш активними, зацікавленими у власній освіті. Працюючи в сучасній школі вчитель повинен чітко усвідомлювати, що STEM-освіта об’єднує в собі міждисциплінарний та проектний підхід, основа якого є інтеграція природничих наук в технології, інженерну майстерність та математику. Вивчення навчального матеріалу повинно відбуватися по темам, які поєднують декілька предметів, матеріал яких тісно пов’язаний між собою та мають практичне застосування.

STEM-освіта за допомогою практичних занять демонструє дітям можливість застосування науково-технічних знань в реальному житті. На кожному уроці учні планують, розробляють моделі сучасної індустрії. Створюють проекти, намагаються запропонувати власну модель. Аналізують, роблять висновки, пов’язують її з життєвими ситуаціями, з власним досвідом. Це дає їм можливість бути більш впевненими у власних можливостях, навчитися йти до власної мети, долати перешкоди, перевіряти свою роботу багато разів, але не зупинятися перед перешкодами.

Працюючи за основними напрямками STEM-освіти це дозволить сформувати в учнів найважливіші характеристики, які визначають компетентного фахівця:

- уміння побачити проблему;
- уміння побачити в проблемі якомога більше можливих сторін і зв'язків;
- уміння сформулювати дослідницьке запитання і шляхи його вирішення;
- гнучкість як уміння зрозуміти нову точку зору і стійкість у відстоюванні своєї позиції;
- оригінальність, відхід від шаблону;
- здатність до перегруповування ідей та зв'язків;
- здатність до абстрагування або аналізу;
- здатність до конкретизації або синтезу;
- відчуття гармонії в організації ідеї.

Це дозволить наблизити зміст різноманітних сфер науково-технічної діяльності людського суспільства до навчального процесу.

Звичайно майбутнє – за міжпредметною інтеграцією, нажаль сьогодні діти отримують фрагментарні знання, які можна порівняти з «пазлами». І лише у небагатьох учнів ці «пазли» складаються в єдину «картину» світу. STEM-навчальний план заснований на ідеї навчання учнів із застосуванням міждисциплінарного і прикладного підходу. Замість того щоб вивчати окремо кожну з дисциплін, STEM інтегрує їх в єдину схему навчання.

Поєднувати математику з мистецтвом, а біологію з робототехнікою – саме це є реформою середної освіти. Справа не лише в інтеграції предметів: у школах буде більше групової проектної роботи, а завдання на уроках стануть більш прикладними. Дітям це допоможе виходити зі школи підготовленими до реального життя, а країні – отримати більше фахівців у сферах інженерії, ІТ чи нанобіології. Власне, потребою у фахівцях із гнучкими, комплексними знаннями та вмінням вирішувати еколого-технологічні проблеми і аргументують в Інституті модернізації змісту освіти впровадження STEM-у.

Запровадити STEM-освіту в школі найкраще можна у профільних класах. Зокрема, у класах природничо-математичного профілю (рис. 1).

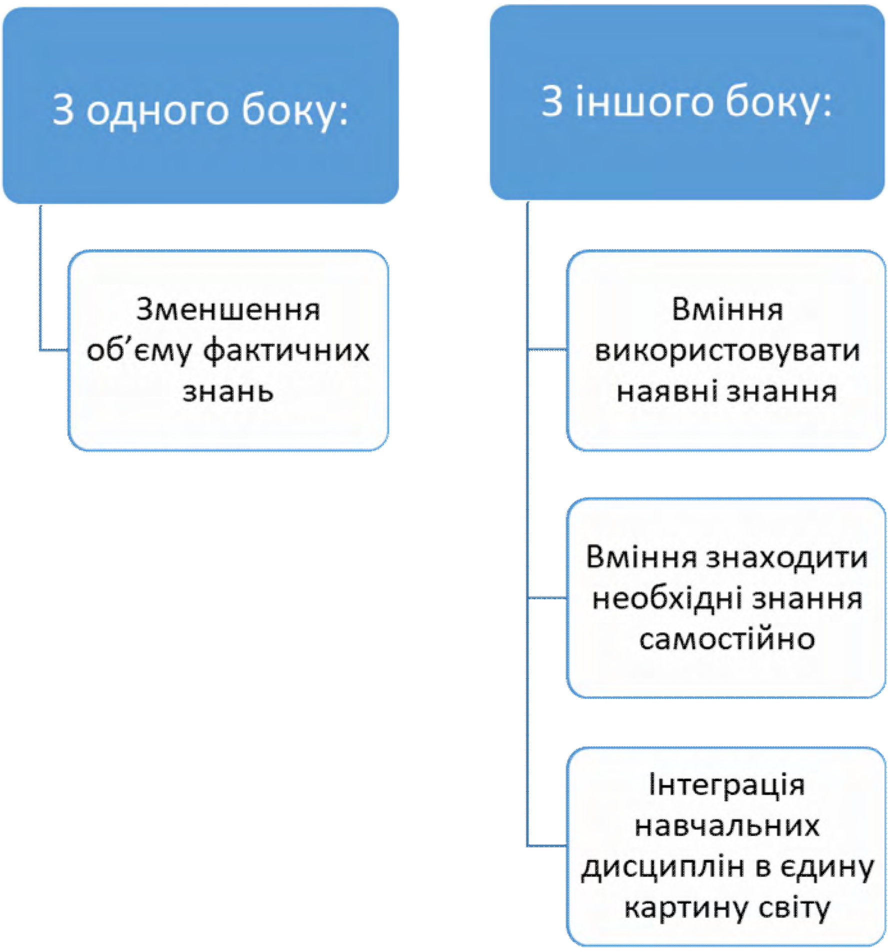


Рис. 1. Сучасний урок

Нова українська школа започаткувала системну реформацію освітньої галузі, в рамках якої впроваджується STEM-освіта, створюються різнорівневі STEM-центри, технопарки, експериментальні та технічні майданчики, та інші новітні форми, що дозволить реалізувати «технологічний стартап» для економіко-технологічного відродження усієї країни. Практична реалізація STEM-освіти стримується негативними факторами: – недостатньою кількістю сучасних освітніх програм, які розвивають компетенції в області мехатроніки, робототехніки, електроніки, програмування та інших областях технічної творчості; - значним дефіцитом кваліфікованих педагогів, готових організувати навчальний процес на сучасному обладнанні, з використанням освітніх технологій, що популяризують інженерні професії і формують інженернотехнічні компетенції учнів; – недостатнім використанням механізмів державно-приватного партнерства для підвищення якості, доступності та інвестиційної привабливості програм загального та додаткової освіти в області інженерно-технічної підготовки і технічної творчості.

Література:

1. Вольянська С.Є. STEM–освіта / С.Є. Вольянська // Довідник сучасного педагога / С.Є. Вольянська. – Х. : Вид. група «Основа», 2016. – С. 124–125. – (Б– ка журн. «Управління школою» ; Вип. 5)

2. Коваленко О. STEM–освіта: досвід упровадження в країнах ЄС та США / О. Коваленко, О. Сапрунова // Рідна школа. – 2016. – N 4. – С. 46–49. 3. Корнієнко О.Р. Про актуальність запровадження STEM–навчання в Україні [Електронний ресурс] / О.Р. Корнієнко. – Режим доступу : http://qoo.by/2TbS. – Назва з екрана.

3. Курносенко О. В. STEM-освіта : проблеми та напрямки впровадження [Електронний ресурс] / О. В. Курносенко. – Режим доступу : http://tsiurupynsk-school2.edukit.kherson.ua/distancijne_navchannya/mo_vchiteliv_fiziko-matematichnih_nauk/stem-osvita_problemi_ta_napryamki_vprovadzhennya/. – Назва з екрана.

4. STEM-освіта [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://btdc.org.ua/stem-osvita/. – Назва з екрана.

Науковий керівник: докт. пед. наук, доцент Клочко Оксана Віталіївна

УДК [37.091.33:004]:51

Каштельян Юлія

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ОСВІТНІЙ ПОТЕНЦІАЛ ВИКОРИСТАННЯ ПРИКЛАДНИХ ПРОГРАМНИХ ЗАСОБІВ МАТЕМАТИЧНОГО СПРЯМУВАННЯ У СЕРЕДНІХ ЗАКЛАДАХ ОСВІТИ

***Анотація:** У статті розглянуто використання прикладних програмних засобів у навчанні математики та розкрито їх освітній потенціал. Розглянуто можливості використання учнями програмного засобу GRAN.*

***Ключові слова:** інформаціно-комунікаційні технології, прикладне програмне забезпечення, навчання математики, освітній процес, GRAN.*

***Abstract:** The article discusses the use of applied software in teaching mathematics and their educational potential. The possibilities of using students of GRAN software are considered.*

***Keyword:** information-communication technologies, application software, learning math, educational process, GRAN.*

Сучасний період науково-технічного розвитку суспільства характеризується стрімким впровадженням комп'ютерних технологій у всі сфери діяльності людини, у тому числі в освітній процес.

Пріоритетним напрямком розвитку сучасної освіти є інформатизація освітнього процесу та впровадження комп'ютерних технологій в навчальну діяльність, що позитивно впливають на якість та ефективність навчання. На державному рівні питання впровадження інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) в освіту відображені в таких нормативних документах: Законі України «Про Основні засади розвитку інформаційного суспільства в Україні на 2007-2015 роки» [2], Указі Президента України «Про заходи щодо забезпечення пріоритетного розвитку освіти в Україні» [6], Наказі Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України «Про затвердження плану заходів щодо виконання Державної цільової програми впровадження у навчально-виховний процес загальноосвітніх навчальних закладів інформаційно-комунікаційних технологій «Сто відсотків» на період до 2015 року»[5], Концепції розвитку освіти України на період 2015-2025 років [4] тощо.

Використання ІКТ в навчальній діяльності досліджується у працях таких вітчизняних вчених, як М. І. Жалдак, В. І. Клочко, Н. В. Морзе, В. П. Горох, Ю. В. Горошко, Т. Г. Крамаренко, С. А. Раков, О. В. Співаковський, Ю. В. Триус та ін. У їхніх працях наведені рекомендації, концепції, висновки і пропозиції щодо використання комп'ютерних технологій в освітньому процесі закладів загальної середньої (ЗЗСО) та вищої освіти.

У зв'язку із впровадженням ІКТ у навчальний процес виникають проблеми щодо змісту, засобів, методів, організаційних форм навчання. Існує значна кількість досліджень з даної теми, проте відсутнє комп'ютерно-орієнтоване науково-методичне забезпечення навчання шкільних предметів, зокрема при навчанні математики, існують лише окремі методичні рекомендації щодо використання засобів ІКТ під час навчання окремих розділів математики. Саме тому, відповідно із концепцією розвитку освіти України на період 2015-2025 років одним із основних завдань є запровадження єдиних стандартів, компетентностей і результатів навчання у галузі ІКТ для учнів і викладачів, що відповідатимуть міжнародним показникам (PISA in computer skills), визначення мінімальний переліку потрібних ІТ-засобів та ІТ-сервісів для використання у навчальних закладах та встановлення державний стандарт для ІТ-розробок у сфері освіти (e-learning service standard / базовий стандарт e-навчання) [3].

Задля підвищення ефективності уроків математики Міністерство освіти України рекомендує під час навчального процесу використовувати: всесвітню мережу Інтернет, різноманітні програмні засоби навчального призначення, бібліотеки електронних наочностей, офісні та спеціалізовані пакети, наприклад, MsOffice, AutoCAD, MathCAD, MAPLE, GRAN, GeoGerbra, Maxima та інші. Використання їх на уроці по черзі чи разом, значною мірою підвищить ефективність навчально-виховного процесу в ЗЗСО.

Згідно з правилами використання комп'ютерних програм у навчальних закладах, у загальноосвітніх школах дозволено використовувати тільки те комп'ютерне програмне забезпечення навчального призначення, що має відповідний гриф або свідоцтво про визнання відповідності педагогічним вимогам МОН України. А саме такі електронні засоби навчального призначення з математики як GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D, DG, ТерМ, «Світ лінійних рівнянь», «Математика, 5-6 клас», Бібліотеки електронних начностей

«Алгебра, 7-9 клас», «Геометрія, 7-9 клас», ППЗ «Алгебра, 10-11 клас», «Геометрія, 10-11 клас» та інші широко впроваджуються нині [4, с. 37-38].

Застосування комп'ютерної техніки на уроці допомагає зробити його захоплюючим, пізнавальним, нетрадиційним та насиченим. Ефективність застосування нових інформаційних технологій на уроках математики обумовлена такими чинниками як:

- різноманітність форм представлення навчального матеріалу;
- достатньо високий рівень наочності;
- можливість моделювання різноманітних об'єктів і процесів;
- звільнення від рутинної роботи, що відвертає увагу від засвоєння основного змісту;
- організація колективної та індивідуальної дослідницької роботи;
- диференціювання роботу учнів;
- організація комп'ютерного оперативного контролю та оцінювання результатів навчання [7, с. 88-89].

Використання математичних програмних засобів, дає можливість учням розв'язувати певні завдання, не заглиблюючись у відповідний аналітичний апарат. Наприклад, школярі можуть розв'язувати певні рівняння не знаючи формул для знаходження коренів даного типу рівнянь, обчислювати похідні та інтеграли функцій не знаючи відповідних таблиць, досліджувати функції не знаючи алгоритму дослідження, обчислювати площі плоских фігур не зображуючи їх, знаходити об'єми тіл маючи лише числові значення певних елементів. Використання прикладних програмних засобів дозволяє перетворити розв'язування громістких задач на більш просте та наочне. Завдяки можливостям графічного супроводу комп'ютерного розв'язування задачі, учні чітко і легко розв'язують досить складні задачі, впевнено володіють відповідною системою понять і правил.

Застосування прикладного програмного забезпечення (ППЗ) математичного спрямування дає наочні уявлення про поняття, що вивчаються, розвиває образне мислення, просторову уяву, формує можливості досить глибоко проникнути в сутність досліджуваного явища, навчає неформально розв'язувати задачі.

Розглянемо можливості використання системи програмних засобів GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D, які є ліцензійними та дозволеними у використанні в закладах загальної середньої освіти зокрема.

За допомогою програми GRAN1 (GRaphic ANalysis) учні можуть будувати різноманітні замкнені і незамкнені ламані лінії, обчислювати їх довжини; периметри та площі многокутників; площі і об'єми поверхонь тіл; розв'язувати планіметричні задачі на побудову; здійснювати перетворення та рухи геометричних фігур; будувати графіки кількох функцій, аналізувати їх графіки; розв'язувати рівняння і нерівності та їх системи; обчислювати визначені інтеграли; визначати площі між двома кривими; обчислювати об'єми тіл обертання; обчислювати статистичні ймовірності випадкових подій, здійснювати статистичний аналіз експериментальних даних з побудовою відповідних графічних зображень тощо.

GRAN-2D (GRaphic ANalysis 2-Dimension) призначений для графічного аналізу геометричних об'єктів на площині. Використання пакету GRAN-2D надає можливість: створювати динамічні моделі геометричних фігур та їхніх комбінацій, використовуючи систему координат; проводити вимірювання геометричних величин; досліджувати геометричні місця точок; будувати графічні зображення; експортувати рисунки у графічні формати для створення геометричних ілюстрацій; обчислювати значення виразу, похідну у точці та визначений інтеграл; здійснювати перетворення фігур, а саме паралельне перенесення, поворот, осьова симетрія та інше. Важливою функцією пакету GRAN-2D є створення макросів – сценаріїв, що дозволяють автоматизувати виконання елементарних побудов.

GRAN-3D (GRaphic ANalysis 3-Dimension) призначений для графічного аналізу тривимірних об'єктів, та дозволяє: створювати та перетворювати моделі просторових об'єктів; виконувати перерізи многогранників площинами;

обчислювати об'єми та площі поверхонь многогранників та тіл обертання; знаходити кути та відстані між просторовими об'єктами; проводити аналіз просторових об'єктів та тіл; обчислювати подвійний інтеграл та інтеграл вздовж контура.

Розглянемо один із можливих методів розв'язання задачі з алгебри в 11 класі за допомогою програмного засобу GRAN1:

Задача. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями, утвореними обертанням навколо осі *Ox* кривої $y = 2^x$ і прямих $x = -1$ і $x = 4$ [1, с. 225].

Розв'язання.

Для обчислення площ поверхонь і об'ємів тіл, обмежених поверхнями, утвореними обертанням ламаних ліній навколо однієї з координатних осей, GRAN1 містить операції для обчислення об'єму та площі поверхні тіла обертання: «Операції → Інтеграли → Об'єм та площа поверхні тіла обертання, вісь *Ox*» («Операції → Інтеграли → Об'єм та площа поверхні тіла обертання, вісь *Oy*»)

1) Побудуємо графік кривої $y = 2^x$.(Рис. 1).

2) Відкриваємо вікно для обчислення об'єму: «Операції → Інтеграли → Об'єм та площа поверхні тіла обертання, вісь *Ox*». Вказуємо межі інтегрування $x = -1$ і $x = 4$, тобто A=-1, B=4, натискаємо кнопку «Обчислити» (Рис 2).

3) Отримали відповідь, що $V = 579{,}6\,\textit{куб. од.}$ і $S = 824{,}3\,\textit{кв. од.}$ (Рис. 2.)

Відповідь. $V = 579{,}6\,\textit{куб}$.

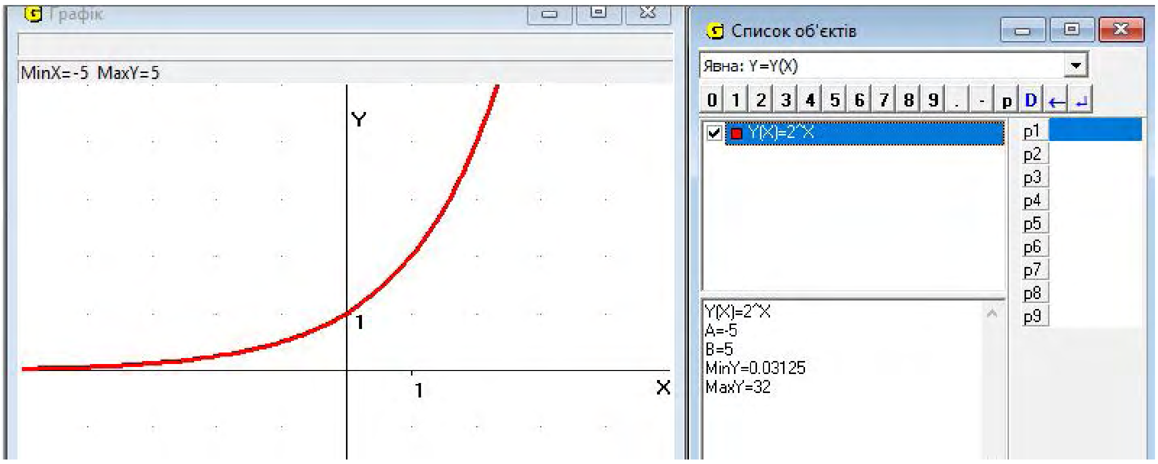


Рис. 1. Графік кривої $y = 2^x$

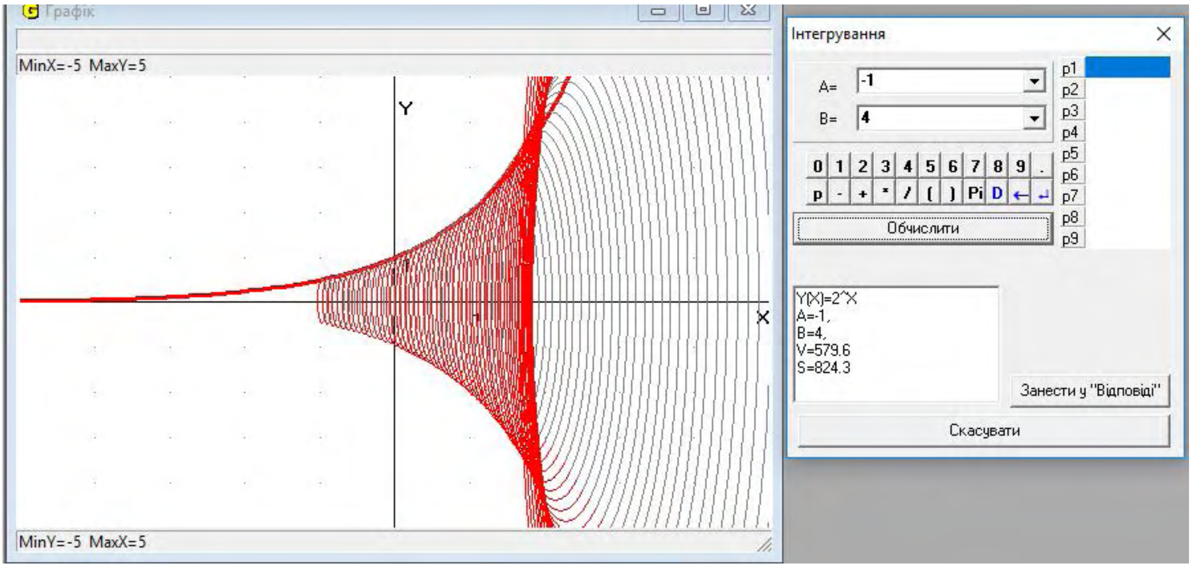


Рис. 2. «Обчислення об'єму та площі поверхні тіла обертання, навколо осі *Ox*»

Методичний коментар: для того, щоб розв'язувати дану задачу в середовищі GRAN1, в учнів повинні бути сформовані знання про обчислення об'ємів тіл обертання, тобто вони повинні розуміти, що для того щоб знайти об'єм тіла обертання необхідно обчислити визначений інтеграл від площі поперечного перерізу тіла по змінній відносно якої здійснюється обертання. Перед тим як здійснювати практичну реалізацію задачі за допомогою комп'ютера, необхідно скласти з учнями математичну модель задачі та вибрати програмний засіб, в середовищі якого буде здійснена практична реалізація.

Таким, чином, використання прикладного програмного забезпечення на уроках математики сприяє активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів, швидкому та ефективному засвоєнню навчального матеріалу, формуванню ключових компетентностей та результатів навчання.

Проте, основним недоліком використання комп‘ютерних технологій на уроці є зменшення безпосереднього спілкування учня з вчителем та з однокласниками, значні матеріальні затрати на технічне забезпечення навчальних закладів. Слід пам'ятати, що комп'ютерні технології є ефективним, але допоміжним засобом навчання. Не варто надто захоплюватись уміннями вільно оперувати зазначеними технічними засобами на противагу основному завданню вивчення математики – розвивати в учнів відповідні навички мислення. Головними суб'єктами навчального процесу повинні залишатися вчитель та учні, а комп'ютер має бути допоміжним засобом передачі та засвоєння навчального матеріалу. І тільки від майстерності вчителя залежать ефективність і результативність навчально-пізнавальної діяльності учнів.

Література:

1. Жалдак М. І. Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів / М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко. – Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. – 315 с.

2. Закон України «Про Основні засади розвитку інформаційного суспільства в Україні на 2007-2015 роки» [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: http://zakon.rada.gov.ua/laws/show/537-16.

3. Концепція розвитку освіти України на період 2015-2025 років. [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: http://old.mon.gov.ua/ua/prviddil/1312/1390288033/1414672797/.

4. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навчальний посібник / В. В. Корольський, Т. Г. Крамаренко, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; науковий редактор академік АПН України, д.пед.н., проф. М. І. Жалдак. – Кривий Ріг: Книжкове видавництво Кирєєвського, 2009. – 324 с.

5. Постанова Кабінету Міністрів України «Про затвердження Державної цільової програми впровадження у навчально-виховний процес загальноосвітніх навчальних закладів інформаційно-комунікаційних технологій «Сто відсотків» на період до 2015 року» [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: http://zakon.rada.gov.ua/laws/show/494-2011-п.

6. Указ Президента України «Про заходи щодо забезпечення пріоритетного розвитку освіти в Україні» [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: http://zakon.rada.gov.ua/laws/show/926/2010.

7. Юренко О. О. Використання програмного забезпечення у навчанні математики / О. О. Юрченко, С. С. Рябцун // Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики, фізики, інформатики у середніх та вищих навчальних закладах: зб. наук. праць за матеріалами Всеукр. наук.-метод. конф. молодих науковців (Кривий Ріг, 17-18 лютого 2011 р.). – Кривий Ріг : Криворізький держ. пед. ун-т, 2011. – с. 88-90.

Науковий керівник: канд. пед. наук, асистент Соя Олена Миколаївна

УДК 373:(004+51)

Клочко Оксана
докт. пед. наук, доцент,
доцент кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського
Михайлюк Олександр
студент факультету математики
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ З МЕТОЮ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МІЖПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ ІНФОРМАТИКИ ТА МАТЕМАТИКИ У ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Анотація: *Реалізація міжпредметних зв'язків математики та інформатики в освітньому процесі закладів загальної середньої освіти сприяє глибшому усвідомленню учнями суті введених математичних понять та розумінню їх прикладного застосування за допомогою СКМ, допомагає зрозуміти причинно-наслідкові зв'язки теоретичного матеріалу, виникнення та* *побудову певних теорій. З'ясовано, що даний підхід розкривається через синтез і взаємопроникнення елементів різних галузей знань і є формотворчою та рушійною силою для формування змісту фундаментальної математичної та інформатичної підготовки.*

Ключові слова: *міжпредметні зв’язки, системи комп'ютерної математики, інформатика, математика, заклад загальної середньої освіти.*

Abstract: *The implementation of interagents between the links of mathematics and informatics in the educational process of institutions of general secondary education promotes a deeper understanding of the essence of the introduced mathematical concepts and understanding of their applied application with SCM, helps to understand the causal relationships of the theoretical material, the emergence and construction of certain theories. It is explained that this approach is revealed through the synthesis and interpenetration of elements of various branches of knowledge and is a form-building and driving force for the formation of the content of fundamental mathematical and informational training.*

Keywords: *interpersonal relations, systems of computer mathematics, computer science, mathematics, institution of general secondary education.*

Актуальність проблеми використання систем комп'ютерної математики з метою забезпечення міжпредметних зв'язків інформатики та математики в наш час обумовлена рівнем розвитку суспільства, науки, техніки на етапі переходу інформаційного суспільства у SMART-суспільство (суспільство знань), на якому відбувається посилення інтеграції природничо-наукових, технічних, суспільних знань. Глобальними чинниками, що породжують міжпредметні зв’язки на даному етапі формування суспільства знань, є злиття технологій і розмиття граней між фізичними, цифровими і біологічними сферами, розвиток інтелектуальних технологій, інноваційних технологій, й ін. [1]. Ці характеристики суттєво змінюють освітню діяльність. Шкільна освіта у своєму розвитку повинна враховувати й втілювати нові види зв’язків між предметами, які наповнюються новим змістом відповідно до актуальних потреб суспільства. Курс шкільної інформатики має значні потенційні можливості щодо розв’язування задач реалізації міжпредметних зв'язків математики та інформатики і загальних задач освіти учнів.

На всіх етапах розвитку педагогіки дослідженням проблеми реалізації міжпредметних зв’язків інформатики та математики у закладах загальної середньої освіти приділялась значна увага. Міжпредметні зв’язки в освіті – розглядаються як засіб формування практичних вмінь та навичок застосовувати знання з однієї дисципліни у процесі вивчення інших. Зокрема, дане питання вивчали О.І. Глобін, М. Жалдак, М. Ковтонюк, Ю. Рамський й ін. [2, 3]. Науковцями доведено, що успішне розв’язання цієї проблеми суттєво впливає на забезпечення позитивної динаміки якості й ефективності освітнього процесу.

За час впровадження інформаційних технологій в освіту помітно змінилися роль і місце інформатики у навчальному процесі. Інформатика, у контексті STEM-освіти, з предмету навчання перетворилися на інструмент, який широко використовується у всіх сферах діяльності. Реалізація міжпредметних зв’язків інформатики і математики дозволить на якісно новому рівні вирішувати завдання навчання, розвитку та виховання учнів, реалізувати фундаментальний підхід для комплексного бачення і вирішення проблем реальної дійсності. Сьогодні учні повинні не просто опанувати теоретичні основи математики й інформатики, але й сформувати чіткі уявлення про те, де і як вони зможуть ці знання застосувати. Для ґрунтовної підготовки учнів в галузях математики та інформатики важливо виявити міжпредметні зв’язки, врахувати прикладну спрямованість навчання при формуванні змісту цих дисциплін. Саме тому забезпечення міжпредметних зв’язків є важливою умовою і результатом комплексного підходу в навчанні учнів.

Наприклад, навчання інформатики повинно проводитись на рівні міжпредметних зв’язків з метою комплексного застосування, систематизації, аналізу знань, переносити ідеї та методи з однієї науки в іншу. Інформатика, як і математика, використовується з метою опису та дослідження проблем інших наук, забезпечує методами та технологіями дослідження інші науки, підсилює міжпредметні зв’язки.

Серед міжпредметних методів і процедур математики та інформатики можемо виділити: абстрагування і конкретизація, аналіз і синтез, індукція і дедукція, формалізація, візуалізація, структуризація, алгоритмізація і програмування, інфологічне (інформаційно-логічне) моделювання, математичне моделювання. Інформатичними міжпредметними методами є комп'ютерне моделювання, обчислювальний експеримент, програмне управління, розпізнавання, класифікація та ідентифікація образів, експертне оцінювання, тестування та інші.

Функції міжпредметних зв'язків тісно взаємопов'язані між собою, а єдність їх реалізації ефективно впливає на освіту, виховання розвиток особистості учня в процесі навчання. Важливе значення має при цьому використання особистісно-орієнтованих технологій навчання (наприклад, використання методу проектів при вивченні окремих тем математичної інформатики). Саме використання таких технологій навчання сприяє продуктивнішій реалізації принципу єдності навчання, виховання та розвитку учнів в освітньому процесі, стимулює розвиток їх творчої пізнавальної активності, пізнавальних інтересів і здібностей.

Інформатика, з точки зору теоретичних основ і методів, тісно взаємопов'язана з математикою. І навпаки, методи інформатики, інформаційні технології є засобом моделювання, впливають на техніки і зміст математичних досліджень. Наприклад, використання імітаційного моделювання для дослідження об'єктів реальної дійсності, розв'язування практичних задач різних сфер діяльності людини. Тому у навчальному процесі доцільно використовувати системи комп'ютерного моделювання (СКМ).

Використання СКМ значно полегшує розв'язування типових математичних задач, таких як обчислення значень функцій, побудова графіків та діаграм, розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем, обчислення інтегралів, знаходження похідних функцій тощо. Робота з ними дозволить здійснювати імітаційне моделювання, унаочнити викладання матеріалу учням, дозволить скоротити час розв'язування досить складних і трудомістких математичних задач, тощо.

Сучасні СКМ це перш за все – це ефективні засоби розв’язування більшості математичних задач, потужні електронні довідники та бази даних зі всіх сучасних напрямів математики та засоби підготовки високоякісних електронних статей, книг.

Як правило, СКМ використовуються на ПК, що функціонують під управлінням операційних систем сімейства Windows фірми Microsoft. Проте, існують версії СКМ для роботи під управлінням операційних систем UNIX, LINUX, MAC тощо.

На сьогоднішній день на ринку програмної продукції існує достатня кількість СКМ. Серед них найбільш популярними є Derive, Mathcad, Matlab, Maple, Mathematica, Maxima й ін.

Derive – СКМ початкового рівня. Вона орієнтована на шкільну та вищу освіту, що не вимагають поглибленої математичної підготовки. Характеризується недостатньо розвиненими можливостями графічної візуалізації отриманих результатів, хоча останнім часом Derive постійно поновлюється. Система функціонує на основі мови штучного інтелекту (MU LISP) і є найменш вимогливою до апаратних характеристик ПК. Проте, за можливостями застосувань не може конкурувати з системами більш високого класу ані в чисельних розрахунках, ані в символьних перетвореннях, ані в графічній візуалізації результатів обчислень.

MathCAD (розробник – фірма MathSoft) – система, орієнтована на виконання чисельних та аналітичних розрахунків з використанням математичної нотації подання результатів обчислень. Оснащена адаптованим інтерфейсом і забезпечує широкі можливості графічної візуалізації обчислень, є найбільш масовою СКМ. Ця СКМ містить досить потужну систему чисельних методів, проте дещо обмежену систему символьних перетворень. Символьні перетворення в цій системі здійснюються на основі ядра Maple.

Matlab (фірма-розробник – MathWorks, Inc) – потужні та об’ємні системи, орієнтовані на матрично-чисельні методи, реалізацію чисельних обчислень підвищеної складності, математичне моделювання систем та пристроїв. Містить десятки пакетів розширень з різних галузей математики і багатьох сфер її застосування. У цій системі також використовується для символьних перетворень ядро системи Maple. MatLab є добре апробована і надійна СКМ, розрахована на розв’язування широкого кола математичних задач з поданням даних в матричній формі. Популярності системи сприяє її розширення Simulink, що надає зручні і прості засоби, у тому числі візуальне об’єктно-орієнтоване програмування, для моделювання лінійних та нелінійних динамічних систем, а також значна кількість інших пакетів розширення системи. Вважається, що це одна з кращих СКМ в галузі чисельних розрахунків. До її недоліків відносять певну громіздкість та вимогливість до ресурсів ПК.

Символьні (чи інакше, аналітичні) операції — це те, що кардинально відрізняє системи вищого класу Maxima (Macsyma), Maple та Mathematica (і подібні їм символьні математичні системи) від систем для виконання чисельних розрахунків. При символьних операціях завдання на обчислення формуються у вигляді аналітичних виразів, результати обчислень також подаються в символьному вигляді.

Система Maxima має розвинений апарат засобів лінійної алгебри та диференціальних рівнянь. Система орієнтована на прикладні розрахунки і не призначена для теоретичних досліджень в галузі математики. У зв’язку з цим у програмі відсутні або зменшені розділи, присвячені теоретичним методам (теорія чисел, теорія груп, математична логіка і т.п.). Головною перевагою Maxima перед іншими універсальними системами є те, що користувач має змогу аналітично та чисельно розв’язувати велику кількість різних типів рівнянь у частинних похідних. Maxima має кілька видів графічних інтерфейсів (xmaxima, emaxima, imaxima та ін.). За допомогою системи Maxima можна генерувати коди описів програм мовами Fortran та C, включаючи оператори управління, підпрограми subroutine та function. Сучасний розвиток комп’ютерних технологій, орієнтованих на створення інтегрованих пакетів multimedia-технологій, привів до появи нового рівня математичних систем, серед яких найвідомішими є пакети Maple фірми Maple Waterloo Inc та Mathematica фірми Wolfram Research Inc.

Maple, Mathematica – це універсальні системи комп’ютерної математики, орієнтовані на виконання аналітичних обчислень на будь-якому рівні. Досить розповсюджені у практиці виконання наукових досліджень. Ці СКМ є одними з найпотужніших систем, орієнтованих на символьні обчислення. За допомогою Maple, Mathematica можна виконувати складні алгебраїчні перетворення, операції над комплексними числами, знаходити скінченні та нескінченні суми та добутки, границі, похідні та інтеграли, розв’язувати аналітично та чисельно рівняння, нерівності та їх системи, виконувати дво- та тривимірні графічні побудови, розв’язувати мінімаксні задачі та задачі лінійного програмування, застосовувати спеціальні функції (Бесселя, Ейрі, Хевісайда тощо). Математичні конструкції виводяться на екран у стандартній математичній нотації, проте введення математичних конструкцій здійснюється за допомогою командного рядка. У ці СКМ вбудовано розвинену мову програмування, що дає змогу користувачеві створювати власні програми і, таким чином, розширювати можливості використання пакетів Maple чи Mathematica для розв’язування спеціальних задач.

Наведемо приклад забезпечення міжпредметних зв’язків математики та інформатики у процесі вивчення теми «Комп’ютерне моделювання» із використанням СКМ. Учням пропонується виконати завдання практичної роботи «Створення і опрацювання моделей на прикладах задач з різних предметних галузей в різних програмних середовищах».

Завдання. Характеристика зміни кількості опадів є суттєвою компонентою у вивченні проблем іригації, водоспоживання, рослинництва. Розглянемо такий приклад. Необхідно визначити найкращу урожайність пасовищної трави (U) і оцінити оптимальну середньомісячну кількість опадів (r). Модель даного процесу подана у вигляді рівняння:

$$U(r)=-0.9483*x^2+9.7417*x+11.308.$$

Покроковий опис здійснених дій можна описати наступним чином (рис. 1) [4, с. 5-6]:

1.Будуємо математичну модель. В нашому випадку – графік функції.

2. Максимум функції шукаємо за допомогою засобів СКМ MathCAD (зокрема, функції Maximize(y,x)).

3. Обчислюємо значення функції в точці екстремуму.

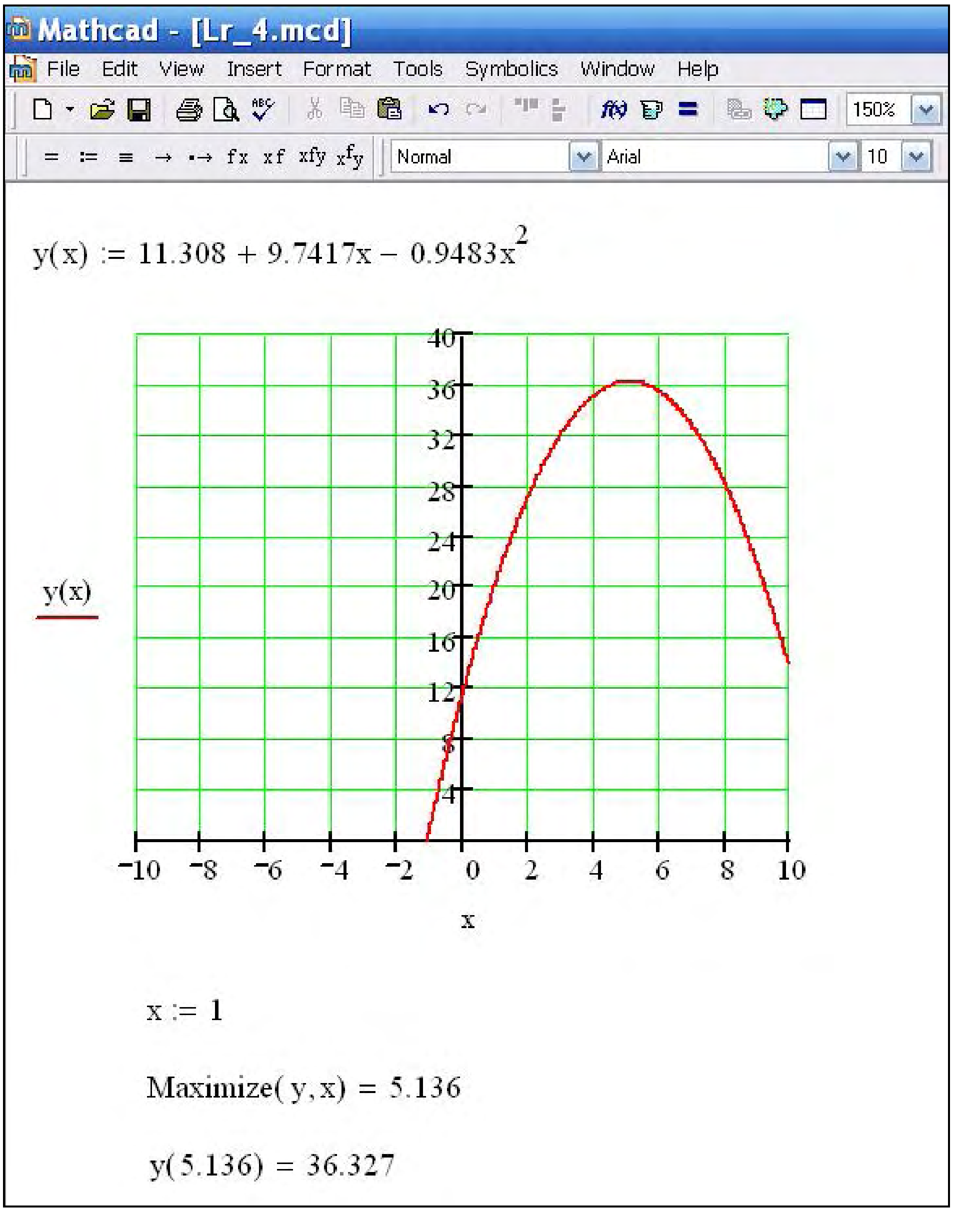


Рис. 1. Розв’язування задачі в системі MathCAD

На нашу думку, також доцільно ознайомити учнів із засобами пошуку екстремуму функції за допомогою відповідних засобів СКМ MatLab, MathCad, Maple і ін.

Таким чином проектування і конструювання дидактичного комплексу міжпредметних зв'язків математики та інформатики має на меті створення вчителем прикладного навчального середовища результатом впровадження якого є усвідомлення учнями певних понять, розуміння важливості вивченого матеріалу, набуття знань, умінь, навичок. Застосовуючи принцип інтеграції у навчанні учитель здійснює проектування і конструювання змісту начального процесу, що обумовлюється структурованістю навчального матеріалу, управління пізнавальною діяльністю учнів. Створення такого дидактичного комплексу обумовлюється синтезом понять, тем і розділів окремих дисциплін.

Отже, реалізація міжпредметних зв'язків математики та інформатики в освітньому процесі закладів загальної середньої освіти сприяє глибшому усвідомленню учнями суті введених математичних понять та розумінню їх прикладного застосування за допомогою СКМ, допомагає зрозуміти причинно-наслідкові зв'язки теоретичного матеріалу, виникнення та побудову певних теорій. З'ясовано, що даний підхід розкривається через синтез і взаємопроникнення елементів різних галузей знань і є формотворчою та рушійною силою для формування змісту фундаментальної математичної та інформатичної підготовки. Необхідність інтегрованого, системного впровадження СКМ у навчальний процес забезпечить формування інформаційної компетентності, більш якісне навчання та інтелектуальний розвиток учнів.

Важливим напрямом подальших наукових розвідок є дослідження застосування міжпредметних зв'язків до формування змісту окремих розділів і тем з математики та інформатики з метою фундаменталізації навчального процесу.

Література:

1. World Economic Forum Annual Meeting 2016: Mastering the Fourth Industrial Revolution [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.weforum.org/reports/world-economic-forum-annual-meeting-2016-mastering-the-fourth-industrial-revolution. – Дата звернення: 05.10.2018.

2. Глобін О.І. Міжпредметні зв'язки в умовах профільного навчання математики: методичний посібник для вчителів/ Глобін О. І. – К.: Педагогічна думка,2012. – 88 с.

3. Ковтонюк М. М. Фундаменталізація професійної підготовки майбутнього вчителя математики – бакалавра: [монографія] /Мар'яна Михайлівна Ковтонюк. – Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2013. – 424 с.

4. Клочко В.І. Інтегративний підхід у процесі формування фундаментальної підготовки з математики із застосуванням засобів інформаційно-комунікаційних технологій здобувачів вищої освіти / Віталій Іванович Клочко, Оксана Віталіївна Клочко, Альона Анатолівна Коломієць // Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences, IV(12). – Készült a Rózsadomb Contact Kft nyomdájában, Budapest, 2016. – С. 59-63.

УДК 517.5

Ковтонюк Мар'яна,
докт. пед. наук, професор,
завідувач кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Бойко Вікторія,
студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ З ДОПОМОГОЮ ГРАНИЦІ

Анотація: *Стаття присвячена аналізу побудови графіків функцій, які містять граничний перехід.*

Ключові слова: *функція, графік функції, границя функції, границя числової послідовності.*

Abstract: *The article is devoted to the analysis of the construction of graphs of functions that contain the boundary transition.*

Keywords: *function, function graph, boundary function, boundary of the numerical sequence.*

Побудова графіків функцій – цікава, важлива і непроста задача. Відомий український вчений-математик А. Я. Дороговцев у свій час зауважував, що «досить тонкі і глибокі поняття математичного аналізу потребують для засвоєння значних зусиль особистості і правильні інтуїтивні уявлення можна отримати тільки після грунтовного самостійного продумування. Одним із небагатьох шляхів активного засвоєння положень математичного аналізу є розв'язування задач» [1].

Розглянемо побудову графіків функцій, заданих з допомогою граничного переходу: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x\in X$. Тут варто звернути увагу, що у функції, яка задається через границю, коли $n\to\infty$, ми фактично знаходимо границю функціональної послідовності (ФП) $\left(f_n(x)\right)$, тобто *відповідності, яка кожному натуральному n співвідносить деяку функцію* $f_n(x)$. *ФП називається збіжною у точці* $x_0\in X$, *якщо <u>числова</u> послідовність* $\left(f_n(x_0)\right)$ *збіжна. Точка* x_0 *називається точкою збіжності ФП.* Функціональна послідовність називається *збіжною на множині* $D\subset X$ (або поточково-збіжною на множині *X* [??]), якщо вона збіжна у кожній точці множини *D*. *Множину D точок збіжності називають областю збіжності ФП.* З означення збіжної ФП випливає, що

$$\boxed{\underline{\textit{кожній}}\ \text{точці}\ x_0\in D \xrightarrow{\text{функція}} \underline{\textit{одне}}\ \text{число}\ \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)=f(x_0)},$$

тобто в такий спосіб задається функція $f(x)$, яка називається **граничною**.

З курсу математичного аналізу відомо, що збіжність неперервних на множині *D* функцій ще не гарантує неперервності граничної функції. Відомі класичні приклади: $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1, \\ 1, & x = 1; \end{cases} = f_1(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases} = f_2(x)$, де члени функціональних послідовностей є неперервними функціями, а граничні функції є розривними функціями. Неперервність і диференційовність граничної функції гарантує так звана рівномірна неперервність ФП [2]. Задачі такого типу часто пропонуються на обласних учнівських та студентських олімпіадах [3], [4].

Задача 1. Побудувати графік функції $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx,\ x \in \mathbb{R}.$

□ Залежно від змінної x границя числової послідовності $(\operatorname{arctg} nx)$ (тут змінна x фіксується) може набувати різних значень: якщо $x > 0$, то $nx > 0, nx \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, тому $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \frac{\pi}{2}$; якщо ж $x < 0$, то $nx < 0, nx \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$, тому $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = -\frac{\pi}{2}$; і, нарешті, якщо $x = 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} nx = 0$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = 0.$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, x < 0 \end{cases} \quad ■$$

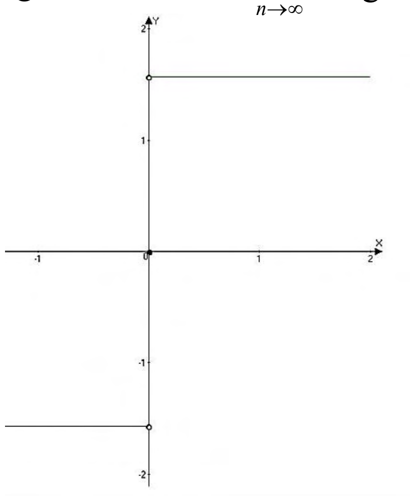


Рис.1. Графік функції до задачі 1.

Задача 2. Побудувати графік функції

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,\ x \in \mathbb{R}.$$

□ У кожній фіксованій точці використаємо другу «чудову» границю та її наслідки. Отже отримаємо відому нам експоненціальну функцію.

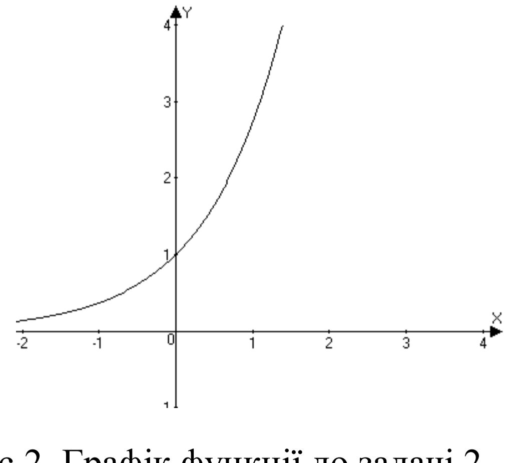


Рис.2. Графік функції до задачі 2.

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^{x}=e^{x} \quad \blacksquare$$

Задача 3. Побудувати графік функції $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{n}+\left(\dfrac{x^{2}}{2}\right)^{n}}$, $x\ge 0.$

□ Аналогічно до першої задачі проведемо перетворення:

$1\le \sqrt[n]{1+x^{n}+\left(\dfrac{x^{2}}{2}\right)^{n}}<\sqrt[n]{3}$, якщо $0\le x\le 1$;

$x\le \sqrt[n]{1+x^{n}+\left(\dfrac{x^{2}}{2}\right)^{n}}=x\sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{x}\right)^{n}+\left(\dfrac{x}{2}\right)^{n}+1}<x\sqrt[n]{3}$, якщо $1\le x\le 2$;

$\dfrac{x^{2}}{2}\le \sqrt[n]{1+x^{n}+\left(\dfrac{x^{2}}{2}\right)^{n}}=\dfrac{x^{2}}{2}\sqrt[n]{\left(\dfrac{2}{x^{2}}\right)^{n}+\left(\dfrac{2}{x}\right)^{n}+1}<\dfrac{x^{2}}{2}\sqrt[n]{3}$,

якщо $x\ge 2$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$, тому $f(x)=\begin{cases}1,\ 0\le x\le 1,\\ x,\ 1<x<2,\\ \dfrac{x^{2}}{2},\ x\ge 2.\end{cases}$ $\blacksquare$

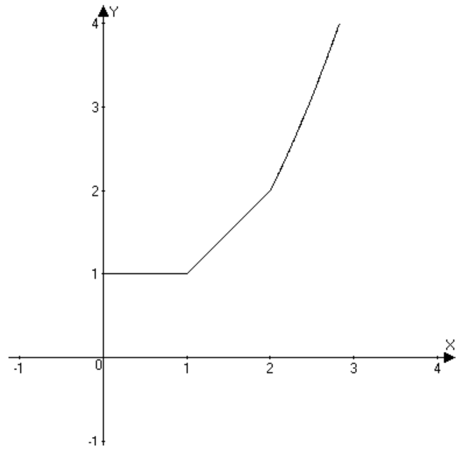


Рис.3. Графік функції до задачі 3.

Задача 4. Побудувати графік функції $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}$, $x\in\mathbb{R}.$

□ а)

$x>0, nx\underset{n\to\infty}{\to}+\infty, e^{nx}\to+\infty, f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{nx}\left(\dfrac{x}{e^{nx}}+1\right)}{e^{nx}\left(\dfrac{1}{e^{nx}}+1\right)}=$

б) $x=0, f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{0+e^{0}}{1+e^{0}}=\dfrac{1}{2};$

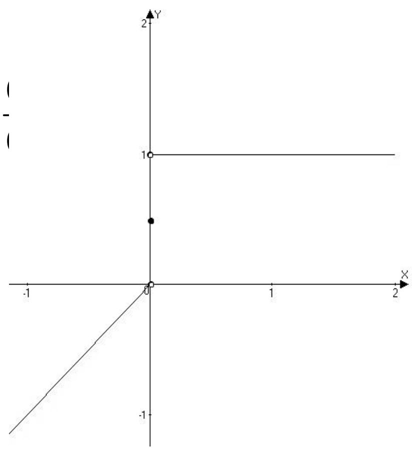


Рис.4. Графік функції до задачі 4.

в) $x<0, nx \underset{n\to\infty}{\to} -\infty, e^{nx} \to 0, f(x) = \; = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}} = \dfrac{x+0}{1+0} = x;$

$$f(x) = \begin{cases} x, \; x<0, \\ \dfrac{1}{2}, \; x=0, \\ 1, \; x>0. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Задача 5. Побудувати графік функції $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (x+1) \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^{2n}+1}$.

□ 1) $|x|<1$, то $x^{2n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} (x+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x^{2n}+1} = (x+1) \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}(x+1);$$

2) $|x|=0$, то $f(x) = (x+1) \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2} = \begin{cases} 2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2}, \; x=1, \\ 0, \; x=-1. \end{cases}$

3) $|x|>1$, то $x^{2n} \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, то $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (x+1) \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^{2n}+1} = (x+1)\cdot 0 = 0;$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}(x+1), \; |x|<1, \\ 2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2}, x=1, \\ 0, \; x=-1, \\ 0, \; |x|>1. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

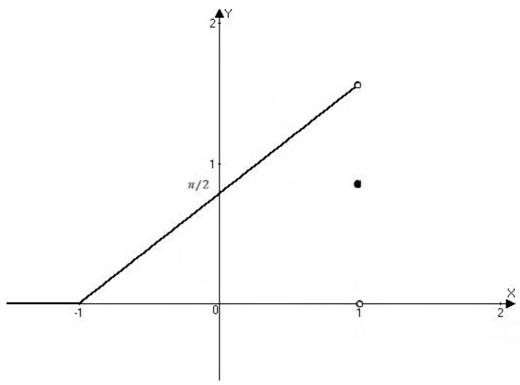


Рис.5. Графік функції до задачі 5.

Задача 6. Побудувати графік функції $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} \left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left[m \sin^2 (n! \pi x) \right] \right)$.

□1) $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, то $n!\pi x = \pi k$, то $\sin^2(n!\pi x) = 0, \operatorname{arctg} \dfrac{m}{0} = 0; f(x) = 0.$

2) $x \in I$, то $n!\pi x \ne \pi k$, то $\sin^2(n!\pi x) > 0, \left[m \cdot \sin^2 n!\pi x \right] \to +\infty, m \to \infty$, то

$\operatorname{arctg}\left[m\cdot\sin^2 n!\pi x\right]\to\frac{\pi}{2}, f(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1.$

$$f(x)=\begin{cases}0, x\in\mathbb{Q}\\ 1, x\in I\end{cases}\qquad\blacksquare$$

Задача 7. Довести, що функція Діріхле $H(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\left(\pi m!x\right)\right)$ розривна при кожному значенні *x*.

□ 1) Якщо $x=\frac{p}{q}-$ раціональне число, то $m!x=m!\cdot\frac{p}{q}=$

$=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(q-1)\cdot q\cdot(q+1)\cdot\ldots\cdot m\cdot\frac{p}{q}=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(q-1)\cdot(q+1)\cdot\ldots\cdot m\cdot p$ –

завжди парне число, тому $\cos\pi m!x=1, H(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\left(\pi m!x\right)\right)=1.$

1) Якщо $x=\frac{p}{q}-$ ірраціональне число, то $m!x$ не є цілим ні для яких m , отже $\left|\cos\pi m!x\right|<1$, а оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\left(\pi m!x\right)=0,$ то $H(x)=0.$

Таким чином, функція має вигляд $H(x)=\begin{cases}1, \textit{якщо}\quad x-\textit{раціональне},\\ 0, \textit{якщо}\quad x-\textit{ірраціональне}.\end{cases}$

Нехай x_0 – довільна , $\{x_n\}-$ послідовність раціональних чисел і $\{x_n'\}-$ послідовність ірраціональних чисел, збіжних до x_0.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}H(x_n)=1,$ а $\lim\limits_{n\to\infty}H(x_n')=0,$ то x_0- точка розриву. ■

Задача 8. Побудувати графік функції $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}, x>0.$

□1)

$0<x\le1,\ 1<\sqrt[n]{1+x^n}<\sqrt[n]{2},\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}=1.$

2) $x>1,$ то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}=$

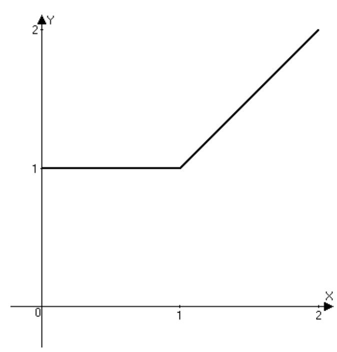


Рис.6. Графік до задачі 8.

$$= \lim_{n\to\infty} x\sqrt[n]{1+\frac{1}{x^n}} = x\cdot 1 = x.$$

$$y = \begin{cases} 1, \ 0 < x \le 1, \\ x, \ x > 1. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Задача 9. Знайти явний вигляд функції $y = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}\left(\sin^2\left(n!\pi x\right)\right)$.

□ Нехай $x = \frac{p}{q}$, де p і q взаємно прості числа, тоді $n!x = n!\cdot\frac{p}{q}$ – ціле число при $n > q$, а $\sin^2\left(n!x\pi\right) = 0$, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}\left(\sin^2\left(n!x\pi\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn} 0 = 0$.

Нехай $x \in I$, то $n!x \ne 0$ ціле число, то $\sin^2\left(n!x\pi\right) \ne 0$, $\sin^2\left(n!x\pi\right) > 0$. Тоді, $\operatorname{sgn}\sin^2\left(n!x\pi\right) = 1$, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn}\left(\sin^2\left(n!x\pi\right)\right) = 1$. Отже, $y = \begin{cases} 0, x \in \mathbb{Q} \\ 1, x \in I \end{cases}$. ■

Висновки. Можна і варто продовжити збирати і розв’язувати цікаві задачі на побудову графіків, адже, як казав відомий математик Д. Пойа, «розв’язування задач – практичне мистецтво, подібне до плавання, катання на лижах чи грі на фортепіано; навчитись його можна, тільки беручи приклад із кращих зразків та постійно практикуючись… Та пам’ятайте: якщо ви хочете навчитись плавати, то сміливо входьте у воду, а якщо хочете навчитись розв’язувати задачі, то розв’язуйте їх».

Література:

1. Дороговцев А.Я. Избранные задачи по математическому анализу / А. Я. Дороговцев//. – К.: Вища школа, 1982. – 104 с.
2. Ковтонюк М. М. Лекції з математичного аналізу. Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів / М. М. Ковтонюк. – Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер», 2013. – 289 с. (Гриф МОНМС України, лист №1/11–15245 від 01.10.2012 р.).
3. Курченко О. О. Задачі студентських олімпіад з математики /О. О. Курченко, К. В. Рабець. – Суми: ДВНЗ «УАБС НБУ», 2008. – 166 с.

4. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч /О. А. Сарана. – Тернопіль: Навчальна книга– Богдан, 2011. – 400 с.

УДК 514.112.4

Левицька Марія, Поплавська Марина
студентки факультету математики ,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ЗНАХОДЖЕННЯ ПЛОЩ МНОГОКУТНИКІВ ЗА ДОПОМОГОЮ РІВНОВЕЛИКИХ ФІГУР

Анотація: *У статті розглядаються рівновеликі многокутники та їх основні властивості з доведенням. З'ясовано, як можна знайти площі многокутників за допомогою рівновеликих фігур (многокутників) та наведено приклади таких задач.*

Ключові слова: *рівновеликі та рівноскладені многокутники, площа фігури.*

Abstract: *In the article the equilateral polygons and their basic properties with proof are considered. It is found how it is possible to find squares of polygons using equal figures (polygons). Specific examples are given.*

Keywords: *even and smoothly folded polygons, the area of the figure.*

У математиці існує значна кількість методів знаходження площ многокутників. Один з них – за допомогою рівновеликих фігур. Для початку з'ясуємо сутність поняття рівновеликі фігури та як воно пов'язане з рівноскладеністю.

Рівновеликі фігури – це фігури, які мають однакові площі. Рівноскладені фігури – фігури, які можна розрізати на однакову кількість відповідно рівних частин. Поняття рівноскладеність застосовується до рівновеликих многокутників.

Два многокутника називають рівноскладеними, якщо один з них можна розрізати на деяку кількість менших многокутників й скласти з них інший. Очевидно, що рівноскладені многокутники є рівновеликими. Природньо виникає питання: чи можна кожну із двох рівновеликих фігур скласти з того самого набору фігур? Відповідь на це питання ми дамо згодом.

Для того, щоб переконатися, що наше припущення про те, що рівноскладені многокутники є рівновеликими, – правильне, продемонструємо кілька тверджень.

Лема 1. Якщо многокутник A рівноскладений з многокутником B і многокутник B, у свою чергу, рівноскладений з C, то A і C також рівноскладені.

Доведення. Дійсно, розіб'ємо фігуру B на такі частини, щоб з них можна було скласти фігуру A (рис.1,а); окрім цього розіб'ємо фігуру B так, щоб скласти фігуру C (рис.1,б). Зрозуміло, що в двох випадках за допомогою розбиття фігури B на менші частини ми можемо скласти з них і фігуру A, і фігуру C. Таким чином, A і C рівноскладені. [1, с. 8]

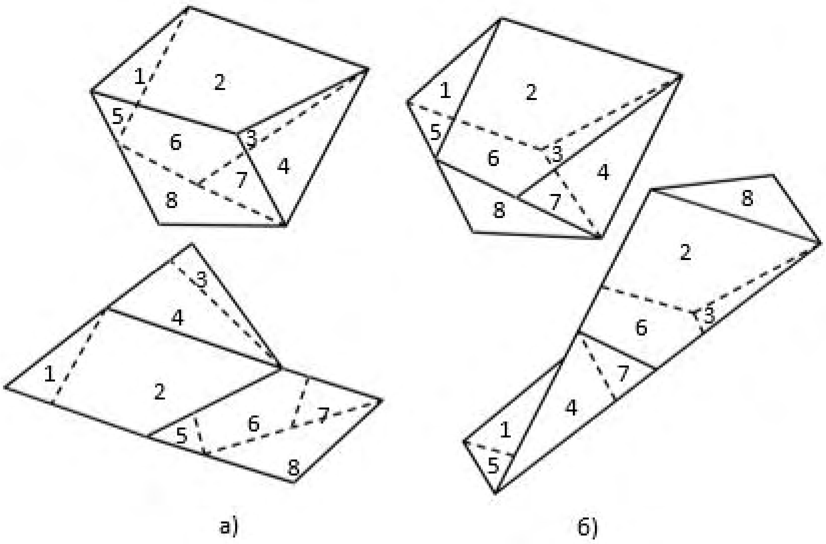


Рис. 1

Лема 2. Будь-який трикутник ABC рівноскладений з деяким прямокутником.

Доведення. Нехай AB – більша сторона трикутника ABC (рис. 2). Тоді основа висоти CH належить відрізку AB. Через точку M, середину висоти CH, проведемо пряму a, паралельну AB. Позначимо через P, L, E і Fточки перетину прямої a зі сторонами AC і BC, а також проекції точок A і B на пряму a відповідно.

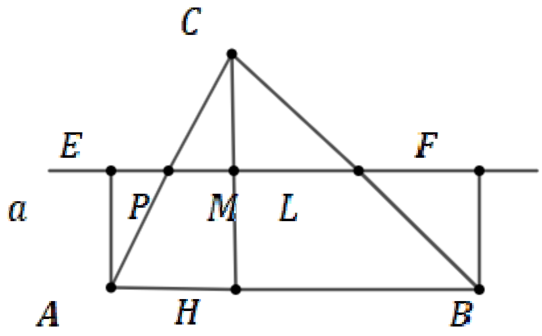


Рис. 2

Тепер рівноскладеність ΔABC і прямокутника $AEFB$ випливає з того, що $\Delta AEP = \Delta CMP, \Delta BFL = \Delta CML.$ Лема доведена. [1, с. 8-9]

Лема 3. Якщо паралелограми $ABCD$ і $KLMN$ мають загальну основу й однакову площу, то вони рівноскладені.

Доведення. Будемо вважати, що відрізки AB і KL збігаються, і точки M і N лежать на прямій CD (рис. 3). Розглянемо окремо два випадки взаємного розташування відрізків *CD* і *MN*.

1. Нехай відрізки CD і MN перетинаються. Припустимо, що точка C лежить на відрізку MN.

Тоді рівноскладеність $ABCD$ і $ABMN$ випливає з рівності трикутників: $\Delta DAN = \Delta CBM$.

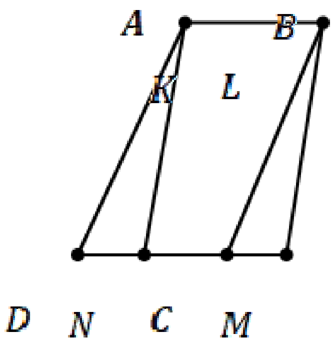


Рис. 3

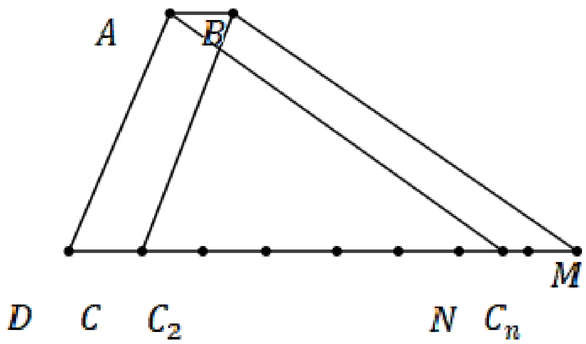


Рис. 4

2. Якщо відрізки CD і MN не перетинаються, то відкладемо послідовно точки $C_1 = C, \ldots, C_n$ так, що $C_i C_{i+1} = CD$ при $i \leq n-1$ і відрізок $C_{n-1}C_n$ перетинає MN (рис. 4).

Тепер до множини паралелограмів $ABCD$, ABC_1C_2, ..., $ABC_{n-1}C_n$, $ABMN$ досить застосувати перший випадок і лему 1. Лема доведена. [1, с. 9-10]

Лема 4. Якщо прямокутники $ABCD$ і $KLMN$ мають однакову площу, то вони рівноскладені.

Доведення. Будемо вважати, що відрізок AB – найбільша зі сторін даних прямокутників (рис.5). Тоді на промені ML знайдуться такі точки P і S, що $S \in PM$, $PS = KN$ і $SN = AB$. Чотирикутники $ABCD$ і $KLMN$, а також $KNSP$ і $KLMN$ рівноскладені за попередньою лемою. Тоді з леми 1 випливає, що $ABCD$ і $KLMN$ рівноскладені. Лема доведена. [1, с. 10]

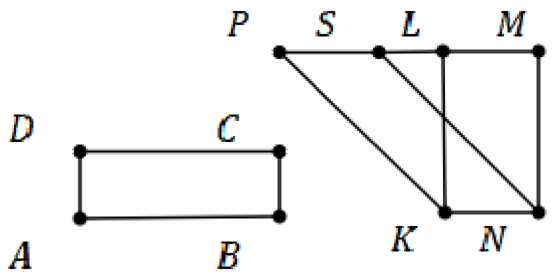


Рис. 5

Лема 5. Будь-який многокутник рівноскладений з деяким прямокутником.

Теорема 1. *(Бойяї-Гервіна)* Два многокутники рівноскладені тоді й тільки тоді, коли вони рівновеликі.

Доведення. За лемою 5 кожен з даних многокутників рівноскладений з деяким прямокутником. Площі цих прямокутників рівні, тому за лемою 4 вони рівноскладені. Таким чином, за лемою 1 дані многокутники – рівноскладені. [1, с. 11]

Теорему Бойяї-Гервіна та леми, наведені вище, застосовують у процесі розв’язування задач на знаходження площ многокутників, при цьому не застосовуючи формули для обчислення. Візьмемо до уваги, що кожному многокутнику можна поставити у відповідність додатне число S (площа), так щоб виконувалися наступні властивості (аксіоми):

I. Рівні многокутники мають рівні площі.

II. Якщо многокутник складений із двох многокутників, що не мають спільних внутрішніх точок, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників.

III. Площа квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці довжини, дорівнює 1 (одиниці виміру площ). [2, с. 3]

Наведемо приклади задач.

Задача 1. На стороні AD паралелограма взята точка M. Площа трикутника BMC дорівнює S (рис.6). Яка площа паралелограма?

Розв'язання. Проведемо через точку M пряму, паралельну стороні AB (рис. 7). Трикутники ABM й NBM рівні; трикутники CMD й MCN також рівні. Таким чином, площа S незаштрихованої частини паралелограма дорівнює площі заштрихованої, тому площа всього паралелограма дорівнює $2S$.

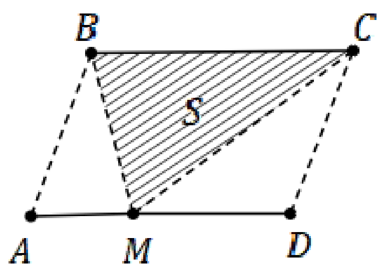


Рис. 6

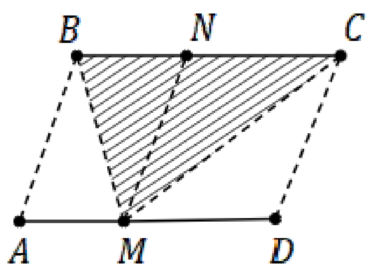


Рис. 7

Відповідь: 2S. [2]

Задача 2. Медіана трикутника ділить його на два рівновеликих трикутники.

Розв'язання. Нехай BM – медіана трикутника ABC. Добудуємо трикутник до паралелограма $ACFD$, а через точку B проведемо пряму, паралельну AC, а через точки A й C – прямі, паралельні BM (рис. 8). Паралелограми $ADBM$ й $MBFC$ рівні: паралельне перенесення на вектор AM відображає перший з них у другий. Тому $S_{ADBM} = S_{MBFC}$. Діагональ паралелограма ділить його на два рівних трикутники, тому прийдемо до висновку, що $S_{CBM} = \frac{1}{2}S_{MBFC}$ і $S_{ABM} = \frac{1}{2}S_{ADBM}$. Отже, $S_{ABM} = S_{CBM}$.

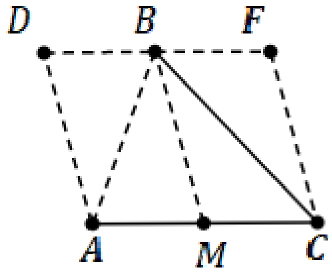


Рис. 8

Висновок. Такий спосіб знаходження площ многокутників є цікавим та досить зручним. Розв'язування задач даним способом ґрунтується не лише на базових знаннях геометрії та планіметрії, а ще й на використанні логічного та креативного мислення, що й сприяє їх розвитку.

Література:

1. Болтянский В.Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры: популярные лекции по математике / Г.В. Болтянский. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 64 с.

2. Гейдман Б. П. Площади многоугольников / Б. П. Гейдман. – М.: МЦНМО, 2001. – 24 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Тютюн Любов Андріївна

УДК 004.4

Лещук Тимур

студент факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ІСТОРІЯ СТВОРЕННЯ ТА ОСОБЛИВОСТІ МОВИ ВІЗУАЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ UML

Анотація: *У статті описується історія та особливості мови візуального програмування на прикладі уніфікованої мови моделювання UML та платформи і середовища розробки візуальної мови програмування LabVIEW.*

Ключові слова: візуальне програмування, UML (Unified Modeling Language), UML-модель, LabVIEW (Laboratory Virtual Instrumentation Engineering Workbench).

Abstract: *The article describes the history and features of the language of visual programming on the example of a unified UML simulation language and the LabVIEW visual programming language development platform and environment.*

Keywords: *visual programming, UML (Unified Modeling Language), UML model, LabVIEW (Laboratory Virtual Instrumentation Engineering Workbench).*

Візуальне програмування — спосіб створення програм шляхом маніпулювання графічними об'єктами замість написання програмного коду в текстовому вигляді.Візуальне програмування дозволяє програмувати, використовуючи графічні або символьні елементи, якими можна маніпулювати інтерактивним чином згідно з деякими правилами. Значна частина візуальних мов програмування базується на ідеї «фігур і ліній», де фігури (прямокутники, овали та ін.) розглядаються як суб'єкти і з'єднуються лініями (стрілками, дугами тощо), які являють собою відношення. Приклад: UML[6]

UML (*Unified Modeling Language*) — уніфікована мова моделювання, використовується у парадигмі об'єктно-орієнтованого програмування. Є невід'ємною частиною уніфікованого процесу розробки програмного забезпечення. UML є мовою широкого профілю, це відкритий стандарт, що використовує графічні позначення для створення абстрактної моделі системи, яка називається *UML-моделлю*. UML був створений для визначення, візуалізації, проектування й документування в основному програмних систем. UML не є мовою програмування, але в засобах виконання UML-моделей як інтерпретованого коду можлива кодогенерація.

Перша версія (1.0) UML вийшла 13 січня 1997 року, вона була створена за запитом Object Management Group (OMG) — організації, відповідальної за прийняття стандартів в галузі об'єктних технологій і баз даних. Після обговорення, у вересні 1997 року, версія 1.1 UML була представлена на голосування в OMG. Розробку UML підтримали і вже тоді використовували як стандарт такі гранди ринку інформаційних технологій, як Microsoft, IBM, Hewlett-Packard, Oracle, DEC, Sybase, Logic Works й інші.

Застосування:

UML може бути застосовано на всіх етапах життєвого циклу аналізу бізнес-систем і розробки прикладних програм. Різні види діаграм які підтримуються UML, і найбагатший набір можливостей представлення певних аспектів системи робить UML універсальним засобом опису як програмних, так і ділових систем.

Крім того, UML спеціально створювалася для оптимізації процесу розробки програмних систем, що дозволяє збільшити ефективність їх реалізації у кілька разів і помітно поліпшити якість кінцевого продукту.

UML чудово зарекомендувала себе в багатьох успішних програмних проектах. Засоби автоматичної генерації кодів дозволяють перетворювати моделі мовою UML у вихідний код об’єктно-орієнтованих мов програмування, що ще більш прискорює процес розробки.

Практично усі CASE-засоби (програми автоматизації процесу аналізу і проектування) мають підтримку UML. Моделі розроблені в UML, дозволяють значно спростити процес кодування і направити зусилля програмістів безпосередньо на реалізацію системи.

Діаграми підвищують супроводжуваність проекту і полегшують розробку документації.

UML необхідний:

- керівникам проектів, які керують розподілом завдань і контролем за проектом

- проектувальникам інформаційних систем які розробляють технічні завдання для програмістів;
- бізнес-аналітикам, які досліджують реальну систему і здійснюють інжиніринг і реінжиніринг бізнесу компанії;
- програмістам які реалізують модулі інформаційної системи.

При модифікації системи об'єктний підхід дозволяє легко включати в систему нові об'єкти і виключати застарілі без істотної зміни її життєздатності. Використання побудованої моделі при модифікаціях системи дає можливість усунути небажані наслідки змін, оскільки вони не ламають структури системи, а тільки змінюють поведінку об'єктів.

Історія UML:

Починаючи із середини 60-х років і донедавна , широке поширення мали структурні методології аналізу, проектування і розробки інформаційних систем, що характеризуються штучним поділом (часто неоптимальним) системи на підсистеми, а також слабким взаємозв'язком процесів і даних які присутні в системі. На відміну від них, об'єктні технології, орієнтовані на тісний взаємозв'язок процесів і даних у системах, дозволяють програмним системам бути надійнішими, легшими для реалізації і стійкішими до змін. Крім того, така філософія моделювання найбільше відповідає загальним концепціям поведінки систем реального світу.

Незважаючи на явну перевагу об'єктно-орієнтованих технологій аналізу і проектування перед структурними, їхнє поширення було незначним, оскільки жоден з методів не давав єдиної і цілісної об'єктної моделі системи. Кожен метод добре висвітлював одну або декілька сторін реальної системи, залишаючи в тіні багато інших, не менш важливих сторін. Крім того, відсутність єдиного стандарту дуже заважало широкому поширенню об’єктно-орієнтованих методів при розробці програмного забезпечення.

Протягом 1994-96 років творці трьох найпоширеніших методологій — Граді Буч (BOOCH), Джим Рамбо (OMT — Object Modeling Technique) і Айвар Якобсон (OOSE — Object Oriented Software Engineering) об'єднали свої зусилля під егідою Rational Software Corporation для створення єдиної мови моделювання, яка б об'єднала всі істотні й успішні розробки в даній галузі і стала би стандартом мови об'єктного моделювання. Грандіозна робота, у якій поряд з Rational брали участь представники багатьох компаній, таких, як Microsoft, IBM, Hewlett-Packard, Oracle, DEC, Unisys, IntelliCorp, Platinum Technology і кількох сотень інших завершилася створенням у січні 1997 року UML 1.0, яка після бурхливого обговорення протягом 1997 року у вересні під версією 1.1 і була передана в OMG для прийняття як галузевий стандарт мови об'єктного моделювання [3],[4],[5].

Недоліки UML:

- Надмірність мови
- Неточна семантика
- Проблеми у вивченні та застосуванні
- Візуальна неоднорідність
- Намагається подобатись усім

Мови візуального програмування можуть бути додатково класифіковані в залежності від типу і ступеня візуального вираження, на такі:

- Природно-візуальні мови мають невід'ємне візуальне вираження, для якого немає очевидного текстового еквіваленту (наприклад, графічна мова G в середовищі LabVIEW).
- Візуально-перетворені мови є невізуальними мовами з накладеним візуальним представленням.

LabVIEW (*Laboratory Virtual Instrumentation Engineering Workbench*) — платформа та середовище розробки для візуальної мови програмування компанії National Instruments (США). Метою даної мови є автоматизація використання обчислювального та вимірювального лабораторного обладнання [1].

Графічна мова носить назву "G" (не плутати з G-код), проте в літературі переважно дана назва застосовується рідко, а зостосовується назва платформи. Початково мова створювалася для Apple Macintosh в 1986 році. LabVIEW зазвичай використовується для збору даних, управління приладами і в промисловій автоматизації на різних операційних платформах, включаючи Microsoft Windows, UNIX, Linux та Mac OS X. Найновіша версія LabVIEW — LabVIEW 2011, вийшла в 2011 році. У ній підтримується взаємодія з елементами, реалізованими на платформі Microsoft .NET Framework 4.0, покращено роботу модуля реального часу (Real-Time Module), розширено можливості математичної обробки даних.

Розробка програми в LabView відбувається одночасно в двох вікнах: блок-діаграма та лицева панель. На лицевій панелі створюється графічний інтерфейс програми і паралельно ведеться зв'язка інтерфейсу з власне програмою, яка створюється за допомогою спеціальних блоків. Таким чином графічний код програми має вигляд специфічної блок-діаграми.

Переваги:

LabVIEW дозволяє здійснювати доступ до великої кількості приладів через вбудовані драйвери. Спрощує програмування для непрофесійних програмістів. До ряду приладів, зокрема, розроблених National Instruments уже надаються готові віртуальні інструменти. Наявна велика кількість функцій для збору даних, обчислень, генерації сигналів, аналізу тощо. Також, наявна велика кількість графічних елементів для реалізації зручного інтерфейсу користувача. В LabView наявний додатковий програмно-текстовий компонент для проведення обчислень - MathScript. Різні частини блок-діаграми можуть виконуватися паралельно. Наявні значна кількість документації та інтернет групи. Існує відносно дешева версія LabVIEW Student Edition, для освітніх цілей, крім того, доступна пробна trial-версія, яка працює 30 днів.

Недоліки:

LabVIEW є власницьким ПЗ National Instrument, вимагає активації. Для запуску програм вимагається встановлення виконавчого(run-time) середовища з відповідними бібліотеками. Є також, сумніви чи LabVIEW є повноцінною мовою програмування. Обмежена підтримка не windows платформ, що виражене в відсутністю певних драйверів та графічних елементів[2].

Значна кількість сучасних мов програмування має розвинуті візуальні засоби для розробки графічного інтерфейсу, причому здійснюється програмування розміщених на спеціальних формах об'єктів з налаштуванням їх властивостей та поведінки. CodeGear, Delphi, C++ Builder, Microsoft Visual Studio та мови, які включає в себе цей засіб (Visual Basic, Visual C#, Visual J# тощо) часто плутають з візуальними мовами програмування. Всі ці мови є текстовими, а не візуальними (графічними). MS Visual Studio та Delphi є візуальними середовищами програмування, але не візуальними мовами програмування [2].

Література:

1. National Instruments / Сайт [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://www.ni.com/pdf/manuals/374715j.html.

2. National Instruments / Сайт [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://www.ni.com/ru-ru/shop/labview/release-details.html.

3. Підручник з Umbrello UML Modeller [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://docs.kde.org/trunk4/uk/kdesdk/umbrello/index.html.

4. *Фаулер М., Скотт К.* UML. Основы. – Пер. с англ. – СПб: Символ-Плюс, 2002. – 192 с.

5. *Буч Г., Рамбо Дж., Джекобсон А.* Язык UML. Руководство пользователя. – Пер. с англ. – М.: ДМК, 2000. – 432 с.

6. Візуальне програмування / Вікіпедія / Сайт [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://uk.wikipedia.org/wiki/.

Науковий керівник: канд. пед. наук, старший викладач Ковтонюк Галина Миколаївна

УДК 378.147

Ляхович Ірина

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ПЕДАГОГІЧНІ ПЕРЕДУМОВИ ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМ МАТЕМАТИЧНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Анотація: *у статті розглядається головні передумови використання систем комп'ютерної математики та їх доцільність на уроках математики.*

Ключові слова: *системи комп'ютерної математики, педагогіка, принципи, передумови, математика.*

Annotation: *The article considers the main prerequisites for the use of systems of computer mathematics and their expediency in mathematics lessons.*

Keywords: *systems of computer mathematics, pedagogy, principles, prerequisites, mathematics.*

Системи комп'ютерної математики (СКМ) – це програмні засоби, за допомогою яких можна автоматизувати виконання як чисельних, так і аналітичних та графічних обчислень і розрахунків. Як правило, у системах комп'ютерної математики реалізовано високий ступінь візуалізації як проміжних, так і кінцевих розрахунків. Це потужні програмні середовища, які можуть ефективно застосовуватися будь-яким користувачем ПЕОМ для створення власних інформаційних продуктів високого рівня, не будучи при цьому професійним програмістом та математиком. Ці засоби сьогодні знайшли широке використання у науці, техніці та освіті.

Характерною рисою СКМ є їх гнучкість – користувачеві дається можливість активно втручатися в хід обчислень, при необхідності спрямовуючи розв'язання задачі в потрібне йому русло. Такого не можна сказати про велику кількість пакетів існуючих прикладних програм[1].

В основу навчального процесу, організованого з використанням СКМ, повинні бути покладені загальновизнані дидактичні принципи навчання[2].

1. **Принцип науковості**. Подання навчального матеріалу засобами СКМ повинно відбуватися у відповідності із загальнонауковими положеннями,

математичними законами, теоріями, фактами. Способи подання матеріалу мають відповідати сучасним науковим методам пізнання (моделювання, системного аналізу тощо).

2. **Принцип систематичності і послідовності.** При побудові із використанням СКМ математичних моделей об’єктів і явищ учні мають розглянути їх структурні особливості, суттєві зв’язки з метою формування уявлень про предмети дослідження як про цілісні утворення. Зміст навчальної діяльності із використанням СКМ повинен відображати логіку науки та системно розкривати сутність досліджуваних об’єктів.

3. **Принцип наочності.** Наочне навчання передбачає використання у цьому процесі різних відчуттів, зокрема, зорового сприймання. Тому реалізація навчальних завдань за допомогою СКМ має передбачати і візуальний аспект. На сьогодні, системи комп’ютерної математики у достатній мірі оснащені засобами візуалізації математичних даних та геометричного моделювання. Однак, у процесі навчання слід використовувати лише ті зорові образи, що найбільш повною мірою сприяють досягненню навчальних цілей та максимально точно відображають суттєві для розв’язання навчальних завдань аспекти досліджуваних об’єктів, зв’язки та відношення між їх складовими.

4. **Принцип свідомості та активності.** В умовах використання СКМ у навчальному процесі учні мають займати не тільки споглядальну чи пасивно-виконавську позиції, а й бути безпосередніми учасниками процесу пошуку розв’язання задач. Важливим є факт усвідомлення учнями мети і завдань своєї навчальної діяльності та можливості самостійно організовувати її перебіг, спираючись на власні міркування. Викладач тільки надає орієнтири щодо добору найбільш раціональних дій. Навчальний процес має набувати дослідницького, творчого характеру.

5. **Принцип індивідуалізації навчання**. Врахування індивідуальних особливостей кожного учня – інтелектуальних, психофізіологічних особистісних.

6. **Принцип доступності**. Тісно пов'язаний із принципами систематичності і послідовності та індивідуалізації навчання. Звернення до систем комп’ютерної математики у процесі опрацювання навчального матеріалу повинно передбачати можливість адекватного сприйняття та успішного засвоєння учнями інформації, що подається. Використання СКМ має відповідати потребам і меті навчальної діяльності.

Основними принципами використання у навчальному процесі систем комп’ютерної математики, на думку В. М. Жукової [3], є:

- принцип нових задач, який на практиці означає, що немає необхідності витрачати аудиторний час на набуття навичок обчислень, які можна виконати за допомогою комп’ютера;
- принцип системного підходу, який означає, що впровадження СКМ повинно здійснюватися на системно-методичному аналізі математичних та інформаційних дисциплін. Впровадження СКМ в навчальний процес повинно відбутися після проведеного структурування розділів та тем цих дисциплін.

Завдяки значній кількості команд та послуг СКМ для розв'язання досить широкого класу математичних задач з візуалізацією основних етапів розв’язування, ці програмні засоби можна з успіхом використовувати у процесі навчання математики у школі. А саме, для:

• візуалізації абстрактних математичних понять, включаючи можливість анімації графічних зображень;

• виконання громіздких рутинних обчислень з наперед заданою точністю;

• здійснення символьних перетворень для спрощення виразів, доведення тотожностей, тверджень;

• проведення комп’ютерних експериментів, дослідження математичних моделей реальних практичних задач;

• створення електронних документів математичного змісту, що містять текст, графічні ілюстрації, результати обчислень, гіперпосилання на інші документи та ресурси Інтернету тощо.

Головною умовою застосування СКМ у процесі навчання математики є те, що воно завжди має бути педагогічно доцільним і виваженим, здійснюватися з метою досягнення поставленої навчальної мети уроку, шляхом встановлення міжпредметних зв’язків курсів математики та інформатики у формі інтегрованих уроків.

Слід також зазначити, що оволодіння вміннями та навичками здійснення обчислень у певній СКМ та використання цих засобів для розв'язування навчальних та прикладних задач є необхідною умовою формування математичних компетентностей учнів, особливо тих, які навчаються у класах з поглибленим вивченням математики і будуть продовжувати навчання на математичних спеціальностях у ВНЗ.

Засоби підготовки електронних документів математичного змісту у середовищі СКМ можуть використовуватися вчителем для створення методичного забезпечення навчання математики на уроках і організації самостійної роботи учнів.

Використання СКМ у навчанні математики дозволяє зробити доступнішими для сприйняття абстрактні математичні об'єкти та методи, здійснювати індивідуальний підхід в навчанні, посилює мотивацію, підвищує ефективність процесу навчання математики; створює умови для розвитку творчого мислення та уяви[4].

Використання в навчальному процесі сучасних інформаційно-комунікаційних технологій в гармонійному поєднанні з науково-методичними надбаннями минулого дає можливість вже в середніх загальноосвітніх навчальних закладах сформувати знання, що лежать в основі багатьох сучасних, пов’язаних із новими інформаційними і виробничими технологіями, професій.

Особливого значення при використанні програм математичного призначення в навчальному процесі набуває врахування і розвиток неформалізовних, творчих компонентів мислення: реалізація проблемної ситуації чи постановка задачі; самостійне вироблення критеріїв добору потрібних операцій, що приводять до розв’язку; генерація здогадок та гіпотез в процесі пошуку основної ідеї щодо способів відшукання розв’язку (наукова, художня, технічна фантазія, що не зводиться до комбінаторики та генерації випадкових станів); матеріальна інтерпретація формального розв’язку і ін.

Важливого значення набувають проблеми інтеграції навчальних предметів, зокрема математики, фізики, інформатики і інших, з одного боку, і диференціації навчання у відповідності до нахилів, запитів і здібностей учнів, з іншого боку. Вивчаючи загальні властивості інформаційних процесів, закони і правила пошуку, створення, зберігання, аналізу, систематизації, опрацювання, передавання, подання, використання всеможливих повідомлень і даних, інформатика до деякої міри вирішує проблеми такої інтеграції. Проте інтеграція математики і інформатики та інших предметів не може бути зведена до їх механічного об’єднання в існуючому вигляді. Потрібна розробка якісно нового змісту навчальних предметів та методичних систем їх навчання із новими цілями, змістом, методами, засобами, організаційними формами і результатами навчання, що вимагає ретельних психолого-педагогічних і методичних досліджень, експериментів і розробок[5].

Висновок. Використання СКМ на уроках математики дає можливість учням, які мають слабкі знання з математики і більш схильні до глибокого вивчення інших предметів, не почувати себе в складному становищі на уроках математики та подолати психологічний бар’єр до вивчення математики, яка традиційно вважається важким предметом. Для учнів, які схильні до глибокого вивчення математики відкриваються широкі можливості значно більше уваги приділяти постановці задач, з’ясуванню сутності досліджуваних процесів і явищ, інтерпретації отриманих за допомогою комп’ютера результатів, аніж технічній стороні дослідження готових математичних моделей.

Література:

1. Коробов В. І. Системи комп’ютерної математики в хімії. Основні засоби організації обчислень: Навч. посіб / В. І. Коробов. – Дніпропетровськ: РВВДНУ, 2004. – 136 с.

2. Соменко О. О. Дидактичні засади використання систем комп`терної математики у навчальному процесі вищої школи / О. О. Соменко. // Наукові записки. – 2014. – №6. – С. 35–39.
3. Жукова В. М. Принципи впровадження комп’ютерних математичних систем у навчальний процес фізико-математичних факультетів/ В. М. Жукова// Професіоналізм педагога в контексті Європейського вбору України : матеріали науково-практичної конференції, 2008 р.,м. Ялта. – Ялта : РВВ КГУ, 2008. – Ч.1. – С. 83-85.
4. Методичні вимоги щодо вибору навчальної програми з курсу «Застосування ІКТ у процесі навчання математики» [Електронний ресурс] // Основи педагогіки і виховання – Режим доступу до ресурсу: http://www.startpedahohika.com/sotems-1250-5.html.
5. Жалдак М. І. Система підготовки вчителя до використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі / М. І. Жалдак // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 2 : Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. - 2011. - №. 11. - С. 3-15. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Nchnpu_2_2011_11_3.

Науковий керівник: канд. пед. наук, ст. викладач Туржанська Оксана Степанівна

УДК 37.01

Ляшук Ольга

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського,

викладач інформатики Вінницького відділення Ірпінського державного

коледжу економіки та права

ПОЄДНАННЯ ТРАДИЦІЙНИХ ТА ІННОВАЦІЙНИХ ФОРМ ТА МЕТОДІВ ОРГАНІЗАЦІЇ ОСВІТНЬОГО ПРОЦЕСУ В ШКОЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ ІКТ

Анотація: *У статті розглянуті питання необхідності поєднання традиційних та інноваційних форм та методів організації навчального процесу в школі; створення та впровадження в освітній процес сучасних засобів навчання на основі інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ).*

Ключові слова: *освітній процес, інформаційно-комунікаційній технології, інформатизація освіти, технології навчання.*

Annotation: *The article considers the necessity of combining traditional and innovative forms and methods of organization of educational process at school; creation and introduction into the educational process of modern means of training on the basis of information and communication technologies (ICT).*

Keywords: *educational process, information and communication technology, informatization of education, teaching technology.*

Враховуючи постійний розвиток суспільства в бік інформатизації, не може стояти на місці й освіта. Комп’ютерно-зорієнтовані технології навчання, спрямовані на індивідуальні та групові форми навчального процесу, значно урізноманітнюють освітній процес.

Науково-методичне забезпечення інформатизації освіти містить комплекс організаційно-методичних аспектів, таких як: професійно спрямоване навчання інформатики; розвиток професійно зорієнтованих інформатичних умінь; професійна підготовка засобами Інтернету; розроблення та впровадження педагогічних програмних засобів; комп’ютерно-зорієнтована діагностика якості підготовки тощо. Ефективнішим є поєднання традиційних та інноваційних форм і методів організації освітнього процесу у ЗЗСО із використанням ІКТ. Результативності навчання сприяє методично обґрунтоване впровадження ІКТ у педагогічні технології, поєднання мережевих баз даних, автоматизованих навчальних систем із традиційними підручниками, посібниками, індивідуалізація без порушення традиційної структури занять.

Створення та впровадження в освітній процес сучасних засобів навчання на основі ІКТ зумовлює розвиток України як держави, комунікаційно-технологічні підсистеми якої формуватимуть інфраструктуру інформаційного суспільства, а освіта відповідатиме соціально-економічним потребам, запитам громадян, вимогам роботодавців, забезпечуватиме відновлення виробничого персоналу [6, с. 2].

Інформатизація освіти передбачає комплекс організаційно-методичних заходів, описаних в [3, с. 288-292] тощо. Тому актуальності набуває питання визначення ефективності нових форм і методів організації навчально-виховного процесу з використанням ІКТ.

Розробляючи методику застосування ІКТ у ЗЗСО слід, по-перше, пам'ятати, що інформатична підготовка учнів нероздільна з упровадженням ІКТ у навчальний процес з усіх навчальних предметів, а по-друге, враховувати, яке місце посідають ІКТ у майбутній професійній діяльності випускників, адже інтенсивність використання комп'ютерної техніки та сучасних технологій навіть у межах однієї галузі є неоднаковою для фахівців різного рівня та різного профілю (спеціалізації).

Упроваджуючи ІКТ у навчання, виходимо з того, що інформатичну компетентність школяра формує весь навчальний процес [14, с. 100]. Реалізація ІКТ у системі освіти повинна враховувати дидактичні особливості циклів навчальних дисциплін, що відрізняються умовами проведення занять, психолого-педагогічними підходами, структурою навчальних планів. Це вимагає різних форм і методів реалізації ІКТ у навчанні. Відповідно до мети вивчення певного предмета кожен педагог вибудовує власну методику використання ІКТ, проектує систему формування в учнів знань, умінь і навичок, компетентностей і результатів навчання з урахуванням педагогічних умов інформатизації навчального процесу.

Комп'ютерно-зорієнтовані технології навчання спрямовані на індивідуальні та індивідуально-групові форми навчання. З огляду на це деякі ІКТ складно інтегруються в традиційну класноурочну систему навчання, а взаємодії «учень – комп'ютер» важко надати гнучкості, яка притаманна традиційній системі навчання. Проте з розвитком ІКТ, упровадженням у навчальний процес мультимедійних технологій, глобальних і локальних комп'ютерних мереж, віртуальних класів, появою мультимедійного проектора та інтерактивної дошки стало можливим урізноманітнити характер навчально-педагогічної взаємодії вчителя й учня, що вносить відчутні позитивні зміни [11, с. 19]. Нові форми викладення матеріалу за допомогою інтерактивного обладнання дають змогу поєднувати візуальні, слухові та кінестетичні стилі навчання.

Ефективне, дидактично доцільне впровадження ІКТ, безперечно, потребує науково обґрунтованих форм, методів і прийомів у навчанні. На думку українських науковців, навчання в інформаційно-освітньому середовищі із застосуванням мережевих технологій спирається як на традиційне дидактичне і технічне забезпечення, так і на новітні форми організації навчального процесу, у якому традиційні методи навчання набувають нових якостей і змісту [2, с. 2]. Низкою педагогічних досліджень доведено, що недоліками традиційного навчання є: неврахування індивідуальних особливостей майбутніх фахівців; недостатня інформація про рівень засвоєння матеріалу; неможливість оперативного коригування педагогічного впливу; неможливість приділити увагу тим учням, кому це більш необхідно в певній навчальній ситуації; обмежені можливості активізації пізнавальної діяльності учнів; неможливість організувати якісну самостійну роботу тощо. Ці недоліки можуть бути усунені за допомогою ІКТ.

Водночас досвід свідчить, що спроба повністю замінити традиційні форми, методи та засоби навчання на комп'ютерно-зорієнтовані не завжди приводить до одержання бажаних результатів. Тому науковці та педагоги-практики прийшли до спільної думки, що використовувати ІКТ у навчальному процесі доцільно в тих випадках, коли це науково обґрунтовано та виправдано з методичної точки зору. В освіті вважаємо найефективнішим є методично обґрунтоване включення ІКТ в інноваційні педагогічні технології. Наприклад, інформатична підготовка у закладах освти базується на «широкому застосуванні інтерактивних методів навчання, мультимедійних засобів і віртуальних педагогічних технологій, які дають змогу суттєво підвищити рівень методичного забезпечення освітнього процесу, відкривають нові можливості для підвищення якості освіти» [1, с. 94].

Упровадження ІКТ в навчання створює умови індивідуального просування в навчальному процесі у звичайній аудиторії, не порушуючи традиційної групової структури занять загалом [13, с. 90-91]. Водночас ІКТ розширюють можливості педагога, збільшують час на спілкування з учнем. Інтеграція звуку, зображення й тексту створює навчальне середовище зі значним потенціалом. Інтерактивні можливості комп’ютерних програм дають змогу налагодити надійний зворотний зв’язок, забезпечити діалог і постійну підтримку, що неможливо в традиційних системах навчання. Швидке об’єктивне опитування, добір навчальних програм для кожного учня індивідуально реалізує диференційований підхід до їхніх навчальних можливостей.

Практика свідчить, що використання комп’ютерної техніки в навчально-виховному процесі сприяє урізноманітненню форм навчальних занять і сприяє виникненню таких форм, де головна роль відводиться учневі. Істотно змінюється роль викладача: з джерела знань, умінь і навичок – на творця індивідуальних траєкторій навчання. Звідси виникає необхідність ґрунтовної підготовки педагогів до використання ІКТ у навчальному процесі [4, с. 238].

Інформатизація освіти має базуватися на дотриманні сукупності дидактичних принципів, особистісного та діяльнісного підходів, теорії поетапного формування розумових дій, програмованого, модульного та проблемного навчання. Вважаємо доцільним особливу увагу педагогічних працівників звернути на вимоги таких принципів: інформатизації; професійної спрямованості; технологічності; гуманізації; науковості; випереджувального характеру підготовки; інтеграції; індивідуалізації та диференціації; фундаменталізації; наступності [3, с. 214-224]. Добір методів має ґрунтуватися на комплексі дидактичних принципів із урахуванням надбань педагогічної психології.

Наслідком різних авторських задумок і методів їх реалізації є різноманітність підходів до використання ІКТ у навчальному процесі [9, с. 98]. Адаптація обраного методу полягає у визначенні конкретного засобу, який має бути задіяний у навчальній діяльності, організації навчального середовища, з врахуванням підготовленості учнівського контингенту, форм і методів формування ситуації, яка націлює учнів на виконання педагогічних завдань, форм і методів оцінювання навчальної діяльності тощо [7]. Тому важливу роль у впровадженні ІКТ виконують автори комп'ютерно-зорієнтованих методик і технологій, електронних освітніх ресурсів. Істотною вадою є віддаленість розробників від безпосередніх суб'єктів навчального процесу, консервативність педагогічних колективів щодо впровадження ІКТ, відсутність розгорнутого зворотного зв'язку між розробниками, методистами та педагогами [5, с. 113].

Дослідженнями доведено, що поєднання різноманітних педагогічних програмних засобів та автоматизованих навчальних систем, мережевих баз даних із традиційними інформаційними носіями – підручниками, навчальними посібниками, довідниками, задачниками тощо – сприяє результативності навчання. У навчальному процесі в поєднанні з традиційними доцільно застосовувати такі комп'ютерно-зорієнтовані методи: наочні методи навчання на основі ІКТ; комп'ютерні методи навчального контролю та самоконтролю; проблемно-дослідницькі та проектувальні методи; комп'ютерно-імітаційні методи; методи організації проблемних дискусій у ІКТ-насиченому освітньому середовищі; використання спеціалізованого комп'ютерного забезпечення з метою навчання креслення та виконання наукових робіт [8, с. 55-56].

Особливий інтерес становить створення та застосування електронних навчально-методичних комплексів із певної навчальної дисципліни. Такий комплекс сприяє підвищенню пізнавальної активності учнів, стимулює інтерес до навчальних занять, забезпечує наочність і доступність навчальної інформації, структурованість і професійну спрямованість змісту навчання, динамічність навчальної інформації, індивідуалізацію навчальної діяльності, диференційованість навчальних завдань, оперативний зворотний зв’язок, розвиває ініціативу, творчий потенціал особистості, допомагає формувати в учнів установку на творчу діяльність і постійне самовдосконалення [12]. Учні одержують можливість використовувати форми діяльності, що відповідають їхнім особистим потребам, вимогам майбутньої професійної діяльності в інформаційному середовищі.

Н. Г. Ничкало зазначає: «Життя вимагає створення необхідних умов для використання як простих, так і складних сучасних інформаційних і комунікаційних технологій в навчальному процесі без втрати цінних аспектів традиційних методів навчання» [10, с. 479]. Тобто підвищення якості підготовки школярів потребує поєднання традиційних форм і методів передачі знань із методами, що ґрунтуються на сучасних ІКТ, мультиме0діа й інформаційному обміні за допомогою Інтернету. ІКТ не мають бути самоціллю, а мають використовуватися для ефективного досягнення цілей освіти.

Таким чином, методика інформатизації спрямовується на ефективне стимулювання учнів, підвищення структурованості навчання, забезпечення комплексної візуалізації явищ, моделювання об’єктів, підвищення ефективності практичної підготовки.

Література:

1. Біла книга національної освіти України / Т. Ф. Алексеенко, В. М. Аніщенко, Г.О. Балл та ін.; за заг. ред. акад. В. Г. Кременя; НАЛЫ України. – К.: Інформ. системи, 2010. – 342 с.
2. Електронна педагогіка: кроки в реалізації проекту/Віктор Андрущенко// Освіта. – 2007. – № 43 (5269). – С. 2.
3. Інформатизація професійно-технічних навчальних закладів будівельного профілю: монографія / А. В. Литвин – Львів: Компанія «Манускрипт», 2011. – 498 с.
4. Інформаційна культура вчителя початкових класів: монографія / А. М. Коломієць – Вінниця: ВДПУ, 2007. – 379 с.

5. Інформаційна система управління вищим навчальним закладом як платформа реалізації управління академічним процесом / М. С. Львов, О. В. Співаковський, Д. Є. Щедролосьев // Інформаційні технології і засоби навчання: Зб. наук. пр. / За ред. В. Ю. Бикова, Ю. О. Жука / Інститут засобів навчання АПН України. – К.: Атіка, 2005. – С. 109–134.
6. Моделі організаційних систем відкритої освіти: [монографія] / В. Ю. Биков – К.: Атіка, 2008. – 684 с.
7. Образование и обучение с участием ИТО (педагогика третьего тысячелетия) / В. П. Беспалько – М.: Психол.-соц. институт; Воронеж: МОДЕК, 2002. – 352 с.
8. Підготовка викладачів вищої школи: інформаційні технології у педагогічній діяльності: Навч.-метод, посібник / Т. І. Коваль, С. О. Сисоєва, Л. П. Сущенко. – К.: Вид. центр КНЛУ, 2009. – 380 с.
9. Планування навчальної діяльності з урахуванням використання засобів інформаційно-комунікаційних технологій / Ю. О. Жук, О. М. Соколюк // Інформаційні технології і засоби навчання: зб. наук. пр. / За ред. В. Ю. Викова, Ю. О. Жука / Інститут засобів навчання АПН України. – К.: Атіка, 2005. – С. 96-99.
10. Професійна освіта нової доби // Педагогічні технології у неперервній професійній освіті: Монографія / Н. Г. Ничкало За ред. С. О. Сисоєвої. – К.: Віпол, 2001. – С. 476–484.
11. Розширення й урізноманітнення системи «педагог – група в цілому» в межах мультимедійної технології навчання / Людмила Воробйова // Імідж сучасного педагога. – 2009. – № 1 (90). – С. 19–21.
12. Система застосування інформаційних технологій у професійній підготовці майбутніх економістів: Монографія / Т. Б. Поясок За ред. С. О. Сисоєвої. – Кременчук: ПП Щербатих О.В., 2009. – 348 с.
13. Умови забезпечення навчальної діяльності учнів профтехучилищ засобами інформаційних технологій / В. К. Сидоренко // Інформаційно-телекомунікаційні технології в сучасній освіті: досвід, проблеми,

перспективи: Зб. наук. пр. – Львів: ЛДУ БЖД, 2006. – Вип. 1. – С. 86–91.

14. Формування інформаційної культури студентів вищого навчального закладу фінансового профілю / О. В. Гладченко // Комп’ютерно-зорієнтовані системи навчання: зб. наук. пр. – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова. – 2003. – Вип. 6. – С. 92–100.

Науковий керівник: канд. пед. наук, асистент Соя Олена Миколаївна

УДК 517.518.15:[51+53]

Майданюк Світлана

студентка факультету математики, фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ФІЗИЧНИХ ТА ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ

Анотація: *У даній статті розглянуто методи розв’язування задач за допомогою похідної. Наведено приклади фізичних та геометричних задач із їх розв’язанням.*

Ключові слова: *похідна, диференціальне числення, екстремуми.*

Abstract: *This article describes the methods of solving problems using the derivative. Examples of physical and geometrical problems with their solution are given.*

Keywords: *derivative, differential calculus, extremums.*

Розвиток науково-технічного прогресу, війни, виготовлення зброї, запуск космічної ракети і створення ядерних реакторів – основою цього всього послужило диференціальне числення. Від високих досягнень до стрімких падінь крокувала поряд похідна, кидаючи свої максимуми та мінімуми, похідна, яка миттєво змінила світ. За допомогою похідної ми досліджуємо і будуємо графіки функції, знаходимо найбільше і найменше значення функції на відрізку, складаємо рівняння дотичної. [3]

Також похідна допомагає нам у розв'язанні як фізичних так і геометричних задач. Для прикладу розглянемо фізичну задачу.

Задача 1. Нехай з міста A до міста B рухається автомобіль. Відстань між містами дорівнює S км і автомобіль проходить її за T годин. Якби автомобіль рухався рівномірно, тобто проходив однакову відстань за однакові проміжки часу незалежно від того, на якій ділянці шляху він знаходиться, то за означенням, швидкість руху автомобіля дорівнювала б відношенню довжини шляху до часу, за який пройдено цей шлях: $V = \frac{S}{T}$.

Припустимо тепер, що рух не рівномірний (як на практиці завжди і буває). Тоді справа з означенням швидкості одразу стає набагато складнішою. Відношення $\frac{S}{T}$ характеризує тільки так звану «середню швидкість» і майже зовсім не дає інформації про те, як саме рухався автомобіль. Справді, середня швидкість є стала величина, що не змінюється з часом, а «реальна швидкість» руху автомобіля (в тому сенсі, як ми це інтуїтивно розуміємо), взагалі кажучи, різна в різні моменти часу. Зрозуміло, що між кілометровими стовпчиками a і b автомобіль повинен рухатися повільніше, ніж між c та d, оскільки в першому випадку дорога йде круто вгору, а в другому – донизу. Якщо позначити t_{ab} – час, за який автомобіль проходить 1 км шляху між a та b, а t_{cd} – час, за який автомобіль проходить відстань між c та d, то середня швидкість V_{ab} у першому випадку та середня швидкість V_{cd} у другому не будуть однаковими:

$\frac{1}{t_{ab}} \neq \frac{1}{t_{cd}}$, а при рівномірному русі ми мали б: $\frac{1}{t_{ab}} = \frac{1}{t_{cd}}$ [2, с. 8].

Більш того, цілком зрозуміло, що середня швидкість, з якою автомобіль пройде перший метр шляху, відрізняється від тієї, з якою буде пройдено наступний метр. Аналогічно можна було б говорити про середню швидкість, з якою автомобіль проходить 1 см шляху, і т.д. Зрозуміло, що, знаючи середню швидкість, наприклад, на кожному метрі шляху, ми матимемо більш докладну картину руху автомобіля.

Ми звикли до інтуїтивного поняття швидкості. Всі розуміють таку фразу: «спочатку автомобіль стояв, потім почав рухатись, і швидкість його руху поступово зростала». Але це означає, що ми маємо на увазі не деяку середню швидкість, а швидкість руху в кожен момент часу. Але як дати строге з точки зору математики означення цієї «миттєвої швидкості»? Можна підійти до цієї справи так.

Позначимо через $S(t)$ – відстань, яку пройде автомобіль за час t від початку руху. Якщо в момент t автомобіль знаходиться в деякій точці E, то в момент часу $t+\Delta t$ він буде знаходитись в деякій іншій точці E', що знаходиться на відстані $S(t+\Delta t)$ від початкової (тобто від A). Тоді це означає, що за час Δt автомобіль пройшов відстань $S(t+\Delta t)-S(t)=\Delta S$. Середня швидкість на цьому проміжку часу $[t,t+\Delta t]$ дорівнюватиме відношенню $\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$.

Якщо зменшувати Δt, то діставатимемо середню швидкість на все меншому проміжку часу, який починається з t, і тому природно назвати швидкість руху в момент часу t границю: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}=V(t)$ (звичайно, при умові, що вона існує). [2, с. 9]

Таке означення швидкості повністю узгоджується з нашим інтуїтивним уявленням про неї. Справді, якщо автомобіль не рухається в проміжку часу $[t,s]$, то при малих Δt і моментів часу $t<t'<s$ матимемо: $S(t'+\Delta t)=S(t')$, тобто $\Delta S=0$, і тому $V(t')=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{S(t'+\Delta t)-S(t')}{\Delta t}=0$.

Тобто швидкість дорівнює нулеві. Якщо в околі моменту t_1 автомобіль рухався швидше, ніж в околі t_2, то зрозуміло, що при малих Δt:

$$\Delta S(t_1)=(S(t_1+\Delta t)-S(t_1))\geq\left(S(t_2+\Delta t)-S(t_2)\right)=\Delta S(t_2)$$

$$\text{і тому } V(t_1)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S(t_1)}{\Delta t}\geq\lim_{\Delta t_2\to 0}\frac{\Delta S(t_2)}{\Delta t}=V(t_2),$$

тобто швидкість $V(t_1)$ в момент часу t_1 не менша, ніж швидкість $V(t_2)$в момент часу t_2.

Як приклад розглянемо випадок рівномірного руху тіла. Його можна визначити як рух із сталою швидкістю. Але ми зробимо трохи інакше: визначимо рівномірний рух як такий, коли тіло за однакові проміжки часу проходить однакову відстань незалежно від того, де ці проміжки знаходяться, тобто незалежно від початку відліку. Чи буде швидкість сталою?

Отже, нехай тіло рухається рівномірно в розумінні нашого означення. Тоді відстань $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$, яку тіло проходить за час Δt, залежить тільки від Δt і не залежить від t. Запишемо $\Delta S = S(\Delta t)$. Щоб знайти функцію $S(t)$, зробимо так: відрізок $[0, t]$ поділимо на n інтервалів однакової довжини. Легко зрозуміти, що

$$S(t) - \left[S\left(\frac{t}{n}\right) - S(0)\right] + \left[S\left(\frac{2t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right)\right] + \cdots + \left[S(t) - S\left(\frac{n-1}{n}t\right)\right].$$

(вважаємо $S(0) = 0$), тобто шлях, пройдений за час t, дорівнює сумі тих відстаней, які пройшло тіло за проміжки часу $\left[0, \frac{t}{n}\right]$, $\left[\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}\right]$, … , $\left[\frac{n-1}{n}t, t\right]$. Але відстані $S\left(\frac{kt}{n}\right) - S\left(\frac{k-1}{n}t\right)$ однакові для всіх k=1, 2, …, n і дорівнює $S\left(\frac{t}{n}\right)$ (бо проміжки часу рівні і довжина їх $\frac{t}{n}$).

Тому $S(t) = nS\left(\frac{t}{n}\right)$, або $S\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{1}{n}S(t)$. [2, с. 10]

Так само можна показати, що для довільного цілого m та довільного t виконується рівність $S(mt) = mS(t)$ (треба розглянути m проміжків довжини t). Використовуючи ці два співвідношення, дістаємо: $S\left(\frac{m}{n}t\right) = \frac{m}{n}S(t)$.

Отже, для довільного раціонального числа r має місце рівність

$$S(rt) = rS(t).$$

Але відомо, що для будь-якого дійсного числа α можна знайти послідовність раціональних чисел r_n таку, що $r_n \to \alpha$, $n \to \infty$ (наприклад, можна взяти наближення скінченними десятковими дробами). Оскільки при $t = 1$ справджується рівність $S(r_n) = r_n S$ (1), то, перейшовши до границі в цьому співвідношенні, матимемо: $S(\alpha) = \alpha S$ (1) для довільного дійсного числа α. Тому $S(t) = tS(1) = V_0 t$, де $V_0 = S(1)$. Отже, довжина пройденого шляху прямо пропорційна часу. Зауважимо, що перехід до границі можливий тільки у випадку, коли $S(t)$ неперервно залежить від t. Ми не розглядатимемо докладно це питання, зауважимо тільки, що на практиці довжина шляху, пройденого за час t, неперервно залежить від t, тобто за проміжок часу нульової довжини тіло не може пройти шлях додатної довжини. Вважатимемо це очевидним.

Знайдемо тепер швидкості рівномірного руху. За означенням

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{V_0(t+\Delta t) - V_0 t}{\Delta t} = V_0,$$

тобто у випадку рівномірного руху швидкість стала і чисельно дорівнює довжині шляху, яку тіло проходить за одиницю часу. [2, с. 11]

Розглянемо ще один випадок. Нехай тіло в момент часу знаходиться в стані спокою, а потім починає вільно падати. Тоді, за встановленою при деяких припущеннях експериментальною формулою, $S(t) = \frac{gt^2}{2}$. Нас же цікавить питання: чому дорівнює швидкість вільно падаючого тіла в момент часу t? Відповідь легко знайти:

$$V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{g(t+\Delta t)^2}{2} - \frac{gt^2}{2}}{\Delta t} = \frac{g}{2} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t\Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = gt + \lim_{\Delta t \to 0} \Delta t = gt. \text{ [2, с. 12]}$$

Наведемо приклад, який буде стосуватися розв’язання геометричної задачі на екстремум.

Екстремальні задачі, тобто задачі на знаходження найбільшого (найменшого) значення певної величини, відіграють значну роль у природознавстві, економіці і набувають усе більшого поширення. Багато задач геометричного змісту – це типові задачі на екстремум. У них за виконання певних умов треба знайти найбільше (найменше) значення певної геометричної величини (периметра, площі, поверхні, об’єму тощо). Цю величину можна, як правило, подати за допомогою тієї чи іншої формули, як функцію однієї з даних величин.

Під час розв’язування таких задач, бажано, а часто й необхідно, будувати рисунок, який допомагає виразити значення всіх незалежних змінних, що входять до умови задачі, через одну з них. Коли записано аналітичну залежність шуканої величини як функції іншої величини (лінійної чи кутової), роль геометрії вичерпується. Їй на зміну приходять методи алгебри і аналізу. Вони дають змогу:

- встановити область визначення функції;
- відшукати похідну (здебільшого від складеної функції);
- розв’язати алгебричне або трансцендентне рівняння;
- дослідити на екстремум критичні точки функції;
- відшукати найбільше або найменше значення функції в області її визначення;

Якщо область визначення функції – замкнений проміжок, значення функції обчислюють у критичних точках і на його кінцях; із знайдених чисел вибирають найбільше або найменше. Якщо ж неперервна функція визначена і диференційовна в інтервалі і має єдиний екстремум, то у випадку максимуму це буде її найбільше значення, а у випадку мінімуму – найменше. [1, с. 111]

Задача 2. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює $2p$. Якими мають бути його сторони, щоб об’єм тіла, утвореного в результаті обертання цього трикутника навколо своєї висоти, був найбільшим?

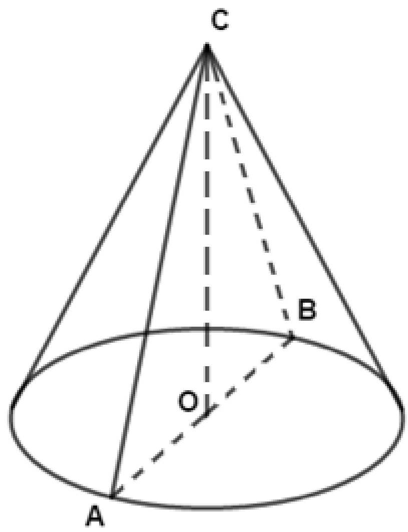


Рис. 1

Розв’язання. Нехай у рівнобедреному трикутнику ABC (рис. 1) $AC = BC = x$, $AB = 2a$, $OB = a$, CO – висота. Тоді $2x + 2a = 2p$, звідки

$a = p - x$, $OB = p - x$ і $CO = \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{2px - p^2} = \sqrt{p(2x - p)}$. Величини CO і a будуть невід'ємними, якщо $x \in \left[\frac{p}{2}; p\right]$. Об'єм конуса як функція незалежної змінної x набирає вигляду: $V(x) = \frac{1}{3}\pi OB^2 \cdot CO = \frac{1}{3}\pi(p - x)^2\sqrt{p(2x - p)}$.

Оскільки $V'(x) = \frac{1}{3}\pi p\frac{(p-x)(3p-5x)}{\sqrt{2px-p^2}}$, то, розв'язавши рівняння $(p - x)(3p - 5x) = 0$, знаходимо критичні точки функції V: $x_1 = \frac{3}{5}p$ і $x_2 = p$. Змісту задачі відповідає лише точка $\frac{3}{5}p$. Якщо $x \in \left[\frac{p}{2}; \frac{3}{5}p\right]$, то $V'(x) > 0$ і функція V зростає, а якщо $x \in \left[\frac{3}{5}p; p\right]$, то $V'(x) < 0$ і функція V спадає. Отже, $\frac{3}{5}p$ – точка максимуму функції V на відрізку $\left[\frac{p}{2}; p\right]$, причому $V_{max} = V\left(\frac{3}{5}p\right) = \frac{4\sqrt{3}}{1125} \cdot \pi p^3$. Оскільки $\frac{3}{5}p$ – єдина точка максимуму на відрізку $\left[\frac{p}{2}; p\right]$ і $V\left(\frac{p}{2}\right) = V(p) = 0$, то функція V в точці $\frac{3}{5}p$ набуває найбільшого значення. Але при $x = \frac{3}{5}p$ довжина основи рівнобедреного трикутника $AB = \frac{4}{5}p$. [1, с. 135]

Отже, об'єм тіла, утвореного обертанням рівнобедреного трикутника, периметр якого $2p$, навколо його висоти, матиме найбільший об'єм тоді, коли його основа дорівнює $\frac{4}{5}p$, а кожна з бічних сторін $-\frac{3}{5}p$. [1, с. 136]

Похідна, як і будь-яке інше математичне поняття, має свою історію. Вона виникла з практичних потреб людини і широко використовується у багатьох галузях наук. На прикладах згаданих вище, ми бачимо, що похідна є невід'ємною частиною як фізичних, так і геометричних задач. Також більше інформації про тіло, яке нам вказане в задачі, дає саме похідна, після знаходження якої ми можемо з'ясувати додаткові умови (це стосується положення, руху тіла і т. д.).

Література:

1. Лященко М.Я. Похідна та її застосування: посібник для самоосвіти вчителів / М.Я. Лященко – Київ: Радянська школа, 1985. – 153 с.

2. Рижов Ю.М. Похідна та її застосування: підручник / Ю.М. Рижов – Київ: Головне видавництво видавничого об'єднання «Вища школа», 1977. – 84 с.

3. Навчально-виховний проект: Похідна та її застосування [Електронний ресурс] - режим доступу до ресурсу: http://bibrka-school.org.ua/script/regis/upload/files/Zastosuvannya_pokhiidno%D1%97.docx.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Тютюн Любов Андріївна

УДК 373.5.016:51

Малик Юлія

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

АКТИВІЗАЦІЯ ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ «ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ» В ПРОФІЛЬНИХ КЛАСАХ

Анотація: *У статті запропоновано сценарій інтегрованого уроку на тему «Числові послідовності», який присвячений послідовності чисел Фібоначчі та її застосуванню у різних галузях науки.*

Ключові слова: *профільне навчання, інтегрований урок, міжпредметні зв'язки, послідовність чисел Фібоначчі.*

Abstract: *In the article the scenario of the integrated lesson "Numerical sequences" is devoted to the sequence of Fibonacci numbers and its application in various fields.*

Keywords: *profile education, integrated lesson, interpersonal relationships, sequence of Fibonacci numbers.*

Введення профільного навчання передбачає більш поглиблене вивчення тих предметів, які в майбутньому для випускників відіграватимуть важливу роль як для вступу до вузу, так і для усвідомленого отримання тієї чи іншої професії.

У зв'язку з цим для однієї категорії учнів предмет (наприклад, математика) є профільним, а для іншої – непрофільним.

Завдання вчителя полягає не лише в тому, щоб збільшити обсяг знань за рахунок поглиблення і розширення теоретичної складової даного профільного предмету, але й продемонструвати його роль у розвитку інших галузей знань, його фундаментальну значимість в чуттєвій, емоційній царині людського пізнання, через знайомство з історією математики, еволюцією математичних ідей [2].

Учні, для яких предмет є непрофільним, повинні отримати не лише знання, що відповідають навчальній програми, але і переконаність у глибокому взаємозв'язку всіх предметів, які вони вивчають.

Встановлення зв’язків між математикою та іншими предметами, які вивчаються в школі, дає вчителю можливість формувати в учнів цілісність картини світу, показати різноманіття властивостей живої і неживої природи [2, с. 4].

Відомо, що у гуманітаріїв переважає наочно-образне мислення, сприйняття краси математики спрямоване на її прояв у природі, творах мистецтва, в конкретних математичних об'єктах. У школярів гуманітарних класів багата уява, яскраво проявляються емоції. Вони з великим інтересом вивчають питання історії математики, прикладні аспекти, цікавий матеріал [3, с.7].

Так як цікавість – це властивість предметів, явищ, процесів, яка здатна викликати в учнів почуття подиву, загострити увагу. Разом із тим зацікавленість – це прийом вчителя, який впливаючи на почуття учня, сприяє створенню позитивного настрою до навчання і готовності до активної розумової діяльності у всіх учнів незалежно від їхніх знань, здібностей, інтересів.

Цікавий матеріал потребує досить великих знань. Це спонукає учнів читати додаткову літературу, самостійно шукати відповіді за межами підручника.

Виходячи з цих позицій, ми хочемо запропонувати матеріал проведення уроку – семінару на якому присутні групи учнів різних профілів.

Сценарій уроку.

Вчитель. Тема нашого уроку «Числові послідовності». Проведемо урок у формі семінару і присвятимо це заняття послідовності чисел Фібоначчі. Розглянемо використання цієї послідовності у десяти галузях. Для цього використаємо додекаедр, кожна грань якого відповідатиме назві кожної галузі.

Використання послідовності чисел Фібоначчі для описання живої та неживої природи.

Хто бажає виступити?

Учні фізико-математичного профілю демонструють свою презентацію.

У 1202 році з'явилася книга італійського математика Леонардо з м. Піза, в якій містилися відомості з математики, наводилися розв'язання різноманітних задач. Серед них була проста, не позбавлена практичної цінності, задача про кроликів: "Скільки пар кроликів народжується за один рік від однієї пари?"

В результаті розв’язання цієї задачі утворилась послідовність чисел 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 і т.д. Цю послідовність пізніше назвали іменем Фібоначії, так називали Леонардо Пізанського [1].

Чим цікаві числа, отримані Фібоначчі? У цій послідовності кожне наступне число є математичною сумою двох попередніх чисел. Математично послідовність записується так:

$$f_1, f_2, ..., f_n, \text{ де } f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad .$$

Такі послідовності, в яких кожен член є функцією попередніх, називають рекурентними, або зворотними послідовностями.

Рекурентною є і послідовність чисел Фібоначчі, а її члени називають числами Фібоначчі.

Виявилося, що вони мають низку цікавих і важливих властивостей.

Через чотири століття після відкриття Фібоначчі цієї послідовності чисел німецький математик і астроном Йоганн Кеплер встановив, що границя відношення чисел, які стоять поруч, прямує до золотої пропорції.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}\approx 1{,}618033989...=\Phi.$$

Ф – позначення золотої пропорції від імені Фідій – грецький скульптор, який використовував золоту пропорцію при створенні своїх шедеврів. Якщо при діленні цілого на дві частини відношення більшої частини до меншої рівне відношенню цілого до більшої частини, то таке відношення називається «золотою пропорцією» і рівне приблизно 1,618 [4].

Властивості послідовності чисел Фібоначчі нерозривно пов'язані із золотою пропорцією і виражають іноді магічну і навіть містичну сутність закономірностей і явищ.

Фундаментальну роль числа в природі визначив ще Піфагор своїм твердженням "Все є число". Тому математика була однією з основ релігії послідовників Піфагора (піфагорейской спілки). Піфагорійці вважали, що бог Діоніс поклав число в основу світової організації, в основу порядку; воно відображало єдність світу, його початок, а світ був множиною, що складається з протилежностей. Те, що призводить протилежності до єдності, і є гармонія. Гармонія є божественною і полягає в числових співвідношеннях [Воєвода].

Числа Фібоначчі володіють багатьма цікавими властивостями. Наприклад, сума всіх чисел послідовності від 1-го до f_n-го рівна f_{n+2}-му без 2-х одиниць. Границя відношення чисел, розміщених через одне, рівна квадрату золотої пропорції, приблизно 2,618. Дивовижна властивість! Виходить, що Ф + 1 = Ф^2.

Золота пропорція є ірраціональною величиною, вона відображає ірраціональність у пропорціях природи. Числа Фібоначчі відображають цілісність природи. Сукупність цих закономірностей і відображає діалектичну єдність двох начал: неперервного та дискретного.

Слайдова презентація учнів хіміко-біологічного профілю.

Розглянемо деякі питання, пов'язані з будовою хімічних сполук.

Із часів Дальтона в хімії затвердилося атомарне вчення. Був сформульований закон кратних відношень, за яким між атомами в сполуках встановлюються прості цілочисельні співвідношення. Це дало можливість описувати склад хімічних сполук простими формулами, наприклад H_2O, $NaCl$, ZnO.

Хімія стала точною наукою. Затвердження закону кратних відношень – одне з чудових досягнень світової науки: з хаосу атомарних уявлень утворилася проста, струнка, красива система. Атоми різних елементів можуть утворювати нескінченно багато різноманітних поєднань, з'єднаних силами хімічних зв'язків. Але лише деякі з них є стійкими і зберігаються, а інші гинуть, розпадаються на більш стійкі. А стійкими будуть ті поєднання атомів різних елементів, які відповідають простим цілочисельним відношенням компонентів. Ніби все стало на свої місця, все стало зрозуміло. Однак згодом виявилося, що багато сполук постійного складу не так вже строго зберігають це сталість, допускають деякі відхилення, іноді дуже суттєві. Та й з цілочисельним співвідношенням атомів у сполуках не все просто.

З'явилися сполуки, де співвідношення атомів не можна назвати простим цілочисельним відношенням, наприклад, C_{55}, H_{72}, O_5, N_4, Mg (хлорофіл), C_{5750}, H_{7227}, N_{2215}, O_{4131}, S_{590} (ДНК бактеріофага). Не будемо заглиблюватися у галузь органічної хімії, а спробуємо з'ясувати: чи не проявляються в формулах сполук числа Фібоначчі, чи не підпорядковується хімічна організація правилу золотої пропорції? При окисленні урану, хрому склад утворених оксидів змінюється не неперервно, а стрибкоподібно – від однієї стійкої сполуки до іншої. Між оксидами IO_2 і IO_3 утворюється ціла низка проміжних сполук: I_2O_5; I_3O_8; I_5O_{13}; I_8O_{21}; $I_{13}O_{34}$.

Відношення атомів дорівнює відношенням чисел Фібоначчі, розміщених через одне. Границя такого відношення рівна $Ф^2$. Те саме з хромом : Cr_2O_5, Cr_3O_8; Cr_5O_{13}; Cr_8O_{21}.

Хімічний аналіз показує, що є така сполука урану з киснем, яка містить 72,36% атомних частин кисню. Цю сполуку можна описати формулою I_8O_{21} – похибка по кисню складе 0,05%, якщо взяти формулу $I_{13}O_{34}$ – похибка 0,02%. Формула $I_{89}O_{233}$ точно відповідає складу сполуки, що містить 72,36% кисню.

Розділивши 233 на 89 (числа Фібоначчі) отримаємо 2,618, тобто $Ф^2$. Тоді формула набуде вигляду: $IO_{Ф}{}^2$!

Але ж Ф - ірраціональна величина! Чи означає це, що існують сполуки з ірраціональним відношенням атомів? Можливо, що в природі співіснують дві протилежні тенденції хімічної організації – неперервна і дискретна?

Однак знаходження чисел Фібоначчі в хімічній організації - це свідчення фундаментальності самої послідовності чисел Фібоначчі, її природної початковості.

Слайдова презентація учнів фізико - математичного профілю.

Спробуємо поглянути у глиб атома. Ядро атома складається з протонів (Z) і нейтронів (N). Маса кожного атома визначається A = Z + N.

Від 2-го до 16-го елементів (He та S): Z = N, а далі N> Z. В урану: Z = 92, N = 146 відношення N прямує від 1 до приблизно 1,6 (Ф).

В ізотопі свинцю (Рм): Z = 82, N = 126, A = 208 розділивши ці числа на 6, отримаємо числа $13\frac{2}{3}$, 21, $34\frac{2}{3}$, які близькі до чисел Фібоначчі.

У природі найбільш поширені ізотопи з числом нейтронів, 8, 20, 30, 50, 82, 126, після поділу на 6 виходить: $1\frac{1}{3}$, $3\frac{1}{3}$, 5, $8\frac{1}{3}$, $13\frac{2}{3}$, 21 - ці числа також близькі до чисел Фібоначчі.

Слайдова презентація учнів хіміко-біологічного профілю.

Світ живої та неживої природи, здавалося б між ними дистанція величезного розміру, це скоріше антиподи, ніж родичі. Але не слід забувати, що жива природа виникла з неживої (якщо не на нашій планеті, то в космосі) і мала б за законами спадковості зберегти якісь риси неживої природи.

Світ неживої природи – це насамперед світ симетрії, що надає його творінням стійкості та краси. Симетрія збереглася і в живій природі. Симетрія рослин успадкована від симетрії кристалів, симетрія яких успадкована від симетрії молекул і атомів, а симетрія атомів – від симетрії елементарних частинок.

Характерною рисою будови рослин і їх розвитку є спіральність. Спірально закручуються вусики рослин, по спіралі відбувається зростання тканин у стовбурах дерев, по спіралі розташовані насіння в соняшнику. Рух протоплазми в клітині часто спіральне, носії інформації – молекули ДНК – також скручені в спіраль. Встановлене і гвинтове розташування атомів в деяких кристалах (гвинтові дислокації). До речі, кристали з гвинтовою структурою володіють надміцністю. Чи не тому жива природа і вважала за краще цей вид структурної організації, успадкувавши його від неорганічних речовин?

Чим же може бути виражена дана закономірність, схожість живої та неживої природи?

Луска соснової шишки розташовуються по спіралі, їх число дорівнює 8 і 13 або 13 і 21. У кошиках соняшнику насіння також розташовуються по спіралях, їхнє число зазвичай становить 34 і 55 або 55 і 89.

Придивіться до черепашок. Колись вони слугували будиночками для маленьких молюсків, які вони збудували самі. Молюски давно загинули, а їхні будиночки будуть існувати тисячоліття. Виступи-ребра на поверхні черепашки інженери називають ребрами жорсткості – вони різко підвищують міцність конструкції. Ці ребра розташовані по спіралі і в будь-який мушлі їх 21.

Візьміть будь-яку черепаху – від болотної до гігантської морської – і ви переконаєтеся, що малюнок на панцирі у них аналогічний: на овальному полі розташовано 13 зрощених пластин – 5 пластин в центрі і 8 – по краях, а на периферійній облямівці близько 21 пластини.

На лапах у черепах 5 пальців, а хребетний стовп складається з 34 хребців. Всі зазначені величини відповідають числам Фібоначчі.

У найближчого родича черепахи – крокодила тулуб покритий 55 роговими пластинами. На тілі кавказької гадюки розташоване 55 темних плям. В її скелеті налічується 144 хребця.

Отже, розвиток черепахи, крокодила, гадюки, формування їхніх тіл, здійснювалося згідно із законом послідовності чисел Фібоначчі.

У комара: 3 пари ніг, на голові 5 вусиків – антени, черевце ділиться на 8 сегментів.

У бабки: масивний корпус і довгий тонкий хвіст. У корпусі виділяється три частини: голова, груди, черевце.

Черевце розділене на 5 сегментів, хвіст складається з 8 частин.

Неважко бачити в цих числах розгортання послідовності чисел Фібоначчі. Довжина хвоста, корпусу і загальна довжина бабки пов'язані між собою золотою пропорцією: L хвоста = L бабки = Ф.

• L корпусу.

• L хвоста.

Вищим типом тварин на планеті є ссавці. Число хребців у багатьох домашніх тварин дорівнює 55 або біля 55, число пар ребер приблизно 13, грудна кістка містить 7 + 1 елемент.

У собаки, свині, коня – 21 + 1 пара зубів, у гієни – 34, у одного з видів дельфінів – 233.

Послідовність чисел Фібоначчі визначає загальний план розвитку організму, еволюції видів. Але розвиток живого здійснюється не тільки стрибками, а й неперервно. Організм будь-якої тварини знаходиться в постійній зміні, постійному пристосуванні до середовища свого проживання. Мутації спадковості порушують план розвитку. І не дивно, що при загальній переважній появі чисел Фібоначчі у розвитку організмів часто спостерігаються відхилення від дискретних величин. Це не помилка природи, а прояв рухливості організації всього живого, його неперервної зміни.

Слайдова презентація учнів біолого-географічного профілю.

Ґрунт Землі неоднорідний за своїм складом і властивостями. У ньому виділяють три шари: верхній – гумусовий шар, потім – підгумусовий і гірська порода.

Вчені вивчили профілі ґрунтів і виявили дивовижну закономірність. Виявилося, що потужності гумусового шару ("товщина") рівні в середньому:

• в пустельному світлому ґрунті - 5 см;

• в сіро-бурою ґрунті - 8 см;

• в бурому напівпустельному - 13 см;

• в світло-каштановому - 21 см;

• в темно-каштановому - 34 см;

• в чорноземі звичайному - 55 см;

• в чорноземі лужному- 89 см;

• в сірих лісових ґрунтах - 55 см;

• в дернових ґрунтах- 34 см;

• в підзолистих ґрунтах- 21 см; 13 см; 8 см;

• в тундрових - 5 см.

Встановлена послідовність зміни потужності гумусового шару ґрунтів відповідає послідовності чисел Фібоначчі, розташованих симетрично щодо найбільш потужного шару – лужного чорнозему.

Слайдова презентація учнів фізико-математичного профілю.

Віддавна людство намагається знайти закони розташування планет Сонячної системи. Існують різні наукові пропозиції і розрахунки. Найбільш вживаним є правило Тіціуса-Боде (1766 г.), згідно з яким $a = 0{,}1\ (3 * 2^n + 4)$, де $n = -\infty$, 0, 1, 2: 8, a - середня відстань від Сонця.

Дане правило узгоджується з допустимою похибкою ыз розташуванням семи перших планет (від Меркурія до Урану). Але відстань від Сонця 2-х пізніше відкритих планет (Нептун, Плутон) не вкладається в правило Тіціуса-Боде (Для Нептуна похибка? 30%, для Плутона - 95% !!).

Якщо фактичні відстані планет від Сонця збільшити в 21 раз, то виходить послідовність чисел, близьких послідовності чисел Фібоначчі: 8, 15, 21, 32, 109, 200, 403, 632, 830 (8, 13, 21, 34,:. 144 , 233, 377, 610, 987). Похибка в середньому становить приблизно 10%, а для деяких планет 0%. Між числами 34 і 144 повинні бути 55, 89. Виявилося, що вони відповідають відстаням астероїдів розташованих між орбітами Марса (34) і Юпітера (144).

Якщо період обертання планет виразити в земній добі, то вийде послідовність чисел близьких до чисел Фібоначчі:

88; 225; 365; 687; 4330; 10752; 30664; 60148; 90666

(89, 233, 377, 610, 4181, 10946, 28657; 75025; 121393)

Похибка: 1%, 3,5%, 3%, 13%, 3,5%, 2%, 7%, 24%, 33%. Середня похибка 10%.

Стосовно питання про закономірності будови Сонячної системи є різні варіанти. Але чому жодна математична модель не дає точного, без похибок результату? Можливо з тієї причини, що Сонячна система знаходиться в періоді свого активного розвитку, вона не досягла стійкої рівноваги і, отже, не може бути адекватно описана однією математичною моделлю досить точно. Але, як видно, модель, заснована на застосуванні послідовності чисел Фібоначчі дає більш прийнятні результати для всіх планет Сонячної системи.

Слайдова презентація учнів хіміко-біологічного профілю:

Числа Фібоначчі відображають основну закономірність зростання організмів, отже, і в будові людського тіла вони повинні певним чином проявитися.

У людини:

1 - тулуб, голова, серце і т.д.

2 - руки, ноги, очі, нирки.

З 3-х частин складаються ноги, руки, пальці рук.

5 пальців на руках і ногах.

8 - склад руки разом із пальцями.

12 пар ребер (одна пара атрофована і присутня у вигляді рудимента).

20 - число молочних зубів у дитини.

32 - число зубів у дорослої людини.

34 - число хребців.

Загальна кількість кісток скелета людини близько 233.

Цей список частин тіла людини можна продовжити. У їхньому переліку дуже часто зустрічаються числа Фібоначчі або близькі до них величини. Відношення чисел Фібоначчі, які стоять поруч наближається до золотої пропорції, отже, і співвідношення чисел різних органів часто відповідає золотій пропорції.

Людина, як і інші живі творіння природи, підкоряється загальним законам розвитку. Коріння цих законів потрібно шукати глибоко – в будові клітин, хромосом і генів, і далеко – у виникненні самого життя на Землі.

Слайдова презентація учнів гуманітарного профілю.

При огляді храму Василя Блаженного виникає питання: чи випадково куполів у ньому рівно 8? Чи існували якісь канони, що визначають число куполів в храмах? Очевидно, існували.

Найпростіші православні собори раннього періоду були одноглаві, проте вже в X столітті будували і багатокупольні церкви.

Після реформи патріарха Никона в середині 17 століття було заборонено будувати одноглаві церкви. Багато православних соборів були п'ятиглавими. Новгородський Софійський собор (X століття) був тринадцятиглавим. Преображенську церкву в Кіжах, вирубану з дерева 2,5 століття назад, вінчає 21 глава. Чи випадковий такий ріст числа куполів (1,2,3,5,8,13,21) або тут проявляється послідовність чисел Фібоначчі, відображається природний закон зростання – від простого до складного? Важко відповісти на це запитання однозначно, але важко і не звернути уваги на цю сукупність чисел [3].

Подивимося на поетичні твори з позицій послідовності чисел Фібоначчі. Зупинимося на поезії О.С. Пушкіна. Адже його твори – зразок найвидатніших творінь культури, зразок найвищого рівня гармонії.

Виявляється цілком закономірна тенденція в творчій манері поета: він явно віддає перевагу віршам, розмір яких близький до чисел Фібоначчі. Слід врахувати, що закони віршування вимагають, як правило, наявності парної кількості рядків у віршах, тому що рядки попарно римуються. Тому не дивно, що вірші із кількістю 12 і 14 зустрічаються частіше, ніж із числом рядків 13. Це ж справедливо і для інтервалу 20-22 рядки.

Числа Фібоначчі проявляються не лише в розмірах віршів, але й у їх структурі – число рядків у віршах, число віршів у творі. Деякі вірші побудовані за схемою 3х5, 5х3, 3х8, 5х8, 8х8 ("Прощання", "Передчуття", "П'ю за здравіє Мері:", "Заклинання:").

В О.С. Пушкіна є вірші із кількістю рядків 13 та 21, тобто з непарною кількістю рядків, що явно не відповідає поширеним канонам віршування. До них відносяться, наприклад, вірші "Швець", "Поїдемо, я готовий", - 13 рядків; "Він між нами жив", "До Чаадаєва" - 21 рядок.

Переважання в метриці віршів О.С. Пушкіна послідовності чисел Фібоначчі не можна визнати випадковістю, грою сліпої ймовірності. Поет користується цими размірностями, бо вони відповідають вимогам художньої форми, форми нової, надзвичайної, оригінальної й водночас відповідають критеріям гармонії.

Тепер вже не здається випадковістю той факт, що роман у віршах "Євгеній Онєгін" складається з 8 розділів, в кожному розділі в середньому близько 50 віршів (а глава 7 складається з 55 віршів), а кожен вірш складається з 14 рядків.

Якщо "Євгеній Онєгін" є твором високого художнього рівня, то 8-а глава роману – його дорогоцінна перлина.

Ця глава найбільш досконала, відточена, насичена емоційно. Структура глави багатопланова, з підйомами і спадами, апофеозом емоційного початку і ліричними відступами.

У ній 51 вірш плюс лист Євгенія Онєгіна Тетяні (5 віршів) – дуже близько до числа 55. Цей лист розбиває главу на дві частини: 32 і 19 віршів; їх відношення дорівнює Ф (1,68 - золота пропорція).

Не дивно, що поезія О.С. Пушкіна, і особливо 8-а глава "Євгенія Онєгіна", вражають читачів своєю дивовижною гармонійністю, чітко вираженою музикальністю.

На прикладі поезії О.С. Пушкіна можна обережно спробувати зробити висновок про те, що мистецтву, як і природі, властива періодизація розвитку, яка, можливо, здійснюється відповідно до розгортанням послідовності чисел Фібоначчі.

Як в результаті відбору (за Дарвіном) виживають найбільш гармонійно розвинені організми, так і твори мистецтва, відповідні гармонійним канонам, залишаються на століття в пам'яті поколінь.

Учитель.

Математизація підходів до вивчення природи від описання явищ (фізичних, хімічних та ін.) до розуміння гармонії, краси є актуальною і перспективною. І в цьому аспекті послідовність чисел Фібоначчі, золота пропорція виглядають лише окремим випадком, одним із багатьох варіантів числових співвідношень.

Таким чином, вивчення одного питання з різних сторін, дозволяє не лише зрозуміти сутність, а й встановити наявні закономірності.

Література:

1. Воєвода А.Л. Зацікавити математикою, Методичний посібник / А.Л. Воєвода. – Вінниця: ФОП Легкун В.М., 2012. –176 с/
2. Глобін О.І. Міжпредметні зв’язки в умовах профільного навчання математики: методичний посібник для вчителів/ Глобін О. І. – К.: Педагогічна думка,2012. – 88 с
3. Павелко М. С. Математика і гуманітарні науки // Математика (Перше вересня). – 1999. – №46. – С. 4-7; 2000. – №1. – С. 7-8.
4. http://berg.com.ua/profile/fibonacci/.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Захарченко Наталія Вікторівна

УДК 512.81

Матвійчук Тетяна
студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

СИМЕТРИЧНИЙ ПРИНЦИП КЛАСИФІКАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Анотація: *Розглянуто симетричний принцип класифікації нелінійних рівнянь математичної фізики. Та переваги симетричного принципу* класифікації нелінійних рівнянь математичної фізики.

Ключові слова: *принцип симетрії, групи симетрії, групи Лі, багатовимірні рівняння математичної фізики.*

Abstract: *The symmetric principle of the classification of nonlinear equations of mathematical physics is considered. The advantages of the symmetric principle of classification of nonlinear equations of mathematical physics.*

Keywords: *the principle of symmetry, the groups of symmetry, the Li groups, multi-dimensional equation of mathematical physics .*

Рівняння математичної фізики – це рівняння з високою симетрією, тобто, вони, як правило, інваріантні відносно широких груп Лі. Ця важлива здатність лінійних та нелінійних рівнянь математичної фізики веде до того, що якщо знайдено хоча б одне рішення такого рівняння, то можна побудувати багато параметричні сімейства розв’язків [1].

На перший погляд може здатися, що диференціальних рівнянь, які моделюють реальні фізичні процеси досить багато. Насправді це є не так. Якщо в реальному фізичному процесі мають місце закони збереження енергії, імпульсу, моменту кількості рухів і якщо врахувати той факт, що для фізичних процесів виконується або ж принцип відносності Галілея, або ж принцип відносності Пуанкаре-Ейнштейна, то виявляється, що рівнянь, для яких виконувалися б всі ці закони і один із принципів відносності не так вже й багато[2].

Диференціальні рівняння (ДР), для яких виконуються вказані закони збереження, мають бути інваріантні відносно групи Галілея $G(1,3)$, або відносно групи Пуанкаре $P(1,3)$ (або її підгруп), або відносно груп, або відносно груп, які містять в якості підгруп групи $P(1,3), G(1,3)$. Прикладами таких груп, які містять групи $P(1,3)$, являється конформна група $C(1,3)$. Група зрушень та обертань в 5-вимірному просторі $P(1,4)$ містить в якості підгруп як групу $P(1,3)$, так і групу $G(1,3)$.

Задача про явний опис, в деякому сенсі, всіх систем лінійних ДР, інваріантних відносно груп $P(1,3)$ і $C(1,3)$, розв'язана. Задача про явний опис всіх НДРЧП виду

$$p_\mu p^\mu u(x) = F_1\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{1}$$

$$p_0 u + \lambda_3 p_a p_a u = F_3\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_a}\right), \tag{2}$$

інваріантних відносно групи $P(1,3)$ або $G(1,3)$, доповнених групою масштабних преретворень, може бути також конструктивно розв'язана. Її розв'язання наведемо у вигляді теорем 1–5 .

Групи Галілея $G(1,n)$ і Пуанкаре $P(1,n)$ в $(1+n)$ вимірному просторі, доповнені групою масштабних перетворень $x'_\mu = dx_\mu$, позначемо відповідно символами $\tilde{G}(1,n) \supset G(1,n)$ і $\tilde{P}(1,n) \supset P(1,n)$ [3].

Теорема 1. *Рівняння (1), якщо функція* F_1 *не залежить від* $\frac{\partial u}{\partial x_\mu}$*, інваріантне відносно групи* $\tilde{P}(1,n)$ *лише в таких двох випадках:* $F_1(u) = \lambda_1 u^k$*, або* $F_2(u) = \lambda_2 \exp u$, λ_1, λ_2, k – довільні сталі.

З цього результату видно, що рівняння Ліувілля – єдине рівняння неполіноміального типу, інваріантне відносно групи $\tilde{P}(1,n)$.

Зауваження 1. Якщо вимагати, щоб рівняння виду (1) було інваріантне відносно конформної групи $C(1,n) \supset \tilde{P}(1,n)$, то, як добре відомо, це буде виконуватись лише в тому випадку, коли $F_1 = \lambda u^{\frac{n+2}{n-2}}$ [4].

Теорема 2. *Якщо рівняння (1) інваріантне відносно конформної групи $C(1,n)$, то з допомогою локальної не виродженої заміни $\omega = \psi(u)$ воно переходить до нелінійному хвильовому рівнянню*

$$\Box\, \omega + \lambda\omega^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, \quad \lambda = \text{const},\ n \neq 2.$$

Зауваження 2. Якщо F_1 не залежить від u і рівняння (1) конформно інваріантне, то таке рівняння з допомогою локальної заміни переходить до лінійного хвильового рівнянню $\Box\, \omega = 0$.

Позначемо символом $E(1,n)$, групу зсувів та обертань в $(1+n)$ вимірному просторі, символом $\tilde{E}(1,n)$, доповнену групою масштабних перетворень. Справедлива наступна теорема.

Теорема 3. *Рівняння*

$$\Box\, u + F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0$$

інваріантне відносно групи $\tilde{E}(1,n)$, лише в таких трьох випадках:

1) $F = u^k f\left(\frac{u_a u_a}{\exp 4u}\right)$;

2) $F = \sqrt{u_a u_a} f(u)$;

3) $F = \exp u\, f\left(\frac{u_a u_a}{\exp 4u}\right), \quad u_a = \frac{\partial u}{\partial x_a}$,

де k – довільна стала, f – довільна диференційована функція [3].

Теорема 4. *Рівняння (2), якщо F_3 не залежить від $\frac{\partial u}{\partial x_\mu}$, інваріантне відносно групи $\tilde{G}(1,n)$ і групи проектних перетворень*

$$x_0' = \frac{x_0}{1 + \alpha x_0},$$

$$x_a' = \frac{x_a}{1 + \alpha x_0},$$

тоді і тільки тоді, коли $F_3 = \lambda u|u|^{4/n}$.

Таким чином, умова інваріантності НДРЧП відносно груп $\tilde{P}(1,n)$, $\tilde{G}(1,n)$ або їх підгруп дає можливість провести класифікацію нелінійних рівнянь. В багатьох випадках ця класифікація значно ширша, ніж стандартний поділ рівнянь на еліптичні, параболічні, гіперболічні та ультрагіперболічні. Одна із переваг такої класифікації є в тому, що вона підходить як для лінійних, так і для нелінійних ДР [5].

Особливістю багатьох НДРЧП, які володіють нетривіальною симетрією $\tilde{P}(1,n)$, $\tilde{G}(1,n)$, являються те, що на більшості рішень цих нелінійних рівнянь реалізується, як правило, лінійне представлення алгебри Лі. Саме ця обставина являється тим рішучим фактором, який дав нам можливість побудувати в явному вигляді багатопараметричні сімейства точних рішень багатьох НДРЧП.

Література:

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений /Л.В. Овсянников. – М.:Наука, 1978. – 400 с.

2. Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики / В.И. Фущич // Теоретико–алгебраические исследования в математической физике. – Киев: Ин- математики, 200. – С. 75–88.

3. Фущич В.И. Симметрийный принцип классификации нелинейных уравнений/ В.И. Фущич // Симметрия в задачах математической физики. – Киев: Ин- математики, 200. – С. 76–78.

4. Фущич В.И. Симметрия и точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера / В.И. Фущич, Н.И. Серов // Докл. АН СССР. –1983. – 273. № 4. – С. 24–64.

5. Фущич В.И. О симметрии и точных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики / В.И. Фущич // Теоретико – алгебраические методы в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики, 1983. С. 4–23.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Тимошенко Олександр Захарович

УДК: 514.75

Мельник Анастасія
студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ТОРА

Анотація: *У даній статті розглянуто розв'язання задачі на знаходження об'єму та площі поверхні одного з тіл обертання - тора.*

Ключові слова: *тіло обертання, тор, 3D модель, об'єм, площа поверхні.*

Annotation: *The solution to the problem of finding the volume and surface area of one of the bodies of the rotational torus is considered in this article.*

Keywords: *body of rotation, torque, 3D model, volume, surface area.*

Тіло обертання - це об'ємне тіло, що виникає при обертанні плоскої фігури, обмеженої кривою, навколо осі, що лежить в тій же площині [1, с. 174].

Нехай криволінійна трапеція, тобто фігура, обмежена віссю Ox, прямими $x=a$, $x=b$ і графіком неперервної зростаючої функції $f(x)\geq 0$, обертається навколо осі Ox (рис. 1), внаслідок чого утворюється тіло обертання [2, с. 54].

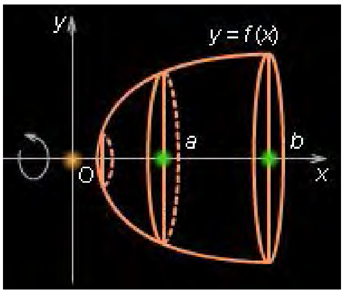


Рис. 1

Площа поверхні тіла обертання знаходиться за формулою:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Об'єм тіла обертання обчислюється за формулою:

$$V=\int_a^b S(x)dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx\,.$$

Задача. *Знайти площу поверхні та об'єм тора, утвореного обертанням кола* $x^2+(y-3)^2=1$ *навколо осі* Ox [3, с. 84].

Розв'язання. Нагадаємо, що тор - геометричне тіло, що утворюється обертанням кола навколо осі, яка лежить в одній площині з колом, але не перетинає його центр (форма тора зовні нагадує бублик).

Рівняння $x^2+(y-3)^2=1$ задає коло з радіусом $r=1$ і центром в точці $(0;3)$. При цьому легко отримати дві функції:

$(y-3)^2=1-x^2$;

$y_1=3+\sqrt{1-x^2}$ – задає верхнє півколо;

$y_2=3-\sqrt{1-x^2}$ – задає нижнє півколо.

Тепер розглядатимемо обертання цих двох дуг навколо осі Ox.

1) Знаходимо площу поверхні тіла, утвореного обертанням дуги $y_1=3+\sqrt{1-x^2}$ навколо осі Ox, використовуючи формулу

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx\,.$$

Але спочатку знайдемо похідну цієї функції:

$$y'=(3+\sqrt{1-x^2})'=0+\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(1-x^2\right)'=\frac{(0-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(y'\right)^2}=\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}=\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отже, маємо:

$$S_1=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,dx=2\pi\int_{-1}^{1}\frac{\left(3+\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\cdot 2\pi\int_0^1\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+1\right)dx=$$

$$=4\pi(3\arcsin x+x)\Big|_0^1=4\pi\left(3\arcsin 1+1\right)=4\pi\left(3\cdot\frac{\pi}{2}+1\right)=6\pi^2+4\pi\,.$$

Аналогічно знаходимо площу поверхні тіла, утвореного обертанням дуги $y_2 = 3 - \sqrt{1-x^2}$ навколо осі Ox,

$$S_2 = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_{-1}^{1}\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)'\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1}\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\left(0-\frac{(0-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_{-1}^{1}\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1}\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = 2\pi\int_{-1}^{1}\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\,dx = 2\cdot 2\int_{0}^{1}\frac{\left(3-\sqrt{1-x^2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= 4\pi\left(3\arcsin x - x\right)\Big|_0^1 = 4\pi(3\arcsin 1 - 1) = 4\pi\left(\frac{3\pi}{2}-1\right) = 6\pi^2 - 4\pi .$$

Отже, площа поверхні тора $S = S_1 + S_2 = 6\pi^2 + 4\pi + 6\pi^2 - 4\pi = 12\pi^2$.

2) Знайдемо об’єм заданого тора:

Знову ж таки для зручності розглядаємо дві функції y_1 і y_2.

Але на відміну від площі поверхні, об’єм можна представити як різницю об’ємів, утворених обертанням цих функцій навколо осі Ox:

$$V = 2\pi\int_0^1 y_1^2\,dx - 2\pi\int_0^1 y_2^2\,dx = 2\pi\int_0^1\left(y_1^2 - y_2^2\right)dx = 2\pi\int_0^1\left(\left(3+\sqrt{1-x^2}\right)^2 - \left(3-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right)dx =$$

$$= 2\pi\cdot 12\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx = 6\pi^2 .$$

Відповідь. $S = 12\pi^2$ (кв. од.), $V = 6\pi^2$ (куб. од.)

Побудуємо тор в середовищі «КОМПАС-3D».

Так, як тор - геометричне тіло, що утворюється обертанням кола навколо вісі, яка лежить у одній площині з колом, але не перетинає його. Тому почнемо рисунок із побудови основного кола, яке потім обертатимемо навколо осі абсцис. Для цього в площині XOZ за допомогою команди «побудувати коло» задаємо параметри нашого кола (рис. 1). Потім, за допомогою команди «відрізок» створюємо осьову лінію, у нашому випадку вона лежатиме на осі OX, обов’язково виставити тип лінії – «осьовий».

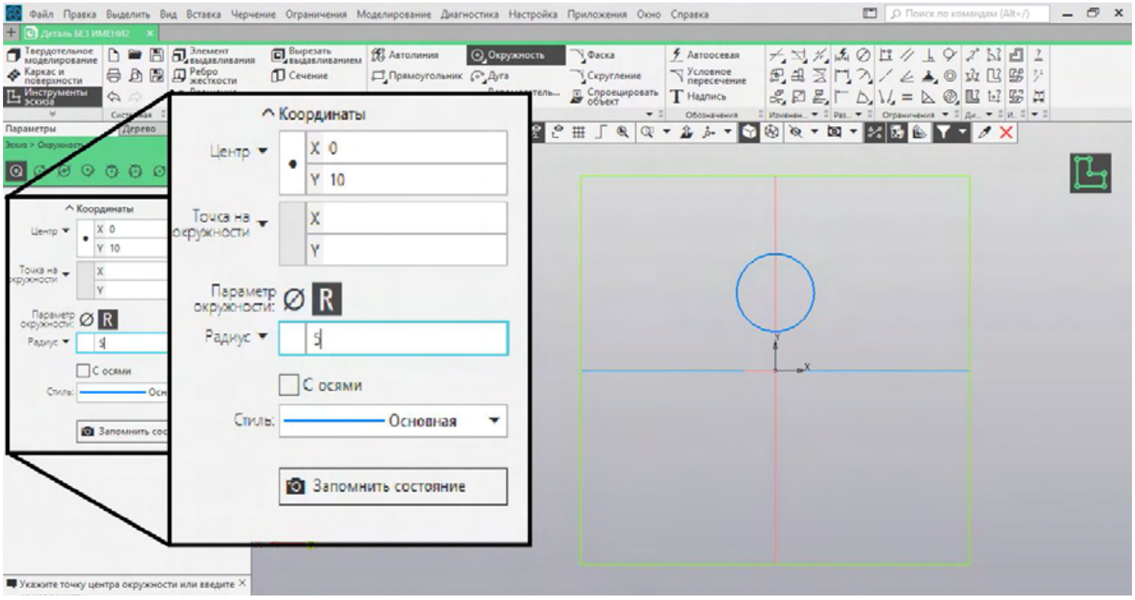


Рис. 1

Після того, як всі заготовки побудовані (коло та вісь обертання) переходимо до головного: вибираємо на панелі інструментів «редагування деталі» команду «операція обертання», обираємо тіло та вісь обертання (хоча це може автоматично обратись) (рис. 2).

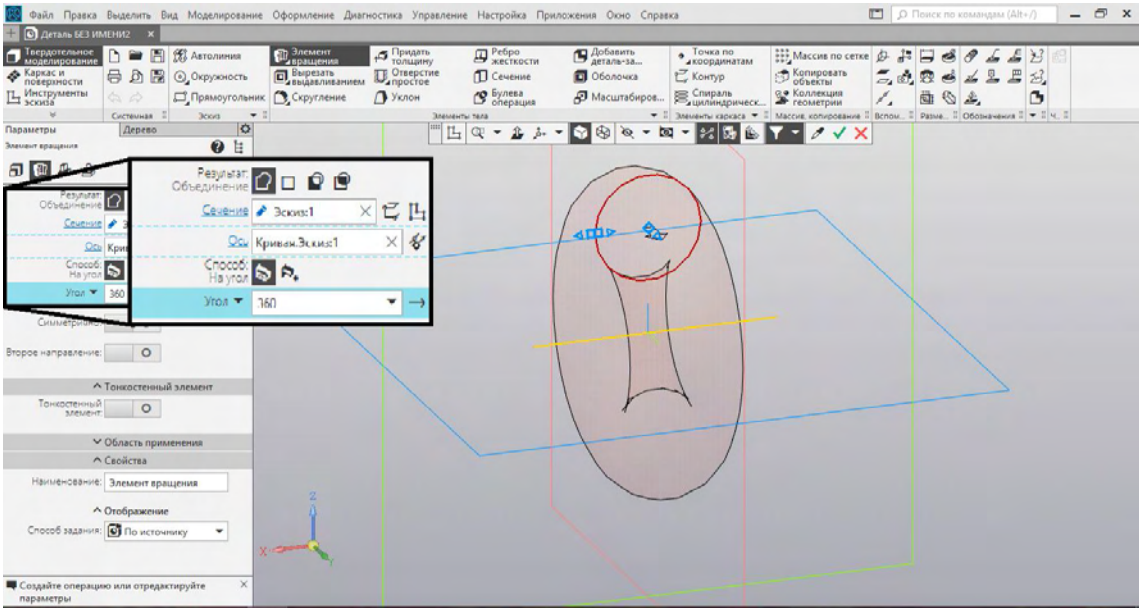


Рис. 2

Після налаштування властивостей «операції обертання», застосовуємо зміни, і нарешті, тор побудовано (рис. 3).

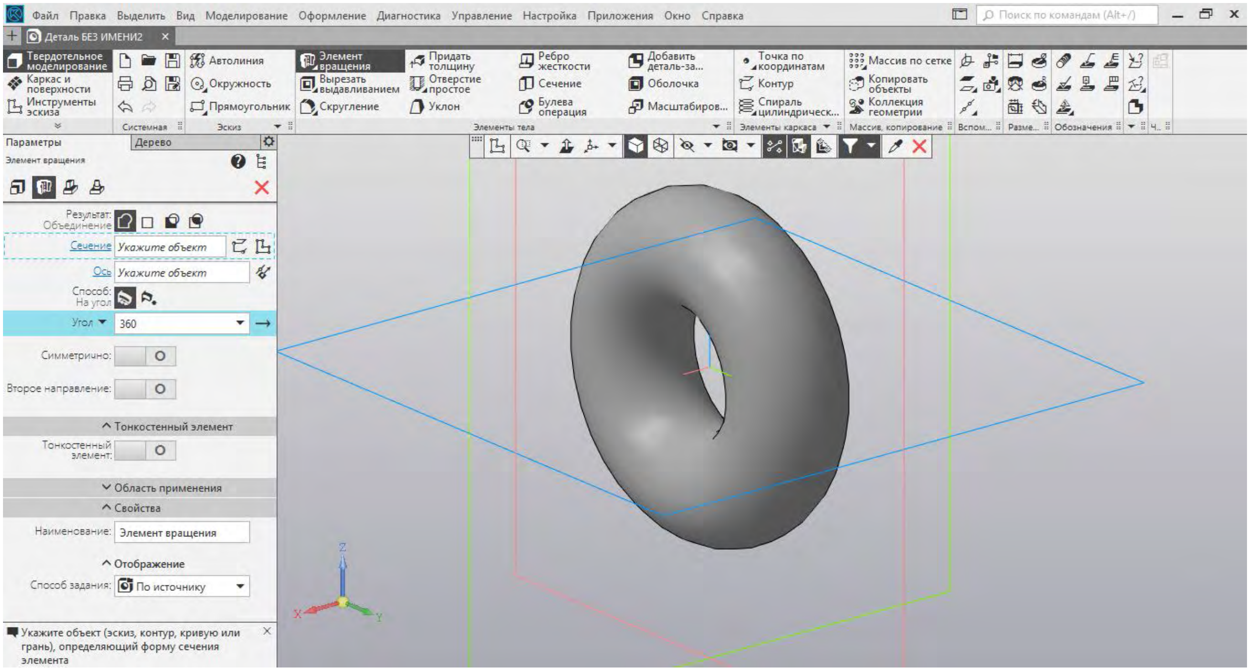


Рис. 3

Залежно від взаємного розташування кола та осі обертання тор може бути як зовнішнім (рис. 4), так і внутрішнім (рис. 5), (рис. 6).

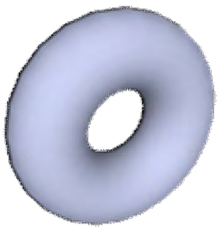


Рис. 4

Рис. 5

Рис. 6

Література:

1. Королёв Ю. И. Начертательная геометрия: Учебник для вузов. 2 -е изд. / Юрий Иванович Королёв., 2008. – 200 с.
2. Давидов М. О. Курс математичного аналізу / М. О. Давидов. – Київ: Вища школа, 1991. – 102 с.
3. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – Москва: Наука, 1990. – 145 с.
4. Нікулін О. В. Математика: навч. посібник для технічних університетів / О. В. Нікулін, Т. В. Наконечна. – Дніпропетровськ: Біла К.О., 2014. – 114 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Тютюн Любов Андріївна

УДК 373.5.016:[510.83:514]

Микитчак Катерина
студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, ЯК ОДИН З ЕТАПІВ ПРОЦЕСУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ЗАДАЧ З ГЕОМЕТРІЇ

Анотація: *У статті розглядаються шляхи реалізації математичного моделювання при розв'язуванні задач у навчальному процесі з геометрії у вищій школі.*

Ключові слова: *математична модель, математичне моделювання, навчальна задача.*

Abstract: *The article deals with the ways of realization of mathematical modeling in solving problems in the educational process on geometry in high school.*

Keywords: *mathematicalmodel, mathematicalmodeling, educationaltask.*

*В*ажливим методом наукового пізнання і сильним засобом активізації у навчанні є моделювання. Однією зі складових математичної освіти є нове уявлення про предмет математики. В основі змісту шкільних підручників має бути передбачено створення та розробка схем, моделей та їх варіантів, створення моделей за відомими схемами, повторення вже розроблених схем безпосередньо в навчанні. Для того, щоб краще побачити загальні риси засвоюваної дії, треба абстрагуватися від непотрібних в даному випадку властивостей предметів, а це і означає, що потрібно перейти до дії з моделями, вільними від всіх інших властивостей, крім потрібних в даному випадку.

Питання щодо використання математичних методів у розв'язуванні навчальних задач певною мірою розкрито в працях О. М. Леонтьєва, Г. А. Балл, О. К. Тихомиров та багатьох інших, але це питання є досить широким та неоднозначним і потребує більшої уваги, ретельнішого розгляду.

Метою статті є розкриття аспектів застосування методики математичного моделювання розв'язку навчальних задач з геометрії у навчальному процесі вищої школи.

Математична модель — це сукупність математичних елементів (чисел, змінних, векторів, множин) і відношень між ними, які з необхідної для проектування точністю описують властивості проектованого об'єкта. На кожному етапі проектування використовується свій математичний опис проектованого об'єкта, складність якого повинна бути погоджена з можливостями аналізу на ЕОМ, що приводить до необхідності мати для одного об'єкта кілька моделей різного рівня складності.[2, с.24]

У загальній теорії математичного моделювання *математичну модель* будь-якого об'єкта характеризують *внутрішніми*, *зовнішніми*, *вихідними параметрами* й *фазовими змінними*.[5, с. 81]

Математичне модель є важливою складовою для розв'язку навчальних задач з геометрії

Навчальна задача - виразно сформульована інформаційна система, в якій є інформаційна неузгодженість між її частинами, що викликає потребу в її перетворенні та погодженні. [1, с. 72]

У навчальній задачі виділяють основні компоненти, які несуть певне інформаційне навантаження. У різних предметних областях задачі можуть містити специфічні якості, що впливають на їх компонентний склад. Так, наприклад, педагогічна задача (проблема) дещо відрізняється від математичної. Однак можливе виділення найбільш загальних компонентів задачі. Такими є: форма, структура і зміст.

Форма задачі виражає внутрішню організацію і взаємодію елементів задачі, як між собою, так і із зовнішніми умовами. Так, у математиці розрізняють за формою задачі (теореми):

- *на знаходження*;
- *на доведення*;
- *на існування*. [4, с. 67]

Форма - спосіб існування задачі, проте вона характеризується відносністю, так як можлива трансформація однієї форми в іншу. Цей факт особливо суттєвий в евристичному пошуку, так як в розв’язувану задачу доводиться вносити зміни, властиві її внутрішній організації.

Структура - сукупність елементарних об'єктів з конкретно описаним зв'язком між ними, яка представляє однозначну організацію сукупності. Як видно, структура служить для фіксації сукупності різних об'єктів і структурних зв'язків між ними в задачі.

Зміст - провідний компонент задачі , на основі якого починається процес розв’язання. Він володіє певною рухливістю і відносною незалежністю від форми і структури. Особливе значення в змісті задачі мають дані. Вони можуть бути надмірними, тобто містити зайву інформацію, можуть бути суперечливими. Навчальні задачі, як правило, містять необхідну й достатню кількість даних для знаходження невідомих при даній структурі зв'язку. [3, с. 49]

Навчальною є задача, спрямована на досягнення навчальних цілей.

Рекомендована структура та зміст етапів побудови моделі.

1. Аналіз задачі та предметної області. Знайомство з предметною областю, формулювання цілей моделювання, визначення кола задач, для розв’язання яких буде використана модель

2. Аналіз об’єкту дослідження:

- Змістовий опис об’єкту дослідження. Структурування об’єкту – виділення та опис елементів та їх взаємозв’язків. Виділення та опис істотних властивостей і станів об’єкту, їх взаємозв’язків та параметрів, які впливають на властивості і стани об’єкту.
- Планування й проведення експериментівдля отримання додаткової інформації про об’єкт (за необхідності);
- Абстрагування. Ідентифікація властивостей об’єкту, якими можна знехтувати. Формулювання припущень та гіпотез.

3. Формалізація опису об’єкту дослідження:

3.1. Створення інформаційної моделі об'єкту, досліджуваного в задачі:

- Опис заданих вхідних параметрів ;
- Опис постійних параметрів об'єкту;
- Опис впливів зовнішнього середовища;
- Опис вихідних параметрів об'єкт;
- Опис залежності основних параметрів об'єкту від інших за допомогою логіко-математичних співвідношень;
- Опис залежності вихідних параметрів об'єкту від інших параметрів і впливів.

Формальний запис цих залежностей має дати відповіді на запитання, поставлені в задачі.

3.2. Створення математичної моделі об'єкту, досліджуваного в задачі:

- Опис залежності основних параметрів об'єкту від інших за допомогою логіко-математичних співвідношень;
- Опис внутрішніх та зовнішніх зв'язків об'єкту за допомогою логіко-математичних співвідношень.

4. Вибір та обґрунтування методу розв'язання задачі: формалізований опис методу отримання розв'язку задачі у вигляді аналітичної формули розв'язку чи формул чисельного методу розв'язання задачі. [6, с. 78]

Задача. Знайти відношення об'ємів кулі та вписаного в неї куба.

Математична модель задачі:

1. Знаходимо об'єм кулі:

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{3\sqrt{3}a^3}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$$

(де a – довжина ребра куба).

2. Об'єм куба:

$V_2 = a^2.$

3. Відношення об'ємів кулі та вписаного в неї куба:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3/2}{a^2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}.$$

Відповідь: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sqrt{3}\pi a^3/2}{a^2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

Моделі і процес моделювання одночасно є засобом унаочнення, усвідомлення задачі і методом її постановки та розв'язання. Опанування методу математичного моделювання при розв'язуванні навчальних задач сприяє розвитку їх теоретичного та логічного мислення.

Література:

1. Балл Г. А.Теорія навчальних задач: Психолого-педагогічний аспект/А.Г. Балл.– М.: Педагогіка, 1990.– 184с.
2. Великодний С.І. Математичне моделювання при розв'язуванні задач / С.І. Великодний // Математика в школі – 2005. – № 6. – С. 16–18.
3. Мансуров Н. С. Зависимость решения от формулировки и оформления задачи /Н. С.Мансуров.–М.:Знание1960.– 265с.
4. Пойа Д. Как решать задачу/Д. Пойа– М.: Учпедгиз, 1959.– 207с
5. Самойленко В.М. Математичне моделювання/ М. В. Самойленко.– К.:Логос, 2013. – 267с.
6. Яровенко А.Г. Основи програмування / А. Г. Яровенко. – Вінниця, 2014.– 98 с.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Тимошенко Олександр Захарович

УДК 373.5.091.33:414.112

Мороз Діана

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського,

Семенець Дмитро

кандидат технічних наук, старший викладач

кафедри математики та інформатики

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ПРОГРАМУВАННЯ САЙТІВ. БАЗИ ДАНИХ ДЛЯ САЙТІВ. ЯК ЗАХИСТИТИ САЙТ ВІД ЗЛОМУ?

Анотація: *У статті розглядається сучасний рівень використання веб-технологій, бази даних, які використовуються для створення сайтів, системи для управління базами даних. Розкриваються різні методи для захисту сайту від зломів.*

Ключові слова: *веб-програмування, бази даних для сайтів, захист сайту, злом сайту, ddos-атака, хакер.*

Annotation: *The article includes review of the level of web-technologies usage in modern society, the databases used to create sites, the systems for database management. It discovers various methods of protection the site from hacking.*

Keywords: *web-programming, databases for sites, site protection, site hacking, ddos attack, hacker.*

Останні роки розвиток веб-технологій пришвидшується з кожним роком. Це обумовлено широким розповсюдженням та інтенсивним використанням мережі Internet, соціальних мереж, розвитком технології мобільного Internet та розвитком мобільних пристроїв. Веб-технології дають можливість створити різноманітні сайти і забезпечити швидкий доступ до будь-якої інформації.

В наш час веб-технології забезпечують різноманітні інформаційні потреби: пошук інформації, онлайн магазини, соціальні мережі, цифрові комунікації, управління фінансами, корпоративне управління, дистанційне управління навчальним процесом в навчальних закладах та багато іншого.

Більшість сучасних програмних продуктів є частково або повністю розробленими за допомогою веб-технологій.

Веб-сайти за будовою поділяються на три основних типи: статичні, інтерактивні клієнтські, динамічні або веб-додатки. Найбільш вживаними сайтами зараз є динамічні – це сайти, що змінюють зміст сторінок в залежності від запитів і налаштувань користувача. Робота з базами даних - це одна з найважливіших складових програмування сайтів динамічного типу. Чи то формування сторінок «на льоту», чи реагування на дії відвідувачів сайтів - взаємодія з базами даних потрібна завжди.

Бази даних для сайтів (БД) використовуються з метою зберігання різної інформації і, у спрощеному вигляді, представляють собою певний набір взаємозалежних таблиць. Розміри таблиць в БД різні, їх кількість довільна. Саме в базах даних зберігається на сервері необхідна для роботи сайту інформація, наприклад, інформація про клієнтів, каталог товарів і т. д.

Програмування сайтів динамічного типу виконується за допомогою різних скриптів (сценаріїв) , що поділяються зазвичай на серверні та клієнтські. Програмування сайтів за допомогою серверних скриптів дозволяє обробляти дані, введені відвідувачами сайтів у веб-форми, генерувати динамічні сторінки, відсилати й приймати cookies (файли налаштувань). Для отримання інформації, необхідної при виконанні подібних дій, серверні скрипти звертаються до баз даних. Звернення скрипта до БД називається запитом.

Для побудови запитів до баз даних широко застосовується SQL (Structured Query Language) - "мова структурованих запитів". За допомогою SQL може здійснюватися додавання, видалення, редагування записів в таблицях баз даних, вибірка даних у відповідності з різними умовами, сортування даних і багато іншого.

У програмуванні сайтів управління БД здійснюється за допомогою клієнт-серверних систем управління базами даних (СУБД), таких як Oracle, MS SQL Server, PostgreSQL, MySQL та ін. Клієнт-серверні СУБД обробляють запити централізовано, до їх переваг відносять забезпечення високої надійності баз даних, високої доступності та високої безпеки.

СУБД MySQL - вільна система управління базами даних , одна з найбільш часто вживаних в програмуванні сайтів. СУБД MySQL підтримує велику кількість існуючих типів таблиць (InnoDB, MyISAM і т. д.), а завдяки відкритій архітектурі та GPL-ліцензуванню, в СУБД MySQL постійно з'являються нові типи таблиць. Управління базами даних за допомогою MySQL дуже зручне, що зробило дану систему популярною.

Система управління реляційними базами даних Microsoft SQL Server поставляється компанією Microsoft на комерційній основі (за винятком безкоштовної редакції Express Edition). Ця СУБД використовує мову запитів Transact-SQL, підтримується операційними системами сімейства Windows Desktop / Server. У СУБД Microsoft SQL Server присутнє графічне ПЗ для конструювання та оптимізації запитів (SQL Management Studio і Studio Express).

Об'єктно-реляційна система управління базами даних компанії Oracle - Oracle Database працює на Windows, Unix, Linux, MacOS. Oracle Database, на відміну від MySQL, наприклад, має більш широку сферу застосування. СУБД Oracle має високу продуктивність, широкий функціонал, унікальні технології (RAC, RAT і т. д.). У програмуванні сайтів для невеликих і середніх компаній застосовується досить рідко через свою високу вартість. До того ж, досить складно знайти хостинг з підтримкою даної СУБД.

Вільна система управління базами даних PostgreSQL існує в редакціях для Linux, Solaris/OpenSolaris, Win32, Win x86-64, Mac OS X, FreeBSD, QNX 4.25, QNX 6. Базується на мові SQL. Серед переваг PostgreSQL виділяють підтримку БД практично необмеженого розміру, наявність надійних механізмів реплікації, легку розширюваність, підтримку великого набору вбудованих типів даних та багато іншого.

Програмування сайтів, що взаємодіють різним чином з базами даних, включає кілька основних етапів роботи з БД : побудова запитів до БД за допомогою мови SQL, програмування сценаріїв для обробки цих запитів і програмування модулів для відображення результатів обробки запитів.

Надмірне число звернень від сайтів до баз даних робить завантаження сайтів більш повільним, збільшує навантаження на сервер. У результаті можливі збої в роботі сайтів, аж до повного припинення доступу. Зменшення кількості запитів до БД дозволяє зменшити навантаження на сервер, а також зменшити час завантаження динамічних сторінок із сервера. Тому оптимізація взаємодії сайтів з базами даних - це одне із завдань професійного програмування сайтів.

Захист сайту від злому - актуальне завдання для багатьох власників сайтів у наш час. Завдяки появі величезної кількості посібників типу «Хакерство для чайників», навіть ті користувачі Інтернет, яким раніше справи не було до Вашого сайту, раптом захочуть спробувати свої сили й похвалитися новими набутими знаннями. Що робити, щоб уберегти свій сайт від злому?

Для початку перелічимо непрограмні методи захисту сайту від злому. Напевно, Ви навіть не раз чули про них, але, можливо, не звертали уваги.

Метод 1. Вибирайте складні паролі. Практика показує, що навіть найшвидша програма для підбору пароля простим перебором упорається з паролем з восьми символів трохи менше, ніж за рік. Справа в тому, що комбінацій з восьмизначного числа існує $2x10^{12}$, а комбінацій з восьми невідомих зломщикові символів - ще більше.

Метод 2. Не давайте прав доступу до адміністраторської панелі сайту неперевіреним людям. Інакше, не дивуйтеся, чому сайт зламаний. Також не варто давати права на додавання HTML-коду всім бажаючим, тому що несумлінні користувачі можуть додати на сайт шкідливий код.

Метод 3. Користуйтеся антивірусом зі свіжими базами.

Метод 4. Не зберігаєте паролі в FTP-клієнтах. Файл, що містить пароль, навіть якщо він зашифрований, гарному хакеру вкрасти не стане проблемою.

Метод 5. Для зберігання паролів краще використовуйте спеціальні менеджери паролів, якщо не покладаєтеся на свою пам'ять. Менеджер паролів -

це спеціальна програма, що дозволяє зберігати й упорядковувати паролі в зашифрованому файлі. Для доступу до менеджера паролів необхідний окремий пароль - ключ. До речі кажучи, запам'ятати один пароль набагато легше, ніж десятки різних, чи не так?

Метод 6. Не відвідуйте сумнівні посилання.

Однак не завжди злом сайту відбувається з необережності або неуважності власника сайту. Іноді уразливість сайту криється в його вихідних кодах, яку професійні хакери швидко виявлять. Якщо Ваш сайт побудований на основі однієї із систем керування контентом (CMS), то знайте, що розробники цих систем уже подбали про Вашу безпеку й включили у вихідний код необхідні елементи захисту.

Якщо Ви використовуєте на своєму сайті готові скрипти, то завжди пам'ятайте, що вони можуть бути уразливі. Адже багато скриптів пишуться за участі декількох фахівців з веб-програмування, а це підвищує ймовірність виникнення помилок, які хакери можуть використовувати для своїх атак. Тому не зайвим буде довідатися думку про скрипт на спеціалізованих форумах, наприклад, antichat.ru. Гарним показником надійності готового скрипта буде також його наявність і тривала робота на багатьох інших сайтах.

Якщо Ви пишете скрипти власноруч, то обов'язково приділіть належну увагу їхній безпеці. Наприклад, у скриптах, які працюють із відправленням і одержанням даних з форм (стосується й методу POST, і методу GET), завжди фільтруйте дані, що вводяться користувачем. Якщо цього не зробити, то хакер може відправити через форму шкідливий код на javascript. Таким чином, хакер може одержати доступ до Ваших cookies або зробити сторінку непрацездатною. Така атака називається XSS.

Особливо уважно варто перевіряти скрипт, що взаємодіє з базою даних на основі даних користувача. Якщо хакер одержить можливість завантажити на сервер з Вашим сайтом якісь файли, то він зможе зробити з ним усе, що забажає.

Нажаль, коли мова йде про DDoS-атаки, невразливих сайтів немає. DDoS-атака полягає в тому, що одночасно з великої кількості комп'ютерів на Ваш сайт починає надходити величезна кількість запитів. Сервер обслужити таку кількість запитів не може й сайт перестає працювати. Крім того, якщо скрипт дуже громіздкий, то «підвісити» сайт можна навіть не дуже великою кількістю запитів.

Бурхливий розвиток всесвітньої мережі приносить веб-технології в повсякденне життя майже кожної людини починаючи з юного віку. Вже в початковій школі більшість дітей виконують завдання на сайтах шкіл, мають смартфони, користуються чатами та цифровим зв'язком. Це вимагає постійного осучаснення навичок і знань веб-технологій від шкільних учителів та викладачів вищих освітніх закладів, що їх готують.

Література:

1.Пасічник О.Г. Основи веб-дизайну. Наук.-метод. посібн. / О.Г. Пасічнік, О.В. Пасічнік, І.В. Стеценко. - група BHV, 2009. – 336с.

2.Манако В. Основи будування сайтів. / В. Манако, Д.Манако, О.Данилова, О.Войченко. - Шкільний світ, 2010. – 120 с.

3.Балик Н.Р. MySQL: лабораторний практикум. Посібн. для студ. / Н.Р.Балик, В.І. Мандзюк. – Тернопіль, Навч. книга— Богдан, 2008. – 88 с.

4.Створення сайтів [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу https://fizmat.7mile.net/informatika-11/23-etepi-stvorenya-saytu.htm.

5.Веб-програмування [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу http://sites.znu.edu.ua/webprog/.

УДК [373.5.091.33:004]:517

Мукоїд Алла, Гарник Вікторія

студентки факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ НАОЧНОСТІ У ВИВЧЕННІ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Анотація: *У статті розглядаються принципи наочності, їх практичне застосування на уроках вивчення математичного аналізу. На базі графіків функцій розглядається один з видів наочності – інфографіка.*

Ключові слова: *Математичний аналіз, наочність, інфграфіка, базисні функції.*

Abstract: *The article examines the principles of visibility, their practical application in the lessons of studying mathematical analysis. On the basis of function graphs, one of the types of visibility is considered - infographics.*

Keywords: *Mathematical analysis, visibility, infography, basic functions.*

Постановка проблеми. Шкільний учитель, враховуючи важливу роль умінь та навичок системного мислення, має розвивати у школярів інтерес до навчання, спираючись на чуттєве сприйняття навчальної інформації, адже чим різноманітніші чуттєві сприйняття навчального матеріалу, тим міцніше знання засвоюється. Сучасний вчитель математики повинен чітко розуміти зміст поняття «наочність», знати і застосовувати у своїй педагогічній практиці різні види наочності, залежно від навчальної мети, обирати найефективніші засоби наочності. Саме тому актуальною є необхідність розглянути такий вид наочності, як інфографіка.

Мета: на базі всебічного розгляду поняття наочності розглянути застосування інфографіки в математичному аналізі.

Виклад основного матеріалу. Наочність - один із важливих принципів навчання, що визначає загальну спрямованість навчального процесу, впливає на його зміст, форми і методи, допомагає позбутися абстрактності у засвоєнні учнями знань [2].

Принцип наочності є одним з найвідоміших і інтуїтивно зрозумілих принципів навчання, якого намагаються дотримуватись з давніх часів. Закономірне обґрунтування цього принципу отримано порівняно недавно. В основі його лежить така чітко зафіксована фізіологічна закономірність: органи почуттів людини мають різну пропускну здатність до зовнішніх подразників. У більшості людей найбільшу пропускну здатність мають органи зору, які «пропускають» у мозок майже в 5 разів більше інформації, ніж органи слуху, і майже у 13 разів більше, ніж тактильні органи [4].

Заслуга в утвердженні в педагогіці принципу наочності належить Й. Песталоцці. Але наукове обґрунтування принципу наочності, а точніше, спроба його формулювання належить основоположнику наукової педагогіки, великому чеському педагогу Я. Коменському. Цей принцип він виклав у вигляді правила, яке ним же було назване золотим, а пізніше стало відоме як "золоте правило дидактики" [3].

Принцип наочності залишається одним з провідних принципів дидактики і сьогодні. Практика навчання виробила велику кількість правил, які розкривають застосування принципу наочності. Спираючись на працю Шевченко І. С. виділимо основні з них:

- Навчаючи і виховуючи, пам'ятайте, що наочні посібники сприяють утворенню найбільш виразних і правильних уявлень про досліджувані предмети і явища [4].

Наприклад, у процесі вивчення розвинення в степеневий ряд деяких елементарних функцій важливо використовувати програмні засоби для утворення найбільш виразних і правильних уявлень про апроксимацію цих функцій $n-$ми частинними сумами.

Для функції $y=e^x$ на проміжку $(-\infty;+\infty)$ виконуються необхідні і достатні умови розкладу функції в степеневий ряд, отже отримуємо формулу

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Тут важливо показати графічно, що показникова функція апроксимується многочленом, причому похибка зменшується при збільшенні числа доданків. На Рис. 1. зображено функцію та її частині суми.

Оскільки функція $\sin x$ і всі її похідні обмежені, то її теж можна розкласти у ряд Тейлора-Маклорена

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,$$

причому залишок ряду не перевищує модуля першого з відкинутих членів. Розглянемо Рис. 2. де побудовано графіки нашої функції та її частині суми.

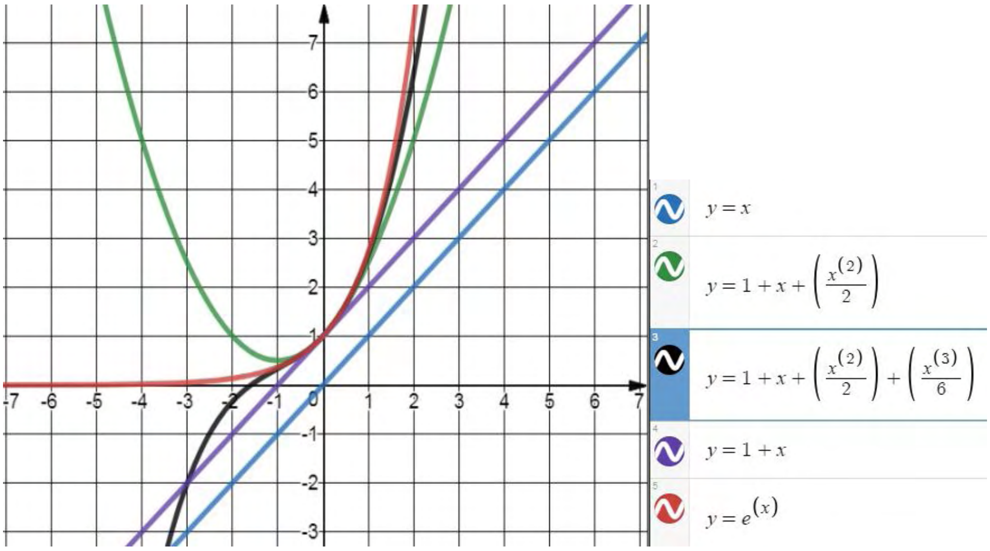


Рис. 1. Функція $y = e^x$ та її частині суми $S_n(x), n = 1,2,3,4,5.$

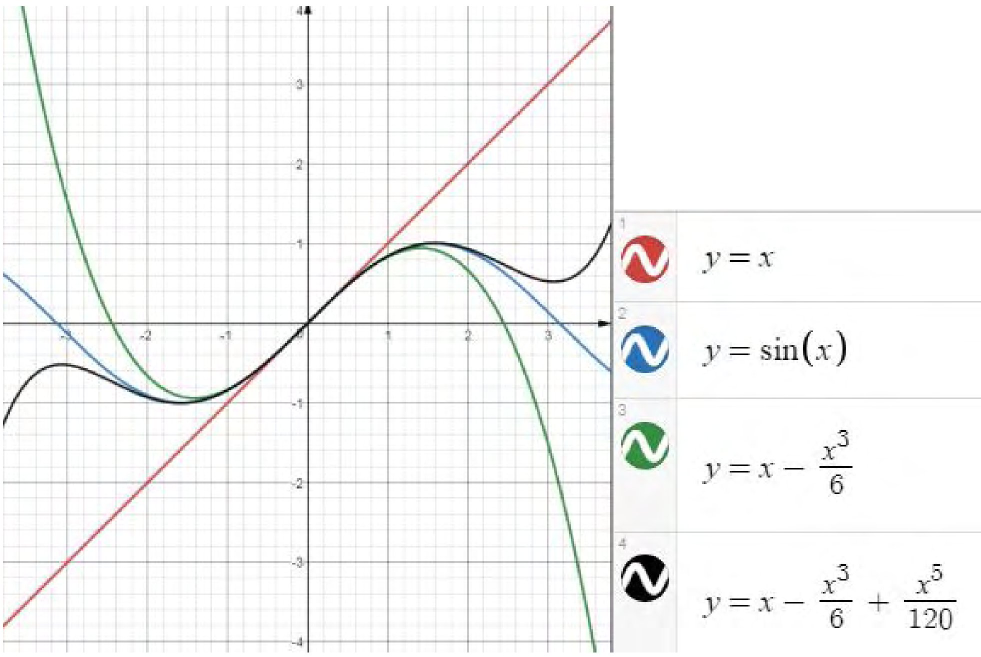


Рис. 2 Функція $y = \sin x$ на її частині суми $S_n(x), n = 1,2,3,4,5.$

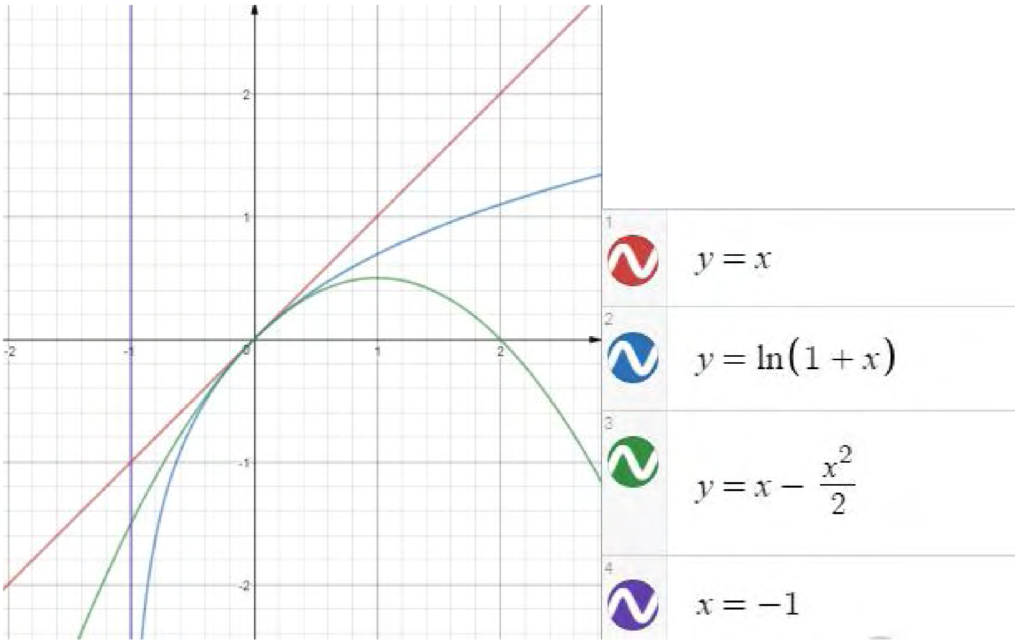


Рис. 3. Функція $y = \ln(1+x)$ та її частинні суми $S_n(x), n = 1,2,3,4,5.$

Розглянемо логарифмічну функцію в околі точки $x = 0$ і запишемо її розклад у ряд Тейлора-Маклорена:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-1\right)^{n-1} \frac{x^n}{n}, x \in \left(-1;1\right)$$

На графіку Рис. 3. побудована розклад функція в $y = \ln(1+x)$.

Наочність особливо важлива в навчанні математики з огляду на те, що тут потрібне досягнення більш високого ступеня абстракції, ніж у навчанні інших предметів, а вона сприяє розвитку абстрактного мислення (при правильному її застосуванні) [5, с.70].

Особлива увага застосування принципу наочності надається при вивченні класифікацій функцій, оскільки тут важливо показати принципи базисних функцій(принаймні три основні). Навчити розпізнавати належність функції з наперед заданими властивостями [4].

Для студентів розглянемо приклад класифікації базисних функцій:

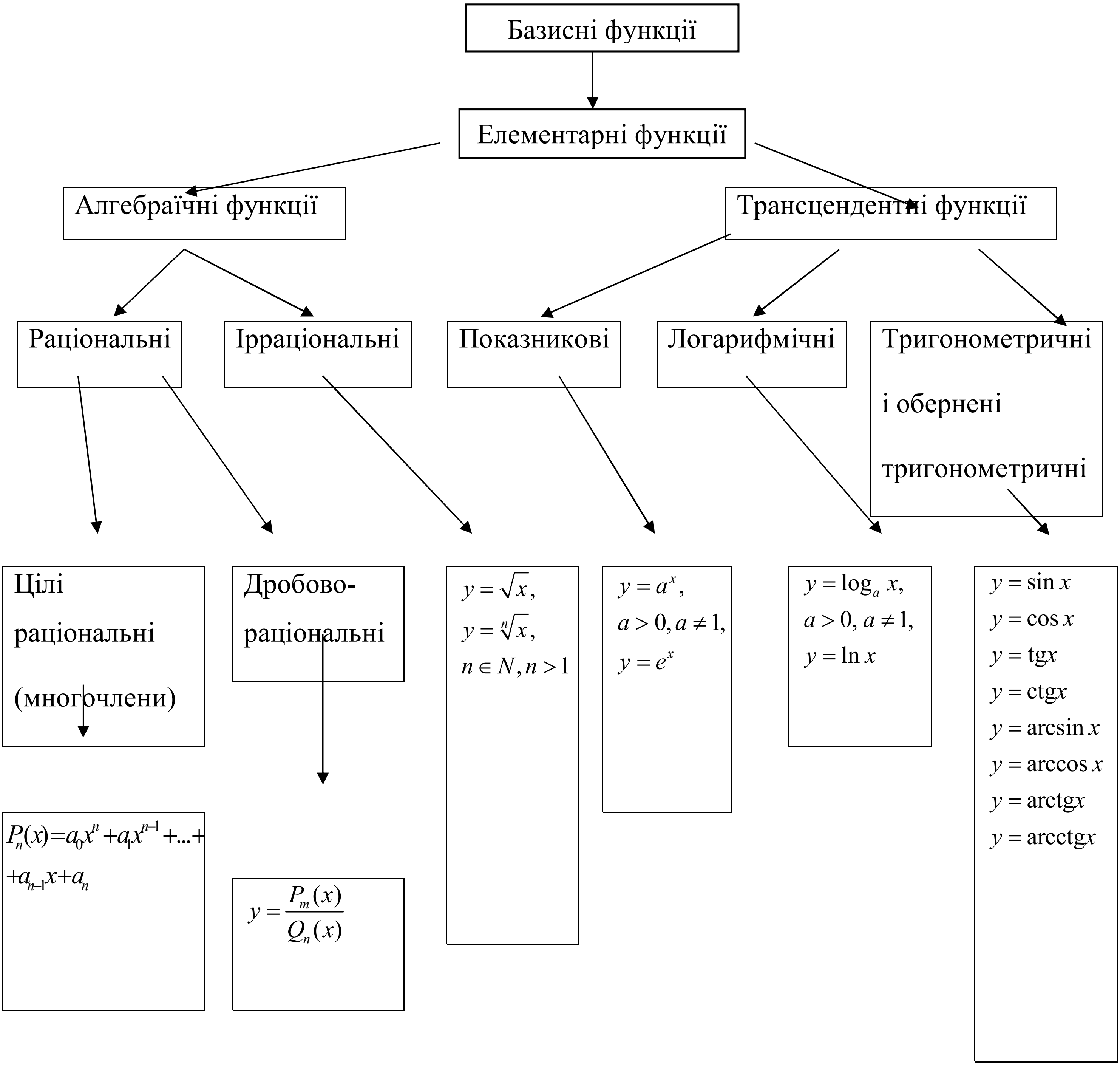


Рис. 4. Класифікація функцій з використанням базисних функцій.

У математичному аналізі ми часто використовуємо операції диференціювання й інтегрування. Можна задати запитання: що буде, якщо про диференціювати логарифм? Що буде з косинусом після інтегрування? Цікаві вирішення таблиць похідних та інтегралів основних елементарних функцій з перетворенням графіків пропонуються у роботах [6, 1].

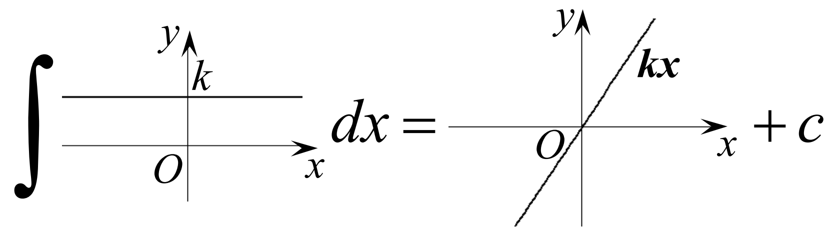
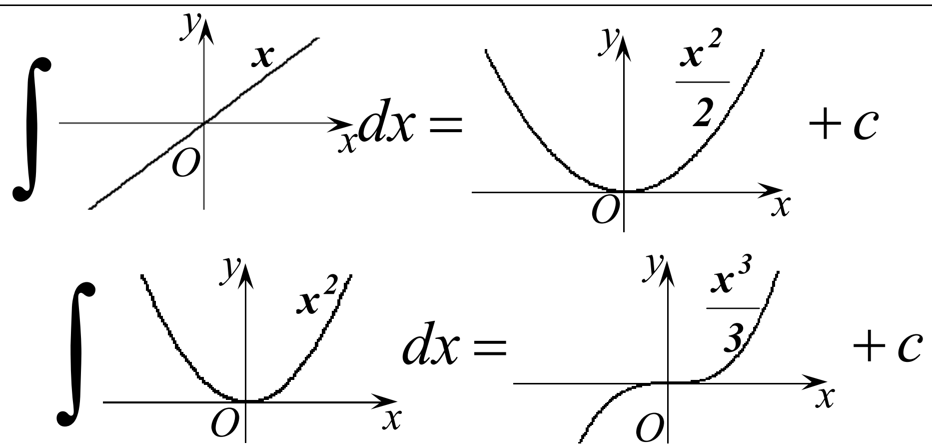
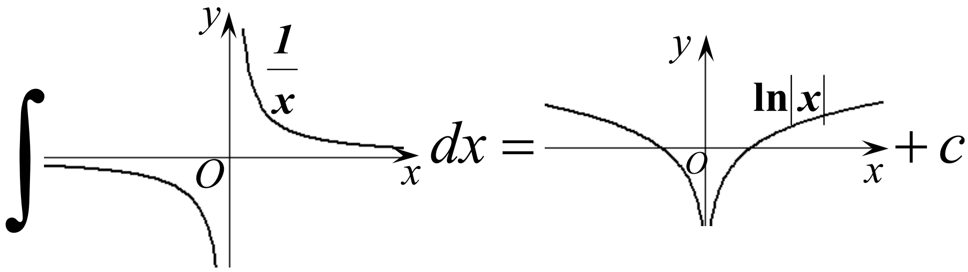
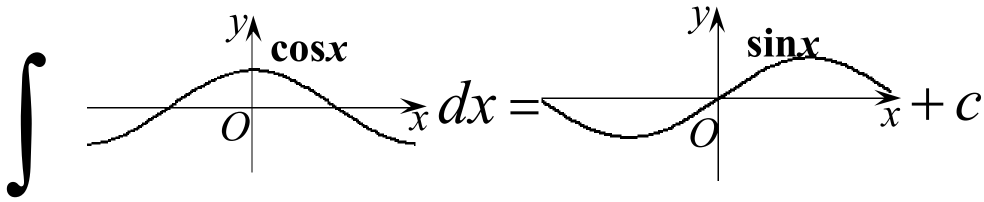
$\int 0dx = C$, $\int kdx = kx + C$,	
$\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, $\alpha \neq -1$	
$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C, x \neq 0$ на кожному з проміжків області визначення	
$\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$, $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$, $x \in D$	

Рис. 5. Таблиця інтегралів основних елементарних функцій [6].

Одним з підсистем наочності є візуалізація. Процес візуалізації активно вивчали сучасні науковці В. Делінгер, Н. Резник, Р. Арнхейм, Б. Ерднієв, Н. Бровко, А. Вербицький, Г. Селевко, Ю. Плотинський та інші.

Під час аналізу навчальної літератури з математики стало зрозуміло що проблема візуалізації не достатньо вивчена, вчителі математики рідко використовують такі методи для навчання у школі.

Технологія візуалізації навчальної інформації може стати основою нових методик навчання математики як у закладах загальної середньої освіти, так і у закладах вищої освіти, адже саме мова математики – це мова математичних моделей, символів, образів, які є частиною процесу візуалізації математичних знань.

Інфографіка – це одна з підсистем візуалізації. Інфографіка – це просте та наочне графічне подання інформації про предмет, включаючи складні взаємозв’язки між ними [5]. Таким чином, достатньо елементарно дослідити чи є дана робота інфографікою чи ні. Потрібно видалити з неї весь текст та переглянути, чи передає зображення, що залишилося, певний зміст роботи. Якщо передає, то це є інфографіка. Якщо ж ні, то це декоративний елемент [5].

Технологія інфографіки виходить з того, що зображення роблять числові дані більш привабливими для їх сприйняття, сприяють їх ефективному запамятовуванню, підвищують їх переконливість. Інфографіка нині активно застосовується у різних галузях науки, вона представляє собою досить універсальний засіб для поширення концептуальної інформації.

У курсі математичного аналізу існує багато теорем, означень, завдань які можна зоображати за допомогою інфографіки. В учнів та студентів буде розвиватися зорова пам’ять, яка сприятиме кращому запам’ятовуванню.

Висновок. В сучасному освітньому середовищі все більше популярними стають різноманітні методи навчання. Розвиваються технології, і навчання учнів має все більше і більше удосконалюватися. Правильне використання наочності на уроках математики сприяє формуванню чітких просторових і кількісних уявлень, змістовних понять, розвиває логічне мислення і мову, допомагає на основі розгляду й аналізу конкретних явищ прийти до узагальнень, які потім застосовуються на практиці.

Література:

1. Попов Ю. П. Математика в образах / Ю. П. Попов, Ю. В. Пухначев //. – М: Знание, 1989. – 208с.
2. Принцип наочності [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://www.info-library.com.ua/books-text-4282.html.
3. Шевченко І. С. Приклади візуалізації у навчанні математики // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – Суми: СумДПУ ім. А. С. Макаренка, 2014. - №2 (3). – С. 65-78.
4. Шахіна І. Створення інфографіки за допомогою сучасних інтернет-сервісів [Електронний ресурс] / І. Шахіна, О. Ільїна – Режим доступу до ресурсу: http://phm.kspu.kr.ua/ojs/index.php/NZ-PMFMTO/article/download/39/36.
5. Семеніхіна О. В. Про використання вчителями математики засобів комп'ютерної візуалізації [Електронний ресурс] / О. В. Семеніхіна, Н. В. Білошапка – Режим доступу до ресурсу: http://journals.uran.ua/index.php/2077-1827/article/download/140455/137526
6. Ковтонюк М. М. Лекції з математичного аналізу. Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів / М. М Ковтонюк. – Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер»», 2013. – 289 с. (Гриф МОНМС України, лист №1/11–15245 від 01.10.2012 р.).

Науковий керівник: докт. пед. наук, професор Ковтонюк Мар'яна Михайлівна

УДК 373.5.015.311:004

Наконечна Наталія

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

РОЗВИТОК ЛОГІЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ ПРИ ВИВЧЕННІ

ТЕМИ «КОМП’ЮТЕРНІ ПРЕЗЕНТАЦІЇ»

Анотація: *У статті висвітлено основні етапи та вимоги до створення презентації, як засобу для розвитку логічного мислення школярів при вивченні інформатики.*

Ключові слова: *логічне мислення, презентація, етапи створення презентації.*

Abstract: *The article covers the main stages and requirements for creating a presentation, as a means for the development of logical thinking of pupil in the study of computer science.*

Keywords: *Logical thinking, presentation, stages of creating a presentation.*

У нинішній період бурхливим темпом розвивається науково-технічна, інформаційні галузі, швидкими темпами збільшуються і накопичуються знання про світ. І однією з головних задач при навчанні учнів стає вміння навчити їх логічно мислити, співставляти всі набутті знання, виокремлювати головне і потрібне для розв’язання конкретного типу задачі та самостійно поповнювати знання. Учневі не легко орієнтуватися в усіх наявних нині програмних засобах, і основним завданням учителя є навчити учнів вибирати правильний програмний продукт для вирішення задачі. Наприклад: для створення списків, таблиць краще підходить Excel, а не Word, так як він створений для обрахунків, аналізу даних і роботи зі списками в таблицях.

Отже, для підготовки дітей до життя в сучасному інформаційному суспільстві перш за все необхідно розвивати логічне мислення, здатність до аналізу (вивчення структури об'єкта, виявлення взаємозв'язків, усвідомлення принципів організації) і синтезу (створення нових схем, структур і моделей).

У філософії, психології і педагогіці розрізняють наступні форми мислення: наочно-образне, наочно-дієве, словесно-логічне.

Словесно-логічне мислення – це найбільш пізній етап розвитку мислення. Для словесно-логічного мислення характерним є використання понять, логічних конструкцій, які іноді не мають прямого образного вираження (наприклад чесність, гордість тощо). Завдяки словесно-логічному мисленню людина може встановлювати найбільш загальні закономірності, передбачати розвиток процесів у природі та суспільстві, узагальнювати різноманітний наочний матеріал [8].

Процес словесно-логічного мислення протікає за певним алгоритмом. Спочатку людина розглядає одне судження, додає до нього інше і на їх основі робить логічний умовивід. Наприклад, 1-е судження: всі метали проводять електрику; 2-е судження: залізо – це метал. Умовивід – залізо проводить електрику [8].

Відповідно до навчальних програм:

- для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (рівень стандарту), на тему «Комп’ютерні презентації» виділено 14 годин [3];

- для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів, затверджено наказом МОН №804 від 07.06.2017 р., на тему «Комп’ютерні презентації» виділено 15 годин [4].

Більшість учнів при навчанні, а потім при роботі будуть мати справу зі створенням презентацій. Вони повинні вміти чітко, конкретно та логічно доносити інформацію до слухача. Для цього їм потрібно проявити себе у ролі режисера, сценариста, що аналізує кожен кадр, який буде бачити глядач.

Створення презентації складається з трьох базових етапів [1]:

1. Планування.

2. Розробка.

3. Репетиція.

Планування презентації — громіздка аналітична процедура, що складається з мети створення презентації, аналізу аудиторії, формування структури і логіки подання матеріалу (визначення основної ідеї, добірка основного й додаткового матеріалу, підготовка вступу і заключної частини) [5].

Розробка презентації — це, по-суті створення презентації. Вона включає в себе наповнення презентації відповідним текстом та додатковими елементами.

Репетиція презентації — оцінка результату створеної презентації: як ви оцінюєте свою презентацію з точки зору спостерігача, наскільки добре виконана мета, чи достатньо висвітлено ідею, чи вдало підібраний матеріал, наскільки доречно використано дизайн слайдів та переходи між ними?

Учні повинні дотримуватись основних вимог до змісту презентації. Вимоги до презентації (за Д. Льюїсом) [6], [7]:

- ✓ Кожен слайд має відображати одну думку.
- ✓ Текст має складатися з коротких слів і простих речень.
- ✓ Рядок має містити 6—8 слів.
- ✓ Всього на слайді має бути не більше 6—8 рядків.
- ✓ Загальна кількість слів не повинна перевищувати 50.
- ✓ Дієслова мають бути в одній часовій формі.
- ✓ Заголовки мають привертати увагу й узагальнювати основні положення слайду.
- ✓ У заголовках мають бути і великі, і малі літери.
- ✓ Слайди не мають бути занадто яскравими. Зайві прикраси лише створюють бар'єр на шляху інформації.
- ✓ Кількість блоків інформації під час відображення статистичних даних на одному слайді має бути не більше чотирьох.
- ✓ Підпис до ілюстрації потрібно розмістити під нею, а не над нею.
- ✓ Усі слайди презентації потрібно витримати в одному стилі.

Сам процес створення презентації складається з послідовних етапів, які неможливо робити один без одного, або не в такій послідовності, що дає змогу учням розвивати логічне мислення.

Для того щоб учні краще засвоїли тему та розвивали своє логічне, аналітичне, критичне мислення можна запропонувати школярам працювати у групах та створити презентації відповідно до основних вимог за запропонованими темами: «Створення реклами власного товару чи послуг»; «Комп’ютер у нашому житті»; «Небезпека, що чатує нас в Інтернеті»; «Вплив ПК на особистість».

Пропонуємо розглянути процес створення презентації на тему: «Вплив ПК на особистість» [2].

Насамперед учні мають спланувати дану презентацію: проаналізувати тему, визначитися з аудиторією, для якої вона буде створена, обміркувати основні цілі, на які вона буде спрямована, підібрати матеріал. Школярі повинні проаналізувати, чи впливає ПК на особистість людини, і як ми це спостерігаємо у власному житті. Однозначно діти повинні дійти висновку, що нині вплив ПК має велике значення на розвиток особистості учня і дорослих; повинні визначити, яку думку необхідно донести до слухача (Рис. 1). Користуючись літературою, Інтернетом збираємо всю необхідну інформацію, і нарешті, переходимо до другого етапу створення презентації. Під час цього етапу необхідно логічно викласти матеріал, щоб він був змістовний і кожен наступний слайд був продовженням думки і розвитку від попереднього (Рис. 2), (Рис. 3).

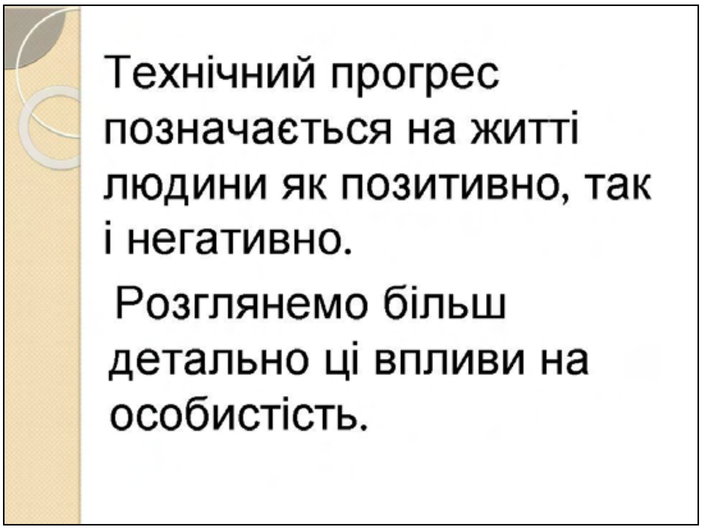


Рис. 1

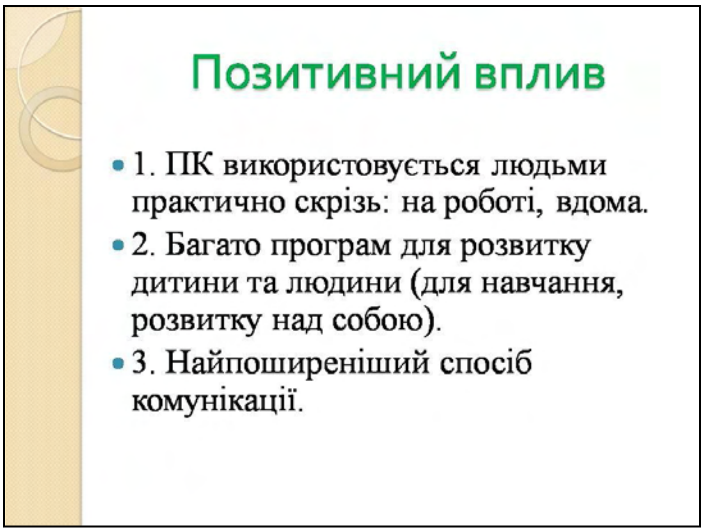


Рис. 2

Рис. 3

Важливо, щоб слухач сприймав матеріал, як одне ціле і усвідомлював суть отриманої інформації.

Отже, можемо зробити висновок, що процес створення презентацій включає в себе набуття та розвиток не лише пізнавальних, пошукових, естетичних навичок, але й логічних.

Література:

1. Яценко В. В. Розробка уроку «Створення презентації» / Електронний ресурс. – Режим доступу: http://kievoit.ippo.kubg.edy.ua/kievoit/2013/9/9.html

2. Вплив ПК на особистість/ Електронний ресурс. – Режим доступу: http://svitppt.com.ua/informatika/vpliv-pk-na-osobistist.html

3. Навчальні програми для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів (рівень стандарту) / Електронний ресурс. – Режим доступу: http://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv

4. Навчальні програми учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів / Електронний ресурс. – Режим доступу:

http://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-5-9-klasiv

5. Левченко А. А. Створення презентацій засобами PowerPoint Посібник / А. А. Левченко. - Ріпненська гімназія, 2015.- 31 с.

6. Вимоги до змісту презентації за Дж. Льюїсом / Електронний ресурс. – Режим доступу: http://hmarno-pedagogics.kh.sch.in.ua

7. Загальні правила створення презентації / Електронний ресурс. – Режим доступу: http://static.klasnaocinka.com.ua

8. Короткий курс лекцій з дисципліни «Основи загальної психології». Лекція 10. / Електронний ресурс. – Режим доступу: https://studme.com.ua/10881127/psihologiya/myshlenie.htm

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Захарченко Наталія Вікторівна

УДК 373.5.091.33:514.112

Несварливий Юрій

студент факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

АНАЛІЗ АЛГОРИТМІВ ФОРМУВАННЯ ПСЕВДОВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ДЛЯ СИСТЕМ ЗВ'ЯЗКУ З КОДОВИМ РОЗПОДІЛОМ КАНАЛІВ

Анотація: *Проводиться аналіз алгоритмів формування псевдовипадкових послідовностей. На основі проведеного аналізу зроблені висновки щодо можливості їх застосування в системах зв'язку з кодовим розподілом каналів.*

Ключові слова: *песевдовипадкова послідовність, складний сигнал, кореляція, кодовий розподіл каналів.*

Abstract: *An analysis of algorithms for the formation of pseudorandom sequences is carried out. On the basis of the conducted analysis, conclusions are drawn about the possibility of their application in the systems of communication with the code distribution of channels.*

Keywords: *pseudorandom sequence, complex signal, correlation, code distribution of channels.*

Послідовності, що використовуються в сучасних системах CDMA, призначені в основному для розширення спектра й кодового поділу каналів і розділяються на псевдовипадкові послідовності й ортогональні коди [5]. Основна відмінність ПВП від ортогональних кодів полягає в тому, що взаємна кореляція ортогональних кодів строго дорівнює нулю. Тому їх найбільш доцільно застосовувати в синхронних системах. В основному це прямі канали CDMA. В DS-CDMA (Direct Sequence CDMA) системі в передавачі відбувається розширення спектра інформаційного сигналу за рахунок його модуляції кодовою послідовністю. Відповідно на прийомній стороні здійснюється зворотнє звертання прийнятого сигналу при його кореляційній обробці. При цьому дуже важливо забезпечити низьку взаємну кореляцію між сигналами користувачів, що веде до зниження інтерференційних перешкод. З іншої сторони, для надійного та швидкого входження в синхронізм потрібні послідовності з гарними автокореляційними властивостями. У противному випадку великі бічні пелюстки автокореляційної функції можуть привести до прийняття помилкових рішень і, як наслідок, до збільшення часу входження в синхронізм [5]. Крім того, гарні автокореляційні властивості важливі й для надійного поділу багатопроменевих компонентів сигналу. Зазначимо, що автокореляційна (АКФ) і взаємокореляційна функції (ВКФ) ансамблів детермінованих послідовностей зв'язані таким чином, що в них неможливо досягти одночасно гарної авто та взаємної кореляції, тоді як для ансамблів випадкових послідовностей ці функції в достатньому ступені усереднені. Послідовності, що використовуються в системах зв'язку, умовно можна розділити на лінійні і нелінійні послідовності, а їхні символи на двійкові і недвійкові (відповідно бінарні і не бінарні). Поряд з ортогональними кодами ключову роль в CDMA системах грають ПВП, які, хоча й генеруються детермінованим образом, мають усі властивості випадкових сигналів. Однак вони вигідно відрізняються від ортогональних послідовностей інваріантністю до тимчасового зрушення. Існує кілька видів ПВП, що володіють різними характеристиками. На теперішній час з'явилися технічні засоби, здатні "вивести" будь-який ансамбль послідовностей із заданими властивостями. Одним з найбільш простих і надзвичайно ефективних засобів генерації двійкових детермінованих послідовностей – використання регістру зсуву (РС). Послідовність на виході n- розрядного РС зі зворотним зв'язком завжди періодична, причому її період n (число тактів, через яке схема вертається у вихідний стан) не перевищує $\mathbf{2^n}$.

Теоретично, використовуючи n-розрядний регістр і відповідним чином підібрану логіку зворотнього зв'язку, можна одержати послідовність будьякої довжини n у межах від 1 до $\mathbf{2^N}$ включно. Послідовність максимальної довжини, або m- послідовність, буде мати період $\mathbf{2^N-1}$.

Функція автокореляції m-послідовності є періодичною й дворівневою. Рівень бічних максимумів автокореляційної функції не перевищує значення [2, 4]:

$$R_{ij} = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Псевдовипадкові послідовності з малим значенням аперіодичної кореляційної функції (АКФ) здатні забезпечити синхронізацію переданих і прийнятих сигналів за досить короткий проміжок часу, що звичайно дорівнює довжині самої послідовності. Найбільшу популярність одержали послідовності Баркера. В CDMA системах найчастіше застосовуються псевдовипадкові послідовності Голда й Касами, що забезпечують малий рівень викидів ВКФ. Коди Голда з періодом 2^n - 1 формуються на основі двох m- послідовностей з відбором так званих "кращих пар" (preferred pairs), що мають тризначну функцію автокореляції (-1,-φ(t),φ(t)-2), де

$$\Phi(t) = \begin{cases} \frac{2(N+1)}{2} \text{ для парних } N; \\ \frac{2(N+2)}{2} \text{ для непарних } N. \end{cases}$$

Коди Голда формуються шляхом посимвольного додавання по модулю 2 двох m- послідовностей (рис. 1). У проекті WCDMA специфіковано три типи кодів Голда: первинний і вторинний ортогональні коди Голда (обоє завдовжки 256 біт) і довгий код.

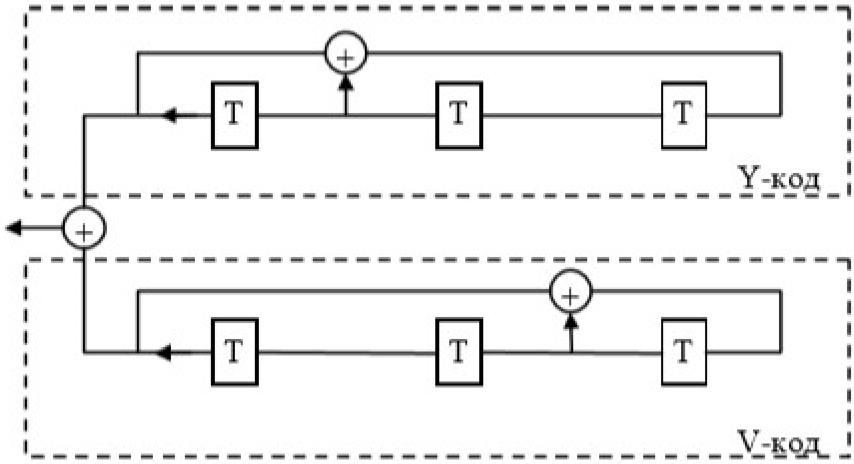


Рис. 1. Генератор кодів Голда (Т – елемент регістру зсуву ; + – суматор по модулю 2)

Ортогональні коди Голда створюються на основі m-послідовності завдовжки 255 біт з додаванням одного надлишкового символу. Первинний синхрокод має аперіодичну автокореляційу функцію і використовується для первісного входження в синхронізм. Вторинний синхрокод являє собою немодульований ортогональний код Голда, який передається паралельно з первинним синхрокодом. Кожний вторинний синхрокод вибирається з 17 різних кодів Голда {C1,...,C17}.

Довгий код для прямого каналу являє собою фрагменти коду Голда завдовжки 40 960 чипів. Система зв'язку на базі WCDMA асинхронна, і сусідні базові станції використовують різні коди Голда (усього їх 512), повторювані кожні 10 мс. Асинхронний принцип роботи базових станцій робить їх незалежними від зовнішніх джерел синхронізації. Передбачається застосовувати довгий код і у зворотньому каналі, однак тільки в тій соті, де не задається режим багатокористувацького детектування.

Сімейство кодів Касамі містить послідовності з періодом 2^n - 1. Вони вважаються оптимальними в тому розумінні, що для будь-якої "кращої" пари забезпечується максимальне значення автокореляційної функції, рівне (1+2к). Кодові послідовності Касамі реалізуються за допомогою трьох послідовно включених регістрів зсуву (u, v i w) з різними зворотними зв'язками (рис. 2), кожний з яких формує свою m-послідовність.

Щоб одержати кодові послідовності Касамі з заданими властивостями, послідовності v і w повинні мати різні зсуви.

Коди Касамі завдовжки 256 біт використовуються як короткі послідовності у зворотньому каналі (проект WCDMA) в тій соті, у якій застосовується багатокористувацьке детектування.

Ефективність послідовностей з аперіодичної АКФ прийнято оцінювати показником якості F, який визначається як відношення квадратів синфазних складових сигналу до суми квадратів його расфазованих складових. Таким чином, мірою ефективності аперіодичної кореляції двійкової послідовності є показник якості.

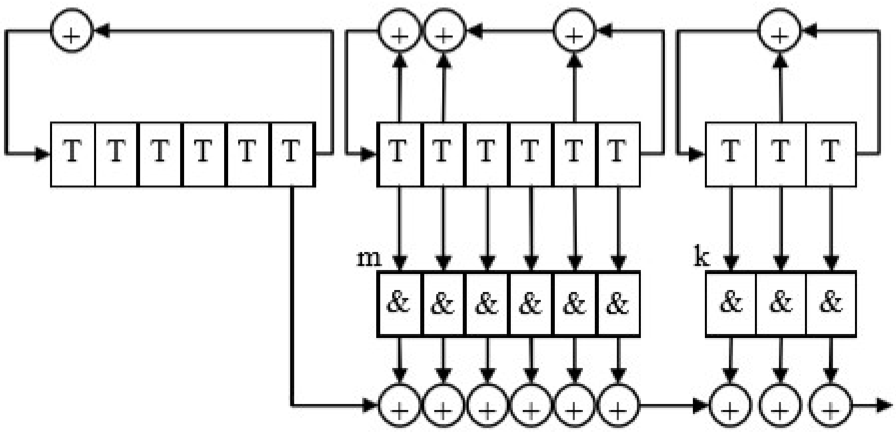


Рис. 2. Генератор кодів Касамі типу kas (6, m, k), де m і k – циклічні зсуви v- і w- кодів відповідно

Розглянемо більш детально ПВП, що формуються генераторами на основі регістрів здвигу з лінійним зворотнім зв'язком – LSFR (Linear Feedback Shift Register). Використовуємий при їх аналізі математичний апарат – теорія лінійних послідовностних машин і теорія кінцевих полів (полів Галуа) [5].

Головними перевагами цих генераторів є:

– простота апаратної та програмної реалізації;

– максимальна швидкість роботи;

– хороші статистичні властивості формуємих послідовностей.

Вихідна інформація для побудови двійкового LSFR – так званий утворюючий поліном. Ступінь цього поліному визначає розрядність регістру здвигу, а ненульові коефіцієнти – характер зворотнього зв'язку. У загальному випадку двійковому утворюючому поліному ступеню N

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot x^i,\ a_N = a_0 = 1, a_j \in \{0,1\},\ j = \overline{1,(N-1)}$$

відповідають пристрої, показані на рис. 3, а (LSFR1-схема Фібоначчі) і рис. 3, б (LSFR2 – схема Галуа) [10].

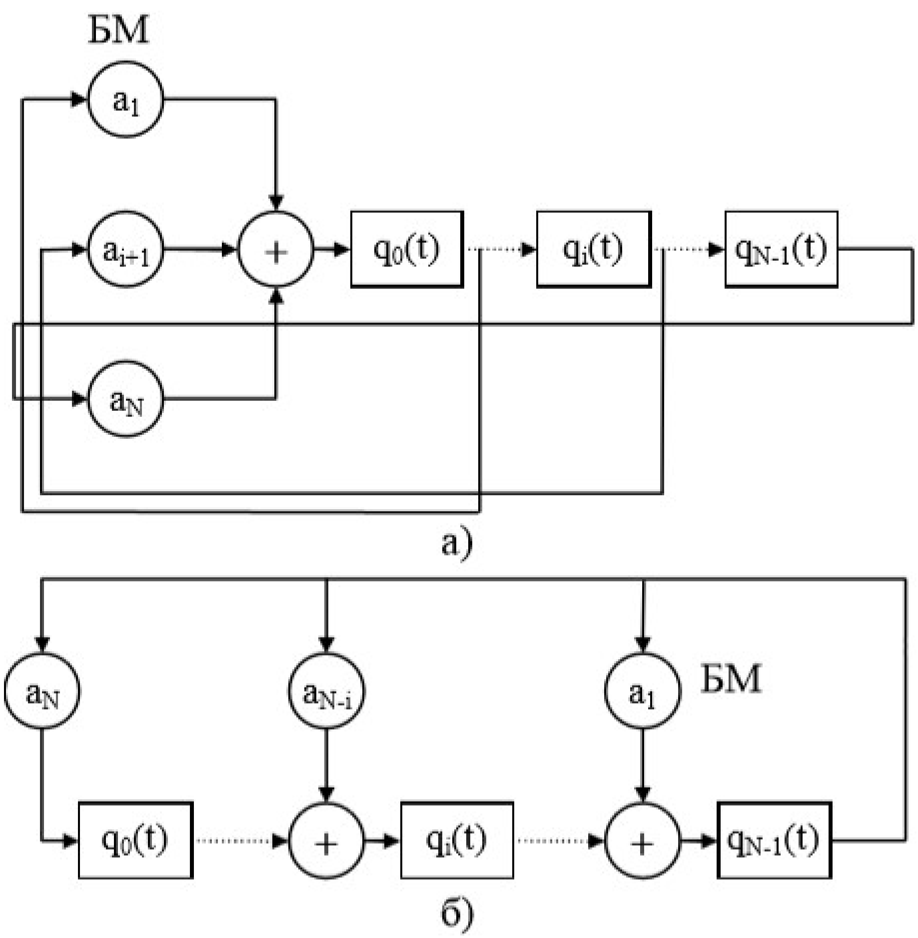


Рис. 3. Загальний вигляд LSFR, що відповідає

$$\Phi(x) = x^N + a_{N-1}x^{N-1} + \cdots + a_i + \cdots + a_2x^2 + a_1x + 1$$

На рис. 3: а – схема генератора Фібоначчі; б – схема генератора Галуа; БМ – блоки множення на а$\in \{0,1\}$; $q_j(t) \in \{0,1\}$ при $a_j = 1$ множення на a_j рівноцінно наявності зв'язку; при $a_j = 0$ множення на a_jрівноцінно відсутності зв'язку. Загальний вигляд генератора двійкових послідовностей, що відповідає рівнянню

$$Q(t+1) = TQ(t),$$

де Q(t) і Q(t+1) – стан регістру генератору ПВП відповідно у моменти часу t і t+1 (до та після приходу синхро-імпульсу); T – квадратна матриця порядку N вигляду

$$T_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{N-1} & a_N \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

або

$$T_2 = \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_N \\ 1 & \dots & 0 & 0 & a_{N-1} \\ & \dots & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & a2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a1 \end{vmatrix};$$

N – ступінь утворюючого поліному

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i \cdot x^i,\ a_N = a_0 = 1, a_j \in \{0,1\},\ j = \overline{1,(N-1)}$$

k – натуральне, наведене на рис. 4. В частинному випадку при k =1, отримуємо або схему генератора Фібоначі $(T = T_1)$, або схему генератора Галуа $(T = T_2)$ [10].

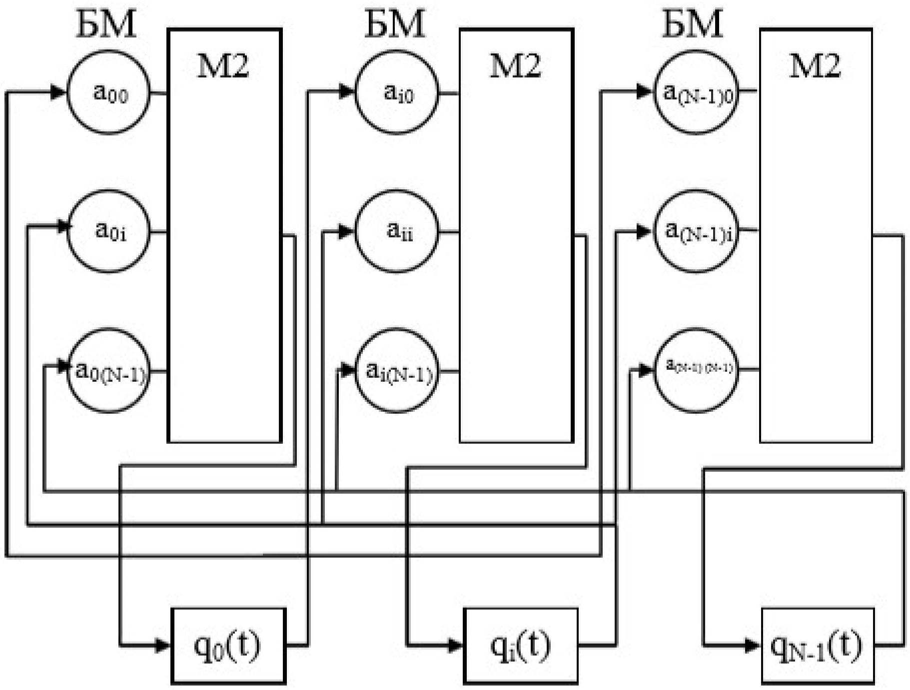


Рис. 4. Генератор двійкових послідовностей, що відповідає рівнянню

$$Q(t+1) = T^k Q(t)$$

Величина, на яку робиться множення в кожному блоці множення (БМ), визначається відповідним коефіцієнтом $a_{ij} \in \{0,1\}$ супроводжуючої матриці

$$V = T^k = (i = \overline{0, N-1},\ j = \overline{0, N-1}).$$

Якщо $a_{ij} = 0$, це еквівалентно відсутності зв'язку між виходом і-го розряду регістру генератора та входом j-го суматора по модулю два.

Якщо $a_{ij} = 1$, це еквівалентно отримання зв'язку між виходом і-го розряду регістру генератора та входом j-го суматора по модулю два.

Так як нульовий стан регістра є забороненим, максимально можливе число станів обладнання, а значить, і максимально можлива довжина формуємої двійкової послідовності, знімаємої з виходу любого з тригеррів, дорівнює $2^N - 1$. В цьому випадку діаграма станів генератора складається з одного тривіального циклу та циклу максимальної довжини $2^N - 1$.

Висновки. Виходячи з проведеного аналізу алгоритмів синтезу псевдовипадкових послідовностей можливо зробити висновок про те, що серед відомих методів синтезу найбільше практичне застосування знайшли методи, що базуються на рекурентних поліноміальних співвідношеннях, що зумовлено простотою реалізації таких пристроїв, а також одержанням у ряді випадків послідовностей з гарними автокореляційними властивостями. Ці алгоритми дозволяють одержати послідовності із заданими кореляційними властивостями при досить простій апаратній реалізації.

Проте, слід відзначити низку недоліків:

– наведені алгоритми дозволяють отримати невелику кількість псевдовипадкових послідовностей;

– послідовності синтезовані на основі наведених алгоритмів мають низьку структурну складність;

– отримані послідовності, що задовольняють по автокореляційним властивостям не завжди задовольняють по взаємокореляційним властивостям і навпаки.

Подальші дослідження будуть спрямовані на розробку алгоритмів формування псевдовипадкових послідовностей із заданими кореляційними, ансамблевими та структурними властивостями.

Література:

1. Шеннон К. Теория связи в секретных системах // Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – С. 333-402.

2. Варакин Л.Е. Системы связи с шумоподобными сигналами. – М.: Сов. радио, 1985. – 384 с.

3. Лосев В.В. Дискретные сигналы на основе функций Уолша для многоканальной системы передачи информации // Радиотехника и электроника. – 1979. – Т. 24, № 11. – С. 2222-2225.

4. Цифровые методы в космической связи / Под ред. Е.В. Кормаровой. – М.: Связь, 1969. – 268 с.

5. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. – М.: Вильямс, 2003. – 1104 с.

6. Fazel K., Kaiser S. Multi Carrier and Spread Spectrum Systems. – John Wiley & sons, 2003. – 298 p.

7. Сарватер Д.В., Персли М.Б. Взаимнокорреляционные свойства псевдослучайных и родственных последовательностей // ТИИЭР, 1980. – N 5, – С. 59-90.

8. Kumar P.V. Recent results on sequences with low autocorrelation. – 1999 IEEE ITW, Kruger National Park, South Africa, June, 1999.

9. Hsiao-Hwa C., Hsin-Wei C., Guizani M. Orthogonal complementary codes for Interference-free CDMA technologies // IEEE Wireless Communications. – February, 2006. – Vol 13, № 1. – P. 68-79.

10. Иванов М.А., Чугунков И.В. Теория, применение и оценка качества генераторов псевдослучайных последовательностей. – М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2003. – 240 с.

Науковий керівний: канд. фіз.-мат. наук, доцент Тимошенко Олександр Захарович

УДК 373.5.091.33:514.112

Несварливий Юрій

студент факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ ГЕНЕРУВАННЯ ПСЕВДОВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Анотація: *Наводиться класифікація генераторів випадкових послідовностей, обґрунтовуються критерії та показники оцінки якості випадкових послідовностей, викладаються основні підходи до визначення випадкових та псевдовипадкових послідовностей, математичне визначення випадкових послідовностей.*

Ключові слова: *випадкова послідовність, псевдовипадкова послідовність, генератор випадкових послідовностей, детермінований генератор випадкових послідовностей.*

Abstract: *The classification of random sequence generators is presented, the criteria and indicators of random sequence estimation are substantiated, the basic approaches to the definition of random and pseudorandom sequences are described, mathematical definition of random sequences is described.*

Keywords: *random sequence, pseudorandom sequence, random sequence generator, randomized sequence deterministic generator.*

У загальному сенсі, генератори випадкових послідовностей можна розділити на два типи у залежності від вибору джерела ентропії – змінного або фіксованого. Взагалі визначається два типи генераторів: випадкові (або не детерміновані) і детерміновані генератори випадкових послідовностей.

Генератор випадкових послідовностей – це механізм генерації випадкових послідовностей, у якому для генерації випадкового потоку використовується джерело ентропії [4], що ґрунтується на фізично випадкових явищах чи випадковому явищі.

Класичним представником ГВП є фізичний генератор випадкових послідовностей. Фізичний ГВП – пристрій, який генерує випадкові послідовності на основі фізичного процесу (тепловий шум, фотоелектричний ефект або квантові явища тощо) [5], який являється абсолютно непередбаченим. Такий генератор містить внутрішнє фізичне джерело шуму. Частіше за все він виробляє аналоговий сигнал, який надалі дискретизується. Дискретизований шумовий сигнал при подальшій обробці перетворюється на внутрішню випадкову послідовність, щоб поліпшити розподіл ймовірності дискретизованої послідовності від шумових сигналів. Хороше фізичне джерело шуму може без додаткової обробки передавати дискретизований шумовий сигнал безпосередньо у вихідний блок. В ньому внутрішня випадкова послідовність відповідає дискретизованій послідовності шумового сигналу. Вихідний блок синхронізує безперервну або аперіодичну видачу внутрішньої випадкової послідовності з видачею символів випадкової послідовності. Ентропія випадкової послідовності, що видається джерелом шуму, підвищується з генерацією кожного символу випадкової послідовності. В цьому випадку ГВП представляється ідеальним ГВП [6]. Генератори випадкових послідовностей можуть будуватись на основі чисто фізичних явищ чи додатково з програмною реалізацією.

На рис. 1 показана функціональна блок-схема ГВП, яка визначена міжнародним стандартом ISO/IEC 18031 [7]. На блок-схемі пунктирні лінії вказують додаткові компоненти, які можуть включатися до складу ГВП в залежності від різних чинників. Показані компоненти не обов'язково мають бути реалізовані як фактичні фізичні компоненти, але вони мають реалізуватися функціонально [2]. До кожного з компонентів у стандарті висуваються вимоги, виконання яких дозволить забезпечити необхідний рівень захисту та забезпечити відсутність вразливостей, що пов'язані з генерацією випадкових послідовностей та можуть виникнути в криптографічних застосуваннях і середовищах.

Прикладами фізичних явищ можуть бути [8]:

1) теплові шуми з напівпровідникового діода або резистора;

2) час, що минув між емісією частинок під час радіоактивного розпаду;

3) частотна нестійкість осцилятора в режимі вільних генерацій;

4) ємність напівпровідникового конденсатора типу метал-ізолятор, що заряджається за фіксований період часу.

Генератори на базі перших двох явищ повинні бути побудовані зовні у вигляді пристроїв з використанням випадкових послідовностей і, отже, можуть піддаватися спостереженням або маніпуляціям зловмисника. Генератори на базі осциляторів і конденсаторів можуть бути побудовані на надвисоких інтегральних схемах – пристроях, що можуть бути захищені від несанкціонованого втручання.

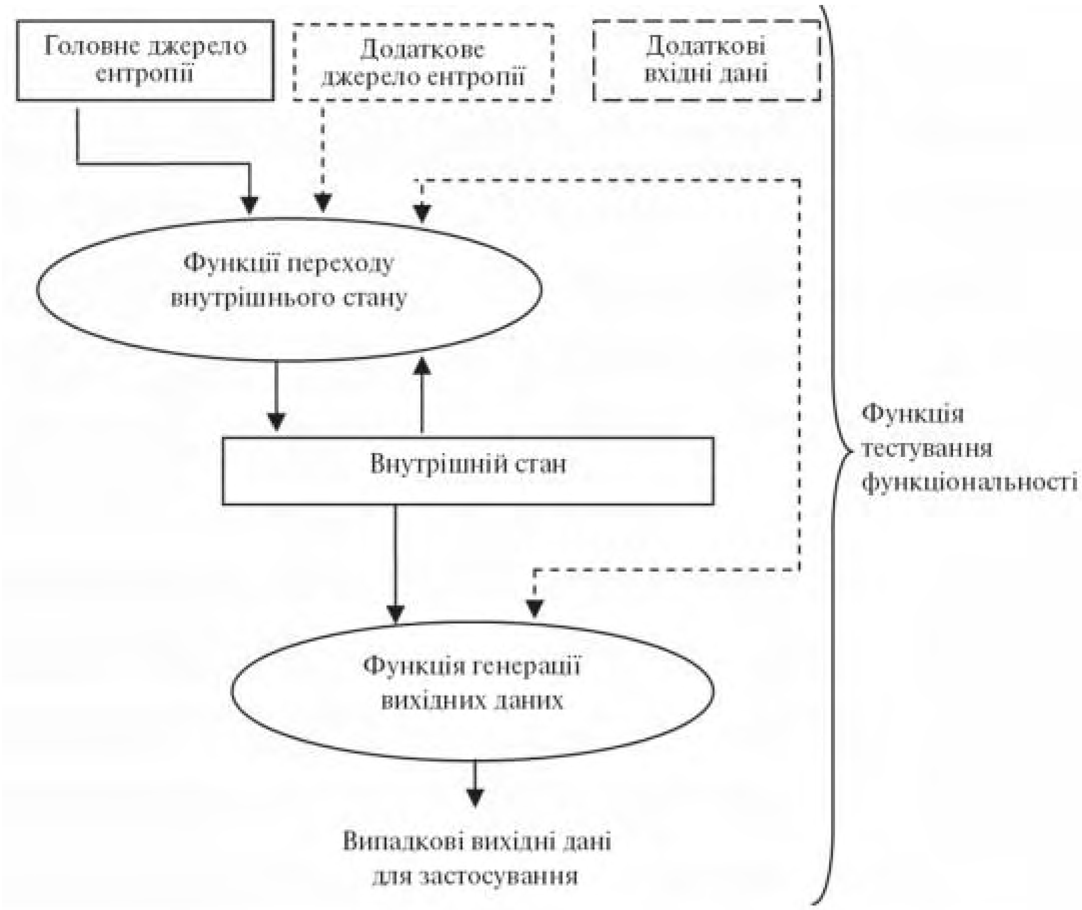


Рис. 1. Блок-схема генератора випадкових послідовностей

В якості явищ, на яких можуть базуватися програмні ГВП, можуть бути [8]:

1) час, що минув між натисканнями клавіші або переміщенням миші;

2) системний годинник комп’ютера;

3) зміст буферів вводу/виводу;

4) параметри операційної системи, такі як системне навантаження і мережеві статистичні дані. Детермінований генератор випадкових послідовностей є одним з базових примітивів для більшості криптографічних додатків, він забезпечує генерацію послідовностей, які називають псевдовипадковими. Однією з основних властивостей та переваг ДГВП є забезпечення відновлюваності послідовності в просторі і часі. В той же час ПВП повинні мати гарантовані властивості відносно періоду повторення, відновлення відрізків ПВП в просторі та часі, можливість проведення попереднього дослідження їх властивостей тощо [9].

На рис. 2 показана блок-схема функціональної моделі ДГВП [7]. Наведені елементи моделі не обов'язково мають бути реалізовані, наприклад, як фактичні окремі програмні підпрограми, але вони повинні бути функціонально реалізованими. До кожного з компонентів висуваються вимоги щодо запобігання вразливостей, що пов'язані з генерацією випадкових послідовностей та виникають у криптографічних додатках. При цьому необхідно враховувати, що ніякий детермінований алгоритм не може генерувати повністю випадкові послідовності, він може тільки апроксимувати деякі властивості випадкових послідовностей.

Клод Шеннон [10] показав, що симетрична схема шифрування (наприклад, шифр Вернама) безумовно-стійка тільки в тому випадку, якщо ключова послідовність k має рівномірний закон розподілу (будемо говорити, що вона генерується випадково, однорідно, має рівноймовірний розподіл, а біти (числа) є незалежними. Складність реалізації безумовно стійкої системи пов'язана з тим, що ключ повинен мати довжину, не меншу довжини повідомлення, що зашифровується. При використанні для зашифрування ПВП, довжина ключа суттєво зменшується, по суті на нинішній час її довжина не більше 512 бітів, а властивості ПВП близькі до фізично випадкової послідовності, тобто ПВП є практично нерозрізнюваною від випадкової послідовності. В той же час ПВП породжується деяким ДГВП на основі використання короткого ключа [9].

Рис. 2. Модель детермінованого генератора випадкових послідовностей

Можна говорити, що ДГВП забезпечує «розтягування» ключа в послідовність гами шифрування Г. За певних умов при використанні Г забезпечується криптоперетворення з гарантованим рівнем.

Більшість ДГВП мають багато серйозних недоліків, а послідовності, що ними генеруються, не відповідають вимогам, які висуваються криптографічними додатками. Основними з яких є:

– недопустимо короткий або недоведений період повторення послідовності Y;

– недостатній рівень необоротності відносно знаходження ключа K, що дозволяє вирішувати задачу знаходження Y з поліноміальною чи субекспоненціальною складностями, що є недопустимим;

– недостатня нерозрізнюваність Y, що також робить її певним чином передбачуваною «вперед та назад»;

– властивості випадковості, рівноймовірності, незалежності та однорідності не відповідають вимогам тощо.

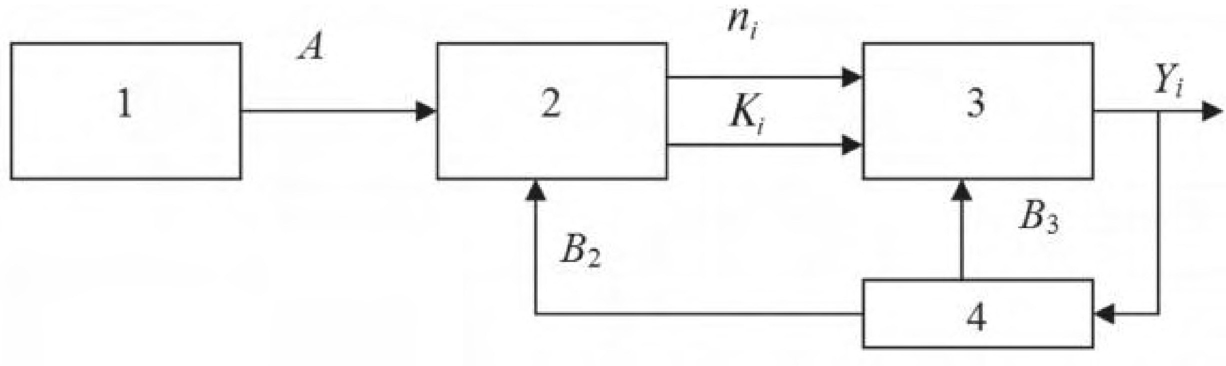


Рис. 3. Детермінований генератор випадкових послідовностей

В [11] висунуті вимоги до ДГВП та послідовностей, що ними генеруються, сутність яких зводиться до захищенності від таких основних атак, як:

− криптоаналітичні атаки знаходження початкового чи розгорнутих ключів;

− атаки, що зводяться до вирішення математичних задач, складність яких менше або суттєво менше атаки груба сила;

− атак, що засновані на вхідних даних генератора, які здійснюються засобом визначення або маніпулювання вхідними даними ГВП з метою впливу на вихідні дані (ключі, параметри тощо для інших криптографічних додатків);

− атаки, що зводяться до розповсюдження компрометованого стану генератора на інші стани – попередні чи майбутні;

− атаки, що засновуються на недопустимо обмеженому періоді повторення Y.

В той же час відомо, що будь-який ДГВП з обмеженими ресурсами може генерувати ПВП з наперед відомим періодом, можливо недопустимо коротким.

Висновки. Більшість ДГВП хоча й мають прийнятну швидкодію, але мають багато серйозних недоліків, основними з яких є :

– недопустимо короткий або недоведений період повторення;

– послідовні значення бітів не є незалежними, що робить його передбачуваним;

– оборотність відносно визначення закону формування (ключа), що також робить його передбачуваним;

– властивості випадковості, рівноймовірності, незалежності та однорідності не відповідають вимогам, а значить властивості нерозрізнюваності не відповідають вимогам.

ДГВП повинні бути захищеними від таких основних атак, як:

− криптоаналітичні атаки, що зводяться до вирішення математичних задач, складність яких менше або суттєво менше атаки груба сила;

− атаки, що засновані на вхідних даних генератора, які здійснюються засобом визначення або маніпулювання вхідними даними ГВП з метою впливу на вихідні дані (ключі, параметри тощо для інших криптографічних додатків);

− атаки, що зводяться до розповсюдження компрометованого стану генератора на інші стани – попередні чи майбутні.

Безумовними вимогами до ДГВП є необхідність запобігання будь-яким атакам, які дозволяють зловмиснику отримати інформацію про його внутрішній стан.

Література:

1. Б. Шнаер. Прикладная криптографія / Б. Шнаер // 2-е издание.

2. Горбенко І.Д. Аналіз генераторів випадкових бітів згідно стандарту ISO/IEC 18031 та рекомендації щодо його застосування в Україні / Горбенко І.Д., Шапочка Н.В. // Міжнародний симпозіум «Вопросы оптимизации вычислений». – Кацивелі. – 2009. – С.164-170.

3. Потий А.В. Декомпозиция требований, предъявляемых к генераторам случайных и псевдослучайных чисел, на основе классификации специальных даннях / Потий А.В., Пестерев А.К, Олейников Р.В. // Матеріали науково-практичної конференції «Правове, нормативне та метрологічне забезпечення системи захисту інформації в Україні». – Київ: НТУУ “КПІ”. – 1998. – С. 194.

4. Andrea Rock. Pseudorandom Number Generators for Cryptographic Applications / Andrea Rock // Diplomarbeit zur Erlangung des Magistergrades an der Naturwissenschaftlichen Fakultat der Paris-Lodron-Universitat Salzburg. – Salzburg. – 2005.

5. Торба А.А. Генерация равновероятных случайных последовательностей на основе физических датчиков / Торба А.А., Елаков С.Г., Степченко А.З. // Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. Радиотехника. – Вып. 119. – 2001. – С.108-114.

6. Application Notes and Interpretation of the Scheme (AIS) 31. Functionality classes and evaluation methodology for physical random number generators. Certification body of the BSI in context of certification scheme. BSI, 2001.

7. ISO/IEC 18031:2005(E). Information technology – Security techniques – Random bit generation.

8. Чайковский Ю.В. О природе случайности / Чайковский Ю.В. // Монография. 2-е изд., Испр. и доп. Вып. 27. «Ценологические исследования» - М.: Центр системных исследований – институт истории естествознания и техники РАН. – 2004. – С.280.

9. Птицын Н. Приложение теории детерминированного хаоса в криптографии / Птицын Н. // - Москва. – 2002.

10. C.E. Shannon. A mathematical theory of communication / C.E. Shannon. // Bell System Technical Journal, №27. – 1948. – P.379-423, 623-525 же. – Харьков, 1911. – 20 с. (отд. оттиск).

11. Шапочка Н.В. Аналіз атак на генератори випадкових бітів / Шапочка Н.В. // Радіоелектронні і комп’ютерні системи. – 2010. – С. 99-105.

Науковий керівний: канд. фіз.-мат. наук, доцент Тимошенко Олександр Захарович

УДК 519.6:33

Нечипорук Людмила

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

Анотація: *Стаття присвячена застосуванню математики в економічній науці, наведено приклади розв'язання економічних задач за допомогою математичних розрахунків.*

Ключові слова: *економічна задача, математична модель, економічна модель.*

Abstract: *The article is devoted to the application of mathematics in economic science; Examples of solving economic problems with mathematical calculations are given.*

Key words: *economic problem, mathematical model, economic model.*

Однією з характерних особливостей нашого часу є те, що в усіх галузях діяльності людини, навіть у таких традиційно «нематематичних», як біологія, медицина, економіка ефективно застосовують математику.

Сучасна людина повинна вміти аналізувати життєві фінансові проблеми і ситуації, встановлювати системні зв'язки, виявляти проблеми, знаходити способи їх розв'язання, прогнозувати події тощо. Сьогодні ми постійно чуємо розмови про інвестиції, позики, кредити, фонди. Сучасне життя є своєрідною економічною школою. І людині необхідно бути обізнаною з цими поняттями, розуміти, як вигідніше дати чи взяти гроші під відсоток, на який термін потрібно вкласти гроші, щоб їх сума значно збільшилася, у який банк вкласти гроші тощо. І допоможуть нам у цьому математичні знання, зокрема вміння розв'язування показникові рівняння, будувати графіки показникових функцій та виявляти їх властивості. [2, с. 11]

Нині математика дуже поширена в інших науках, насамперед, в економіці. Економічна наука включає значну кількість математичних методів, оскільки використовує різноманітні характеристики функціонування і розвитку суспільства, що потребують розрахунків.

Математика для економіки є методом економічного аналізу і слугує як своєю символікою, так і законами.

Математику в економіці застосовують понад 100 років. Найпоширеніші математичні міркування виклав у своїй роботі французький математик А. Курно (1801-1877). А також значну роль на ранньому розвитку математичної економіки відіграв закон Г. Госсена (1810-1858). Відомий як «перший закон Г. Госсена»: «У процесі збільшення кількості споживаного товару або послуги його користь від споживання кожної додаткової одиниці зменшується».

Математичний виклад економічних проблем А. Курно і Г. Госсен здійснювали на основі теорії дійсних функцій у галузі аналізу дійсних змінних. Аналіз дійсних змінних – це та математична функціональна дисципліна, за допомогою якої, на думку Курно й Госсена, зроблено перший вступ в економіку.

Л. Вальрас сформулював проблему існування загальної рівноваги ринку, розв'язання якої веде до систем лінійних рівнянь. Існування єдиного ринку приводить до детермінантів, які вивчають у лінійній алгебрі. Лінійну алгебру вважають другою фундаментальною дисципліною математики, яку застосовують в економіці. [1, с. 22]

Поширеними в економіці також є аналіз комплексних чисел і диференціальні рівняння.

Для економіки математика важлива як і методологічна наука. Для виведення закономірностей явищ економічної діяльності та отримання з них висновків використовують саме математику.

Математична модель економічного об'єкта – це його абстрактне відображення, яке включає сукупності рівнянь, нерівності логічних зв'язків, функціональні залежності та їх графіки.

За допомогою функцій та їх графіків можна математично описати економічні явища. В економічних задачах використовують чимало різноманітних функцій: квадратичні, лінійні, дробово-лінійні, степеневі, показникові, логарифмічні та інші функції.

Для розв'язання економічної задачі передусім визначають взаємозв'язки між величинами (ціна, кількість і витрати) або поняттями (використання робочої сили і капіталу), а потім вже виокремлюють головні зв'язки поставленої задачі. Результатом цих дій є економічна модель, яка відображає зв'язки між величинами в економіці.

Економічну модель можна описати за допомогою математичних рівнянь і символів.

У математичній економіці виходять із того, що поняття, запозичені з економіки, є визначеними і як величини обумовлені. Ці величини записуються як змінні або константи так, що вони можуть бути застосовані в математиці.

Виробнича функція – це функція, яка визначає залежність результату виробництва від чинників, які на нього впливають.

Найпоширенішими серед виробничих функцій є функції попиту (Q_d), пропозиції (Q_s), витрат (C), доходу(R), прибутку (Π), використання капіталу (K), використання робочої сили (L).

Розрізняють ендогенні змінні (змінні, що визначаються всередині моделі) та екзогенні (змінні, що визначаються ззовні моделі).

Наприклад, можна розглянути таку схему виробництва (рис. 1).

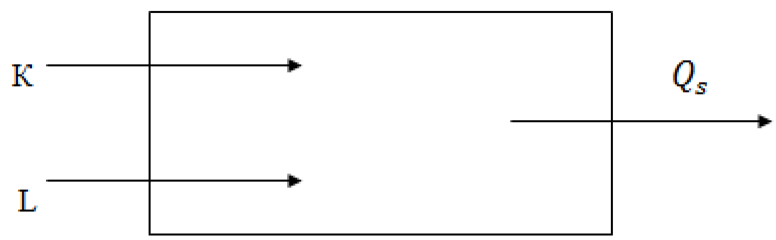


Рис. 1

K та L на приведеній схемі є ендогенними змінними.

Попит (Q_d) визначає сукупну, суспільну чи ринкову потребу в товарах (послугах), яка зумовлена діючими цінами (P) і платоспроможністю споживачів.

Величина (обсяг) попиту виражається кількістю товару, яку споживачі мають придбати за деякою ціною, і залежить головним чином від двох чинників – ціни на цей товар і загального доходу споживачів.

Розглянемо деякі економічні задачі, які базуються на математичних розрахунках. [1, с. 23]

Задача 1. Функція попиту населення на товар $Q_d = 5 - p$, функція пропозиції товару $Q_s = p - 3$, де Q_d – обсяг попиту, Q_s – обсяг пропозиції, p – ціна (грн). Визначити, як вплине на ціну товару зменшення попиту на 20%?

Розв'язання. Визначимо рівноважну ціну.

$5 - p = p - 3$, $2 \bullet p = 8$, звідси $p = 4$, тоді $Q_d(4) = 5 - 4 = 1$.

Зменшення попиту на 20% означає, що потрібна кількість товару становить $80\% = 0{,}8$ від попередньої для кінцевого значення ціни. Тому нова функція попиту матиме вигляд $0{,}8 \bullet Q_d = 0{,}8 \bullet (5 - p) = 4 - 0{,}8 \bullet p$.

$Q_s = p - 3$ – не змінилася. Знаходимо нову рівноважну ціну:

$$4 - 0{,}8 \bullet p_1 = p_1 - 3;$$

$$7 - 1{,}8 \bullet p_1 = 0;$$

$$p_1 = 3{,}9.$$

Тоді $p = 4 - 3{,}9 = 0{,}1$.

Отже, при спаді попиту на 20% ціна зменшується на 0,1 грн за одиницю товару.

Відповідь. Зменшується на 0,1 грн за одиницю товару. [1, с. 24]

Задача 2. Чоловік позичив у банку 10000 грн. Банк призначив ставку прибутку 8% при щоквартальному компаунді. Через 10 років боржник сплатив позику одноразовою сумою.

а) Знайти суму одноразової сплати.

б) Знайти прибуток банку.

Розв'язання. Оскільки $r = 8\% = 0{,}08$, $m = 4$, то $i = \frac{r}{m}$; $i = \frac{0{,}08}{4} = 0{,}02$. Загальна кількість конверсійних періодів $n = 10 \bullet 4 = 40$. Тоді $S = P \bullet (1 + i)^{40}$, $S = 10000 \bullet 1{,}02^{40} \approx 10000 \bullet 2{,}208040 \approx 22080{,}4$ (грн), що й становить суму одноразової сплати. Тоді прибуток дорівнює:

$$I = S - P \approx 12080{,}4.$$

Відповідь. а) ≈ 22080,4 грн, б) ≈12080,4 грн. [2, с. 13]

Задача 3. Батько, мати і син приїхали на дачу зібрати малину і прополоти город. Працювати вони можуть тільки 5 годин. Батько збирає 5 літрів малини за годину, мати – 7, син – 4 літри. Прополоти город мати може за 2 години, батько – за 5, син – за 7 годин. Як їм раціонально розподілити роботу, щоб зібрати якомога більше малини з обов'язковою умовою встигнути прополоти город? Скільки малини буде зібрано?

Ця задача ілюструє принцип порівняльних переваг. Важливим є те, що обов'язковою є умова прополоти город. Це дещо спрощує хід міркувань. Для наочності складемо таблицю та внесемо до неї дані щодо продуктивності праці з кожного виду роботи і визначимо альтернативну вартість прополки городу для кожного члена сім'ї, виражену в кількості незібраних літрів малини (див. таблицю 1).

Зазначимо, що порівняльну перевагу при виконанні певної роботи має той, хто виконує її з меншою альтернативною вартістю. Отже, прополкою повинна займатися мати. Вона справиться з роботою за 2 години, а потім підключиться до збирання малини. Всього малини буде зібрано:

$3 \bullet 7 + 5 \bullet 5 + 5 \bullet 4 = 66$ літрів. [3, с. 27].

Таблиця 1

	Кількість літрів малини, що може бути зібрана за годину	Частина городу, що може бути прополота за годину	Альтернативна вартість прополки городу, виражена в кількості незібраних літрів малини

Батько	5	$\frac{1}{5}$	$5 \div \frac{1}{5} = 25$
Мати	7	$\frac{1}{2}$	$7 \div \frac{1}{2} = 14$
Син	4	$\frac{1}{7}$	$4 \div \frac{1}{7} = 28$

Висновок. Отже, вивчення економіки через математичну модель функцій, що складають основу актуальної економічної моделі, дає змогу набути навички розв'язування деяких економічних завдань і розвинути знання в цій області. Ці питання можуть знадобитися вчителям математики і випускникам шкіл, оскільки в житті досить часто доводиться мати справу з розв'язуванням економічних проблем.

Література:

1. Гунько Л. Застосування елементарних функцій для розв'язування економічних задач // Л. Гунько. Математика в рідній школі: науково-методичний журнал. – 2017. – №11. – С. 22-26.

2. Стратій В. Інтегрований урок із математики та економіки в 11 класі // В. Стратій, О. Величко. Математика в рідній школі: науково-методичний журнал. – 2015. – №4. – С. 11-13.

3. Ласійчук П. М. // Використання математичних методів для розв'язування задач з економіки // П. М. Ласійчук. Географія та економіка в сучасній школі: науково-методичний журнал. – 2013. – №4. – С. 27-28.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Тютюн Любов Андріївна

УДК 004.4

Панченко Олександр

студент факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ІСТОРІЯ СТВОРЕННЯ ТА СФЕРИ ВИКОРИСТАННЯ МОВИ ПРОГРАМУМАННЯ PYTHON

Анотація: *У статті було розглянуто історію створення та основні сфери використання мови програмування Python. Ця стаття буде цікава для фахівців із спеціальностей Математики, Інформатики та Програмування.*

Ключові слова: *Python, інтерпретована мова програмування, об'єктно-орієнтована мова програмування, BeOpen, GUI-додатки.*

Abstract: *The article reviewed the history of creation and the main areas of use of the Python programming language. This article will be interesting for specialists in the fields of Mathematics, Computer Science and Programming.*

Key words: *Python, interpreted programming language, object-oriented programming language, BeOpen, Graphical user interface.*

Python − це інтерпретована, об'єктно-орієнтована мова програмування високого рівня з динамічною типізацією, автоматичним управлінням пам'яттю і зручними високорівневими структурами даних, такими як словники (хеш-таблиці), списки, кортежі. Підтримує класи, модулі, обробку винятків, а також багатопотокові обчислення. Python має простий і виразний синтаксис. Мова підтримує кілька парадигм програмування: структурну, об'єктно-орієнтовану, функціональну і аспектно-орієнтовану.

Python було розроблено в кінці 1989 року нідерландським програмістом Гвідо ван Россумом (Guido van Rossum) під час різдвяних канікул, коли його дослідницька лабораторія була зачинена і йому просто нікуди було подітися. Він запозичив багато засобів програмування, властиві іншим мовам. Серед розробників мови Python ван Россум відомий як «доброзичливий довічний диктатор», який продовжує спостерігати за процесом її розробки та, за необхідності, приймає остаточне рішення щодо дизайну мови. До розробки Python приймав участь в проекті по написанню мови для навчання програмуванню – ABC. Він також є лауреатом «Free Software Award» 2001 року.

На відміну від інших мов програмування, Python не тільки поширюється абсолютно безкоштовно, він не має абсолютно ніяких обмежень в умовах застосування. Ніхто не обмежує комерційного використання програмних продуктів, написаних цією мовою, та не вимагає будь-яких ліцензійних відрахувань. Програмісти також можуть вільно модернізувати мову, не ставлячи до відома автора.

Версія 1.0

Python 1.0 з'явився в січні 1994 року. Основними новими можливостями, включеними в цей реліз, були засоби функціонального програмування: лямбда-числення, map, filter та згортка списку. Ван Россум стверджував, що «Python отримав lambda, reduce (), filter () і map () завдяки мові програмування Lisp, якій їх не вистачало, і він надав патчі, що реалізують ці функції» [1].

Останньою версією Python, яку розробив Ван Россум, під час роботи в центрі математики та інформатики, був Python 1.2. З 1995 року Ван Россум продовжив роботу над Python в корпорації національних дослідницьких ініціатив в місті Рестон, штат Вірджинія, де було випущено кілька версій мови.

До версії 1.4 Python було включено безліч нових функцій, серед яких найбільш помітними були запозичені в Modula-3 іменовані параметри і вбудована підтримка комплексних чисел. Також в 1.4 з'явилася проста форма приховування даних за допомогою name mangling.

Версія BeOpen

У 2000 році ядро команди розробників Python перейшло в BeOpen.com, сформувавши команду BeOpen PythonLab. Python 2.0 був єдиним релізом BeOpen.com. Після цього Ван Россум та інші розробники PythonLab приєдналися до Digital Creations.

Версія 2.0

У версії Python 2.0 з'явилися спискові включення − функція, запозичена з функціональних мов програмування SETL і Haskell. Синтаксис в Python для цієї конструкції дуже схожий на Haskell, за винятком того, що в Haskell вважали за краще використовувати розташування розділових знаків, а в Python – ключові слова. Також в Python 2.0 була додана система збирання сміття з підтримкою циклічних посилань.

Починаючи з альфа релізу Python 2.1 весь код, технічна документація і специфікації належать некомерційній організації Python Software Foundation (PSF), створеній в 2001 році за зразком Apache Software Foundation. Реліз включав зміну в специфікації мови, що підтримує вкладені області видимості, як в мовах із статичною (лексичною) областю видимості. [2, с. 21]

В Python 2.2 було об'єднання базових типів Python і класів, що створюються користувачем, в одній ієрархії. Це зробило Python повністю об'єктно-орієнтованою мовою.

Версія 3.0

Python 3.0 (відомий також як «Python 3000» або «Py3K») розроблявся з метою усунення фундаментальних вад у мові. Ці зміни не могли бути зроблені за умови збереження повної сумісності з 2.x версією, тому потрібна була зміна головного номера версії. Провідним принципом розробки Python 3 було: «зменшення дублюючих функціональностей усуненням застарілих способів зробити це». Python 3.0 був випущений 3 грудня 2008 року.

Переваги Python

У цієї мови багато переваг, до яких можна віднести наступні:

- Висока популярність мови при реалізації різноманітних проектів.
- Входить в поставку більшості дистрибутивів Linux, отже, є на більшості серверів.
- Порівняно простий, але в той же час строгий синтаксис.
- Дозволяє програмісту реалізувати задачі із значно меншою кількістю рядків коду, ніж потрібно у інших мовах таких як C++ чи Java.
- Є елементи функціонального програмування, основна парадигма – ООП.
- У стандартних бібліотеках Python є засоби для роботи з електронною поштою, протоколами Інтернету, FTP, HTTP, базами

даних тощо.

- Скрипти, написані за допомогою Python виконуються на більшості сучасних ОС. Така сумісність забезпечує Python застосування у найрізноманітніших областях.
- Python підходить для будь-яких рішень в області програмування, будь то офісні програми, web-додатки, GUI-додатки.

Недоліки Python

- Незвичний синтаксис.
- Динамічна типізація.
- Значно повільніше Сі і ASM, як і у більшості скриптових мов.

Що пишуть на Python?

На Python може бути написано безліч різноманітних програм з різних сфер застосування, а саме:

- Web-сайти (Django, Flask, Pyramid, Tornado, TurboGears).
- Додатки для наукових розрахунків (NumPy, SciPy).
- Додатки для Desktop (Dropbox, Bittorent, TaskCoach).
- Ігри (Pygame).
- Мобільні додатки (kivy).

Де використовується Python?

Ця мова програмування використовується величезною кількістю компаній, від невеликих фірм до міжнародних конгломератів:

- Компанія Google використовує Python в своїй пошуковій системі.
- Такі компанії, як Intel, Cisco, Hewlett-Packard, Seagate, Qualcomm і IBM, використовують Python для тестування апаратного забезпечення.
- Служба колективного використання відеоматеріалів YouTube в значній мірі реалізована на Python.
- NSA використовує Python для шифрування і аналізу даних.
- Компанії JPMorgan Chase, UBS, Getco і Citadel застосовують Python

для прогнозування фінансового ринку.

- Популярна програма BitTorrent для обміну файлами в пірінгових мережах написана на мові Python.
- Популярний веб-фреймворк App Engine від компанії Google використовує Python в якості прикладної мови програмування.
- NASA, Los Alamos, JPL і Fermilab використовують Python для наукових обчислень.

Сфери застосування мови Python, як ми бачимо, дуже широкі. Все більше спеціалістів зі всього світу обирають саме цю досить універсальну мову програмування. Мова програмування Python має легкий і зрозумілий синтаксис, порівняно з іншими мовами програмування, керування пам'яттю – цілком автоматичне – не потрібно хвилюватися щодо розподілу або звільнення пам'яті. Саме тому цю мову часто обирають як одну з базових для вивчення основ програмування.

Література:

1. Python Software Foundat. About Python [Електронний ресурс] / Python Software Foundat. – 2018. – Режим доступу до ресурсу: https://www.python.org/about/.
2. Лутц М. Программирование на Python / М. Лутц. – Санкт Петербург: Символ-Плюс, 2002. – 1136 с.
3. Саммерфилд М. Programming in Python 3 / М. Саммерфилд. – СПб: Символ-Плюс, 2009. – 608 с.
4. Бизли Д. Python. Подробный справочник, 4-е изд. / Д. Бизли. – СПб: Символ-Плюс, 2010. – 864 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, старший викладач Ковтонюк Галина Миколаївна

УДК 519.11.16

Поліщук Анастасія
студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ДЕЯКІ КОМБІНАТОРНІ ЗАДАЧІ З ОБМЕЖЕННЯМИ

Анотація: *У статті розглянуто різні види комбінаторних задач із обмеженнями, зокрема, на перестановки та розміщення предметів, також наведено приклади розв'язування деяких із них. Доведено принцип включень-виключень у комбінаторній формі та продемонстровано його застосування.*

Ключові слова: *перестановки, комбінації, принцип включень-виключень, числа Белла, числа Стірлінга, числа Моргана.*

Abstract: *The article deals with various types of combinatorial problems with constraints, in particular, for rearranging and placing objects, and also examples of solving some of them. The principle of inclusion-exclusion in the combinatorial form is proved and its application demonstrated.*

Keywords: *permutations, combinations, inclusion-exclusion principle, Bella numbers, Stirling numbers, Morgan numbers*.

Постановка проблеми. Нехай маємо N предметів, деякі з яких мають властивості $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. При цьому окремий предмет може не мати жодної з цих властивостей, або мати властивості $\alpha_i, \alpha_j, \ldots, \alpha_h$ і, можливо, деякі з інших властивостей. Позначимо через $N(\alpha_i, \alpha_j, \ldots, \alpha_h)$ кількість предметів, які мають властивості $\alpha_i, \alpha_j, \ldots, \alpha_h$. Якщо предмети не мають властивості α_k, то позначимо це α'_k [4, с. 60]. Наприклад, $N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_3)$ - кількість предметів із властивостями α_1 і α_2, які не мають властивості α_3.

Загальна формула включень-виключень підраховує кількість предметів, позбавлених всіх без виключення властивостей і має вигляд:

$$N(\alpha_1',\alpha_2',\ldots,\alpha_n') = N - \sum_{1\le i\le n} N(\alpha_i) + \sum_{1\le i<j\le n} N(\alpha_{i,}\alpha_j) - \sum_{1\le i<j<k\le n} N(\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k) + \ldots$$
$$+(-1)^n N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n). \quad \ldots..(1)$$

Накладемо такі обмеження на кількість елементів, які мають деякі з властивостей $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$:

$N(\alpha_1) = ... = N(\alpha_n) = N^{(1)}$,

$N(\alpha_1,\alpha_2) = N(\alpha_1,\alpha_3) = ... = N(\alpha_{n-1},\alpha_n) = N^{(2)}$,

………………………………………………..,

$N(\alpha_1,...,\alpha_k) = ... = N(\alpha_{n-k+1},...\alpha_n) = N^{(k)}$,

$N(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m) = N^{(n)}$.

Таким чином, додатково припускається, що кількість елементів з будь-яким властивостями залежить лише від кількості цих властивостей, а не від типу (або номерів) властивостей, що характерні для предметів. Звідси випливає, що сумарна кількість предметів, які мають рівно k властивостей, дорівнює:

$N(\alpha_1,...,\alpha_k) + ... + N(\alpha_{n-k+1},...\alpha_n) = C_n^k N^{(k)},\ k = 1,2,...,n.$

За вказаним обмеженнями формула включень-виключень має вигляд:

$N(\alpha_1',...,\alpha_n') = N - C_n^1 N^{(1)} + C_n^2 N^{(2)} - \ldots + (-1)^n N^{(n)}$…………..(2)

Формула (2) є частинним випадком формули (1).

Розглянемо застосування формули (2) до розв’язування деяких комбінаторних задач.

1. Задача про кількість зміщень D_n

Знайти кількість зміщень D_n − перестановок з *n* елементів, із яких жоден не залишається на початковому місці [1].

Задача про заміщення відома давно: наприклад, нею займався ще Л. Ейлер. Значення D_n можна швидко отримати за допомогою формули (2) включень та виключень ѕз обмеженнями. Нехай $N = P_n -$ кількість таких перестановок, в яких один фіксований елемент α_i залишається на своєму місці.

Взагалі, $N^{(k)} = P_{n-1}$ − кількість перестановок, в яких к фіксованих елементів (із них *n* елементів) залишаються на своєму місці, $k = 1, \ldots, n$.

Тоді кількість зміщень D_n дорівнює $N(\alpha'_{1,} ..., \alpha'_n)$ − числу перестановок, у яких кожний елемент α_i не залишається на своєму місці. Згідно з (2) маємо:

$$D_n = P_n - C_n^1 P_{n-1} + C_n^2 P_{n-2} - \ldots + (-1)^n C_n^n P_0 = n![1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}].$$

Безумовно, $D_1 = 0$.

Якщо *n* = 0, домовимося, що $D_0 = 1$.

2. Задача про зміщення неповної кількості елементів

Кількість перестановок $D_{n,r}$ із *n* елементів, при яких рівно *r* елементів залишається на первинних місцях, а інші *n* − *r* обов΄язково змінюють своє місце, дорівнює $D_{n,r} = C_n^r D_{n-r}$ [1].

Спочатку слід вибрати, які саме *r* елементів залишаться на місці. Це можна зробити C_n^r способами. Інші (*n* − *r*) елементів можна переставляти будь-якими способами, лише б жоден із них не опинився на своєму початковому місці. Це можна зробити D_{n-r} способами. За правилом добутку одержимо $C_n^r D_{n-r}$ шуканих перестановок.

Розіб'ємо всі перестановки на класи залежно від того, скільки елементів залишаються незміненими при цій перестановці:

$$\sum_{r=0}^{n} D_{n,r} = \sum_{r=0}^{n} C_n^r D_{n-r} = n!,$$

(оскільки загальна кількість перестановок дорівнює *n!*).

За допомогою формули включень та виключень можна розв'язати таку задачу: «Знайти кількість перестановок із *n* елементів, при яких дані *r* елементів зміщені (а інші можуть бути або на своїх місцях, або зміщеними)». Ця кількість дорівнює $n! - C_r^1 (n-1)! + C_r^2 (n-2)! - \ldots + (-1)^r (n-r)!$.

Аргументація здійснюється за зразком виведення формули для D_n: від першого кроку − виключення з P_n кількості перестановок $C_r^1 P_{n-1}$, в яких один з

r елементів не змінює свого місця, до r-го кроку − врахування кількості $C_r^r P_{n-r} = P_{n-r}$ перестановок, в яких r вказаних елементів залишається на своїх місцях:

$$P_n - C_r^1 P_{n-1} + C_r^2 P_{n-2} - \ldots + (-1)^r C_r^r P_{n-r}.$$

Розглянемо **задачі про розміщення предметів.**

Розв'язуючи задачі про розміщення (розподіл предметів за урнами), необхідно проаналізувати зміст задачі, фізичні властивості предметів, щоб правильно розв'язати питання про те, вважати предмети однаковими чи різними, враховувати чи ні порядок вибірки предметів, розрізняти чи ні урни одну від одної. Якщо задача формулюється так, що неможливо однозначно відповісти на подібні питання, необхідно прийняти додаткові припущення [2].

1. Розподіл *n* різних предметів за *k* урнами.

Кількість розміщень за k урнами n різних предметів за умовою, щоб у першу урну попало n_1 предметів, у другу − n_2, …, в останню − n_k предметів, дорівнює:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}, \qquad n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Приклад 1. Скількома способами можна розфарбувати квадрат, поділений на 16 частин, чотирма кольорами так, щоб у перший колір були зафарбовані 4 частини квадрата, у другий – 3 частини, у третій – 5 частин, у четвертий – 4 частини квадрата?

Кожне розфарбовування, що розглядається як послідовність кольорів, в які зафарбовані частини квадрата, є перестановками із 16 елементів, причому ці перестановки із заданою комбінацією елементів (4 елементи – 1-й колір; 3 елемента – 2-й колір; 5 елементів – 3-й колір; 4 елемента – 4-й колір). Тобто маємо, що n=16, n_1=4, n_2=3, n_3=5, n_4=4. За формулою (3) отримаємо:

$$P_{16}(4,3,5,4) = \frac{16!}{4!3!5!4!} = 50450400.$$

2. Розподіл *n* однакових предметів за *k* урнами.

Встановимо, що n однакових предметів між k особами можна розділити

$$P(n,k-1)=C_{n+k-1}^{n}=C_{n+k-1}^{k-1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(4)$$

способами.

Вишикуємо в один рядок *n* однакових предметів і утворимо додатково множину з (*k* −1) предметів другого типу («роздільників»). Вставляючи всі додаткові предмети на різні місця у рядку між початковими предметами, можна розділити останні на «*k*» послідовних ланцюжків, які вручаються відповідним особам. Зрозуміло, що кількість шуканих розподілів *n* однакових предметів між *k* особами дорівнює кількості перестановок із (*n* + *k* − 1) предметів з повтореннями *n* предметів першого типу і (*k* − *1*) предметів другого типу, тобто дорівнює *P(n, k*−*1*).Якщо при цьому *m* роздільників передують усім *n* предметам першого типу, тоді особи 1, 2, …, *m* не одержують жодного предмету при розділі, $m \in \{1, \ldots, k-1\}$.

Якщо ділити справедливо, з рівнем справедливості *r* , то кожен учасник розподілу повинен одержати мінімум *r* предметів. Почнемо з того, що кожному роздамо по *r* предметів. Після цього залишається (*n* − *kr*) предметів, які розподілимо довільно. Це можна зробити $C_{n-kr-k-1}^{k-1}=C_{n-k(r-1)-1}^{k-1}$ способами.

Приклад 2. Скільки є способів розкласти 10 однакових монет у 2 кишені [5]?

У цій здачі маємо, що *n* =10, *k* =2. За формулою (4) одержимо, що кількість способів розкласти 10 однакових монет у дві кишені рівна:

$$C_{n+k-1}^{n}=C_{11}^{10}=11.$$

3. Розподіл різних предметів без урахування порядку предметів в урнах

Необхідно розділити *n* різних предметів між *k* урнами, місткість яких не обмежена (кожна людина, яка бере участь у розподілі, може забрати собі все). Перший предмет можна покласти у будь-яку з *k* урн, другий (незалежно від першого) також у *k* урн і т.д. За правилом добутку предмети можна розподілити k^n способами.

Приклад 3. Скільки є способів розкласти 10 різних монет у 2 кишені [5]?

За формулою отримаємо $k^n = 2^{10}=1024$.

4. Розподіл різних предметів між однаковими урнами за умови, що урни не порожні

Позначимо кількість способів розподілу *n* різних предметів між *k* однаковими урнами так, щоб кожна урна була не порожньою. Із кожного такого розподілу можна одержати *k!* аналогічних розподілів за різними урнами (позначити *k* урн можна *k!* способами). Таким чином, *кількість M(n, k) розподілів n різних предметів між k різними урнами з використанням кожної урни у кожному розподілі* («не порожні урни») дорівнює

$$M(n,k) = k!S_n^k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Кількості *M(n, k)* носять назву ***чисел Моргана.*** Формула

$$S_n^k = \frac{1}{k!}[k^n - C_n^1(k-1)^n + C_k^2(k-2)^n + \ldots + (-1)^{k-1}C_k^{k-1}1^n] \ldots\ldots\ldots.(6)$$

випливає з формули включень і виключень.

Числа S_n^k називається ***числами Стірлінга другого роду*** [4, с. 56].

Визначимо:

$$S_n^k = 0, \text{ якщо } k > n \text{ або } k = 0. \text{ Також } S_0^0 = 1, S_n^n = 1.$$

Числа Стірлінга S_n^k задовольняють рекурентне співвідношення:

$S_{n+1}^k = kS_n^k + S_n^{k-1}$.

Числа Белла B_n − це кількість всіх способів розбиття множини з *n* елементів в об'єднання непорожніх підмножин, які не перетинаються [4, с. 57].

Зрозуміло, що $B_n = \sum_{k=0}^{n} S_n^k$, де $B_0 = 1$, $S_n^0 = 0$.

Перевіряється, що $B_{n-1} = \sum_{r=0}^{n} C_n^k B_k$.

Приклад 4. Скільки є способів розкласти 10 різних монет у 2 кишені за умови, що кишені не порожні [5]?

Знайдемо таку кількість способів за формулою (5), для цього обчислимо число Стірлінга S_n^k за формулою (6):

$$S_{10}^{2}=\frac{1}{2!}[2^{10}-C_{2}^{1}(2-1)^{10}]=\frac{1}{2!}\cdot 1022\,.$$

Тоді отримаємо, що $M(10,2)=2!S_{10}^{2}=1022$.

5. Розподіл різних предметів з урахуванням їх порядку в урнах

Якщо не обмежувати кількість предметів в урнах і якщо предмети не розрізняти між собою, то кількість таких розподілів дорівнює C_{n+k-1}^{k-1} .

Кожному способу розподілу однакових предметів між урнами відповідає $n!$ способів різних предметів з урахуванням їх порядку, які одержуються за допомогою перестановок предметів між собою без зміни кількості предметів в урнах. За правилом добутку одержуємо шукану кількість розподілів:

$$C_{n+k-1}^{k-1}n!=\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}=A_{n+k-1}^{n}\,.$$

Література:

1. Бардачов Ю. М. та ін. Дискретна математика: Підручник / Ю. М. Бардачов, Н. А. Соколова, В. Є. Ходаков; За ред. В. Є. Ходакова. – 2-ге вид., переробл. і доповн. – К.:Вища школа, 2007. – 383 с.
2. Бондаренко М.Ф. Комп’ютерна дискретна математика: Підручник / М.Ф.Бондаренко, Н.В. Білоус, А. Г. Руткас. – Харків: «Компанія СМІТ», 2004. – 480 с.
3. Виленкин Н. Я. Комбинаторика / Н.Я. Виленкин. – М.: «Наука», 1969. – 328 с.
4. Нікольський Ю.В. Дискретна математика / Ю.В. Нікольський, В.В. Пасічник, Ю.М. Щербина. – К.: Видавнича група BHV, 2007. – 368 с.
5. Шлапак Л.В. Елементи комбінаторики. Дидактичні матеріали та перевірні роботи / Л.В. Шлапак, Л.О. Сморжевський. – Тернопіль: Мандрівець, 2006. – 88 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Захарченко Наталія Вікторівна

УДК 001.18

Райковська Олександра

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ІСТОРІЯ І ПЕРЕДУМОВИ ВИНИКНЕННЯ КВАТЕРНІОНІВ

Анотація: *В роботі проаналізовано питання виникнення кватерніонів як першої гіперкомплексної системи. Описано причини і передумови їхньої появи та історичне значення цього відкриття.*

Ключові слова: *кватерніони, алгебра кватерніонів, гіперкомплексні числа.*

Abstract: *The paper analyzes the question of the appearance of quaternions as the first hypercomplex system. The reasons and preconditions of their appearance and the historical significance of this discovery are described.*

Keywords: *quaternions, algebra of quaternions, hypercomplex numbers.*

Поняття про число розвивалось і розширювалося, починаючи з глибокої старовини, відповідно до практичних і теоретичних потреб. Гіперкомплексні числові системи є розширенням поля комплексних чисел. Вивчення цих розширень є новим науковим і практичним напрямком, розвиток якого зустрічав значні труднощі і вимагав зусиль провідних фахівців. Цій роботі присвятили свої праці: У. Гамільтон, А. Келі, Д. Сильвестр, Б. Пірс, Ч. Пірс, Е. Лагерр, А. Пуанкаре, Ш. Ерміт, Р. Грассман, Р. Ганкель, Д. Вейерштрас, Р. Дедекінд, Р. Фробеніус, А. Кліффорд та інші.

Вперше, мабуть, уявні величини з’явилися у відомій праці Кардано «Велике мистецтво, або про права алгебри» (1545), який визвав їх непридатними до використання. Користь уявних величин, зокрема, при розв’язанні кубічного рівняння, в так званому випадку (коли корінь многочлена виражається через кубічний корінь з уявних величин), що не приводиться, вперше оцінив Бомбеллі (1572). Вирази вигляду , що з'являються при розв'язанні квадратних і кубічних рівнянь, стали називати «уявними» в XVI-XVII століттях, проте навіть для багатьох значних учених XVII століття алгебраїчна і геометрична сутність уявних величин представлялася неясною.

Необхідно відзначити, що поняття чотиривимірного простору цікавить вже у XVIII ст. таких учених як Даламбер (стаття «Розмірність») і Дідро в їхній спільній праці «Енциклопедія або тлумачний словник наук, мистецтв і ремесла»[5]. Про багатомірність багато написано Ж.Лагранжем у його роботі «Аналітична механіка» (1788)[7]. А про чотиривимірний простір, який «уявити собі не можливо», пише Мебіус в «Баріцентричному численні»(1827 р.)[3]. Інтерес до багатовимірності безпосередньо супроводжувався розвитком алгебраїчних ідей побудови багатовимірних числових систем. Так ірландський математик У. Гамільтон у роботі «Теорія спряжених функцій» (1835) зробив спробу побудови тривимірного аналога комплексних чисел[6]. Він у цій роботі строго обґрунтував комплексну числову систему і представлення цих чисел у вигляді пар дійсних чисел або, що рівнозначно, як векторів на площині. Далі У. Гамільтон здійснив спробу в 1837–1838 рр. побудувати аналітичну теорію для трійок дійсних чисел. Однак, всі ці системи мали так звані дільники нуля[6], тобто такі пари чисел, що

$$A \neq 0,\ B \neq 0,\ \text{але}\ A \cdot B = 0$$

А. Морган розглянув у роботі «Про основу алгебри» (1847) числа вигляду

$$a\xi + b\eta + c\varsigma$$

і ξ різні алгебри[4]. У тому числі розглянута алгебра з таблицею:

	ξ	η	ς
ξ	ξ	η	ς
η	η	$-\varsigma$	ξ
ς	ς	ξ	$-\eta$

Табл. 1. Алгебра трійки дійсних чисел

У цій алгебрі роль одиничного елемента відігравав елемент ξ, а елементи η і ς були пов'язані співвідношенням $\eta^2 = \varsigma^2 = \xi^2$. Якщо при цьому позначити ξ, $-\eta$ і $-\xi$ відповідно через $1, e, e^2$, то елементи цієї алгебри можна записати у вигляді $a + be + ce^2$, де $e^2 = 1$. Алгебраїчною або числовою системою з елементами наведеного вигляду працював Ч. Гревс у статті «Про алгебраїчні триплети»(1847) він показав, що триплет $a + be + ce^2$ можна представити у вигляді точки тривимірного простору і що триплет за певних умов можна представити у вигляді суми дійсного числа й комплексного числа. Із цього виходить, що алгебру триплетів можна представити прямою сумою поля дійсних і поля комплексних чисел.

У. Р. Гамільтон досліджував, що всі розглянуті потрійні алгебри мають дільники нуля, тому він почав шукати серед алгебр четвертого порядку таку алгебру, яка не мала б дільників нуля [2]. І він знайшов таку алгебру, що володіла, як і поля дійсних і комплексних чисел, всіма властивостями поля, за винятком комутативності. Результати цих досліджень Гамільтон публікує як нову теорію в роботі «Про кватерніони або про нову систему уявностей в алгебрі» (1850), потім в «Лекціях про кватерніони» (1853). Елемент кватерніон Гамільтон записав у вигляді

$$a + ib + jc + kd,$$

для них додавання виконується в такий спосіб

$$\begin{array}{l} a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1 \\ a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1 \\ \hline (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) + j(c_1 + c_2) + k(d_1 + d_2) \end{array}$$

а множення здійснюється з урахуванням таблиці:

Табл. 2. Множення кватерніонів.

Довгий час було неясно, чи всі операції над комплексними числами приводять до комплексних результатів, або, як приклад, добування кореня може призвести до відкриття якогось типу чисел. Задача про вираз кореня степеня з даного числа була вирішена в роботах Муавра (1707) і Котса (1722).

Символ запропонував Ейлер, що узяв для цього першу букву слова лат. imaginarius. Він же розповсюдив всі стандартні функції, включаючи логарифм, на комплексну область. Ейлер також висловив у 1751 році думку про замкнутість алгебри поля комплексних чисел. До такого ж висновку дійшов д'Аламбер (1747), але перше доведення цього факту належить Гауссу (1799). Гаусс і ввів у широкий вжиток термін «комплексне число» в 1831 році, хоча цей термін раніше використовував у тому ж сенсі французький математик Лазар Карно в 1803 році.

У паперах Гаусса збереглися замітки, що свідчать про те, що після публікації його дисертації він неодноразово повертався до питання про природу узагальнених уявних чисел. Зокрема у 20-ті роки XIX століття він зробив арифметику, яка була б спроможною розв'язувати задачі стосовно векторів у просторі, які арифметика комплексних чисел розв'язує стосовно векторів на площині.

Геометричне тлумачення комплексних чисел і дій над ними з'явилося в перше в роботі Каспара Весселя (1799). Перші кроки в цьому напрямі були зроблені Валлісом у 1685 році. Сучасне геометричне представлення, іноді зване «діаграмою Аргана», увійшло до вжитку після публікації в 1806 і 1814 роках роботи Аргана, що повторювала незалежно висновки Весселя.

Розвиток комплексного аналізу в XIX столітті викликало у математиків інтерес до наступної задачі: знайти новий вид чисел, властивості яких аналогічні комплексним, але мають не одну, а дві уявні одиниці. Вважалось, що така модель буде корисною для розв'язування просторових задач математичної фізики. Але робота в цьому напрямі виявилась невтішною.

Арифметична модель комплексних чисел, як пара дійсних чисел була побудована Гамільтоном (1837); це довело несуперечність їхніх властивостей. Гамільтон запропонував і узагальнення комплексних чисел – кватерніони, алгебра яких некомутативна.

Підкреслимо, що відмінність кватерніонів від дійсних чисел значно глибша, ніж комплексних чисел. Якщо при переході до комплексних чисел втрачається лише відношення лінійного порядку і комплексні числа, потрібно дійсним, утворюють поле, то для кватерніонів, крім цього, не виконується властивість комутативності множення, і вони, таким чином не утворюють поле. Це був перший в історії математики приклад некомутативної числової системи. Один з найвидатніших математиків XX століття А. Пуанкаре порівняв відкриття таких систем в алгебрі з відкриттям неевклідових геометрій.

Професор Олександр Петрович Котельников (1865-1944) досяг видатних результатів при дослiджені теорії кватерніонів, основ механіки і векторного числення у неевклідових геометріях.

Подальший розвиток теорія кватерніонов і алгебра Кліффорда [1] одержали в роботах Р.Ліфшица. Вважається, що він незалежно сформулював і представив алгебри Кліффорда й застосував їх для вивчення груп обертання[8].

Слідом за кватерніонами А. Келі ввів їхнє узагальнення — так звані числа Келі або октави. Про них він вперше написав у роботі «Про еліптичні функції Якобі і про кватерніони».

Література:

1. Clifford W. K. Applications of Grassmann's extensive algebra/ Clifford W. K. — Baltimor, 1878, Mathematical papers, N. J., 1968 — p. 260-267.

2. Hamilton W. R. On Quaternions or on new system of emaginaries in Algebra/ Hamilton W. R. – Phill. Mag., 1844. – 40p.

3. iSearch [Електронний ресурс] – Режим доступу: URL : http://www.isearch.kiev.ua/index.php/uk/searchpractice/internetsecurity/837-hashing-message-digest –

Гешування і захист інформації.

4. Morgan A. D. On the foundation of algebra/ Morgan A. D. –Trans Cambrige Philos. Soc., 1847 – V.8 – N. 3 – p. 241-254

5. Гамильтон У. Р. О кватернионах, или о новой системе мнимых величин в алгебре. / Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы. / У. Р. Гамильтон // – М.: «Наука» 1994. – 391 с.

6. Кантор И. Л. Гиперкомплексные числа/ Кантор И. Л., Солодовников А. С.– М.: Наука, 1973. — 144ст.

7. Лагранж Ж. Л. Аналитическая механика/ Лагранж Ж. Л. — М.:ГТТИ, 1950.– Т.1.– 594с., Т.2.– 400ст.

8. Ландау Л. Д. Теория поля/ Ландау Л. Д., Липшиц Е. М. — М.: Наука, 1967. — 156с.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Вотякова Леся Андріївна

УДК: 512.552

Руда Віта

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ЗБІЖНІ ПОСЛІДОВНОСТІ МАТРИЦЬ АЛГЕБРИ M_3

Анотація: *У статті введемо поняття матричної послідовності. З'ясовано умови збіжності і основні властивості збіжних послідовностей.*

Ключові слова: *Границя, збіжна послідовність, фундаментальна послідовність, матриця.*

Abstract: *The article, we introduce the concept of matrix sequence. The conditions of convergence and the basic properties of convergent sequences are*

determined.

Keywords: *Limit, convergent sequence, fundamental sequence, matrix.*

Вступ: Поняття границі послідовності – основоположне поняття математичного аналізу. З нього власне і починається вивчення операції граничного переходу. Також границя послідовності є глибоким абстрактним поняттям, досить складним для розуміння.

Метою нашої статті є означити і дослідити послідовності матриць виду M_3.

Виклад основного матеріалу. Першу спробу створити теорію границь зробив Ньютон у 1686 р., хоча операція граничного переходу застосовувалася і раніше, починаючи із старогрецьких учених. Близьке до сучасного поняття границі сформулював у 1765 р. французький математик і філософ Ж. Д'Аламбер.

Розпочнемо з границі числової послідовності, членами якої є матриці.

Нехай маємо множину матриць $(M_3) = \begin{pmatrix} a-b & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & a-c \end{pmatrix}$, де $a, b, c \in R$.

Вона є алгеброю рангу 3.

Нехай маємо послідовність $(A_n) = \begin{pmatrix} a_n - b_n & 0 & b_n \\ 0 & a_n & 0 \\ c_n & 0 & a_n - c_n \end{pmatrix}$

Означення 1: Матриця A_0 називається **границею** послідовності (A_n), якщо $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \mathrm{n}_0$, що $\forall n > \mathrm{n}_0$ виконується нерівність $\|A_n - A_0\| < \varepsilon$.

Послідовність, яка має границю, називається **збіжною.** Послідовність, що не має границі, називається **розбіжною**. Послідовність, границею якої є число нуль, називається **нескінченно малою**.[4, с.36]

Приклад. Покажемо, що коли $|\mathrm{a}| < 1$ і $|\mathrm{a - b - c}| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Піднесемо (A) до n – го степеня $A^n = a^n \prod_a + (a-b-c)^n \prod_{a-b-c}$

Знайдемо норму

$$\left\|A^n\right\| = \begin{pmatrix} 3a^{2n} + 2\dfrac{b^2}{(b+c)^2}\left(a^n - (a-b-c)^n\right)^2 + 2\dfrac{c^2}{(b+c)^2}\left(a^n - (a-b-c)^n\right)^2 + \\ + 2a^n \dfrac{b}{b+c}\left(a^n - (a-b-c)^n\right) + 2\dfrac{c}{b+c} a^n \left(a^n - (a-b-c)^n\right) \end{pmatrix}$$

При $|\mathrm{a}| < 1$ і $|\mathrm{a - b - c}| < 1$ права частина рівності є нескінченно мала.

Отже $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \mathrm{n}_0 \, \forall n > \mathrm{n}_0$ виконується $\left\|\mathrm{A}^{\mathrm{n}}\right\| < \varepsilon$, а це і означає, що

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидним є такий критерій збіжності: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A_0$ тоді і тільки тоді, коли послідовність $\left\|A_n - A_0\right\|$ є нескінченно малою. [1]

Теорема 1: Послідовність матриць (A_n) збігається тоді і тільки тоді, коли збігаються числові послідовності $(a_n), (b_n), (c_n)$, причому

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) & 0 & \lim\limits_{n\to\infty} b_n \\ 0 & \lim\limits_{n\to\infty} a_n & 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n & 0 & \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - c_n) \end{pmatrix} \qquad (1)$$

<u>Доведення</u>

<u>Необхідність:</u> Дано: (A_n) – збігається.

Довести: $(a_n), (b_n), (c_n)$ – збігаються.

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A_0$, $(A_0) = \begin{pmatrix} a_0 - b_0 & 0 & b_0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ c_0 & 0 & a_0 - c_0 \end{pmatrix}$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|A_n - A_0\right\| = 0$

$$\|A_n = A_0\| = \left\| \begin{matrix} a_b - b_n - a_0 + b_0 & 0 & b_n - b_0 \\ 0 & a_n - a_0 & 0 \\ c_n - c_0 & 0 & a_n - c_n - a_0 + c_0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left(3(a_n - a_0)^2 + 2(b_n - b_0)^2 + 2(c_n - c_0)^2 - 2(a_n - a_0)(b_n - b_0) - 2(a_n - a_0)(c_n - c_0)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left((a_n - a_0)^2 + (b_n - b_0)^2 + (c_n - c_0)^2 + ((a_n - a_0) - (b_n - b_0))^2 + ((a_n - a_0) - (c_n - c_0))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Далі

$$|a_n - a_0| = \sqrt{(a_n - a_0)^2} \le \left(\begin{matrix} ((a_n - a_0)^2) + (b_n - b_0)^2 + (c_n - c_0)^2 + ((a_n - a_0) - (b_n - b_0))^2 + \\ + ((a_n - a_0) - (c_n - c_0))^2 \end{matrix} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|A_n - A_0\| \to 0 \text{ при n} \to \infty \ .$$

Отже, $|a_n - a_0| \to 0$ при $n \to \infty$, а це і означає, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$.

Аналогічно:

$$|b_n - b_0| = \sqrt{(b_n - b_0)^2} \le \left(\begin{matrix} ((a_n - a_0)^2) + (b_n - b_0)^2 + (c_n - c_0)^2 + ((a_n - a_0) - (b_n - b_0))^2 + \\ + ((a_n - a_0) - (c_n - c_0))^2 \end{matrix} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|A_n - A_0\| \to 0 \text{ при n} \to \infty \ .$$

Отже, $|b_n - b_0| \to 0$ при $n \to \infty$, а це і означає, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_0$.

$$|c_n - c_0| = \sqrt{(c_n - c_0)^2} \le \left(\begin{matrix} ((a_n - a_0)^2) + (b_n - b_0)^2 + (c_n - c_0)^2 + ((a_n - a_0) - (b_n - b_0))^2 + \\ + ((a_n - a_0) - (c_n - c_0))^2 \end{matrix} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|A_n - A_0\| \to 0 \text{ при n} \to \infty \ .$$

Отже, $|c_n - c_0| \to 0$ при $n \to \infty$, а це і означає, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c_0$.

<u>Достатність</u>*:* Дано: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c_0$.

Довести: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A_0$, де $(A_0) = \begin{pmatrix} a_0 - b_0 & 0 & b_0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ c_0 & 0 & a_0 - c_0 \end{pmatrix}$.

Існує також $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a_0 - b_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - c_n) = a_0 - c_0$.

Таким чином маємо п'ять збіжних послідовностей $(a_n), (b_n), (c_n), (a_n - b_n), (a_n - c_n)$.

Подивимось на $\|A_n - A_0\|$ в доведенні необхідності.

Отже, будемо розглядати потрібні нам послідовності, $(a_n), (b_n), (c_n), (a_n - b_n), (a_n - c_n)$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$, зокрема $\dfrac{\varepsilon}{5}, \exists n_1$, що $\forall n > \mathrm{n}_1$ виконується нерівність $|a_\mathrm{n} - a_0| < \dfrac{\varepsilon}{5}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$, зокрема $\dfrac{\varepsilon}{5}, \exists n_2$, що $\forall n > \mathrm{n}_2$ виконується нерівність $|b_\mathrm{n} - b_0| < \dfrac{\varepsilon}{5}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$, зокрема $\dfrac{\varepsilon}{5}, \exists n_3$, що $\forall n > \mathrm{n}_3$ виконується нерівність $|c_\mathrm{n} - c_0| < \dfrac{\varepsilon}{5}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a_0 - b_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$, зокрема $\dfrac{\varepsilon}{5}, \exists n_4$, що $\forall n > \mathrm{n}_4$ виконується нерівність $|(a_n - b_n) - (a_0 - b_0)| < \dfrac{\varepsilon}{5}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - c_n) = a_0 - c_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$, зокрема $\dfrac{\varepsilon}{5}, \exists n_5$, що $\forall n > \mathrm{n}_5$ виконується нерівність $|(a_n - c_n) - (a_0 - c_0)| < \dfrac{\varepsilon}{5}$.

Оберемо за $\mathrm{n}_0 = (\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, \mathrm{n}_3, \mathrm{n}_4, \mathrm{n}_5)$.

Тоді $\forall\varepsilon > 0\, \exists \mathrm{n}_0$, що $\forall n > \mathrm{n}_0$ виконується

$$\|A_n - A_0\| = \left(3(a_n - a_0)^2 + 2(b_n - b_0)^2 + 2(c_n - c_0)^2 - 2(a_n - a_0)(b_n - b_0) - 2(a_n - a_0)(c_n - c_0)\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left((a_n - a_0)^2 + (b_n - b_0)^2 + (c_n - c_0)^2 + ((a_n - a_0) - (b_n - b_0))^2 + ((a_n - a_0) - (c_n - c_0))^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le \sqrt{(a_n - a_0)^2} + \sqrt{(b_n - b_0)^2} + \sqrt{(c_n - c_0)^2} + \sqrt{((a_n - a_0) - (b_n - b_0))} + \sqrt{((a_n - a_0) - (c_n - c_0))^2} =$$
$$= |a_n - a_0| + |b_n - b_0| + |c_n - c_0| + |a_n - b_n - (a_0 - b_0)| + |a_n - c_n - (a_0 - c_0)| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon\text{Т}.$$

Тобто, $\forall\varepsilon > 0\, \exists \mathrm{n}_0\, \forall n > \mathrm{n}_0\, \|A_n - A_0\| < \varepsilon$, а це означає,що

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A_0 = \begin{pmatrix} a_0 - b_0 & 0 & b_0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ c_0 & 0 & a_0 - c_0 \end{pmatrix}.$$

■

Тепер, коли ми маємо зв'язок збіжності матричної послідовності (A_n) із збіжністю дійсних послідовностей $(a_n),(b_n),(c_n).$ ми можемо результати, відомі з математичного аналізу переносити на матричні послідовності.

Означення 2: Послідовність матриць (A_n) називається фундаментальною або послідовністю Коші, якщо $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \mathrm{n}_0$ такий, що $\forall n > \mathrm{n}_0$ і $\forall \rho \in N$ виконується $\|A_n - A_0\| < \varepsilon$.

Теорема 2: Послідовність матриць (A_n) фундаментальна тоді і тільки тоді, коли є фундаментальними послідовностями $(a_n),(b_n),(c_n).$

Теорема 3: Послідовність матриць (A_n) є збіжною тоді і тільки тоді, коли вона є фундаментальною.[2]

Теорема 4: Якщо послідовності матриць (A_n) і (B_n) збігаються, то збігається послідовність $(A_n + B_n)$, причому

$$\lim_{n\to\infty}(A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty}(A_n) + \lim_{n\to\infty}(B_n) \tag{2}$$

Теорема 5: Якщо послідовності матриць (A_n) і (B_n) збігаються, то збігається послідовність $(A_n \cdot B_n)$, причому $\lim_{n\to\infty}(A_n \cdot B_n) = \lim_{n\to\infty}(A_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(B_n)$ (3)

Теорема 6: Якщо послідовність неособливих матриць (A_n) збігається до неособливого числа A_0, то послідовність (A_n^{-1}) збігається до числа A_n^{-1}.

Теорема 7: Якщо послідовність матриць (A_n) збігається до числа і послідовність неособливих матриць (B_n) збігається до неособливого числа B_0, то послідовність $(A_n \cdot B_n^{-1})$ збігається до числа $A_0 \cdot B_0^{-1}$.[3]

Висновки: В статті ми розглянути збіжні послідовності матриць алгебри M_3. Встановили зв'язок із трьома збіжними числовими послідовностями, що дало можливість основні результати і властивості, відомі з математичного аналізу перенести на матричні послідовності.

Література:

1. Давидов Н.А. Курс математичного аналізу ч.3. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, Головне видавництво, 1979. – 384с.

2. Землякова Ж., Чупахіна О. Елементарні функції в матричній алгебрі M_3 // Сучасні проблеми фізики та математики. Вип. – Вінниця, 2003. – С.207 – 212.

3. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М.: ФМ, 1960. – 471с.

4. Хорн Р., Джонсон У. Матричный анализ: Пер. С англ. – М.: Мир, 1989. – 665с.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Вотякова Леся Андріївна

УДК 004.832

Руденко Сергій

студент факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ТЕНДЕНЦІЇ РОЗВИТКУ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ, РОЗГЛЯНУТОГО НА БАЗІ НЕЙРОМЕРЕЖ ІЗ САМОНАВЧАННЯМ, НА ПРИКЛАДІ ПРОГРАМ ДЛЯ НАСТІЛЬНИХ ІГОР

Анотація: *стаття присвячена дослідженням в області штучного інтелекту, а саме історії розвитку як науки, отриманим на даний момент результатам та перспективам подальшого розвитку та застосування* *отриманих результатів. Розглянуто основні концепти тесту Тьюрінга, механізму самонавчання з підкріпленням, результати публічного тестування сімейства нейромережі Alpha* від Google.*

Ключові слова: *штучний інтелект, нейромережа, тест Тьюрінга, DeepMind Google, AlphaGo Zero, самонавчання з підкріпленням, комп'ютерні шахи.*

Abstract: *The article is devoted to research in the field of artificial intelligence, namely, the history of development as a science, the recently obtained results and their application in other fields, as well as prospects for further development. The main concepts of the Turing test, self-learning reinforcement mechanism, the Google's Alpha* neural network family public testing results are also considered in the article.*

Keywords: *artificial intelligence, neural network, The Turing test, DeepMind Google, AlphaGo Zero, self-learning reinforcement mechanism, computer chess.*

У наш час надзвичайно велика увага приділяється дослідженню та розробці механізму штучного інтелекту (ШІ). Така увага до нього обумовлена тим, що задачі, які перед ним ставлять, різнопланові і можуть не мати якогось чіткого, наперед відомого, розв'язку, але є тими завданнями, які вирішує людина впродовж свого життя. Основна задача ШІ – розв'язати поставлену задачу, базуючись на попередньому досвіді (своєму чи чужому) і, найголовніше, навчатися. В будь-якому випадку, на сьогоднішній день ШІ є одним з основних елементів будь-якої інтелектуальної системи (ІС). З точки зору розробки ШІ, розрізняють 2 основних підходи: низхідний (для моделювання психічних процесів, таких як мова, емоції, мислення) та висхідний (вивчення штучних нейронних мереж) [1, 2].

Досі не існує чіткого способу визначити, чи машинний інтелект «розумний» і наскільки. Загальноприйнятим способом вважається тест Тьюрінга, коли суддя С спілкується з людиною А і комп'ютером В. Задача судді: однозначно визначити хто із співбесідників людина, а хто – робот. Задача програми – ввести суддю в оману. Режим тестування відбувається всліпу в режимі «лише текст», щоб була можливість перевірити саме інтелект, а не уміння розпізнавати емоції, жести і мову. Виходячи з того, що комп'ютери зараз працюють і реагують швидше людини (хоча перші комп'ютери – повільніше) одним із основних правил є те, що суддя повинен витримувати певну паузу, перед відправкою наступного повідомлення. Якщо суддя, а як результат і більша частина журі, не може визначитися, або помилився – вважається, що машина пройшла тест. Цій ідеї понад 50 років. Запропонована вона була в 1950р. Аланом Тьюрінгом у статті філософського журналу Mind, метою якої було визначити, чи може комп'ютер мислити як людина[3]. Алан вирішив розглянути гру в імітацію, коли чоловіка та жінку розводять у різні кімнати і задають їм написані запитання і отримують надруковані відповіді, при чому жінка намагається відповісти як чоловік і навпаки. А аудиторія, що задавала запитання, повинна визначити наприкінці, хто ж насправді де сидів. Базуючись на цій грі, А. Тьюрінг у своїй статті підняв запитання: а що буде, якщо одного з прихованих учасників замінити на машину, чи зможе вона відповідати, як людина, чи здатна вона мислити. Ця стаття стала передумовою офіційної організації проведення тесту Тьюрінга, яку започаткували в 1990р. Основною офіційною платформою для проведення тесту вважається премія Хью Льобнера – щорічний конкурс «AI Loebner», який вперше був проведений 1991р. Найбільш «людяній» програмі гарантується приз в $2k за час проведення одного конкурсу. Передбачено також дві медалі – срібна (за проходження стандартного текстового тесту, приз $25k) та золота (проходження одночасно текстового, звукового та візуального тестів, приз $100k). У разі вручення золотої медалі конкурс офіційно вважатиметься закритим. Але до сьогодні ще жодна програма не отримала навіть срібної медалі.

Незважаючи на те, що з моменту написання цих статей пройшло все-таки доволі багато часу та що ще жодного разу премія за успішне проходження тесту Тьюрінга так і не вручалася, люди навчилися використовувати машини з їх «інтелектом» у різних галузях, наприклад у настільних іграх (рис. 1 [4]).

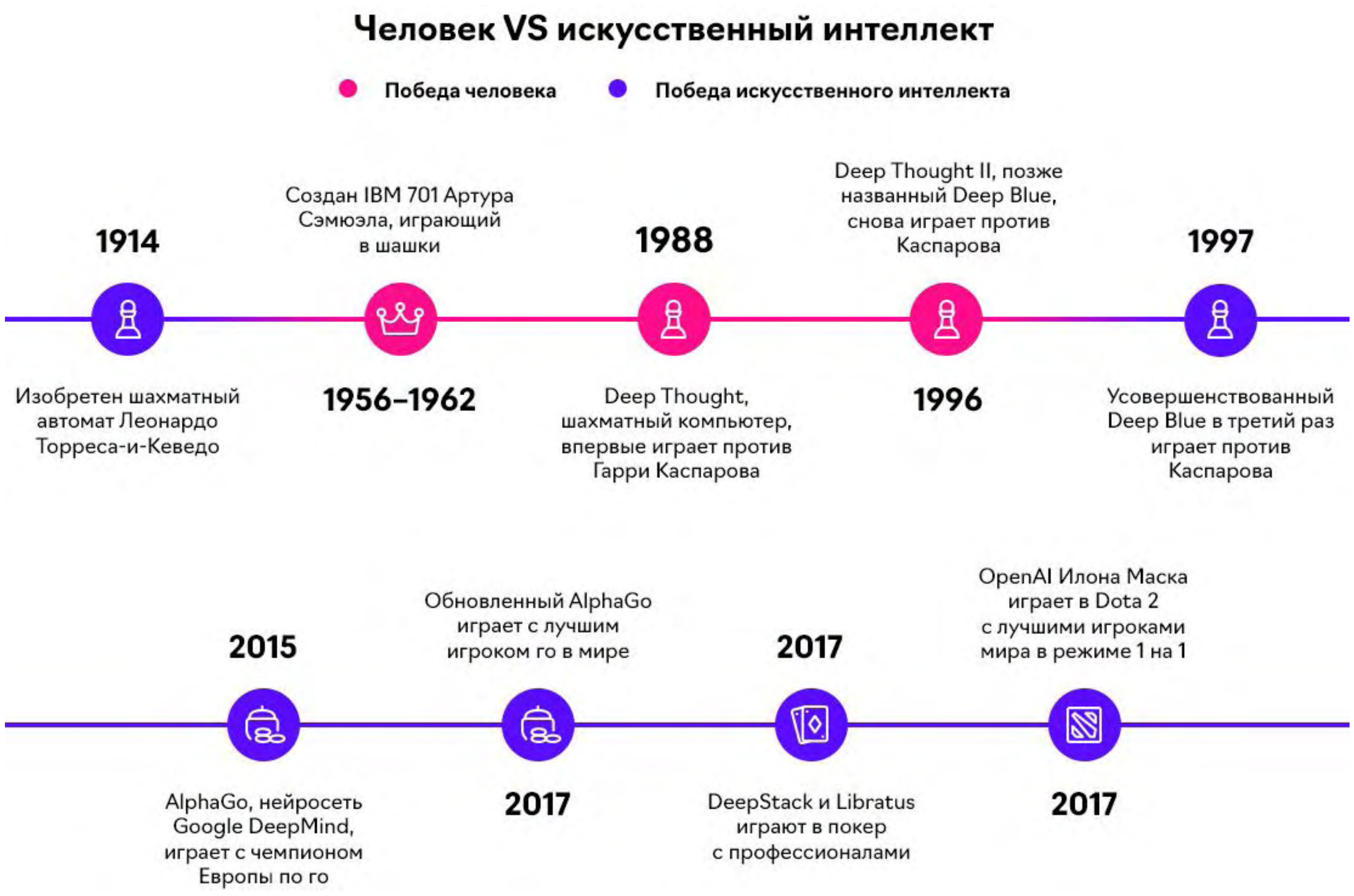


Рис. 1. Історія протистоянь людей та ШІ в настільних іграх за останні 100 років

Ще в 1951р., А. Тьюрінг написав алгоритм, за допомогою якого машина могла б грати в шахи, тільки в ролі машини виступав сам винахідник. Цей нонсенс навіть отримав назву – «паперова машина Тьюрінга». Алгоритм був досить умовний, і зберігся навіть запис партії, де «паперова машина» Тьюрінга програла одному з його колег. Через відсутність доступу до комп'ютера, програма жодного разу не перевірялась в роботі. В тому ж таки 1951 році, математик Клод Шеннон написав свою першу статтю про шахове програмування [18]. Він писав: *«Хоча, можливо, це й не має ніякого практичного значення, саме питання є, теоретично, цікавим, і сподіватимемося, що вирішення цієї задачі послужить поштовхом для вирішення інших задач аналогічної природи й більшого значення»*. К. Шенон також відзначає теоретичне існування найкращого ходу в шахах і практичну неможливість його знайти [5].

На даний момент основним рушієм в галузі розвитку ШІ є Google-команда DeepMind. Вони створили нейромережу Alpha Go, яка здатна за декілька годин гри, без жодних зовнішніх даних і впливів (знаючи тільки правила конкретної гри) та в режимі самонавчання вийти на рівень гри найсильніших людей в галузі (рис. 2) [6, 11]. Після кожного чергового матчу були доопрацювання і донавчання мережі, а відповідно виходили і нові версії програми. Їх сімейство називатимемо Alpha* (Alpha Go → Alpha Lee → Alpha Master → Alpha Go Zero → AlphaZero). Але що цікаво, якщо для шахів, го і шогі (японські шахи) Alpha* просто обирала швидше більш «людські» (інтуїтивні, нематематичні) ходи за рахунок алгоритму навчання з підкріпленням і для вибору з повного дерева рішень кількість можливих продовжень різко зменшувалася (в шахах замість $80*10^6$ позицій в секунду Stockfish'а розглядалися $70*10^3$, шогі – $40*10^3$ замість $35*10^6$ Elm'и, а в го – $16*10^3$, при тому що через складність гри і кількість комбінацій аналогів, як таких, не було взагалі [10]), то схоже що для версії гри в покер ШІ Libratus навчився блефувати, а DeepStack використовує інтуіцію! [7, 8, 9]

Суть методу навчання з підкріпленням полягає у взаємодії тестової системи (агента) із деяким середовищем окремими, дискретними в часі, кроками. Якісним нововведенням від DeepMind можна вважати відсутність подачі зовнішніх знань та використанні в якості середовища аналогічний до агента об'єкт. Таким чином, створили матч продукту самого з собою. Даний метод являється частковим випадком механізму навчання нейромережі з учителем, але в ролі вчителя являється не третя сторона, а саме середовище, що і є перевагою, оскільки алгоритм вчить сам себе. На початку тестування ШІ знає лише правила гри, але з часом він поєднує свою щойно напрацьовану нейромережу із потужним алгоритмом пошуку.

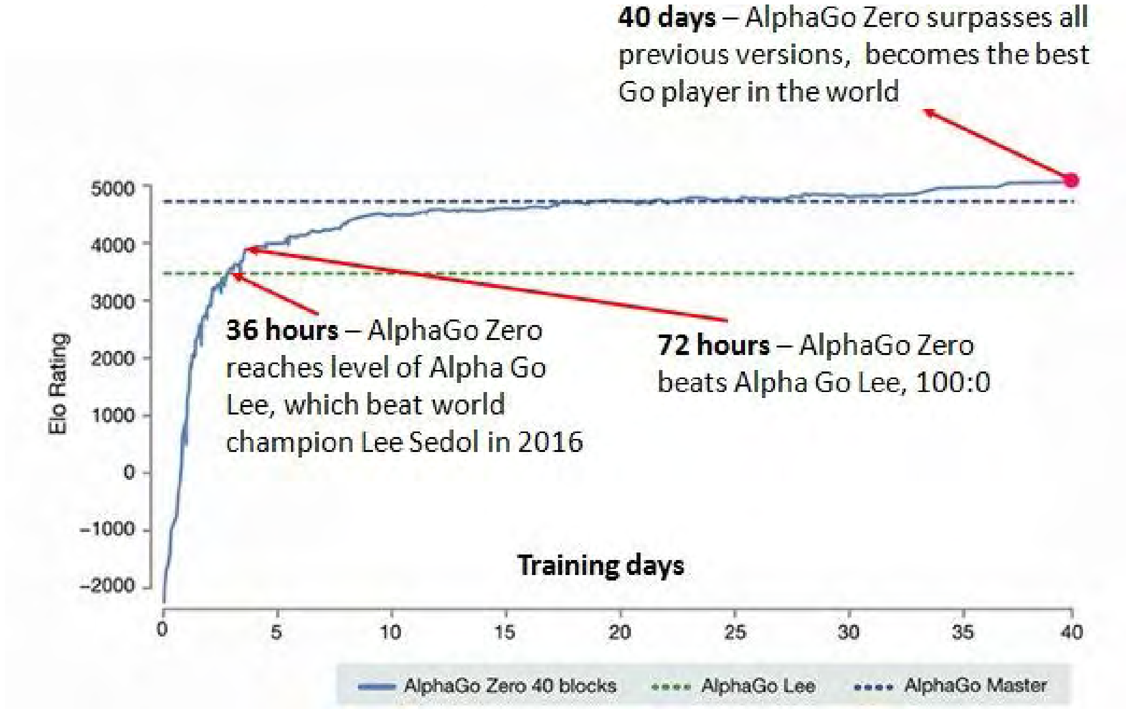


Рис. 2. Розвиток гри AlphaGo під час навчання

Далі, чим довше система думає, тим точніше налаштовується нейромережа і, відповідно, якісніше відбувається прогнозування ходів та вірогідного результату партії, на відміну від традиційних програм, які просто роблять перебір всіх можливих варіантів *(оскільки вони доступні, але їх занадто багато. Наприклад для шахів з дошкою 8x8, разом із неможливими за правилами позиціями, може виникнути* $\frac{64!}{32!*8!^2*2!^6} \approx 10^{43}$ *різних позицій. Це число називають числом Шеннона [18]. Для го з полем 19x19 таких позицій в рази більше)*, оцінюванням позиції на конкретній глибині та вибором ходу з кращою оцінкою (рис. 3 [11]). Навчання відбувається ітеративно, продуктивність підвищується, що спричиняє суттєве посилення мережі та продукту вцілому.

Оцінювання відбувається наступним чином [12]. На кожному кроці t агент отримує стан s_t та із множини A дозволених дій обирає таку дію a_t, яка не заперечує правилам гри π. У відповідь агент отримує наступну позицію s_{t+1} та скалярне значення оцінки потенційного ходу – нагороду r_t Процес продовжується до тих пір, поки не буде отримана остаточна позиція, після чого процес перезапускається. Загальна оцінка «гілки» розраховуватиметься за формулою (1):

$$R_t = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k * r_{t+k}, \qquad (1)$$

де $\gamma \in (0;1]$ – імовірність вибору даної події на кроці.

Ціль агента – максимізувати результат оцінки ходу для кожної позиції.

Відсутність вхідних початкових знань, впливу вчителя-людини є перевагами, оскільки виключає вплив «недосконалого» людського досвіду на прийняття машинних рішень. Опубліковані партії з го вже стали певного роду канонами та їх починають вивчати та застосовувати на практиці на різних рівнях. Гросмейстер з шахів С. Шипов вже назвав AlphaZero новим шаховим Богом [13] і весь шаховий світ з нетерпінням чекає публікації усіх 100 зіграних партій із чемпіоном світу серед програм Stockfish (на даний момент доступно лише 10) [10].

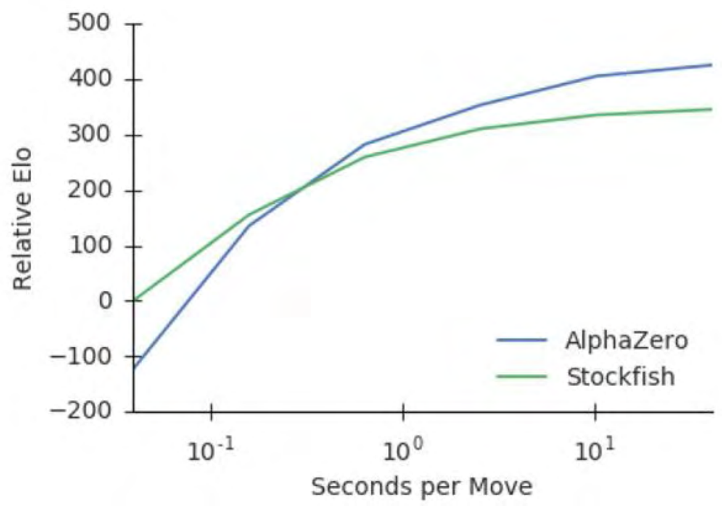


Рис. 3. Якість зробленого ходу в залежності від часу, затраченого на роздуми (AlphaZero в порівнянні зі Stockfish)

Значення отриманих результатів алгоритму із самонавчанням важко переоцінити. Перш за все, до розв'язання стандартних задач можна знайти більш оптимальні і нетрадиційні підходи. Самонавчання з підкріпленням, яке використовували Alpha*, дає можливість покращувати навіть ті підходи, які були запропоновані як оптимальні і нові на попередніх ітераціях. Імовірно, це дасть можливість людству осягнути новий рівень пізнання світу та стати більш винахідливими та інноваційними. Застосування таких механізмів у техніці дасть можливість спрогнозувати можливі катастрофи або їх наслідки, знайти способи зниження енерговитрат чи навіть знайти революційно нові джерела енергії, що теж є немало важливим.

Проте у даного підходу Google є й інша сторона медалі. Нейромережа для Alpha* повинна працювати (принаймні у період навчання) на спеціальному забезпеченні, спроектованому все тим же Google'ом: tensor processing units (TPU). AlphaZero використовує 5,000 TPU першого покоління (1 TPU Gen1 здатний виконати до 700 млн. операцій в секунду) для генерації ігор самої з собою, щоб навчити мережу або 64 TPU другого покоління для безпосереднього тренування. А це вимагає колосальних затрат енергії [14]. Можна також зазначити, що багато експертів, таких як Елон Маск, Біл Гейтс та покійний нині Стівен Хокінг висловлювали певні острахи щодо розвитку ШІ та, щоб запобігти всякого роду неочікуваностей, був підписаний список з 23 пунктів розвитку ШІ (*Asilomar AI Principles*) [15]. Також відкритим залишається питання кібербезпеки ШІ.

Підводячи підсумки, хотілося б відзначити найяскравіші та найважливіші досягнення ШІ за останні декілька років [16, 17]:

- Sketch2Code – Microsoft навчила ШІ програмувати сайти по зображенню «від руки».
- AlphaGo переміг чемпіона світу по грі в Го. AlphaZero переміг чемпіона світу з комп'ютерних шахів Stockfish8 (Людина не може виграти в «традиційних» шахових програм з початку 2000-х).
- Libratus та DeepStack перемогли кращих гравців в покер (таке тривалий час вважалося нездійсненним, оскільки крім математичної складової, важливу роль відіграє психологія гравців і уміння блефувати).

- Самокерована машина Tesla доставила в лікарню людину з серцевим приступом.
- Роєвий інтелект спрогнозував результати Кентуккійського Дербі.
- Microsoft AI на сьогоднішній день розуміє людську мову краще самих людей та навіть зумів поступити до університету.
- ШІ спричинив революцію в діагностиці раку, передбачає приступи епілепсії, підвищив результати операцій з трансплантології.
- Завдяки самонавчанню, дрони зі ШІ DroNet літають без gps і карт.

Як видно із досліджень, тестувань та поточних впроваджень в повсякденне життя, ШІ має дуже широкі сфери застосування. Але утримання в своїх будинках сервери, здатні виконувати роботу, аналогічну до кількатисячної системи TPU не виглядає можливим, принаймні найближчим часом. Тому найбільш актуальними напрямками для покращення ситуації є оптимізація алгоритмів вибору ходу, пониження навантажень на систему, покращення критеріїв вибору дії на більш ранній стадії. Тим не менш, чекатимемо також і того, чи буде Alpha* приймати участь в проходженні тесту Тьюрінга найближчими роками.

Література:

1. Штучний інтелект [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Штучний_інтелект.

2. Artificial intelligence [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://en.wikipedia.org/wiki/Artificial_intelligence

3. Тест Тьюрінга [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Тест_Тьюрінга

4. История соревнований ИИ и человека: кто кого [Електронний ресурс]. – 2018. – Режим доступу до ресурсу: https://vc.ru/flood/39184-istoriya-sorevnovaniy-ii-i-cheloveka-kto-kogo.

5. Комп'ютерні шахи [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Комп'ютерні_шахи

6. Python: ИИ для “Четыре в ряд” с алгоритмом AlphaZero [Електронний ресурс]. – 2018. – Режим доступу до ресурсу: https://proglib.io/p/connect4-alphazero/.

7. Николенко С. И. что же делают alphago и alphazero? глубокое обучение с подкреплением [Електронний ресурс] / Сергей Игоревич Николенко // Data Science UA Conference 2018. – 2018. – Режим доступу до ресурсу: https://logic.pdmi.ras.ru/~sergey/slides/N18_DataScienceUAReinforcement.pdf.

8. Yakovenko N. CMU’s Libratus Bluffs its way to Victory in #BrainsVsAI Poker Match [Електронний ресурс] / Nikolai Yakovenko. – 2017. – Режим доступу до ресурсу: https://medium.com/@Moscow25/cmus-libratus-bluffs-its-way-to-victory-in-brainsvsai-poker-match-99abd31b9cd4.

9. Expert-Level Artificial Intelligence in Heads-Up No-Limit Poker [Електронний ресурс]. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: https://www.deepstack.ai/.

10. Mastering Chess and Shogi by Self-Play with a General Reinforcement Learning Algorithm [Електронний ресурс] / D.Silver, T. Hubert, J. Schrittwieser, DeepMind. – 2017. – Режим доступу до ресурсу: https://arxiv.org/pdf/1712.01815.pdf.

11. Silver A. The future is here – AlphaZero learns chess [Електронний ресурс] / Albert Silver. – 2017. – Режим доступу до ресурсу: https://en.chessbase.com/post/the-future-is-here-alphazero-learns-chess.

12. Asynchronous Methods for Deep Reinforcement Learning [Електронний ресурс] / [V. Mnih, A. Badia, M. Mirza та ін.]. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: https://arxiv.org/pdf/1602.01783.pdf.

13. Шипов С. AlphaZero - новый бог шахмат! [Електронний ресурс] / Сергей Шипов // Crestbook Шахматы (Відео-канал). – 2017. – Режим доступу до ресурсу: https://www.youtube.com/watch?v=ba4_M7UINfo.

14. What's Inside AlphaZero's Chess Brain? [Електронний ресурс]. – 2018. – Режим доступу до ресурсу: https://www.chess.com/article/view/whats-inside-alphazeros-brain.

15. Asilomar AI Principles [Електронний ресурс]. – 2017. – Режим доступу до ресурсу: https://futureoflife.org/ai-principles/.

16. Романов В. 6 наиболее важных достижений искусственного интеллекта в 2016 году [Електронний ресурс] / Владислав Романов. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: https://www.techcult.ru/technology/3816-dostizheniya-ai .

17. Степанов Д. Microsoft научила ИИ программировать сайты по картинке от руки [Електронний ресурс] / Дмитрий Степанов. – 2018. – Режим доступу до ресурсу:http://www.cnews.ru/news/top/2018-08-28_microsoft_nauchila_ii_generirovat_sajty_po_eskizu.

18. Shannon C. Programming a Computer for Playing Chess [Електронний ресурс] / Claude Shannon // Philosophical Magazine. Т. 7/41. – №314. – С. 256–275. – 1950. – Режим доступу до ресурсу: http://archive.computerhistory.org/projects/chess/related_materials/text/2-0 and 2-1.Programming_a_computer_for_playing_chess.shannon/2-0 and 2-1.Programming_a_computer_for_playing_chess.shannon.062303002.pdf.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Бак Сергій Миколайович

УДК 004.65(091)

Салітра Юлія

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ІСТОРІЯ РОЗВИТКУ БАЗ ДАНИХ

Анотація: *У статті розглядається історія розвитку баз даних, причини які слугували появі баз даних.Особливості застосування баз даних..*

Ключові слова: *Бази даних, інформаційні системи.*

Abstract: *The article deals with the history of the development of databases, the reasons that served the emergence of databases. Features of the use of databases.*

Key words: *Databases, information systems.*

Від початку розвитку обчислювальної техніки сформувалися два основні напрями її використання. Перший напрям - застосування комп'ютерів для виконання обчислень, які дуже складно або неможливо здійснювати вручну. Становлення цього напряму сприяло інтенсифікації методів чисельного розв'язання складних математичних задач і розвитку мов програмування, які орієнтовані на зручний запис чисельних алгоритмів. Другий напрям — це використання засобів обчислювальної техніки в системах обробки даних та автоматизованих інформаційних системах.[3, с 12]

У процесі свого розвитку людство століттями накопичувало знання. І лише у другій половині ХХ та на початку ХХІ століття надзвичайної актуальності набуло питання сортування та обробки всієї наявної інформації. Зберігання та обробка інформації – найважливіші функції комп'ютера. Саме в процесі розв'язування конкретних прикладних задач відбувається обробка потрібних даних за заданим алгоритмом. Дані можуть бути найрізноманітнішими: числа, прізвища, адреси, назви тощо. Точкою відліку нової інформаційної епохи стала саме поява перших баз даних (у подальшому – БД). У найзагальнішому випадку БД – це файл спеціального формату, що містить певним чином структуровану інформацію.

Протягом значного часу для розв'язування окремої задачі використовувалася власна сукупність даних (вона не могла бути використаною в іншій задачі). Такий спосіб використання даних є незручним. Зокрема, його недоліками є надлишковість та неузгодженість даних.[2, с 7] Такі недоліки й спричинили на початку 60-х років появу БД.

БД є проявом сучасності, оскільки створити аналог БД поза комп'ютером майже неможливо. Прототипами БД можна вважати бібліотечні каталоги або телефонні довідники. Дійсно, здавна в бібліотеках збирають книжки (або їх аналоги), зберігають їх, дотримуючись певних правил, створюють каталоги різного призначення для полегшення доступу до книжкового фонду. Видаються спеціальні журнали та довідники, що інформують про нові надходження, ведеться облік видачі. Проте, відомості в них є незмінними до чергового оновлення каталогу або перевидання довідника.

База даних - це пойменована і організована відповідно до певних правил сукупність даних, що забезпечує їх збереження, оновлення та маніпулювання у визначеній предметній області та використовується для задоволення інформаційних потреб користувачів із застосуванням електронної обчислювальної техніки. [1, с 8]

Без власної БД тепер не обходиться жоден навчальний заклад, державна установа, приватна фірма чи корпорація.

Сучасні технології БД є результатом розвитку протягом кількох останніх десятиліть способів обробки даних та керування наявною інформацією. Історію розвитку баз даних можна поділити на чотири періоди.

Період становлення — 60-ті роки. Ідея застосування файлів для зберігання даних спільного використання виникла наприкінці 50-х років. Проте саме у 60-ті роки з'явився сам термін «база даних» і було створено кілька систем баз даних. Цього ж десятиліття з'явилася класифікація БД за структурами даних, що в них використовуються, - почали вирізняти системи баз даних з ієрархічною й мережною структурами. Ієрархічні системи, в яких базова структура даних мала деревоподібний вигляд, досягли найвищої ефективності функціонування, але виразові можливості цих систем лишилися відносно низькими. Системам зі структурами даних типу мережі, навпаки, вдалося надати значно кращих виразових можливостей, але вони програють в ефективності функціонування, тобто для плідної експлуатації таких систем від користувача вимагався (і вимагається) значно вищий рівень кваліфікації.

Останніми з'явилися БД реляційного типу, які характеризувалися найпростішою структурою даних (таблиця, або так званий плоский файл) з одного боку та високим рівнем мов маніпулювання даними — з іншого. Це зробило їхні виразові можливості максимально потужними, але знизило ефективність функціонування.

Використання в мейнфреймах магнітних дисків замість магнітних стрічок сприяло створенню в середині 60-х років перших систем керування базами даних, з яких найрозвиненішою виявилася система IMS фірми IBM, що підтримувала ієрархічну структуру даних. Головний ідеолог мережного підходу Ч. Бахман 1963 року розробив першу промислову систему баз даних IDS, орієнтовану на мережну організацію даних. Асоціація CODASYL, що створила мову програмування COBOL, у 1967 році організувала робочу групу з питань баз даних, яка узагальнила мовні специфікації систем БД. (Відповідні звіти були опубліковані в 1969 та 1971 роках, які за найменуванням робочої групи - Data Base Task Group — отримали назви DBTG 69 і DBTG 71.) Взявши за основу реалізовану в системі IDS мережну структуру даних та методи навігації нею, група DBTG істотно розвинула й обґрунтувала мережну модель. Одним з типових представників систем, що відповідали пропозиції CODASYL DBTG, була система Integrated Database Management System (IDMS) компанії Cullinet Software, призначена для використання на мейнфреймах IBM. У цей же період чітко окреслилися два підходи до проблеми замкнености систем баз даних.

♦ Створення систем замкненого типу, що містять у своєму складі не традиційні мови програмування, а не процедурні мови запитів. Головна мета розробників полягала в тому, аби з цими системами міг працювати пересічний оператор, а не лише фахівець з програмування. До таких систем належали TDMS і UL/1.

♦ Створення систем з базовою мовою. Такі системи, окрім власне мов маніпулювання даними, надають мовні й інструментальні засоби розробки прикладних програм з використанням наявних мов програмування. Цього принципу дотримувалася група DBTG.

Наприкінці періоду становлення виник термін інформаційно-керуюча система (ІКС). У той час під цим терміном розуміли орієнтовану на пошук даних систему баз даних, що забезпечувала можливість роботи з віддаленого термінала.

Період розвитку — 70-ті роки. Концепція баз даних отримала широке розповсюдження завдяки поліпшенню характеристик апаратного забезпечення комп'ютерів. Успішно впроваджувалися системи, орієнтовані на підтримку ієрархічної та мережної структур даних. Тривала далі робота групи CODASYL DBTG. Була специфікована система мов для баз даних CODASYL, яка складалася з кількох груп мовних специфікацій У 1975 році з'явився звіт робочої групи ANSI/X3/SPARC, у якому розглядалося питання про стандартизацію баз даних і БД, а також про те, що саме може підлягати стандартизації. Група вирішила, що ця проблема стосується лише інтерфейсів, які можуть існувати між різними компонентами БД, самі ж програмні компоненти стандартизації не підлягають. Учені скерували свої подальші зусилля на виявлення таких інтерфейсів і, врешті-решт, запропонували концепцію трирівневої архітектури баз даних, яка стала класичною і дотепер не втратила актуальності.

Період розвитку більш відомий завдяки створенню реляційної моделі даних, яку 1970 року запропонував співробітник інституту фірми IBM у Сан-Хосе Е. Ф. Кодд Протягом десятиліття всебічно досліджувались теоретичні й прикладні питання цієї моделі, розроблялись експериментальні реляційні БД. Плідна праця дала можливість створити формальну теорію баз даних, яка до цього мала описовий характер. Протягом кількох років багато провідних фірм проводили експериментальні дослідження, спрямовані на винайдення прототипів реляційних БД, підвищення їхньої ефективності та функціональності. І нарешті наприкінці десятиліття були створені перші промислові реляційні БД.

Період зрілості — 80-ті роки. Реляційна модель отримала повне теоретичне обґрунтування. Було розроблено великі реляційні БД Oracle, Informix та інші. Промислові реляційні системи почали використовуватися в усіх сферах людської діяльності. У такий спосіб реляційні системи практично витіснили зі світового ринку попередні БД ієрархічного та мережного типів. У цей період проводились також теоретичні й експериментальні дослідження в галузі баз знань та були створені численні експертні системи. У більшості випадків бази знань розроблялися на основі реляційних БД.

Подальший розвиток реляційних БД відбувався за такими напрямами.

♦ Зручність застосування. З поширенням персональних комп'ютерів постало принципове питання щодо зручності використання програм, яке також стосувалося БД. У зв'язку з цим у БД почали інтенсивно застосовуватися засоби інтерфейсу користувача.

♦ Багатоплановість. Зростання попиту на бази даних у нетрадиційних галузях їхнього застосування (системи автоматизації проектування, видавнича справа тощо) привело до виникнення потреби у зберіганні й обробці в базах даних зображень, звуків та повнотекстової, а не лише символьної інформації.

Постреляційний період — з початку 90-х років. Розпочалися інтенсивні дослідження з питань дедуктивних та об'єктно-орієнтованих баз даних, які сприяли створенню дослідницьких прототипів таких систем Так, 1991 року з'явилася ODMG (Object Data Management Group) - група з питань керування об'єктними базами даних, яка посіла особливе місце в галузі стандартизації об'єктно-орієнтованих БД. В 1993 році група видала свій перший стандарт ODMG-93, а в 1995 був опублікований його вдосконалений варіант З розвитком інтернет-технологій розробники спрямували свої зусилля на впровадження баз даних в Інтернет. Щодо приєднання БД разом з базами даних до «всесвітньої павутини», окреслилися різні підходи - починаючи від найпростіших «публікацій» баз даних в Інтернеті й завершуючи розробкою веб-серверів, які надають користувачам Інтернету весь спектр послуг, що стосуються роботи з базами даних на сервері. Інтенсивного розвитку набули дослідження й розробки, присвячені маніпулюванню структурами даних в Інтернеті. Слід зазначити, що, незважаючи на розвиток більш передових технологій баз даних, реляційні БД і досі залишаються домінуючими як у настільних системах, так і на промисловому рівні.[3, с 23] У 2000-ні рр. головним нововведенням є підтримка та застосування XML у БД. Розробники комерційних БД, які панували на ринку у 1990-их рр., отримують все більшу конкуренцію зі сторони руху відкритого програмного забезпечення. Реакцією на це стає поява безкоштовних версій комерційних БД.

Історично системи управління базами даних орієнтувалися на вирішення завдань, пов'язаних у першу чергу з транзакційною обробкою структурованої інформації. Безумовно, найкращим, перевіреним часом рішенням тут була і залишається реляційна модель БД. Однак в останні роки область застосування баз даних незмінно розширювалася. З одного боку, потрібно керувати більш широким набором форматів даних, переходячи до вирішення спільних проблем управління корпоративною інформацією. З іншого - саме БД беруть на себе основні функції інтеграції даних і додатків корпоративних систем. (За даними Gartner Group, інформаційні відділи підприємств витрачають до 40% свого бюджету на вирішення завдань інтеграції діючих компонентів баз даних.) Саме цим пояснюється активний інтерес до обговорення архітектурних принципів і можливостей реалізації баз даних різних моделей - постреляційних, об'єктно-реляційних, XML.

Якщо постаратися класифікувати існуючі області застосування баз даних, а так само оцінити перспективи їхнього розвитку в даний час, то можна отримати приблизний список найбільш поширених класів:

- документографічні й документальні застосовуються у всіх базах органів влади та управління;
- бази даних з промислової, будівельної та сільськогосподарської продукції;
- бази даних з економічної та кон'юнктурної інформації (статистична, кредитно-фінансова, зовнішньоторговельна);
- фактографічні бази соціальних даних, які включають відомості про населення і про соціальні середовища;
- бази даних транспортних систем;

- довідкові дані для населення та установ (енциклопедії та довідники, розклади літаків і поїздів, адреси та телефони громадян і організацій);
- ресурсні бази даних, що включають фактографічну інформацію про природні ресурси (земля, вода, надра, біоресурси, гідрометеорологія, вторинні ресурси і відходи, екологічна обстановка);
- фактографічні бази і банки наукових даних, щоб забезпечити фундаментальні наукові дослідження;
- фактографічні бази даних у галузі культури і мистецтва;
- лінгвістичні бази даних, тобто машинні словники різного типу і призначення.

Література:

1. Абрамов В.О., Чегренець В.М. Основи баз даних та робота в СУБД Access: навчальний посібник для спеціальності «Інформатика». К.: Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2013. –100 с.

2. Зарицька О.Л. Бази даних та інформаційні системи: Методичний посібник. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2009. – 132 с., ил:.

3. Пасічник В. В., Реаніченко В. А. П19 Організація баз даних та знань. — К.: Видавнича група BHV, 2006. — 384 с: іл. ISBN 966-552-156-X

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Бак Сергій Миколайович

УДК 373: 004

Сич Віктор

студент факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

STEM–ОСВІТА: ВПРОВАДЖЕННЯ ЗАСОБІВ РОБОТОТЕХНІКИ В ЗАКЛАДАХ ЗАГАЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

Анотація: *У статті обґрунтовано необхідність впровадження STEM – освіти, викладання робототехніки з використанням платформи Ардуіно, розглянуто можливості програмних засобів Scratch(S4A) та Ardublock, Virtual BreadBoard, стандартного середовища розробки Arduino IDE на С-подібних мовах програмування.*

Ключові слова: *STEM–освіта, платформа Ардуіно, блокове програмування, Virtual BreadBoard, Scratch(S4A), Ardublock.*

Abstract: *The article considers the need for the introduction of STEM education, teaching of educational robotics using the Arduino platform, the ability to program with the help of Scratch (S4A), the Ardublock program, of the standard Arduino IDE development environment in the C-like language,of Virtual BreadBoard application.*

Keywords: *STEM - education, Arduino platform, block programming, Virtual BreadBoard, Scratch(S4A), Ardublock.*

У процесі розбудови «інформаційного суспільства» в Україні відбуваються суттєві зміни в освіті. Перед сучасною школою стоїть завдання найповніше розкрити потенціал учасників освітнього процесу, надати їм можливість розвитку творчих здібностей. З метою вирішення цих завдань необхідно впроваджувати інноваційні технології, що вимагають наукового і практичного осмислення. Одним з векторів впровадження інноваційної діяльності в закладі освіти є напрям STEM-освіти.

STEM-освіта, в першу чергу, готує учнів до результативного навчання та до успішного працевлаштування. З метою здійснення успішної трудової діяльності виникає необхідність в освіті після школи, що потребує різних і більш технічно складних навичок, зокрема, із застосуванням математики, фізики, інформатики та інших наук.

Абревіатура STEM була запропонована директором офісу наукового відділу розвитку трудових ресурсів Пітером Фалетром в США наприкінці 90-х років минулого століття. STEM (S - science, T - technology – E-engineering – M-mathematics). Термін STEM визначає напрям в освіті, що включає природничі науки (Science), технології (Technology), технічну творчість (Engineering) та математику (Mathematics) [1].

Природничо-математичні науки учням даються важко і часто здаються не цікавими. Тому вже в 7-9 класах зацікавленість у вивченні цих наук втрачається. Тому основним завданням учителя є розробка ефективної методики. Учням потрібно наочно продемонструвати, як саме вони можуть застосувати знання з точних і природничих наук у подальшій роботі та повсякденному житті. Використовуючи освітні STEM-технології, учні вивчають не тільки абстрактні поняття, вони працюють над конкретними проектами, які завершуються створенням певного продукту. Школярі починають розуміти складні формули, запам’ятовувати терміни, коли використовують їх у процесі експериментальної роботи, можуть застосувати у повсякденному житті.

STEM-освіта — пропагує та рекламує природничі та технічні спеціальності. У результаті більше школярів можуть стати інженерами, програмістами чи математиками. Адже в багатьох галузях економіки не вистачає таких фахівців.

На даний час у сфері освіти актуальним є напрям освітньої робототехніки. Навчання учнів основам робототехніки здійснюється за допомогою реалізації в міжпредметних зв’язків на заняттях, що засновані на активному навчанні, та інтегрують у собі науку, технологію, інженерну справу, математику.

Учні самостійно створюють різні моделі, експериментують з ними, мають можливість їх модернізувати, або, навіть, знайти для них нестандартне використання. Дуже важливим є те, що учні бачать результати своєї праці у практичній реалізації.

Для впровадження освітньої робототехніки, однією і з найбільш вдалих систем на даний час є програмно-апаратна платформа Ардуіно.

Платформа Arduino може використовуватися як для створення автономних інтерактивних об'єктів, так і підключатися до програмного забезпечення, що виконується на комп'ютері.

Ардуіно і Ардуіно-сумісні плати спроектовані таким чином, щоб їх можна було у разі необхідності розширювати, додаючи в пристрій нові компоненти («shields»). Ці плати розширень підключаються до Ардуіно за допомогою встановлених на них штирових роз'ємів. Існує ряд уніфікованих плат, що допускає конструктивно жорстке з'єднання процесорної плати та плат розширення в стопку через штирові лінійки. Окрім того, випускаються плати зі зменшеним (наприклад, Nano, Lilypad) і спеціальним (для задач робототехніки) форм-фактором [2].

Різні виробники випускають різні датчики і виконавчі пристрої, які в тій чи іншій мірі сумісні між собою та з платами Ардуіно.

Цікавим є те, що на базі платформи Ардуіно можна створювати, як прості аматорські проекти так і потужніші. Перевага Ардуіно порівняно з іншими платформами у відносній простоті та дешевизні. Тісний зв'язок з інформатикою полягає у можливості програмування за допомогою засобу Scratch(S4A). Мова програмування Scratch, орієнтована на Arduino (версія S4A) представляє собою повноцінну візуальну об’єктно-орієнтовану мову. Вона є комфортною для знайомства з Arduino, навіть для учнів початкових класів. Треба зауважити, що написані скріпти в середовищі Scratch тільки управляють роботою пристрою через USB-кабель. В даному випадку платформа Arduino є залежною від комп’ютера і не може працювати в інших режимах [3].

Існує інша програма ArduBlok, яка вбудовується у програмне середовище Arduino IDE, перевага якої полягає у можливості конвертації до коду Arduino IDE. ArduBlock працює на всіх операційних системах, навіть на Linux. Установка програми для всіх систем однакова. Приклад програми на мові Ardublock представлений на рис. 1.

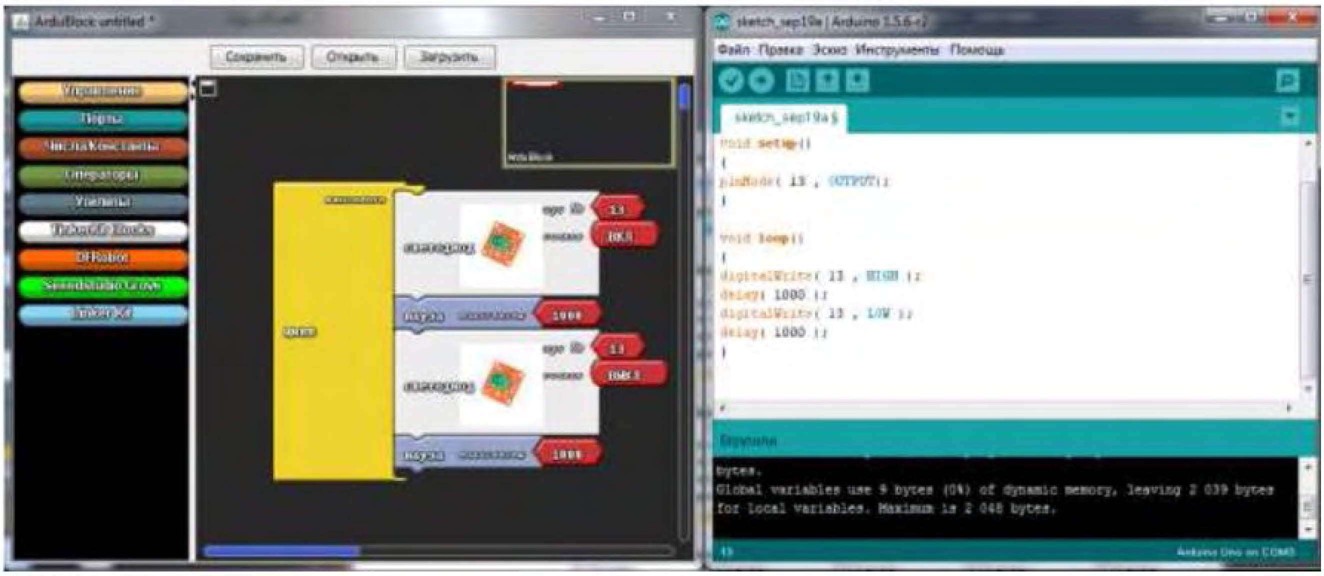


Рис. 1. Приклад програми на мові Ardublock

Але, головне, що часом можна перейти на стандартне середовище розробки Arduino IDE на С-подібній мові. Arduino IDE — це програмне середовище розробки, призначене для програмування даної плати. Інтуїтивно зрозумілий інтерфейс, в основою якого є мова С++, тому засвоїти інструментарій можуть навіть програмісти початківці.

Програмно-апаратна платформа Arduino набула широкої популярності. Цікавим є напрям емуляції Arduino, що дозволяє конструювати макети електронних пристроїв без фізичної наявності мікроконтролера. Найбільш цікавою розробкою можна вважати програму Virtual BreadBoard.

Схема електричних з’єднань збирається на віртуальній макетній платі за допомогою гнізд, які електрично з'єднані між собою. По краях знаходиться лінії живлення та землі. Проріз по середині призначений для установки і зручного витягання мікросхем в DIP-корпусах. Для складання схеми в отвори вставляються радіодеталі та перемички. Деталі, необхідні для конструювання електричної схеми (приладу) знаходяться ліворуч, як показано на рис. 2.

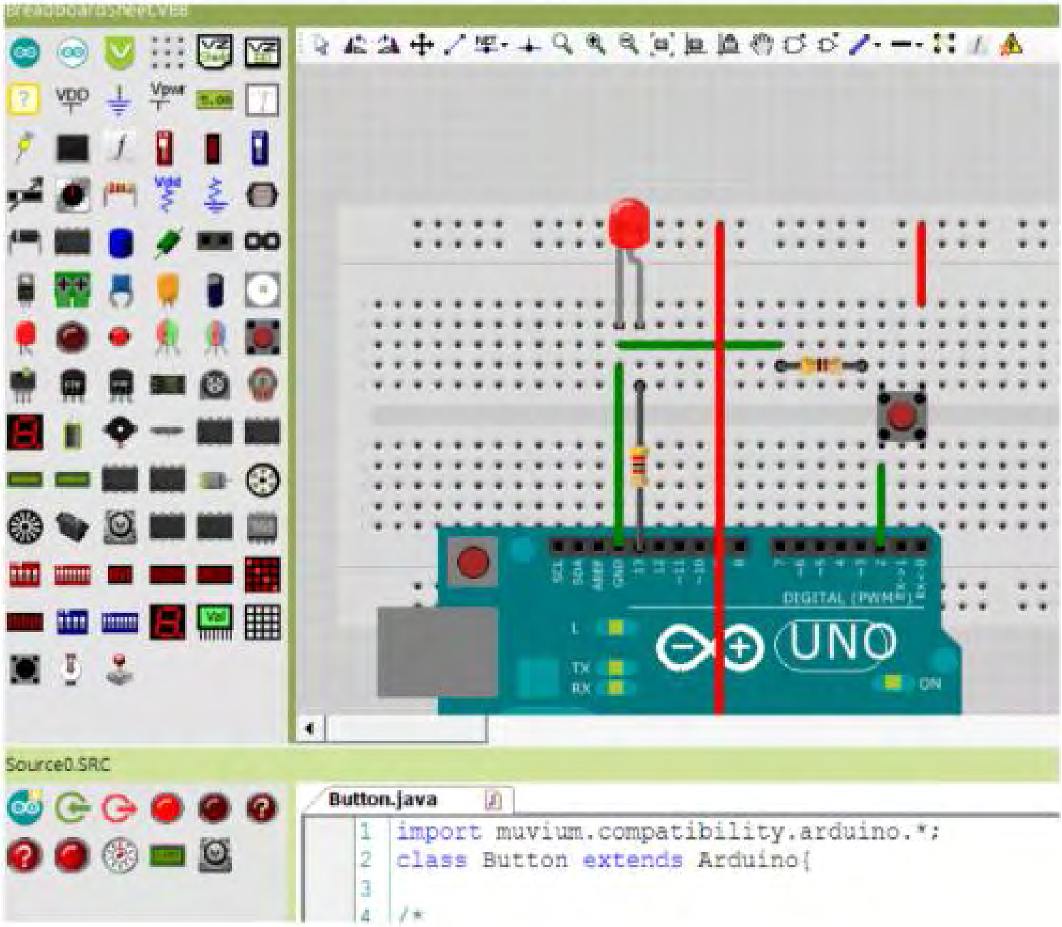


Рис. 2. Зовнішній вигляд монітора емуляції Arduino

Конструювання електронних схем на віртуальній платі відбувається таким чином. Створюється новий проект або за допомогою шаблону або авторський. Мишкою обирається відповідний тип Arduino (у нашому прикладі Arduino Uno), потім на віртуальній макетній платі набирається електрична схема з елементів, що вказані ліворуч. Зверху макета розташовані іконки, що дозволяють маніпулювати з елементами схеми, зокрема, міняючи розмір, розташування, дозволяючи з’єднувати ці елементи. Після створення схеми програма запускається на виконання і на макетній платі можна побачити що відбувається (світлодіоди запалюються і гаснуть, мотори обертаються і т.д.) [3].

Використання програмного засобу VBB4 Arduino є корисним не тільки для початківців, але й для досвідчених учнів (і не тільки учнів), що дозволяє краще побачити роботу електронних пристроїв на базі Arduino. Крім того, вчитель «застрахований» від помилок під час експерименту, тому що немає реальних деталей, тобто, немає загорання пристрою. Більше того, програма містить багато вже зроблених прикладів, на базі яких можна експериментувати зі схемою, задуваючи будь-які параметри.

Використавши вище описані засоби, можна розпочинати втілювати елементи робототехніки в освітній процес. Робота з платформою Ардуіно дає можливість навчити учнів підключати і програмно керувати виконавчими пристроями, наприклад: світлодіодами, моторами, звуковими пищалками. Після таких занять учні розпочинають збирати пристрої, які вміють світитися, рухатися, стрибати, подавати голос.

Наступний крок – навчити учнів підключати і програмно отримувати інформацію з датчиків: освітленість, рух, кнопка, джойстик. Після цього на заняттях можна збирати пристрої, які бачать, чують, відчувають і слухаються.

Для учнів 6-8 класів цікавим проектом є створення прототипу колісного робота, який використовує зазначене вище обладнання та програмне забезпечення. Він може оминати перешкоди, ультразвуковий датчик виявляє їх на своєму шляху та навколо нього (рис 3). Також робот може їздити за вказаною траєкторією. Цікаво програмувати рух робота згідно заданих команд.

Отже, робототехніка, інтегрована в освітній процес відповідно до концептуальних засад STEM-освіти, надає можливість зробити його ефективнішим, мотивувати учнів для подальшої дослідницької роботи, мотивувати їх навчатись самостійно, формувати компетентності учнів, відповідно до актуальних потреб Економіки 4.0, «суспільства знань».

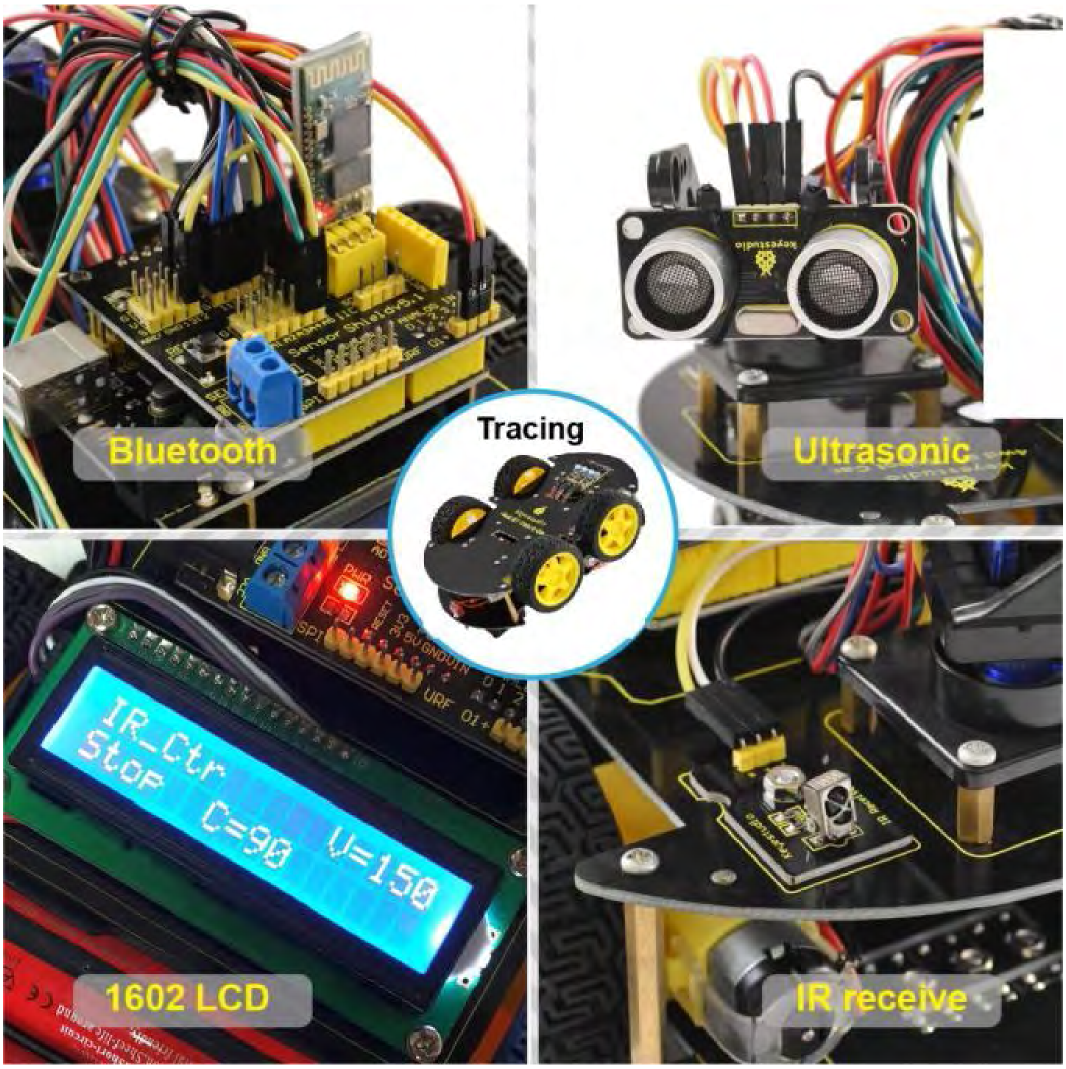


Рис. 3. Приклад прототипу колісного робота.

Література:

1. Інститут модернізації змісту освіти [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://imzo.gov.ua/stem-osvita. – Дата звернення: 10.10.2018. – Назва з екрану.
2. Arduino. Матеріал з Вікіпедії — вільної енциклопедії [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/Arduino. – Дата звернення: 11.10.2018. – Назва з екрану.
3. Візуальні засоби програмування платформи Arduino. [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: http://man.gov.ua/upload/news/2017 /12_11/Zbirnyk.pdf – Дата звернення: 12.10.2018. – Назва з екрану.

Науковий керівник: докт. пед. наук, доцент Клочко Оксана Віталіївна

УДК [373.5.091.33:004]:514.113

Січкар Юлія

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ВИКОРИСТАННЯ ІНТЕЛЕКТ-КАРТИ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ПРИЗМА»

Анотація: *У статті розглянуто один із методів візуалізації навчального матеріалу, а саме створення інтелект-карт. Наведено приклад створеної інтелект-карти з теми «Призма». Подано список онлайн-додатків для створення інтелект-карт.*

Ключові слова: *інтелект-карта, візуалізація навчального матеріалу, метод майндмеппінгу, призма.*

Annotation: *In the article one of the methods of visualization of educational material is considered, namely the creation of intelligence maps. An example of the created intelligence maps with the topic «Prism» is given. A list of online applications for creating intelligence maps is provided.*

Keywords: *intelligence card, visualization of educational material, method of maindemping, prism.*

Сучасний період розвитку українського суспільства характеризується змінами, що охоплюють усі сфери людського життя. Ці зміни торкнулись і освіти, зокрема, школи. Сучасна молодь, яка виховується в період економічного зростання і застарілих моделей освіти, значно відрізняється від попередніх ходом думок, швидкістю розвитку, можливістю навчатися в Інтернеті. Учні нашого часу мають «кліпове» мислення і сприймають світ як практично не пов’язані події і факти. Вони мислять глобально, швидше задають питання, ніж отримують на них відповіді, проводять з електронними пристроями більше часу, ніж з однолітками. Є незвичним те, що нинішній світ інформаційного надлишку, який, начебто має підвищити інтелект учнів, часто надає абсолютно протилежний ефект, вони не встигають переробляти, засвоювати і використовувати інформацію, яка надходить. Через надлишок цієї інформації сучасним дітям дуже складно сконцентруватися та зосередити увагу на головних та істотних моментах. Тому в умовах реформування освіти значна роль приділяється візуалізації навчального матеріалу[3]

Однією із таких технологій візуалізації навчального матеріалу є технологія створення інтелект-карт. Іноді їх ще називають «карти розуму», «карта пам'яті», «майнд-мепи» (від англ. mind map). Замість того, щоб з учнями писати конспекти на декілька сторінок, ми можемо створити разом карту розуму, яка буде містити основну інформацію з вивченої теми.

Інтелект-карти — спосіб зображення процесу загального системного мислення за допомогою схем. Також може розглядатися як зручна техніка альтернативного запису. Використовуються для створення, візуалізації, структуризації та класифікації ідей та як засіб для навчання, організації, вирішення завдань, ухвалення рішень, при написанні статей тощо. Інтелект-карти реалізується у вигляді діаграми, на якій зображені слова, ідеї, завдання або інші поняття, з'єднані гілками, що відходять від центрального поняття або ідеї [5].

Метод, який описує створення і використання інтелект-карт для зручного запису та систематизації інформації називають метод майндмеппінгу. Його винайшов Тоні Бьюзен, англійський психолог. Саме він встановив рекорд в запам'ятовуванні великих об'ємів інформації і має найбільший у світі «коефіцієнт творчого мислення» [6].

Велика кількість компаній усього світу затвердили обов'язкову умову для прийняття на роботу менеджера вищої ланки, а саме володіння методикою майндмеппінгу. Також цю методику використовують у школах і у ЗВО, у роботі з підлітками і під час вивчення складних тем.

Під час створення інтелект-карти на папері потрібно дотримуватись певних правил, розглянемо їх на прикладі інтелект-карти «Призма»:

1. Зосередити увагу лише на ключових словах і поняттях. Головний навчальний об'єкт розмістити в центрі, а інші другорядні елементи йдуть в якості розгалуження від нього. Тобто в центрі розміщуємо об'єкт «Призма», а від нього інші елементи: «означення», «перерізи», «пряма призма», «похила призма» і «n-кутна призма».

2. Для кожної гілки записуються споріднені поняття та позначаються ключовими образами. Таким чином, елемент «похила призма» містить дві гілки: «означення» і «зображення».

3. Блок-схема має бути завершена – всі блоки повинні бути пов'язані з іншим блоками та обов'язково мати присвоєні асоціації у вигляді графічних образів. У нашому випадку, інтелект-карта містить усю основну інформацію про призму і містить асоціації.

4.Карта знань складається у вигляді дерева, де менш вагомі ідеї та поняття відгалужуються від центральних гілок.

Розглянемо деякі переваги використання методу інтелект-карт в освітньому процесі:

1. Карта знань допомагає реалізувати один із найважливіших принципів педагогіки – принцип наочності. Вона дає змогу охопити все одним поглядом, так як блок-схема показує все найвагоміше в асоціативних порівняннях та зв'язках.

2. Принцип побудови інтелект-карт корисно використовувати на уроках-підбиття підсумків з будь-якого предмету. Узагальнення даних по темі відображається на одному зображенні, вся інформація з навчальної теми трансформується в асоціативні зв'язки навчальних понять. Так, наприклад, логічно провести урок із застосуванням майндмеппінгу з теми «Многогранники» – як узагальнення низки пройдених уроків.

3. Карту знань можна будувати під час конспектування великих по об'єму лекцій – замість довгих конспектів та витрат часу для запису матеріалів учень формує лише одну блок-схему.

4. Метод майндмеппінгу дозволяє розвинути творче мислення учнів.

5. Метод інтелект-карт розвиває логіку та вміння згортати весь навчальний матеріал до самого найважливішого, підвищує якість та інтенсивність навчання, тренує пам'ять.

6. Використання карт допомагає учням підвищити концентрацію уваги.

7. За допомогою карт та їх графічної привабливості процес генерації ідей стає більш швидким та ефективним. Тобто в учнів увесь теоретичний матеріал з вивченої теми перед очима і вони можуть одразу ж з'ясувати, які знання їм допоможуть у вирішенні певної проблеми.

Наведемо приклад застосування методу інтелект-карт на уроці геометрії в 11-ому класі для уроку узагальнення і систематизації знань з теми «Призма».

1. Об'єднуємо клас у групи, кожній групі даємо завдання пригадати теоретичний матеріал про призму.

2. Кожна група формує карту знань про призму.

3. У центрі розміщується блок з темою «Призма». Відгалуження означають певні елементи призми, на які потрібно звернути увагу.

4. Кожна група представляє свою інтелект-карту і пояснює чому вони створили її саме так. Учні усім класом аналізують чи про усі елементи призми вони згадали.

Таким чином учень отримує інтелект-карту з теми «Призма» з ключовими елементами. Така блок-схема може слугувати чудовою «шпаргалкою» для підготовки до контрольної роботи.

У результаті майндмеппінгу можемо отримати, наприклад, таку інтелект-карту (рис.1):

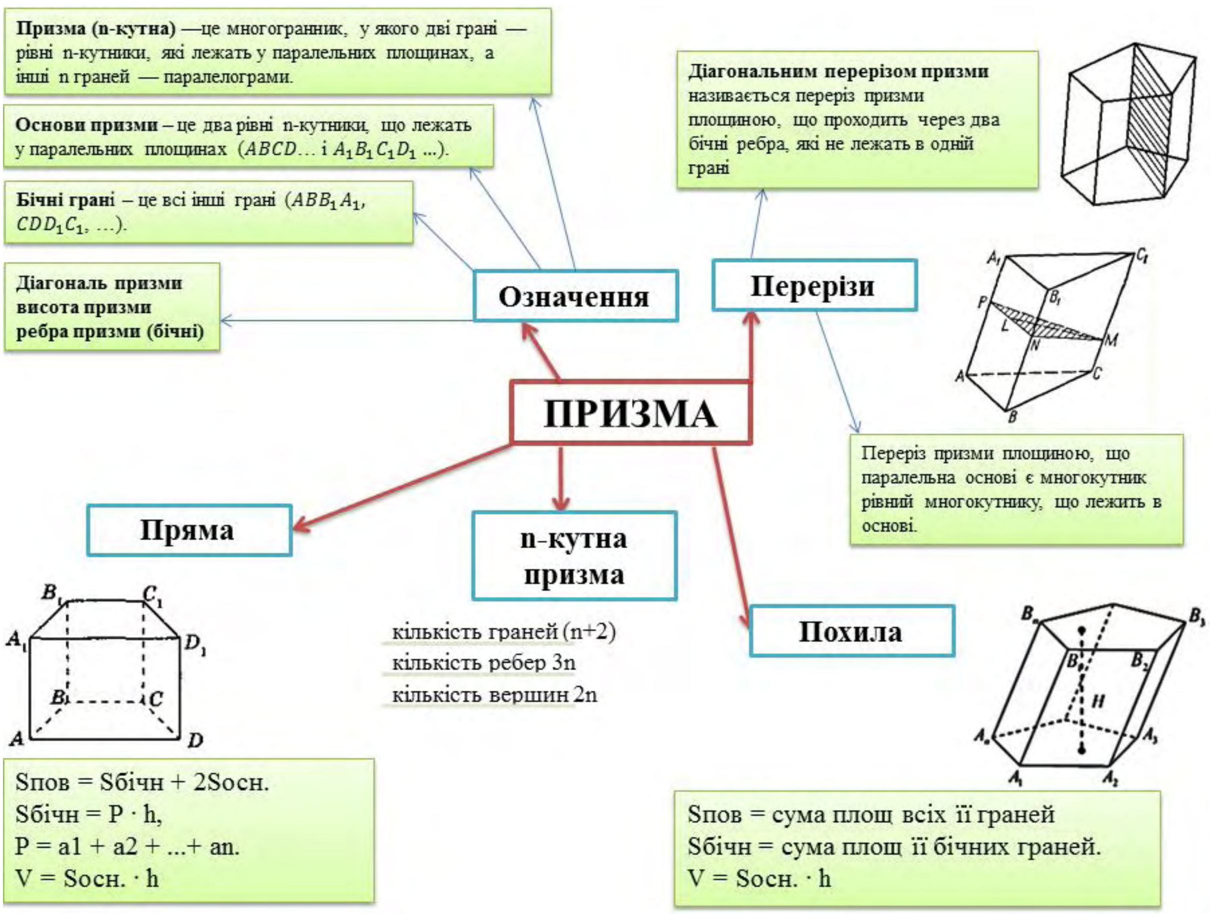


Рис. 1. Інтелект-карта з теми «Призма»

Під час створення такої інтелект-карти учні поглиблюють свої знання та закріплюють такі навики, як: систематизація знань (повторення уже вивченого про призму); розвиток творчих навиків; обговорення навчального завдання у групі; робота в команді; аналіз вивченого матеріалу. І мабуть одне з головних завдань: учні візуально запам’ятовують свою інтелект-карту і по-пам’яті зможуть її відтворити.

Оскільки час на уроці є обмеженим і учителю хотілось б більше розв’язати задачі, то такий вид роботи можна давати у вигляді домашнього творчого завдання. Психологи радять створювати інтелект-карти на папері, коли ресурс часу необмежений, проте можна й використовувати ІКТ. Сьогодні в мережі Інтернет є досить багато веб-сервісів по створенню інтелект-карт, які є зручними у використанні:

1. *Bubbl.us* – інтернет-сервіс спільного створення інтелект-карт.

Для використання цього сервісу реєстрація є не обов’язковою. Вона потрібна лише тоді, коли ви хочете експортувати свою інтелект-карту або поділитись з іншими користувачами мережі. Ще однією перевагою використання програми https://bubbl.us/ є те, що створювати інтелект-карту можна колективно. Тобто, якщо ви надаєте доступ деяким користувачам, то можете виконувати роботу разом. Наприклад, учні разом з учителем створюють інтелект-карту з теми «Піраміда». До того ж робоче поле цієї програми досить просте, управляти легко і зручно – ви можете працювати лише з блоками – прямокутниками. Інтелект-карта створена у цій програмі досить проста і містись мінімум елементів.

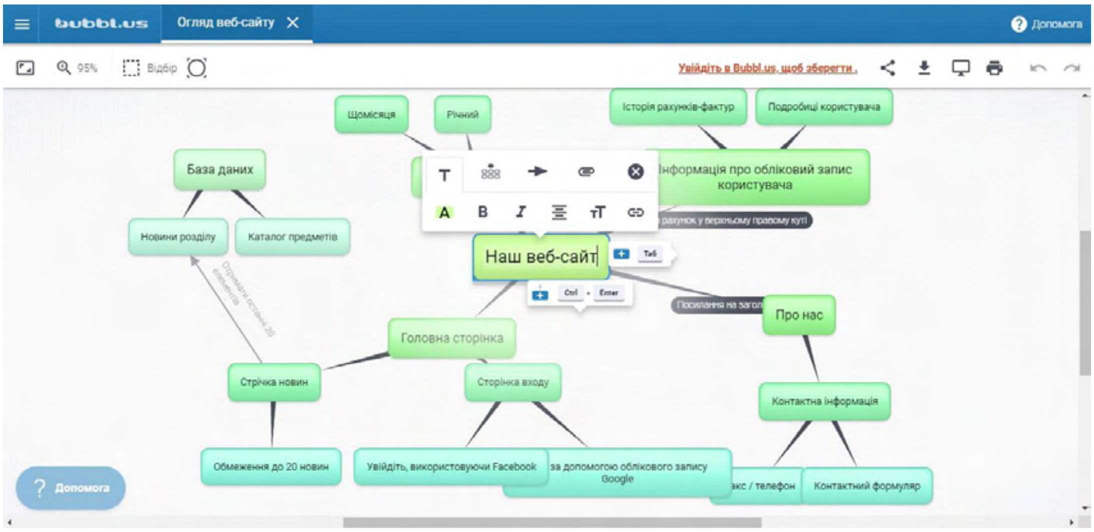


Рис 2. Приклад інтелект-карти, створеної в програмі Bubbl.us

2. *MindMeister* – web–додаток для побудови інтелект-карт.

Даний онлайн-ресурс пропонує багато можливостей для персоналізації вашої інтелект-карти (іконки, шрифти, стилі). Також додаток підтримує експорт в pdf, rtf, jpg, gif, png. Інтерфейс інтуїтивно зрозумілий і має зрозумілу навігацію. Дана програма безкоштовна, якщо ви використовуєте лише базові функції. Також є можливість редагування інтелект-карти декількома користувачами онлайн.

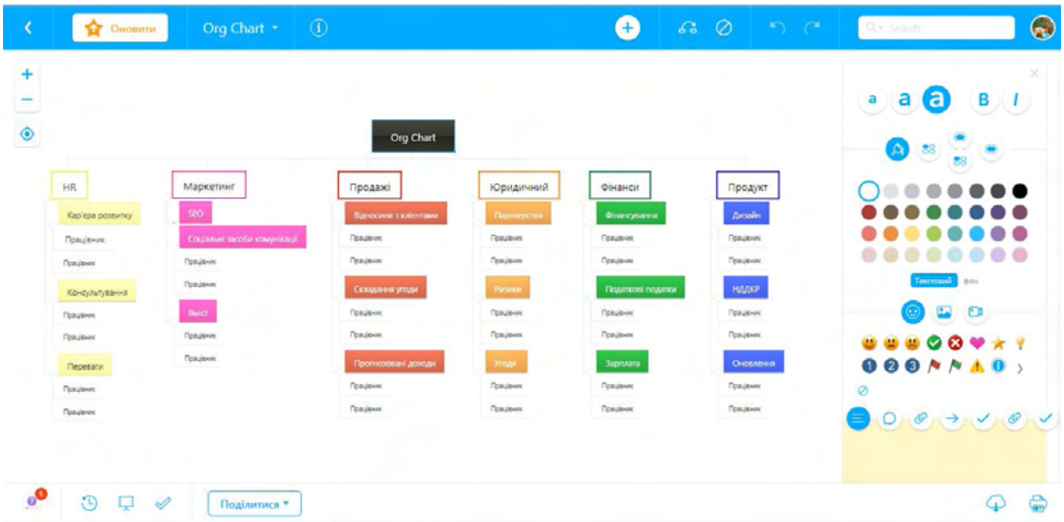


Рис 3. Приклад інтелект-карти, створеної в MeindMeister

3. *Spinscape* – потужний веб-додаток для створення інтелект-карт.

Даний додаток має власнй формат Smap, а також підтримує імпорт з MindManager/ Excel / CSV / HTML і експорт в Mindmanager / PDF / HTML / Word. Також є доступ до спільного редагування інтелект-карти в реальному часі, а також можливість налаштовувати індивідуальний доступ до карти і окремих її частин. Але програма відрізняється від інших платформ режимом презентації та можливістю вбудовувати YouTube-відео.

4. *FreeMind* – програма вільного користування для особистих та корпоративних цілей, яка надає можливість декорувати вузли та гілки.

У FreeMind можна пов'язувати та давати посилання на інші карти знань, веб-документи, файли, що дає можливість налаштувати асоціативний зв'язок не лише між елементами однієї блок-схеми, але й між двома/трьома різними інтелект-картами, що розширює асоціативну область, що заноситься у пам'ять. У програмі може здійснюватись пошук по словам та гілкам. Недоліком FreeMind можна назвати відсутність спільного доступу.

Таким чином, учитель нової української школи може використовувати різноманітні засоби візуалізації, зокрема інтелект-карти для ефективної співпраці з учнями. За допомогою такої карти учитель може подати досить великий обсяг інформації у вигляді схеми, з асоціаціями і основним поняттями. Основним напрямком є використання для генерування, відображення, структурування та класифікації ідей. Окрім цього ефективним є використання в якості допоміжного засобу під час навчання, організації, розв'язання проблем та прийняття рішень. Проте використання цієї технології у шкільній практиці потребує певної адаптації до вікових особливостей учнів та вимог навчального процесу. Графічне відображення загальної структури карти сприяє полегшеному узагальненню. Отже, застосування на практиці інноваційних методологічних підходів надає можливість учителям впроваджувати та вдосконалювати нові методи роботи, підвищувати ефективність навчального процесу та рівень знань учнів.

Література:

1. Способи саморегуляції емоційного стану [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://toplutsk.com/articlesarticle_151.html

2. Дичківська І. Інноваційні педагогічні технології: навч. Посіб. / Ілона Дичківська. – К.: Академвидав, 2004. – 352 с.

3. Житєньова Н.В. Технології візуалізації в сучасних освітніх трендах / Н.В. Житєньова // Відкрите освітнє е-середовище сучасного університету. – 2016. - №2. – с. 170-178.

4. Нісімчук А.С. Сучасні педагогічні технології: Навчальний посібник / А.С. Нісімчук, О.С. Падалка, О.Т. Шпак – К.: Видавничий центр «Просвіта», 2000. – 368 с.

5. Паламарчук В. Від творчої особистості – до нових технологій навчання // В. Паламарчук. – К., 2001. – №8. – с. 2-3.

6. Терещенко Н. В. Інтелект-карти – сучасні інноваційні соціальні технології навчання в системі освіти / Н. В. Терещенко // Функціональна економіка. – Вчені записки. – № 14. – 2012. – С. 139-145

7. Черній М. Карти знань як засіб збільшення ефективності засвоєння навчального матеріалу учнями та їх застосування за допомогою веб-сервісів / М. Черній // Проблеми підготовки сучасного вчителя. - 2012. - № 6(1). - С. 87-94. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ppsv_2012_6%281%29__15

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Тютюн Любов Андріївна

УДК 37:004

Смірнова Анастасія
студентка факультету математики, фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ОСВІТА 4.0 ЯК ВИПЕРЕДЖУВАЛЬНА МОДЕЛЬ ОСВІТИ

Анотація: *У статті порівнюються різні концепції освіти. Розглянуто структуру та перспективи розвитку Освіти 4.0, можливості застосування мобільних технологій для навчання.*

Ключові слова: *Освіта 4.0, мобільна освіта, технології навчання, випереджаюча модель освіти, інновації, творча освіта.*

Abstract: *The article compares different conceptions of education. The structure and prospects for the development of Education 4.0, the possibilities of using mobile technologies for training, are considered.*

Keywords: *Education 4.0, mobile education, technology, education technology, advanced education model, innovations, creative education.*

Протягом більш ніж п'яти століть освіта залишалася практично незмінною з репутацією однієї з найбільш консервативних сфер людської діяльності. Ситуація кардинально змінилася з переходом людства в цифрову епоху, в основі якої лежать мережеві технології, що призвело до лавиноподібних радикальних, динамічних, масштабних і складних за своїми наслідками змін не тільки в науці та економіці, але і в соціальній сфері, суспільному та приватному житті. А також в освіті.

Освіта - ключовий фактор конкурентоспроможності та сталого розвитку економіки в XXI столітті.

Можна стверджувати, що з розвитком цифрових технологій людство вступило в новий період свого цивілізаційного розвитку. Переорієнтація на нові технології, зміна технологічного укладу - підвищують вимоги до сфери освіти в напрямку підготовки людського капіталу та кадрового потенціалу для суспільства і економіки цифрової епохи 4.0. Виділимо дві головних характеристики цього процесу, що безпосередньо обумовлюють процес розвитку освіти.

По-перше, це мережеве суспільство, яке формує нову мережеву культуру людини, мережеву самосвідомість, що охоплює сфери духовності, соціальної взаємодії, технологій.

По-друге, знання стають категорією, в першу чергу, економічною. Економіка знань, обумовлена швидкою зміною технологій, підвищує вимоги до рівня компетенцій кадрового потенціалу країни і темпу їх поновлення. Основою кадрової політики країн, що претендують на серйозне становище на глобальному ринку високих технологій, стає пошук і розвиток талантів. Глобально і локально на хвилі нової технологічної революції підвищується попит на інженерні, творчі, дослідницькі компетенції і спеціальності, в тому числі міждисциплінарні. У зв'язку з цим зростає глобальна конкуренція за таланти як основний ресурс генерації доданої вартості [1].

Що ж таке «Освіта 4.0»?

Комплексне рішення, що передбачає LMS (Learning Management System), електронний журнал (щоденник), побудова розкладу, облікові системи, і забезпечує підтримку прогресивних освітніх форм, таких як індивідуалізація, проектна діяльність, адаптивність і змішане навчання.

Основною перевагою є автоматизація всіх аспектів освітнього процесу, що звільняє від необхідності інтеграції різних локальних рішень.

Єдина система здатна замінити собою всі поточні системи школи і враховує всі сучасні досягнення в методології освіти. При цьому система виконана на модульному рівні і дозволяє при необхідності відключити незатребувані функції системи, таким чином скоротивши часові та фінансові витрати на впровадження [2].

Таким чином, для досягнення мети науково-технологічного розвитку України необхідно вирішити основне завдання - створити можливості для виявлення талановитої молоді та побудови успішної кар'єри в області науки, технологій та інновацій, забезпечивши тим самим розвиток інтелектуального потенціалу країни.

Порівняємо концепції Освіти 1.0, 2.0, 3.0 та 4.0, результати представимо у вигляді таблиць (Див. Табл.1, Табл.2, Табл.3).

Таблиця 1

Концепції освіти

	Зміст освіти	*Передача знань*	*Освіта здійснюється*
Освіта 1.0	Продуктивно	Від вчителя до учня	У приміщені школи
Освіта 2.0	Соціально сконструйовано	Від вчителя до учні та між учнями	У будівлі або в мережі через ПК
Освіта 3.0	Соціально сконструйовано і оновлюється в залежності від контексту	Знання конструюють з учнями в процесі особистісно-значущої діяльності	З появою мобільних пристроїв - всюди
Освіта 4.0	Створюється в результаті практико-індивідуальної або групової діяльності, тобто через інноваційну діяльність	Посилюється позитивною рефлексією інноваційної діяльності. Модель 24/7 і 1: 1 повсюдна, в навчанні, житті, роботі	У глобальній мережі, що замінює клас

Освіта 4.0 як випереджальна модель системи освіти має системний підхід (взаємодія освіти, бізнесу і держави), єдине соціокультурне освітнє середовище (єдність якості освітніх послуг), а також є ефективною система безперервної освіти й управління якістю освітніх послуг.

Таблиця 2

Особливості освітніх послуг

	Батьки сприймають школу як	*Устаткування та ПЗ*	*Мобільні пристрої*
Освіта 1.0	"Камеру зберігання" для підготовки дітей до вузу	Купується за великі кошти, але не використовується	Конфісковано біля дверей класу
Освіта 2.0	"Камеру зберігання" для підготовки дітей до вузу	Відкрито і доступно за низькою ціною	Обережно прийняті
Освіта 3.0	Освітній простір, що забезпечує можливість для дітей навчитися вчитися	Доступно за низькою ціною і використовується для створення нових знань	Активно використовуються, мотивують до навчання в персональному освітньому просторі
Освіта 4.0	Один з центрів інноваційної діяльності учнів, вчителів, сімей	Оновлюється щодня, оскільки весь софт персоналізований	Безперервно змінюються за рахунок діяльності учнів, що є основними джерелами технічної еволюції і інновацій

Для переходу від наздоганяючої до випереджаючої моделі освіти необхідно:

- введення нових форм, технологій і засобів навчання;

- підвищення фінансової ефективності освітніх організацій;
- орієнтація на перспективні потреби суспільства;
- формування в учнів прагнення до постійного оновлення своїх знань;
- розвиток єдиного соціокультурного освітнього середовища (доступність освіти);
- професійно мобільні і конкурентоспроможні випускники, які володіють ключовими навичками та компетенціями XXI століття.

Таблиця 3

Відношення освіта-бізнес

	Вчителі	*Бізнес розглядає випускників як*
Освіта 1.0	Ліцензовані професіонали	Працівників конвеєрного виробництва, від яких не чекають креативності
Освіта 2.0	Ліцензовані професіонали, які створюють спільно з учнями та сім'ями нові освітні можливості	Працівників, слабо підготовлених для економіки знань
Освіта 3.0	Учасники освітнього процесу, пов’язані мобільними пристроями, що забезпечують доступність інформації - "сировини" для конструювання нових знань	Працівників, які виробляють знання, готових до співпраці і підприємництва, інноваційної діяльності, конструювання знань
Освіта 4.0	Учасники освітнього процесу, які є ресурсами інноваційного виробництва, за допомогою адаптивності софта - партнери по освітній діяльності	Працівників, які виробляють інновації, що забезпечують конструювання нових знань

Змістовна структура випереджаючої моделі освіти:

- Навчальна діяльність

Підготовка, перепідготовка та підвищення кваліфікації по освітніх програмах:

- дошкільної, загальної та додаткової освіти дітей;
- середньої, вищої, післявузівської, додаткового професійної освіти дорослих.

Інфраструктура: мережа освітніх та інших організацій.

- Інноваційна діяльність

Розробка, впровадження та просування науково-технічних розробок на регіональному, всеукраїнському та міжнародному ринках. Залучення фінансових ресурсів. Правовий захист комерційно значущих результатів інтелектуальної діяльності.

Інфраструктура: НДІ (навчально-дослідні інститути), вузи, бізнес-інкубатор, підприємства.

- Наукова діяльність

Створення умов для проведення наукових досліджень на світовому рівні. Проведення фундаментальних і прикладних наукових досліджень. Підготовка кадрів вищої кваліфікації.

Інфраструктура: профільні ННЦ (науково-навчальні центри), НДІ в вузі, центри колективного користування.

Освіта 4.0 передбачає створення *тематичних класів*, наприклад:

- творча майстерня (3D-друк дозволяє учням перетворювати ідеї в реальні моделі і перевіряти їх на практиці);
- цифровий клас (Планшети, електронні курси, інтерактивні дошки, предмети з вбудованим інтелектом та інше);
- віртуальна лабораторія (Учні проводять фізичні, хімічні та інші досліди в Інтернеті, отримуючи можливість додатково і безпечно практикуватися);

- технорама (Синтез технологій (робототехніка, 3D-друк, програмування) дозволяють дітям створювати моделі і керувати ними, не обмежуючись роллю споживачів);
- ігровий симулятор (Все більша частина шкільної навчальної діяльності набуває ігрового характеру, дозволяючи вчитися за допомогою гри, створення і дослідження).

Мобільна освіта передбачає доступність, ефективність використання часу на уроках в класі (перевернуте навчання), навчання може проводитись коли завгодно та де завгодно, вона доповнює навчальні процеси в навчальних аудиторіях та за їх межами. Такі технології краще справляються із завданням персоналізованого навчання [3].

Мобільна освіта дозволяє миттєво отримувати зворотний зв'язок і оцінку результатів навчання:

- можливість швидше відстежувати досягнуті успіхи;
- оперативне виявлення проблем в навчанні.

Таким чином, можемо бачити, що Освіта 4.0 націлена на всебічний розвиток учнів в умовах стрімкого технологічного прогресу, вироблення партнерських відносин між всіма суб'єктами. Успішність України на світовій арені залежить від швидкості реалізації нових педагогічних рішень в системі освіти.

Література:

1. Проект «гуманитарный технопарк». Точка сборки лидеров образования 4.0 [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: http://interactiv.su/2017/10/15/проект-гуманитарный-технопарк-точка/ .

2. Образование 4.0 [Електронний ресурс]. – Режим доступу до ресурсу: http://www.4education.ru/.

3. Образование 3.0 [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://mobiledu.ru/образование-3-0/ .

Науковий керівник: докт. пед. наук, доцент Клочко Оксана Віталіївна

УДК 517.521

Стаховська Любов

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького держаного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ПІДСУМОВУВАННЯ РОЗБІЖНИХ РЯДІВ МЕТОДОМ ВЕЙЄРШТРАССА-ГАУССА

Анотація: *Досліджено підсумовування розбіжних степеневих рядів методом Вейєрштрасса-Гаусса, в основі якого лежить оператор усереднення з ядерною функцією Гаусса. Показано, що степеневий ряд мероморфної функції можна підсумувати цим методом за межею круга збіжності.*

Ключові слова: *розбіжні ряди, метод Вейєрштрасса-Гаусса, мероморфна функція, круг збіжності.*

Abstract: *The summation of divergent power series by the Weierstrass-Gauss method, based on the averaging operator with the Gaussian nuclear function, is investigated. It is shown that a power series of mesomorphic functions can be summed up by this method beyond the boundary of the convergence. We obtain a formula for logarithmic derivative functions mesomorphic in a symmetric ring.*

Keywords: *discrepancy series, Weierstrass-Gauss method, meromorphic function, circle of convergence.*

Узагальнені методи підсумовування степеневих рядів є ефективними лише на межі або в області їх збіжності. Розглянемо питання числового підсумовування методом Вейєрштрасса-Гаусса степеневого ряду з межею круга збіжності.

Нехай

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \tag{1}$$

степеневий ряд аналітичної функції $f(z)$, збіжний у крузі $|z| < R,\ 0 < R < \infty$. Тоді $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} = 1/R,$ оскільки множена комплексних чисел $\{A_n = f^{(n)}(0)/n!\}$ може мати декілька точок згущення.

Коефіцієнти ряду (1) , в наслідок граничного співвідношення для радіуса збіжності, мають для великих значень номера n асимптотичну оцінку $|A_n| = O(n^m / R^n)$, де $|m| < \infty$.

Розглянемо питання підсумовування методом Вейєрштрасса-Гаусса степеневого ряду (1) за межею круга збіжності. Зауважимо, що степеневий ряд не можна підсумувати методом Пуассона-Абеля ззовні круга збіжності $|z| < R$, оскільки необхідна умова збіжності ряду інтегрального перетворення

$$f_\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{\sigma}\omega\left(\frac{t-x}{\sigma}\right)dt = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\sigma)(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

де

$$\varphi_n(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty}\omega(x)\cos(\sigma nx)dx.$$

$\lim_{n\to\infty} p^n|c_n||z|^n = 0,$ визначає значення $p < 1$, і граничний перехід при $p \to 1-0$ неможливий.

Розглянемо на прикладі підсумовування ряду (1) методом Пуассона-Абеля на межі круга збіжності, $|z| = R$. Функція

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1-r\cos\psi}{1+r^2-2r\cos\psi} + i\frac{r\sin\psi}{1+r^2-2r\cos\psi},$$

має полюс у точці $z = 1$. Запишемо її ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\cos n\psi + i\sum_{n=1}^{\infty} r^n\sin n\psi,\ |z| < 1.$$

На одиничному колі L (границі круга збіжності) ряд розбігається (в класичному розумінні суми) і має вигляд

$$f\left(e^{i\psi}\right) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \cos n\psi + i\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\psi \ . \tag{2}$$

У точках $z = e^{i\psi} \in L,\ \ \psi \neq 0,$ ряд (2) має узагальнену суму, яка за методом Пуассона-Абеля визначається

$$f\left(e^{i\psi}\right) = \lim_{p\to 1-0}\left(\sum_{n=0}^{\infty} p^n \cos n\psi + i\sum_{n=1}^{\infty} p^n \sin n\psi\right) = \lim_{p\to 1-0}\frac{1}{1-pe^{i\psi}} = \frac{1}{1-e^{i\psi}}.$$

Метод Вейєрштрасса-Гаусса є потужнішим (у розумінні підсумовування розбіжних рядів з вищим порядком зростання коефіцієнтів), ніж метод Пуассона-Абеля.

Перетворимо ряд (1) з урахуванням подання

$z = re^{i\psi} = r\left(\cos\psi + i\sin\psi\right),\ -\pi < \psi \le \pi,\ \ 0 \le r < R,$

і позначення $A_n^* = c_n n^m R^n$:

$$f\left(z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\psi} =$$

$$= c_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* n^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\psi + i\sum_{n=1}^{N} c_n^* n^m \left(\frac{r}{R}\right)^n \sin n\psi. \tag{3}$$

Тут $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|c_n^*\right|} = 1$ і вважаємо, що у деякій точці $z_0 = R\cdot e^{\psi_0}$ границі круга збіжності, яка не є особливою точкою функції $f\left(z\right)$, збіжним (у класичному розумінні суми) є ряд

$$f^*\left(\psi_0\right) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^*\left(\cos n\psi_0 + i\sin n\psi_0\right). \tag{4}$$

Спочатку розглянемо допоміжне твердження.

Лема 1. Для аналітичної в одиничному крузі $\left|z\right| < 1$ функції $f\left(z\right) = \ln\left(1-z\right)$, $\ln 1 = 0$, і її похідних у точках одиничного кола $L = \left\{z = e^{i\psi_0} : -\pi < \psi_0 \le \pi\right\}$, крім точки $z = 1$, виконуються граничні рівності

$$\ln\left(1-z\right) = \lim_{\sigma\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(1-e^{i\psi_0}\right)\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}\exp\left[-\left(\frac{\psi-\psi_0}{2\sigma}\right)^2\right]d\psi =$$

$$= - \lim_{p \to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} p^{n^2} \frac{1}{n} z^n. \qquad (5)$$

$$\frac{(k-1)!}{(1-z)^k} = \lim_{\sigma \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(1 - e^{i\psi_0}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} \frac{\partial^k}{\partial \psi^k} \exp\left[-\left(\frac{\psi - \psi_0}{2\sigma} \right)^2 \right] d\psi =$$

$$= - \lim_{p \to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} p^{n^2} \frac{(n+k-1)!}{n!} z^n .$$

Доведення.

Покажемо, що існує інтеграл від функції $f(z)$ по колу L

$$\int_{|z|=1} \ln(1-z)\,dz = \lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0 - \delta_1}} \int_{\delta_1}^{\delta_2} \ln\left(1 - e^{i\psi}\right) de^{i\psi} =$$

$$= \lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \left[\left(e^{i\psi} - 1\right) \ln\left(1 - e^{i\psi}\right) - e^{i\psi} \right]_{-\delta_1}^{\delta_2} = 0.$$

Отже, функція $f(z)$ інтегрована на колі L.

Теорема 1. Нехай $f(z)$ - мероморфна функція, аналітична в крузі $|z| < R$, $0 < R < \infty$ і аналітична на площині $E_0 = \left\{ z = re^{i\psi} : R \le r < r_1 \right\}$, що лежить на площині $\arg z = \psi$. Тут $R \cdot e^{i\psi} = z_0$ - точка, що лежить на границі круга, $r_1 e^{i\psi} = z_1$ - перша особлива точка функція на цьому промені, або $z_1 = \infty$, якщо особливих точок на промені немає. Тоді справедлива така формула:

$$f(z) = \lim_{p \to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} p^{n^2} c_n z^n, \ z \in E_0. \qquad (6)$$

Доведення.

Згідно з означенням, функція називається мероморфною, якщо в кожній обмеженій частині площини вона аналітична, хіба-що, за винятком скінченного числа полюсів. Вважаємо, що точка $z = re^{i\psi} \in E_0$ і застосуємо до функції $f(z) = f\left(re^{i\psi}\right)$ за кутовою координатою оператор усереднення з ядром Гаусса

$$S_\sigma\left(re^{i\psi}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(re^{it}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(t-\psi)^2}{4\sigma^2} \right) dt. \qquad (7)$$

Оскільки функція $f(z)$ має тільки полюси, її вираз на колі $|z| = r$ зафіксованого значення $r = |z^0|$ може мати тільки сингулярності вигляду $\left(z - z^0\right)^{-k}$.

Розвинемо функцію $S_\sigma\left(re^{i\psi}\right)$, $\sigma \neq 0$, у ряд за степенями змінної r і перетворимо її з урахуванням позначень, прийнятих в (3) і (4)

$$S_\sigma\left(re^{i\psi}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} r^n \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{int}} \exp\left(-\frac{(t-\psi)^2}{4\sigma^2}\right) dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} r^n e^{in\psi} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{in\sigma u} \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) du = \sum_{n=0}^{\infty} p^{n^2} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} r^n e^{in\psi} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} p^{n^2} c_n r^n e^{in\psi} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^m \left(\frac{r}{R} p^n\right)^n c_n^* e^{in\psi}, \tag{8}$$

де $p = e^{-\sigma^2}$.

Покажемо, що ряд (8) за умови $0 < p < 1$ збігається у будь-якій скінченній площині. Дійсно,

$$\frac{1}{R'} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n^m \left(\frac{r}{R} p^n\right)^n c_n^*} = \left(\frac{r}{R}\right) \overline{\lim_{n\to\infty}} p^n \sqrt[n]{c_n^*} = \left(\frac{r}{R}\right) \lim_{n\to\infty} p^n = 0,$$

і, відповідно, $R' = \infty$.

Отже, для точок множини E_0 за умови $\sigma \neq 0$ справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(re^{it}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t-\psi}{4\sigma^2}\right) dt = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^m \left(\frac{r}{R} p^n\right)^n c_n^* e^{in\psi}. \tag{9}$$

Перетворимо за Абелем ряд у формулі (9)

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^m \left(\frac{r}{R} p^n\right)^n c_n^* e^{in\psi} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^m \left(\frac{r}{R} p^n\right)^n \left[G_n(\psi) - G_{n-1}(\psi)\right] =$$

$$= \left(1 - \frac{r}{R} p\right)^n c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^m \left(\frac{r}{R} p^n\right)^n - (n+1)^m \left(\frac{r}{R} p^{n+1}\right)^{n+1}\right] G_n(\psi), \tag{10}$$

де $G_0 = c_0 = c_0^*$, $G_n(\psi) = \sum_{k=0}^{n} c_k^* e^{ik\psi}$ частина сума ряду (4). Ряд (4) збігається і, тому, послідовність $\{G_n(\psi)\}$ обмежена:

$$\left|G_n(\psi)\right| \le A < \infty. \qquad (11)$$

Перейдемо до границі у формулі (9) при $p \to 1-0$.Перехід у формулі (9) можливий , оскільки кожна точка множини E_0 є точкою аналітичної функції $f(z)$. Тому

$$\lim_{p \to 1-0} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(re^{it}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{t-\psi}{4\sigma^2}\right) dt - f\left(re^{i\psi}\right). \qquad (12)$$

Для відшукання границі ряду (10) скористаємося означеннями границі і дослідимо залишок цього ряду

$$\Delta_N = \sum_{n=N}^{\infty} \left[n^m \left(\frac{r}{R} p^n \right)^n - (n+1)^m \left(\frac{r}{R} p^{n+1} \right)^{n+1} \right] G_n(\psi).$$

Послідовність $\left\{ \varphi_n(p) = n^m \left(rp^n / R \right)^n \right\}_{n=0}^{\infty}$ не є монотонною. Номер найбільшого члена послідовності знайдемо з необхідної умови екстремуму функції, що задає загальний член цієї послідовності.

Отже, ряд (1) збігається і його узагальнена сума з урахуванням формули (12) дорівнює значенню функції у певній точці.

Наслідок 1. Ряд первісної мероморфної функції підсумовується за методом Вейєрштрасса-Гаусса на множині E_0.

Наслідок 2. Нехай $f(z)$ - мероморфна функція, аналітична в крузі $|z| < R$ $0 < R < \infty$, і аналітична на множині $E_0 = \left\{ z = re^{i\psi} R \ge r \le r_1 < \infty : \psi_1 \le \psi \le \psi_2 \right\}$. Тоді, степеневий ряд (1) рівномірно підсумовується методом Вейєрштрасса-Гаусса на кожній дузі $L_r = \left\{ z = re^{i\psi} : \psi_1 \le \psi \le \psi_2 \right\}$, $R \ge r \le r_1$ ([4, с. 91-94]).

Література:

1. Ахиезер Н. И. Лекции об интегральных преобразованиях. – Харьков: Вища школа, 1984. – 120 с.

2. Сухорольський М. А. Функціональні послідовності та ряди. – Львів: Растр-7, 2010. – 346 с.

3. Уиттекер Э.Г., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. – М.: Физматгиз, – 1963. – Т.1, Т.2. – 515 с.

4. Харди Г. Расходящиеся ряды / Г. Харди. – М. : Изд-во иностранной литературы, 1951. – 504 с.

5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчесления. М.: Физматгиз, – 1962. – Т.2. – 485 с.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Бак Сергій Миколайович

УДК 378.14:371.214

Трусюк Марія

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ОГЛЯД ОСОБЛИВОСТЕЙ ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ ЗНАНЬ

Анотація: *У статті проаналізовані основні функції програм математичного призначення; розглянуті переваги їх використання при вивченні математики.*

Ключові слова: *системи комп'ютерної математики, візуалізація математичних знань, навчання математики.*

Abstract: *The article analyzes the main functions of mathematical programs, the advantages of their use in the study of mathematics.*

Keywords: *systems of computer mathematics, visualization of mathematical knowledge, teaching mathematics.*

Сучасна освіта постійно потребує інновацій, що обумовлено викликами, які кидає їй інформаційне суспільство. Постійне розширення інформаційного контенту поступово робить неможливим охопити людиною весь історично зібраний матеріал. Серед знайдених технологій опрацювання великої кількості інформації активно використовуються комп'ютерні технології візуалізації навчального матеріалу, зокрема, математичного. Наразі, активне дослідження проблеми впровадження систем візуалізації в навчальний процес та стрімка розробка нових систем комп'ютерної математики свідчать про те, що комп'ютерні технології мають вагомі переваги. Вважаючи, що сьогодні кожен має бути готовим до продуктивного опрацювання великих обсягів, саме технологія візуалізації навчальної інформації може стати основою нових методик навчання математики. Адже, математика – це насамперед мова символів, образів, моделей, схем, графіків, які є важливою складовою безпосередньої візуалізації. Пізнання математичного знання через динаміку образів дозволить вивести процес навчання на абсолютно новий рівень.

Проблему впровадження в навчальний процес комп'ютерно-орієнтованих методичних систем навчання математичних дисциплін та проблему візуалізації математичних знань з використанням СКМ досліджували Жалдак М.І.[5], Клочко В.І. [6], Раков С.А.[4], Співаковський О.В.[7], Львов М.С. [8], Триус Ю.В. [3] та інші.

Метою статті є аналіз сучасних систем комп'ютерної математики щодо їх призначення; узагальнення переваг використання програмних засобів при вивченні математики.

Комп'ютеризація суспільства значно вплинула на сферу освіти. Цей вплив виявився не лише у активному використанні в навчальних закладах комп'ютерною системою, а і у розумінні потреби переосмислити усталені підходи до навчання. Розвиток і постійні оновлення та вдосконалення систем комп'ютерної математики стають важливою передумовою для висунення якісно нових вимог до фахової підготовки вчителя математики, однією із задач якого є демонстрація шляхів використання та прийомів застосування інформаційних технологій у галузі математики під час вирішення навчальних і життєвих задач.

Наразі можна стверджувати, що існує велика кількість програмних засобів математичного спрямування. Це і універсальні системи комп'ютерної математики (Maple, Mathematica, Maxima, Sage тощо), і програми статистичного опрацювання даних (MedCalc, Statistica, SPSS, GenStat, JMP, Analyse-it тощо), і програми для розв'язування задач дискретної математики (Grin, Hungwin, LogiTable та ін.), і графопобудовники (Matplotlib, Grace, Extrema, RLPlot, Zhu3D, OpenDX, Veusz та ін.), і програми динамічної математики в яких реалізована ідея динамізації математичних об'єктів (DG, The Geometer's SketchPad, GeoGebra, Математический конструктор (MathKit), Cabri та подібні до них). Розмаїття таких комп'ютерних програм слугує допоміжним інструментом фахівцям у різних галузях природничо-математичних наук, зокрема, і тим, хто навчає математиці.

Крім професійних програмних пакетів для візуалізації математичного матеріалу створюються спеціальні пакети, головним призначенням яких є підтримка навчання університетських та шкільних курсів математики та прикладних дисциплін.

Варто зазначити, що особливої уваги заслуговують програмні засоби, що були створені українськими розробниками. Зокрема, в Україні створено декілька систем комп'ютерної математики, рівень розробки яких відповідає світовим стандартам. А саме:

- Gran1 (автори М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко; Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова) призначена для підтримки навчання алгебри і початків аналізу, стохастики; містить режим динамічних параметрів);

- Gran-2D (автори М.І. Жалдак, О.І. Вітюк; Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова), DG (автори С.А. Раков, К.О. Осенко; Харківський національний педагогічний університет ім. Г.С. Сковороди) – пакети динамічної геометрії;
- Gran-3D (автори М.І. Жалдак, О.І. Вітюк; Національний педагогічний університет ім. М.П. Драгоманова) для підтримки навчання стереометрії, частково – алгебри і початків аналізу;
- ТерМ (автор М.С. Львов; Херсонських державний університет) призначено для комп'ютерної підтримки практичних занять з алгебри в загальноосвітній школі.

Також, за останні роки були розроблені математичні пакети як спеціалізовані (Eureca, MacMath, StatGraph, Reduse, MacSyma, SketchPad, Cabs і інші), так і універсальні (Derive, MathLab, Maple, Mathematica, MuPad) зі зрозумілим інтерфейсом, в яких реалізовано значну кількість стандартних та спеціальних математичних операцій та функцій, потужні графічні засоби 2D та 3D графіки, власні мови програмування, засоби розпізнавання та підготовки математичного матеріалу до друку, відправлення даних в інші програми та імпортування даних для опрацювання. Все це забезпечує великі можливості для роботи з математичним матеріалом [2].

На базі цих програмних засобів створено програмно-методичні комплекси ПМК Gran, DG, ТерМ, що успішно використовуються в школах і педагогічних університетах України. Досить відомі вони і за межами України [1].

Зокрема варто виділити такі переваги використання програмних засобів при вивченні математики:

- підвищення ефективності запам'ятовування та опрацювання інформації;
- збільшення об'єму матеріалу, який може бути поданий за певний обсяг часу за рахунок оптимізації математичних понять;
- економія часу;

- підвищення мотивації навчання у студентів та учнів.

Таким чином, використання комп’ютера та інформаційних технологій дозволяють збагатити математичну науку, розширити її застосування та суттєво вплинути на математичну діяльність. Нові інформаційні технології навчання дозволяють кращою мірою розкрити педагогічні, дидактичні функції нових технологій навчання математики.

Крім того, дослідники (Жалдак М.І.[5], Клочко В.І. [6], Раков С.А.[4], Співаковський О.В.[7], Львов М.С. [8], Триус Ю.В. [3] та ін.) пропонують такі рекомендації для підвищення ефективності використання програмних середовищ візуалізації у навчанні: орієнтація на використання єдиних програмних засобів в межах освітнього закладу; наявність комп’ютерних лабораторій, що забезпечать ефективне використання програмних засобів.

Як показав аналіз можливостей систем комп’ютерної математики, вони дозволяють виконувати числові розрахунки і символьні перетворення, мають засоби графічної візуалізації та слугують допоміжним інструментом у навчанні математики.

Література:

1. Друшляк М.Г. Обґрунтування доцільності використання програм динамічної математики як засобів комп’ютерної візуалізації математичних знань / М.Г. Друшляк, О.В. Семеніхіна // Фізико-математична освіта. Науковий журнал. – 2015. – Випуск 3 (6). – С. 67-75.
2. Сінько Ю.І. Системи комп’ютерної математики та їх роль у математичній освіті / Ю.І. Сінько // Інформаційні технології в освіті. – 2009. – № 3. с. 274-278.
3. Триус Ю.В. Комп‘ютерно-орієнтовані методичні системи навчання: Монографія / Ю.В.Триус. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 400 с.
4. Раков С.А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія / С.А. Раков. – Х.:Факт, 2005. – 360 с.
5. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів / М.І. Жалдак. – К.: РННЦ “Дініт”, 2003. – 324 с.

6. Клочко В.І. НІТ навчання математики в технічній вищій школі: дис. ... доктора пед. наук: 13.00.02 / Клочко В.І. – Вінниця, 1998. – 396 с.

7. Співаковський О.В. Теорія і практика використання інформаційних технологій у процесі підготовки студентів математичних спеціальностей / О.В.Співаковський. – Херсон: Айлант, 2003. – 224 с.

8. Львов М. Алгебра з комп‘ютером / М.Львов, Н.Львова. – К.:Шк. світ, 2007. – 128 с.

9. Семеніхіна О.В., Друшляк М.Г. Про використання інтерактивних аплетів у електронних підручниках з математики // Всеукраїнська науково-практична Інтернет-конференція «Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології у виробництві та освіті: стан, досягнення, перспективи розвитку». –16-20 березня 2015. –Черкаси. –2015. –С. 143-144.

10. Рамський Ю.С. Про роль математики і деякі тенденції розвитку математичної освіти в інформаційному суспільстві / Ю.С. Рамський, К.І. Рамська // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія №2. Комп‘ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наукових праць / Редрада.-К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2008. – №6(13). – 182 с. (С.12-16).

Науковий керівник: канд. пед. наук, старший викладач Туржанська Оксана Степанівна

УДК 514.112.4

Тютюн Любов

канд. пед наук, доцент

кафедри математики та інформатики

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

Мошкатюк Леся

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ДЕЛЬТОЇД ТА РІВНОСТОРОННІ МНОГОКУТНИКИ

Анотація: *У даній статті наведені основні співвідношення многокутників, які складаються із дельтоїдів, та їх практичне застосування під час зображення на прапорах різних країн.*

Ключові слова: *дельтоїд, неопуклий дельтоїд, зірка, зірчастий п'ятикутник, прапор країни.*

Abstract: *This article presents the main correlations of polygons consisting of deltoids and their practical application during the image on flags of different countries.*

Keywords: *deltoid, unconfident deltoid, star, star pentagon, flag of the country.*

Інтерес до вивчення чотирикутника виник у людства з давніх часів і не згасає досі. Це пов'язано не тільки з його красою, але і з великою практичною цінністю. Чотирикутник є одним із основних фігур планіметрії, проте деякі його види та властивості недостатньо вивчаються, за браком часу, в курсі базової та старшої школи. Здійснивши аналіз навчально-методичної літератури з теми дослідження, ми побачили, що існує незначна кількість робіт присвячених даній тематиці, але використана в них термінологія здебільшого напівзабута й зустрічається хіба що в енциклопедіях. У школі вивчаються лише окремі види чотирикутників – паралелограми і трапеції. Проте, досить важливими властивостями володіє надзвичайно цікава фігура – дельтоїд. По-перше, завдяки привабливому вигляду форма дельтоїда часто втілюється в найрізноманітніших матеріальних деталях – архітектурі, орнаментах, дизайні тощо. По-друге, дельтоїд є найблищим узагальненням ромба, з огляду на це його ще називають ромбоїдом. По-третє, всього лише одним прямолінійним перерізом уздовж діагоналі з подальшим поворотом однієї з утворених частин дельтоїд перетворюється на рівновеликий паралелограм – іншу ключову геометричну фігуру. По-четверте, на відміну від паралелограма і ромба, дельтоїд має набагато більший набір особливий точок, зокрема два центри кіл, що дотикаються до всіх прямих, які містять його сторони. По-п'яте, дельтоїд може бути як опуклим, так і неопуклим. І найголовніше, дельтоїд необхідно ефективно застосовувати як елементарну ланку для побудови рівносторонніх многокутників, зокрема зірчастих, які є безпосереднім узагальненням правильних многокутників.

Розглянемо опуклий дельтоїд $ABCD$ з кутом A, що дорівнює $\frac{360^0}{n}$, де $n = 3, 4, 5, ...,$ і послідовно повертатимемо його на кут $\alpha = \frac{360^0}{n}$ відносно вершини A в одному і тому самому напрямку. Якщо зафіксуємо кожне таке проміжне положення дельтоїда $ABCD$, то сукупність усіх цих положень утворить деякий рівносторонній $2n$-кутник, тобто $2n$-кутник з усіма рівними сторонами. На рис. 1 і 2 зображено такі многокутники для випадків $n = 3$ та $n = 4$, а на рис. 3 – для випадку $n = 5$.

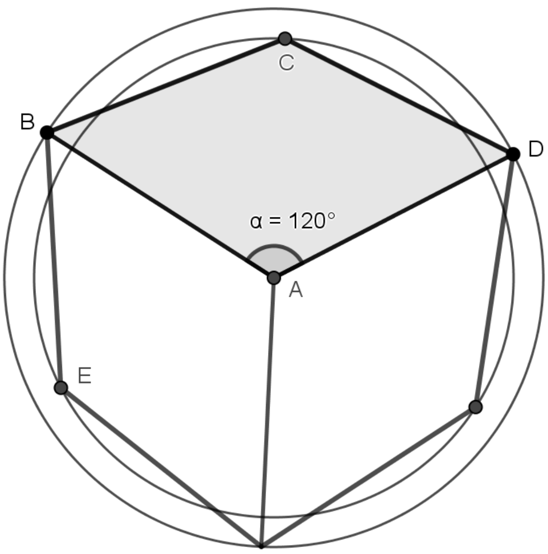


Рис. 1

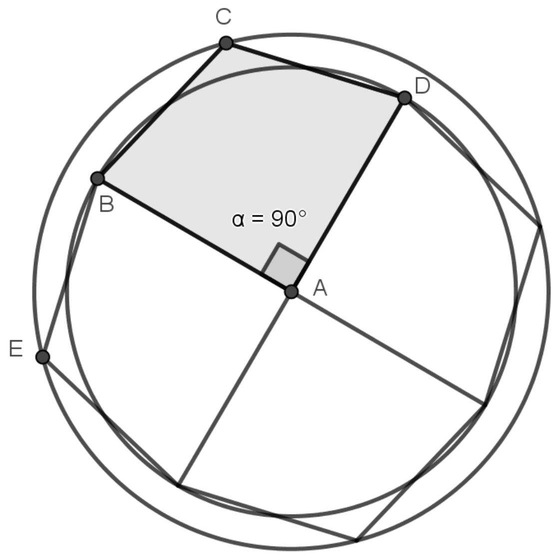


Рис. 2

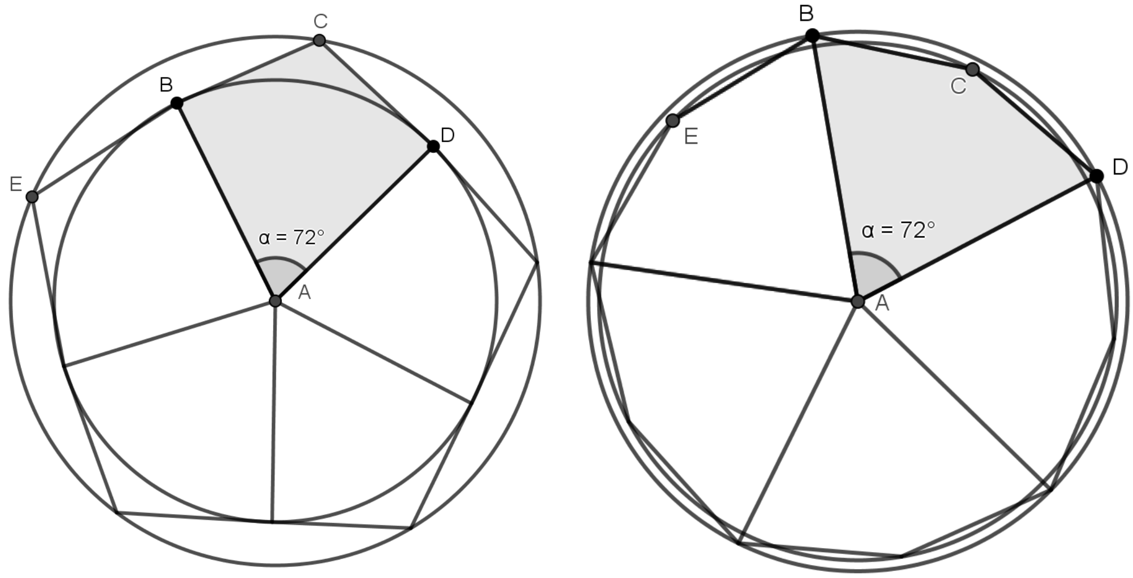


Рис. 3

З цих рисунків бачимо, що у випадках $n=3$ та $n=4$ одержані опуклі многокутники, а у випадку $n=5$ вони можуть бути як опуклими, так і неопуклими. Це, очевидно залежить від величини плоского кута CBE. Він дорівнює подвоєному куту B дельтоїда $ABCD$. Оскільки $AB > BC$, то $\angle BCD > \angle BAD$. Отже, $2\angle B = 360^0 - (\angle BCD + \angle BAD) < 360^0 - 2\angle BAD$. Таким чином, при $n=3$: $2\angle B = 360^0 - 240^0 = 120^0$, при $n=4$: $2\angle B = 360^0 - 180^0 = 180^0$, а при $n=5$: $2\angle B = 360^0 - 144^0 = 216^0$. Отже, починаючи з $n=5$, плоский кут CBE побудованого $2n$-кутника може бути як меншим 180^0 (і тоді многокутник опуклий), так і більшим від 180^0 (і тоді многокутник неопуклий).

Якщо візьмемо опуклий дельтоїд $ABCD$ з кутом C, що дорівнює $\frac{360^0}{n}$ ($n = 3, 4, 5, ...,$), і послідовно повертатимемо його відносно вершини C на кут $\frac{360^0}{n}$, то в результаті теж одержимо певні рівносторонні $2n$-кутники. У випадку $n=3$ одержаний 6-кутник може бути як опуклим, так і неопуклим. Для всіх інших n відповідні $2n$-кутники будуть неопуклими.

Неопуклий рівносторонній $2n$-кутник можна одержати і послідовним обертанням неопуклого дельтоїда $ABCD$ з кутом A, що дорівнює $\frac{360^0}{n}$, навколо вершини A (рис. 4). Взагалі такий многокутник можна одержати як обертанням неопуклого дельтоїда $ABCD$, так і опуклого дельтоїда $AKBC$ (рис. 5).

Побудовані за допомогою дельтоїда неопуклі рівносторонні $2n$-кутники найчастіше називають правильними зірчастими n-кутниками або просто n-кутними зірками (число n вказує на кількість виступаючих кутів). Такі фігури здавна використовувалися для створення геометричних орнаментів, зокрема для оздоблення архітектурних споруд, у художньому різьбленні тощо. Відомо, що правильний зірчастий п’ятикутник слугував емблемою для піфагорійців – учнів і послідовників знаменитого давньогрецького вченого, політика Піфагора [1, с. 92-94].

Піфагорійська школа розширювалася, з’явилися її відділення в різних містах. Але діяльність піфагорійців мала таємний характер. Нових членів до школи Піфагора приймали за особливим ритуалом. Кожний новий член гуртка давав клятву зберігати в таємниці все, що відбувається у школі, а також не розповідати нічого про її засновника Піфагора, якого вважали пророком. Члени піфагорійської школи мали спеціальний знак – пентаграму (правильний п’ятикутник), за яким вони впізнавали один одного [2].

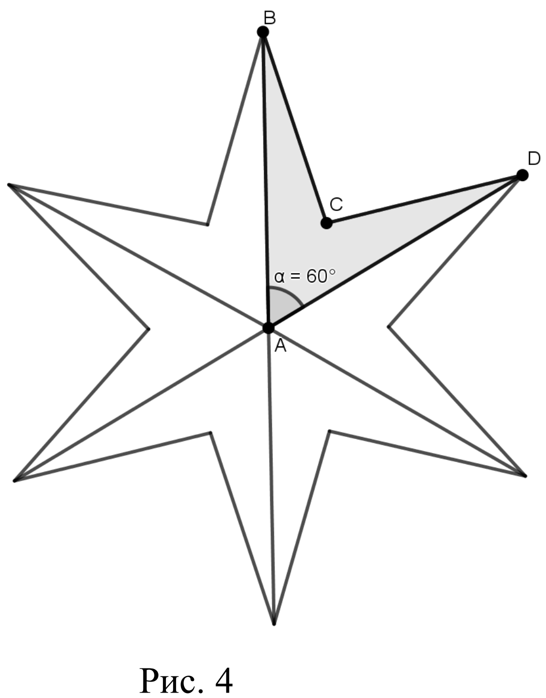


Рис. 4

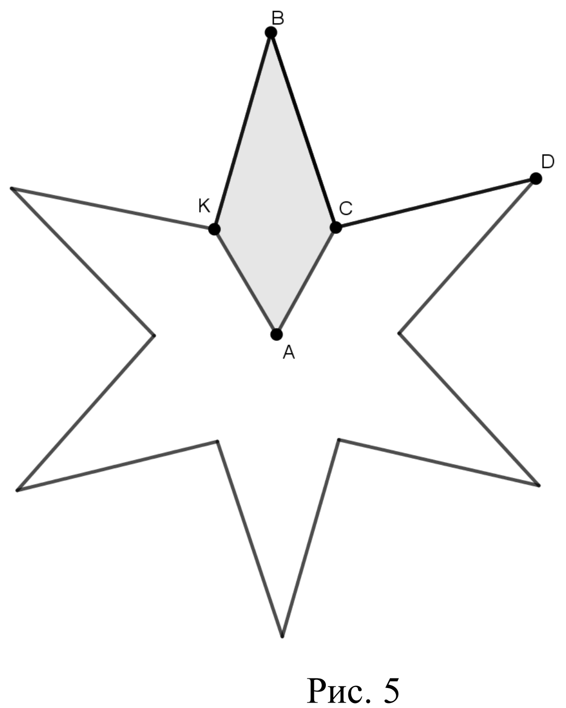
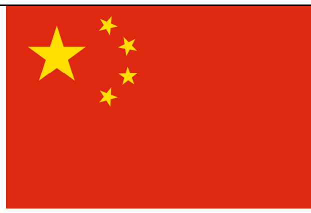
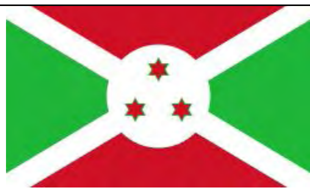
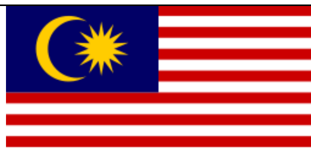


Рис. 5

Із 225 країн світу, що мають свою державну символіку, на прапорах 71 з них зображено правильні n-кутні зірки. Наведемо приклади:

одна 5-кутна зірка зображена на прапорах 31 держави;	
дві 5-кутні зірки – на прапорах 4 держав (Панама, Сан-Томе і Принсіпі, Сент-Кітс і Невіс, Сирія);	
три 5-кутні зірки – на прапорах 3 держав (Ірак, Токелау, Філіппіни);	
чотири 5-кутні зірки – на прапорах 3 держав (Коморські Острови, Нова Зеландія, Федеративні Штати Мікронезії);	
п'ять 5-кутних зірок – на прапорах 8 держав (Антильські острови, Гондурас, Китай, Ніуе, Папуа-Нова Гвінея, Самоа, Сінгапур, Соломонові Острови);	
сім 5-кутних зірок – на прапорах 5 держав (Боснія та Герцеговина, Венесуела, Гренада, Демократична Республіка Конго, Таджикистан);	
дев'ять 5-кутних зірок – на прапорі Тувалу;	

десять 5-кутних зірок на прапорах 2 держав (Домініка, Кабо-Верде);	
чотирнадцять 5-кутних зірок – на прапорі М’янми;	
п'ятнадцять 5-кутних зірок – на прапорі Островів Кука;	
п’ятдесят 5-кутних зірок – на прапорі США;	
одна 6-кутна зірка зображена на прапорі Ізраїлю;	
три 6-кутні зірки – на прапорі Бурунді;	
одна 7-кутна зірка зображена на прапорі Йорданії;	
одна 8-кутна – на прапорі Азербайджану;	
одна 12-кутна – на прапорах 3 держав (Намібія, Науру, Непал);	

одна 14-кутна – на прапорі Малайзії;	
одна 40-кутна зірка – на прапорі Киргизстану.	

Є держави, на прапорах яких зображено різні зірки: *чотири 7-кутні й одна 5-кутна зірка* – на прапорі держави Острів Різдва; *п'ять 7-кутних і одна 5-кутна зірка* – на прапорі Австралії.

Додаткове зацікавлення викликають такі правильні зірчасті многокутники, в яких величини кутів пов'язані певними залежностями.

Виступаючі кути KBC правильної n-кутної зірки (рис. 5) для спрощення називають зовнішніми кутами, а кути BCD називають внутрішніми кутами. Кут KAC, що дорівнює $\frac{360^0}{n}$, вершина якого знаходиться в центрі многокутника, називається центральним кутом.

До першого з особливих класів належать зірки, в яких центральний кут удвічі більший від зовнішнього кута. Саме такою була знаменита піфагорійська пентаграма. До першого роду належать зірки із $n = 4,5,8,9,10,11$.

До другого – в яких центральний кут удвічі менший від зовнішнього.

До третього – в яких центральний кут дорівнює зовнішньому. Зіркою цього класу є відома зірка Давида.

У формулюваннях окремих задач використовується поняття описаного і вписаного кіл для зірок. Так називаються кола, які проходять через вершини відповідно зовнішніх і внутрішніх кутів [1, с. 94-95].

Таким чином, застосування до розв'язування багатьох стандартних задач, досліджених в статті основних співвідношень у дельтоїді дозволяють одержати розв'язання не лише прості й компактні, але й більш ефективні, що є важливим чинником для підвищення в учнів та студентів цікавості до геометрії.

Література:

1. Андрухів Ю. П. Геометрія дельтоїда / Ю. П. Андрухів. – Тернопіль: Навчальна книга «Богдан», 2006. – 160 с.

2. Історична мозаїка в математиці [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://ist-matemat.at.ua/index/pifagor_samoskij/0-15.

УДК 373.5.091.33:514.112

Хаврун Мирослава

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ПРОБЛЕМИ ВИВЧЕННЯ Й МОЖЛИВІ ШЛЯХИ ПОКРАЩЕННЯ НАВЧАЛЬНИХ ДОСЯГНЕНЬ УЧНІВ ІЗ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Анотація: *У статті досліджуються проблеми, пов'язані із вивченням стереометрії у школі, розглядаються деякі можливі шляхи покращення знань учнів з стереометрії.*

Ключові слова: *стереометрія, просторові уявлення, логічне мислення, мотивація навчально-пізнавальної діяльності.*

Abstract: *Article with problems associated with the study of stereometrics in a school, examines some possible ways to improve pupils knowledge of stereometrics.*

Keywords: *stereometrics, special representation, logical thinking, motivation of educational and cognitive activity.*

Геометричні знання в усі часи складали основу повноцінної загальної освіти. Чому так, які обставини дають змогу такій точній науці триматись протягом тисячоліть в основі обов'язкових для вивчення дисциплін? На ці питання намагались давати відповіді багато вчених та дослідників, зокрема, Ф. Клейн, І.Ф.Шаригін, А.Д.Александров. [1].

Курс стереометрії вивчається для розвитку просторових уявлень і уяви, систематичного вивчення властивостей геометричних фігур, формування розуміння відношень між геометричними об’єктами й об’єктами реального світу, вміння застосовувати знання для розв’язування практичних задач, що виникають у повсякденному житті, засвоєння учнями способів обчислення важливих для практики величин і подальшого розвитку логічного мислення, а також має широкі можливості для розвитку інтелекту в цілому.

На думку О.Д.Александрова, геометрія є таким поєднанням живої уяви й строгої логіки, в якому вони взаємно організовують і спрямовують одна одну. Уява дає змогу бачити геометричний факт і підказує логіці як його виразити чи довести, а логіка, у свою чергу, надає уяві творчості й спрямовує її на створення картин, що виявляють потрібні логіці зв’язки. Уява – могутня та прекрасна здібність людини. Вона потрібна для орієнтування в просторі, навколишньому світі та ще низки видів діяльності людини.

Для розвитку в учнів просторових уявлень та уяви необхідно розпочати вивчення стереометрії з основ: аксіом стереометрії та їх наслідків, основних теорем та задач для розгляду моделі та наочного рисунка. Стереометричний рисунок, що є найпоширенішою формою унаочнення, дає свого роду спотворене уявлення про фігуру, яку зображають. Через складність просторових уявлень необхідною є логіка, що дає матеріал для розвитку в учнів логічного мислення. [2].

Часто розвиток логічного мислення підмінюють вужчим завданням – формуванням навичок формально-логічного мислення. У такому випадку учень вчиться систематично викладати доведення, відтворювати та самостійно здійснювати доведення за зразком й аналогією.

Важливою складовою розвитку учнів є формування учителем різних рівнів строгості викладання навчального матеріалу:

1. рівень наочно-чуттєвого обґрунтування (на рівні підсвідомості, здоровий глузд);
2. «прикладний» рівень, на якому обґрунтовуються лише істотно важливі етапи доведення;
3. формально-логічний рівень.

Учитель повинен поступово переходити з одного рівня складності до іншого, оскільки знехтувавши цим, можна зробити геометрію складнішою, ніж вона є насправді. А для великої кількості учнів – навіть недоступною та відбити бажання її вивчати надалі.

У сучасному курсі стереометрії учням інколи буває важко зрозуміти, де у реальному житті вони зможуть використати набуті знання. Не показуючи застосування і використання цих знань вчитель ризикує знизити рівень мотивації для вивчення як окремих тем, так і вивчення геометрії та стереометрії в цілому. Організовувати навчально-пізнавальну діяльність варто правильно, демонструючи школярам її практичне застосування. Саме прикладна спрямованість дає змогу учням бачити застосування геометрії у реальних ситуаціях життя. Цього можна досягти за допомогою прикладних задач, наведення прикладів стереометричних об’єктів навколишнього середовища, використання у мистецтві, архітектурі, побуті.[3].

Напевно ні для кого не є секретом стереотип, що стереометрія важко сприймається учнями, особливо вона незрозуміла тим дітям, у кого слабко розвинена просторова уява. Їм часто складно уявити розташування двох і більше просторових фігур разом. Також це стосується перерізів багатогранників площиною (або площинами). Міцні знання з курсу планіметрії основної школи не гарантують їм такого ж успіху під час вивчення фігур у просторі, якщо вподовж навчання в основній школі не було сформовано учителем правильного уявлення щодо просторових фігур та не було завдань на розвиток таких уявлень та здібностей кожного з учнів.

Виправляти такі помилки та прогалини у знаннях старшокласників доводиться у пришвидшеному варіанті та використовуючи моделі різних типів (з паперу, склеєні зі скла, зроблені з металу та інші). Для погляду з усіх боків використання програмних засобів (яких є чимала кількість) буде лише плюсом, причому учень зможе не тільки продивитись, а й самостійно покроково побудувати будь-яку фігуру. Найкращим варіантом буде після пояснення «на пальцях» дати завдання зробити розгортки кількох багатогранників. Це дасть змогу краще засвоїти матеріал та його розуміння. Крім того такі заняття навчають довго сконцентровувати увагу на одному виді діяльності, виконувати точні вимірювання та розуміти їх важливість (коли щось не склеюється або не підходить по розміру).

Далі основним інструментом вивчення стереометрії стають задачі. Розв'язування стереометричних задач привчає школярів обґрунтовувати кожен крок: побудову, чи може взагалі існувати саме така фігура, різні варіанти розв'язання задачі (у задачах з параметрами). Створення проблемних ситуацій, в яких виникає необхідність відкриття чогось нового, обговорення різних способів розв'язування задач, доведення теорем сприяє розвитку мотивів власного досягнення успіху та дає поштовх до саморозвитку, самоосвіти. [4] Як результат маємо підвищення мотивації навчально-пізнавальної діяльності, активація ініціативності на заняттях та (важко досяжний результат) отримання в учнів задоволення від процесу самого навчання та розв'язування задач.

Література:

1. Бродський Я.С. К Стереометрія у старшій школі: Посібник для вчителя [Електронний ресурс] / Я.С. Бродський, В.Ю. Гречук, О.Л. Павлов, А.К Сліпенко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 404 с. – Режим доступу: https://www.bohdan-digital.com/userfiles/file/catalog/review_file_488715151.pdf
2. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підручник. – 2 вид. допов. і перероб./ З. І. Слєпкань. – К.:Вища шк., 2006. – 582 с.
3. Кальчук А. А. Розв'язування прикладних задач із стереометрії в процесі організації навчально-пізнавальної діяльності у вищій школі // Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності [Електронний ресурс] / А. А. Кальчук, В. Є Пересунько. – 2017. - Режим доступу: http://library.vspu.net/bitstream/handle/123456789/1370/ЗБІРНИК%20НАУКОВИХ%20ТЕЗ%20%28МІ%20ВНЗ%202017%29%20кінцеви%25-176-179.pdf?sequence=1&isAllowed=y

4. Філон Л. Г. Професійна спрямованість навчання стереометрії учнів старшої профільної школи [Електронний ресурс] / Л. Г. Філон. - Режим доступу: file:///C:/Users/Мирослава/AppData/Local/Packages/Microsoft.MicrosoftEdge_8wekyb3d8bbwe/TempState/Downloads/2419-6013-1-SM%20(1).pdf

Науковий керівник: канд. пед. наук, асистент Соя Олена Миколаївна

УДК 323.5.091.33:514.112

Холод Надія

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

АНАЛІЗ ІНФОРМАЦІЙНОГО СРЕДОВИЩА, ЯКЕ ЗАБЕЗПЕЧУЄ ВИВЧЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Анотація: *У статті розглядаються різні варіанти забезпечення вивчення нерівностей, та проводиться їхній аналіз; розкривається короткий зміст деяких підручників з алгебри; проаналізовані ефективні способи навчання учнів на уроці математики.*

Ключові слова: *підручник, навчальний матеріал, аналіз, нерівність, алгебра.*

Abstract: *The article deals with different variants of inequality studying and its analysis. It reveals short content of some algebra textbooks; The article analyzes several useful methods of pupils' mathematical education.*

Keywords: *schoolbook, educational material, analysis, inequality, algebra.*

До засобів навчання математики належать : підручник математики, дидактичні матеріали, довідкова математична література, навчальне обладнання з матеб6матики, до якого входять наочні посібники, моделі, рисунки, схеми, таблиці, предмети оточення тощо. Вони мають утворювати єдиний комплекс, основою якого є підручник математики.

В підручниках математики викладено основи знань і способів діяльності відповідно до цілей навчання, визначених програмою.

Підручник розрахований передусім на учнів відповідного віку. Разом з тим у деяких підручниках математики є матеріал, потрібний вчителеві для організації навчально-пізнавальної діяльності учнів. Крім того, підручником користуються і батьки, допомагаючи учням під час виконання домашніх завдань і контролюючи їхню роботу.

До підручника математики висувається ціла низка вимог стосовно структури викладу навчального матеріалу, зокрема педагогічна доцільність теоретичної частини і системи задач підручника, в точності, стислості і ясності мови, жвавості, цікавості викладу, якості ілюстративного матеріалу.

Обов'язкові вимоги до наукової системи підручника – математична коректність викладу теоретичного матеріалу, доцільність вибору наукової схеми викладу, відповідність трактовки понять, термінології і символіки традиціям прийнятим у математичній науці і школі.

Дидактичні вимоги потребують забезпечення доступності, наочності, систематичності, ощадливості викладу матеріалу, наявності засобів мотивації учіння, розвитку мислення, пізнавальної активності й цікавості до предмету, диференціації навчання, спрямованості на формування загально навчальних умінь.

Вимоги до методичного апарату підручника пов'язані із забезпеченням належного розвитку змістових ліній, методичної доцільності викладу теоретичного матеріалу і системи вправ та задач рівня реалізації внутрішньо предметних і між предметних зв'язків, наявності можливостей для контролю і самоконтролю,

застосування технічних засобів навчання та комп'ютерної підтримки, прикладної та практичної спрямованості, наявності умов для організації самостійної роботи учнів на уроці і в позаурочний час [41]

В результаті Всеукраїнського конкурсу серед альтернативних для навчання алгебри у 9 класі є такі підручники :

- *Алгебра 9. Бевз Г.П. , Бевз В.Г. .;*
- *Алгебра 9. Возняк, Литвиненко, Мальований;*
- *Алгебра 9, Кравчук, Янченко;*
- *Алгебра 9. Мерзляк, Полонський, Якір.*

Алгебра 9. Бевз Г.П. , Бевз В.Г.

Науковість підручника забезпечена в першу чергу логічно послідовним розміщенням навчального матеріалу. Математичні поняття і їх властивості сформульовані коректною математичною мовою, а доведення властивостей подано на достатньому рівні строгості.

Доступність учням навчальних текстів, можливість самостійно їх опрацьовувати - одна із особливостей підручника. Присутнє яскраве оформлення, кольорові графіки, таблиці.

Значну увагу приділено систематизації навчального матеріалу (таблиці, схеми, класифікації), що покращує застосування його до розв’язування задач, полегшує зорове сприймання тексту.

У кожному параграфі підручника є рубрики «Хочете знати ще більше?» та «Перевірте себе» , вони допомагають закріпити, узагальнити і систематизувати здобуті знання, вміння та навички.

Підручник містить вправи різних рівнів - від порівняно простих до досить складних. Номери останніх позначено зірочкою.

На мою думку, у даному підручнику тема «Нерівності» найкраще подається, у порівнянні з іншими, пропонованими Міністерством освіти. Розглянута тема містить загальні відомості про нерівності, їх властивості, розв’язання, доведення, а також системи нерівностей з однією змінною.

Хочеться відмітити, що у даному підручнику окремо виноситься підтема «Подвійні нерівності», що не спостерігається у жодному підручнику.

Як і у всіх підручниках, так і у підручнику Бевза Г.П. розділ «Квадратична функція» містить відомості про квадратичні нерівності.

Алгебра 9. Возник, Литвиненко, Мальований;

Матеріал підручника структуровано за розділами, які розбито на параграфи, а ті, у свою чергу, - на окремі пункти. Майже перед кожним з пунктів у рубриці «Пригадайте» акцентується увага на тих відомостях, які слід відновити в пам'яті для полегшення розуміння нового матеріалу.

Щоб привернути увагу до особливо важливих положень, їх виділено відмінним від звичайного шрифтом і кольором.

Зорієнтуватися у рівні засвоєння змісту розділу учень зможе за допомогою вміщених у його кінці додаткових задач та вправ, а також різнорівневих завдань для самоперевірки.

Першим розділом підручнику є «Нерівності», що відповідає навчальній програмі для 9 класу. Цей розділ поділено на дві теми: «Числові нерівності» та «Нерівності зі змінними», кожна з яких в свою чергу поділяється на окремі параграфи. Теоретичні відомості подані таким чином, що спочатку йде головне запитання, а потім подається поширена відповідь, що супроводжується прикладами. На мою думку, це дає змогу учням бачити головне у цій темі, на що варто більше звернути увагу і обов'язково запам'ятати.

Даний підручник містить також параграф «Застосування нерівностей для оцінювання значень виразу», що не зустрічається у жодному із наведених підручниках. Я вважаю, що цей матеріал допоможе учням не лише на звичайних уроках, а й на олімпіадах, під час складання ДПА і ЗНО, де містяться нестандартні задачі.

У розділі «Квадратична функція» окремим виноситься параграф «Розв'язування нерівностей другого степеня з однією змінною». На мою думку, ця тема тут розкрита найкраще, адже у даному підручнику розглядаються деякі способи розв'язування нерівностей другого степеня із однією змінною (графічний спосіб, аналітичний спосіб, метод інтервалів).

Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра: Підручник для 9 класу.

Підручник укладено відповідно до Державного стандарту освіти та чинної програми з математики.

У підручнику значну увагу приділено викладу теоретичного матеріалу, його мотивації, розкриттю суті основних понять, ідей, методів. Усвідомлення загального, суттєвого є добрим підґрунтям для розв’язування вправ. Підручник містить розв’язання типових вправ з детальними поясненнями, де розкривається суть методу, підходу, пропонується алгоритм або евристична схема розв’язування вправ певного типу.

Підручник передбачає рівневу диференціацію навчання. Особливої уваги заслуговує система завдань початкового та середнього рівнів (рівень А та частково рівень Б). Задачі рівня В розраховані на учнів з математичними здібностями.

Підручник містить матеріал, що сприяє розумінню та засвоєнню учнями загальнолюдських духовних цінностей, у рубриці «Історична довідка».

Вивчення кожного розділу, зокрема «Нерівності» починається з короткої мотивації.

Актуалізація опорних знань, умінь і навичок досягається за допомогою вправ у рубриці «Вправи для повторення» та матеріалу першого абзацу кожного пункту.

Систему вправ складено так, що попередня вправа готує учня до розв’язування наступної, що є складнішою.

Особливу роль у підручнику відіграє рубрика «Приклади розв’язання вправ». Наведені у ній розв’язання призначені для розкриття суті методів розв’язування вправ певного типу.

Вивчення розділу «Нерівності» розпочинається із означення числових нерівностей, властивостей, їх доведення. Другою частиною розділу є вивчення нерівностей із однією змінною. Сюди ж можна віднести «Системи лінійних нерівностей з однією змінною». Кожний параграф містить чіткі означення, схеми, алгоритми розв’язування нерівностей і систем нерівностей.

У розділі «Квадратична функція» розглядається підтема «Нерівності другого степеня з однією змінною».

На мою думку, недоліком даного підручника є те, що він містить відомості лише про метод інтервалів для розв'язування нерівностей. А також тут практично немає ілюстрацій, не насичений кольорами.

Зміст підручника ***«Алгебра. 9 клас» (автори А. Г. Мерзляк, В. Б. Болонський, М. С. Якір)*** і послідовність викладення матеріалу відповідають програмі курсу алгебри для 9 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

Структура викладення матеріалу: кожний пункт складається з теоретичної частини, прикладів застосування зазначеного теоретичного матеріалу для розв'язування задач, контрольних запитань для самоперевірки засвоєння теоретичного матеріалу та завдань для розв'язування.

Для забезпечення безперервності вивчення матеріалу пункти завершуються двома рубриками: «Вправи для повторення» і «Готуємося до вивчення нової теми».

Наприкінці кожного пункту рубрики «Учимося робити нестандартні кроки» пропонують завдання розвивального характеру.

Після закінчення певної теми наводять завдання в тестовій формі під рубрикою «Перевір себе» (усього 6 завдань, кожне з яких складається з 12 запитань).

Наприкінці підручника подано стислі відомості з курсу математики попередніх класів оформлені у вигляді довідкового матеріалу. Це допомагає учневі, незважаючи на можливі прогалини у знаннях за попередні роки, успішно опанувати курс 9 класу і систематизувати знання, набуті в попередні роки.

Довідкову роль відіграє «Предметний покажчик», що містить посилання на нові поняття, які вивчаються у курсі 9 класу.

Даний підручний відрізняє від інших велика кількість засобів, спрямованих на підвищення ефективності його використання, індивідуального підходу до учнів, підвищення інтересу до предмета.

Відзначимо велику кількість завдань, структурованих за рівнем складності та методичною доцільністю їхнього використання. Загальна кількість завдань дещо перевищує потрібну, виходячи з обсягу класних і домашніх занять, оскільки передбачено, що вчитель обирає для опрацювання потрібну кількість завдань саме того рівня складності, що відповідає загальному рівню навчальних досягнень і класу в цілому, і окремих учнів.

Я вважаю, що така структура дає змогу організувати роботу за підручником з урахуванням загального рівня підготовленості класу та індивідуальних особливостей учнів та вдало обрати дидактичний матеріал.

Підручник ураховує вікові особливості мислення учнів, пропонує прийоми підвищення ефективності засвоєння матеріалу.

Провівши порівняльну характеристику теми «Нерівності» в 4 підручниках можна зробити наступні висновки :

1. В усіх підручниках тема вивчається на основі одних і тих понять.
2. Понятійний апарат більш ширший у підручнику редакції Ю.І.Мальований, Г.М. Литвиненко, Г.М. Возняк «Алгебра. 9клас».

В інших підручниках понятійний апарат дещо вужчий. Проте для глибокого і досконалого вивчення заданої теми бажано використовувати декілька підручників.

3. Більш строгий виклад теорії спостерігається в підручнику під редакцією Ю.І. Мальований, Г.М. Литвиненко, Г.М. Возняк «Алгебра. 9клас». В ньому доводяться всі властивості і розглядаються декілька способів їх доведення. А також авторський колектив подає для вивчення не один метод розв’язання нерівностей. У всіх інших підручниках автори дотримуються лише розв’язування нерівностей другого степеня методом інтервалів.
4. В підручнику під редакцією Ю.І. Мальований, Г.М. Литвиненко, Г.М. Возняк «Алгебра. 9клас» в теоретичній частині спочатку ставиться запитання або певна проблема, а далі йде їхнє розв’язання, тому він може бути використаний для самостійного вивчення тем учнями.

На сучасному етапі розвитку освіти створені посібники, які містять достатню кількість вправ, варіанти самостійних та контрольних робіт. Серед таких посібників хочеться відмітити наступні :

- Мерзляк А.Г. та інші «Збірник задач і контрольних робіт з алгебри 9 класу»;
- О.О. Старова «Контрольні роботи та орієнтовне календарне планування»;
- О.С. Будна, С.М. Будна «Державна підсумкова атестація (Підготовка). Алгебра 9 клас. Тести для тематичного оцінювання»;
- О.І. Каплун «Тест-контроль. Поточне, тематичне та річне оцінювання», тощо.

Чимало корисної інформації щодо організації навчального процесу і позакласної роботи містять наступні періодичні видання :

- «Математика в школі» (Журнал);
- «Математика в школах України» (Журнал);
- «Математика» (Газета).

У школі вчителі також використовують різні наочні посібники : таблиці, роздатковий матеріал, моделі геометричних тіл тощо.

Література:

1. Гончаренко С.У. Технологія навчання // Український педагогічний словник. – К.: Либідь, 1997 – С. 331.
2. Жук Ю.О. Роль засобів навчання у формуванні навчального середовища/ Ю.О. Жук // Нові технології навчання : наук.-метод. збірник. – К.:ІЗМН, 1998.-N22.
3. Ковальова Т. Використання сучасних технологій навчання з метою розвитку учнів / Т. Ковальова // Директор школи. – 2008.- С. 10-16.
4. Соколовська Н. Інноваційні технології в освіті / Н. Соколовська // Директор школи. – 2009. - №47. – с. 9-13.
5. Сучасні технології навчання / В.В. Волканова // Управління школою. – 2008 – Березень (№8-9).

Науковий керівник : канд. фіз.- мат. наук, доцент Вотякова Леся Андріївна

УДК [373.5.091.33:004]:517

Чамлай Роман

студент факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ІНТЕРНЕТ-РЕСУРСИ В ДОСЛІДНИЦЬКІЙ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ ЗЗСО ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ

Анотація: *У статті здійснено аналіз сайтів і блогів учителів математики закладів загальної середньої освіти Вінничини.*

Ключові слова: *сайт учителя математики, блог вчителя математики, електронний посібник.*

Abstract: *The article analyzes sites and blogs of teachers of mathematics of institutions of general secondary education in Vinnytsya Region.*

Keywords: *mathematics teacher's website, mathematics teacher's blog, electronic textbook.*

Застосування нових інформаційних і комунікаційних технологій у шкільній освіті обговорюється на сторінках багатьох методичних газет і журналів. При цьому кожному вчителеві, безумовно, очевидна доцільність застосування комп’ютерів для навчання. Великі можливості представлення інформації на комп’ютері дозволяють змінювати й істотно збагачувати зміст освіти; виконання будь-якого завдання, вправи за допомогою комп’ютера створює можливість для підвищення інтенсивності уроку; використання варіативного матеріалу і різних режимів роботи сприяє дослідницькій діяльності учнів закладів загальної середньої освіти (ЗЗСО).

На сьогоднішній день актуальним є застосування електронних підручників, посібників та інших електронних ресурсів у навчальному процесі.

Розглянемо, як приклад електронних ресурсів, електронний посібник, який тлумачиться вченими як універсальний методичний посібник, що містить широке коло питань з навчальної дисципліни, викладених в стислій формі та призначений для використання в навчанні.

Останнім часом значна увага приділяється розробці електронних підручників, як самими учителями так і учнями, роботу над якими можна розглядати як гарний спосіб розвитку і активізації дослідницьких умінь учнів.

Для того, щоб електронний посібник щонайкраще відповідав пропонованим вимогам, необхідно, щоб він поєднував у собі функції підручника і вчителя, довідково-інформаційного посібника і консультанта, тренажера тестувальної програми.

Електронний посібник має складатися з комплекту навчальних, методичних та програмних матеріалів, розміщених на електронних носіях (CD-диску, сервері локальної мережі або в Інтернеті). Перевагу електронного посібника над звичайним навчально-методичним комплексом дисципліни можна побачити у кожному з вказаних вище компонентів окремо і у комплексі в цілому. Якщо навчально-методичний комплекс дисципліни буде просто переведено в електронну форму, то і це дасть великі переваги як для вчителя, так і для учня: якість компонентів електронного посібника може постійно покращуватися (простота та легкість модифікації та поповнення курсу); підвищується доступність електронного посібника для учнів.

Створення різних моделей представлення знань, що в одному випадку представляють об’єкти, характерні для логічного мислення, а в іншому – образи-картини, з якими оперує образне мислення, дає можливість оптимізувати процес дослідницької діяльності учнів. Включення системи тестів на початковому етапі роботи з навчальним посібником дозволяє ідентифікувати особистісні якості учня, а потім здійснити настроювання на нього і рекомендувати відповідну методику навчання.

Контроль знань після вивчення кожного розділу може здійснюватися різними способами (за допомогою тестів, контрольних питань і т.п.).

На сьогоднішній день розроблено значну кількість електронних посібників із різних предметів, що є зручними для домашнього навчання, а також для використання в навчальних закладах. Електронні посібники істотно підвищують якість візуальної інформації, вона стає яскравішою, повнішою, а чим цікавіше подано матеріал, тим цікавіше його вивчати. Тому можливості електронних посібників не обмежуються тільки викладом і демонстрацією матеріалу, вони призначені для того, щоб зацікавити учня та допомогти швидко опанувати потрібну тему. Розроблені посібники вчителі використовують у навчальному процесі з викладання шкільних предметів у школі. Посібники розробляються з різних тем, починаючи від простих маленьких програм до складних і серйозних проектів, які створюються впродовж багатьох років.

Індивідуалізація процесу навчання. Використання мультимедіа дозволяє учням самостійно працювати над навчальними матеріалами і, отже, самостійно вирішувати, як вивчати матеріали, в якій послідовності і як використовувати інтерактивні можливості програмних засобів, як реалізувати спільну роботу з іншими учнями класу. Таким чином, учні стають активними учасниками освітнього процесу.

Учні можуть впливати на свій власний процес навчання, підлаштовуючи його під свої індивідуальні здібності і можливостями. Вони можуть вивчати саме той матеріал, який їх цікавить, повторювати матеріал стільки разів, скільки їм потрібно, і це допомагає усунути багато перешкод їх індивідуальному сприйняттю.

Роль інформаційних технологій у системі освіти розділилася на два напрями. На першому – інформаційні технології є інструментарієм для вирішення окремих педагогічних завдань в рамках традиційних форм освіти і методів навчання. Що стосується другого напряму, то тут інформаційні технології займають активнішу роль і забезпечують нові можливості. До основних переваг другого напряму можна віднести наступне: створюються умови для самостійного опрацьовування навчального матеріалу; відкривається можливість роботи з математичними і програмними моделями об’єктів, що вивчаються; з’являється можливість пошуку інформації і зручнішого доступу до неї, представлення в мультимедійній формі рідкісних інформаційних матеріалів; забезпечується можливість автоматизованого контролю і об'єктивнішого оцінювання знань і умінь; стимулювання дослідницької діяльності учнів.

Таким чином, ми логічно підходимо до необхідності використання сайтів з математики як ЗЗСО, так і сайтів вчителів математики. Яскравим прикладом освітнього web-ресурсу є система дистанційної підтримки навчального процесу, що є розробкою лабораторії інформаційних та комунікаційних технологій фізико-математичної гімназії №17 міста Вінниці за активної участі учнів гімназії. Система наповнюється навчальним матеріалами з базових предметів за діючими шкільними програмами. Навіть будь-який учень України може зареєструватися в системі та використовувати її в щоденній навчальній й навчально-дослідницькій діяльності. Передбачено режим консультацій у реальному часі, які учням надає учитель, що супроводжує предмет.

У освітньому Інтернет-просторі Вінничини також функціонують навчальні сайти вчителів математики. Дослідницька діяльність дозволяє учням увійти в культурний простір самовизначення. Учні опиняються в ситуації проектування власної предметної діяльності в обраній ними галузі, зустрічаються з необхідністю аналізу наслідків своєї діяльності.

Рис.1. Сайт учителя математики Тиврівського ліцею-інтернату Сидорука Володимира Анатолійовича. (http://sva.in.ua). Стартова сторінка сайту sva.in.ua

Сайт (Рис.1.) постійно та регулярно наповнюється навчальним матеріалами з математики за діючою шкільною програмою. Сайт орієнтований на учнів з поглибленим вивченням математики. На сайті розміщено: підготовку до ЗНО онлайн, завдання до ЗНО з минулих років; досить великий обсяг відеоматеріалів (8-11 клас) різноманітні теми з алгебри та геометрії, ілюстровані з детальним поясненням (аудіо супроводом); матеріали для класів з поглибленим вивченням математики, підручники з алгебри та геометрії (8-11 клас) в цифровому форматі, різноманітна цікава література з олімпіадних задач, підготовка до олімпіадних задач, збірники всеукраїнських олімпіад з математики, турніри юних математиків, тощо; матеріали з МАН (Мала Академія Наук), завдання для контрольних робіт, матеріали для підготовки до контрольної роботи; розв’язування олімпіадних задач з багатьох тем математики.

На сайті в тому числі розміщенні різноманітні посилання на інші корисні сайти та джерела для завдань з математики, підготовки до різноманітних математичних олімпіад, методичної та прикладної літератури. Самим автором цей сайт рекомендується для учнів та вчителів (всіх, хто цікавиться математикою) [1].

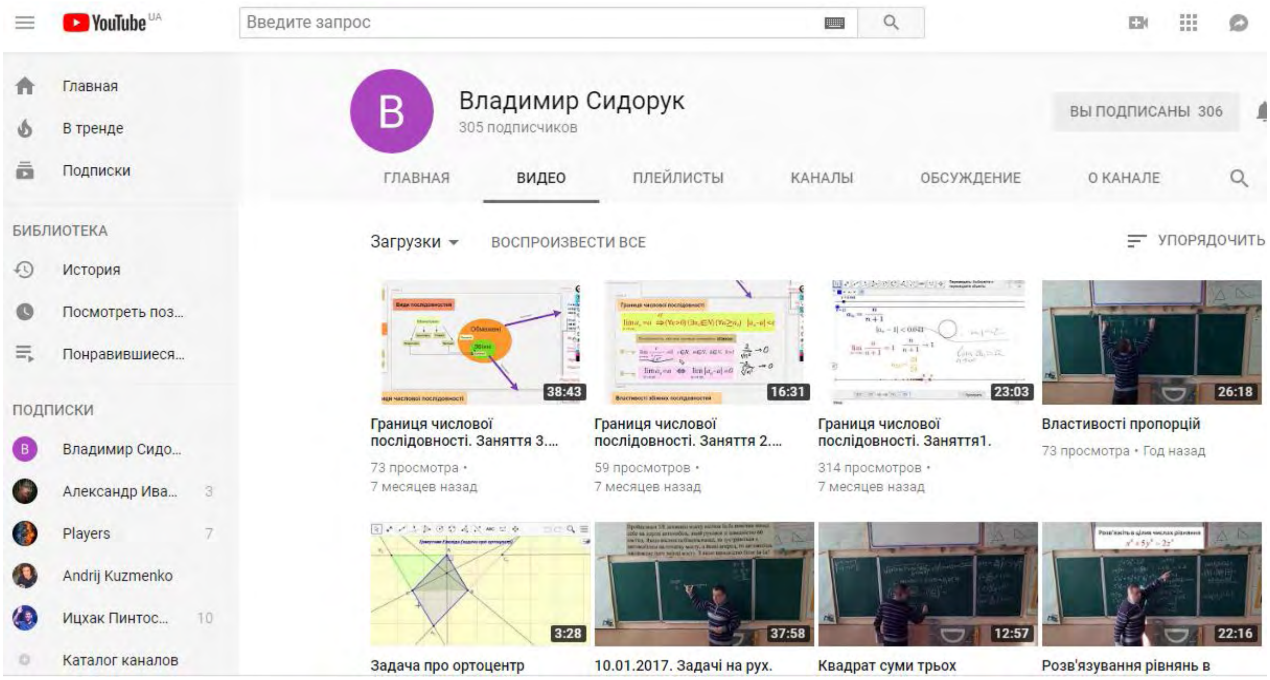


Рис.2. Канал Сидорука В.А. на сайті https://www.youtube.com

Окрім того, Сидорук В.А. має власний канал на сайті https://www.youtube.com (Рис.2.), де налічується понад 100 відеозаписів на різноманітні теми: ілюстровані відеозаписи, відеозаписи з консультацій з учнями (позакласна робота), відеозаписи проведення уроків [2].

Цікавим видається блог вчителя математики Глущенко Тетяни [3], на якому подано: розробки уроків вчителя з математики (5-11 клас), комп’ютерне тестування знань учнів; завдання для підготовки до ЗНО з математики за попередні роки; позакласна робота: різноманітні математичні тести, конкурси, інші цікаві завдання; завдання для підготовки до олімпіад; цікаві математичні відео; електронні підручники. У розділі «Дистанційне навчання» можна знайти матеріали до уроків, які учні, з тих чи інших причин, пропустили. Дані матеріали допоможуть краще зрозуміти навчальний матеріал, виконати домашнє завдання, а також перевірити свої знання. Блог містить інші посилання на різні цікаві та корисні джерела. Автор рекомендує свій блог для учнів та вчителів (Рис.3).

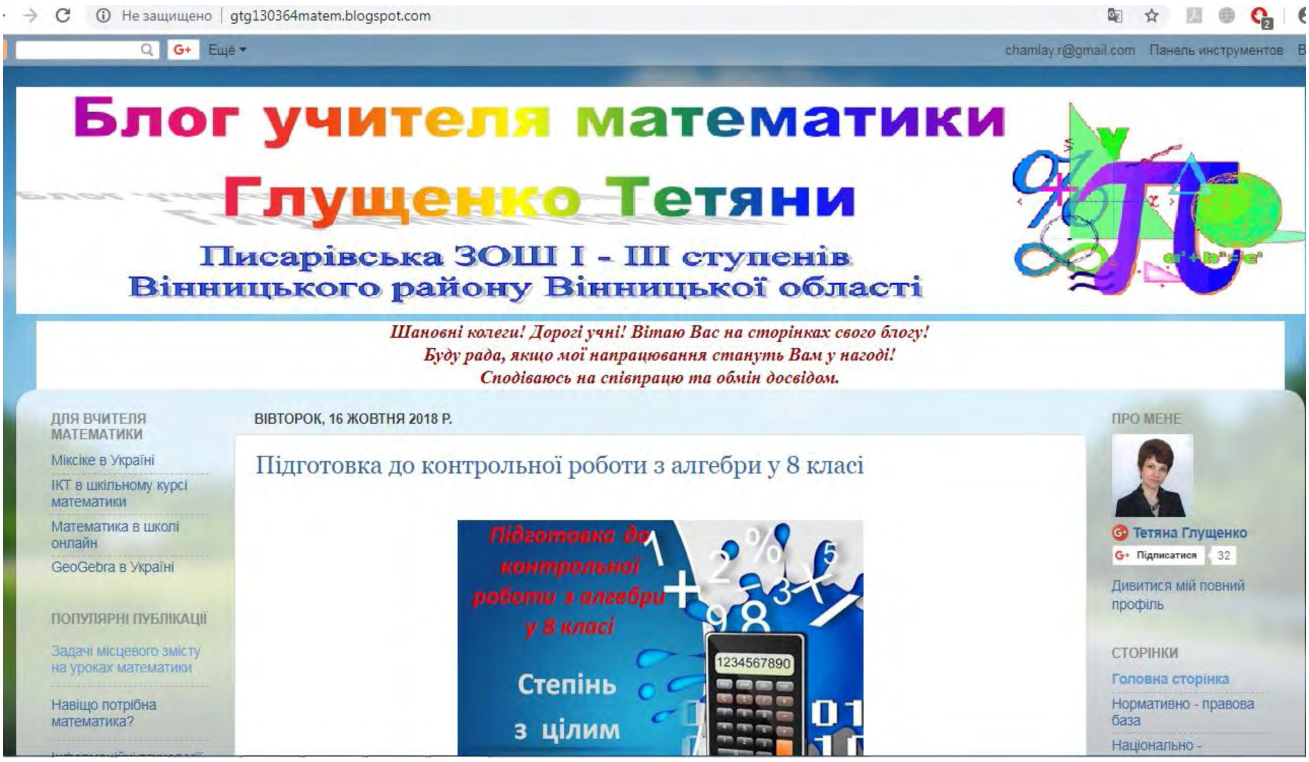


Рис.3. Блог вчителя математики Глущенко Тетяни.

Вчителі математики з Мурованокуриловецького району створили віртуальний кабінет математики [4], в якому пропонують обширну електронну бібліотеку з математики, календарні плани, розробки уроків, різноманітні тести, в тому числі для підготовки до ЗНО та ДПА; завдання для позакласної навчально-дослідницької роботи з математики (Рис.4).

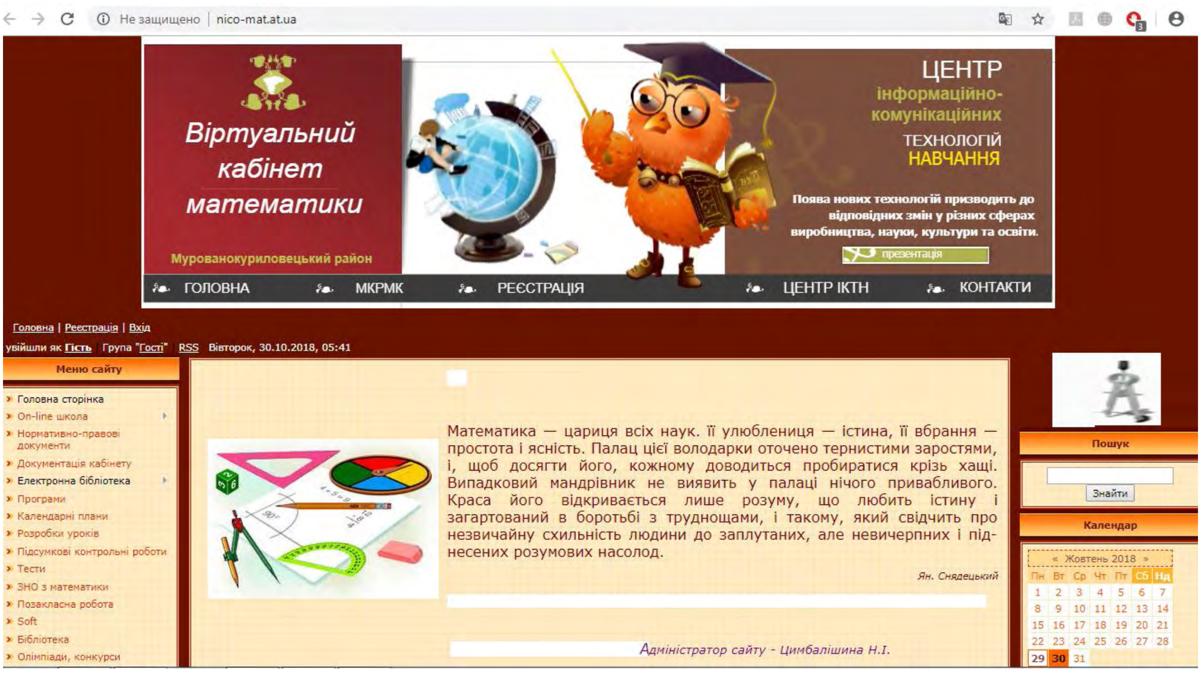


Рис.4. Віртуальний кабінет математики http://nico-mat.at.ua

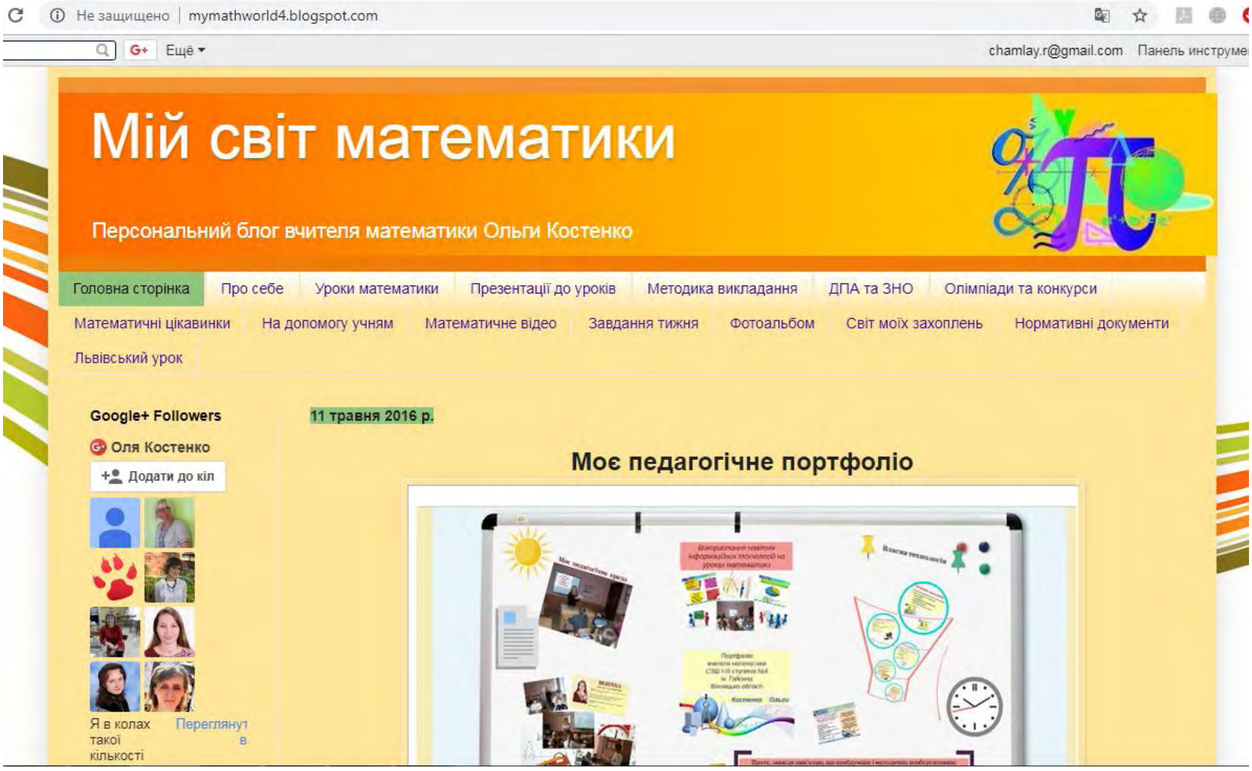


Рис.5. Персональний блог «Мій світ математики» Костенко О.

Вчитель математики Костенко Ольга для учнів пропонує персональний блог «Мій світ математики» [4], у якому представлено: різноманітні математичні цікавинки, математичні відео, уроки математики й презентації до уроків математики (Рис.5).

З вище зазначеного випливає, що активна роль інформаційних технологій в освіті полягає в тому, що вони не лише виконують функції інструментарію, який використовується для вирішення певних вузьких педагогічних завдань, але й стимулюють розвиток дидактики і методики, сприяють створенню нових форм навчання і освіти [5].

Література:

1. Сайт учителя математики Тиврівського ліцею-інтернату Сидорука Володимира Анатолійовича. Сайт [Електронний ресурс] – режим доступу: http://sva.in.ua.
2. Відеохостинг (YouTube): Канал: Владимир Сидорук. Сайт[Електроннийресурс]–режим доступу: https://www.youtube.com/user/ssvvaa1/videos.
3. Блог вчителя математики Глущенко Тетяни. Сайт [Електронний ресурс] – режим доступу: http://gtg130364matem.blogspot.com/2016/01/blog-post.html.

Вітруальний кабінет математики (Мурованокуриловецький район).Сайт [Електронний ресурс] – режим доступу: http://nico-mat.at.ua.
4. «Мій світ математики» Персональний блог вчителя математики Ольги Костенко. Сайт [Електронний ресурс] – режим доступу: http://mymathworld4.blogspot.com/.
5. Сєрова С.О. Шлях у світ наукових технологій : Науково-дослідницька діяльність учнів / С.О.Сєрова// Управління школою - 2006. - №3. - С.27-31.

Науковий керівник: докт. пед. наук, професор Ковтонюк Мар'яна Михайлівна

УДК 373.5.091.33:[004.4:514]

Шаталюк Ірина
студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського
вчитель математики Зозулинецького ЗНВК I-III ст.
«Школа-дитячий садок», Козятинський район

ВИКОРИСТАННЯ ДИНАМІЧНОГО СЕРЕДОВИЩА GEOGEBRA ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРІЇ

Анотація: *У статті висвітлюються основні підходи щодо використання динамічного середовища GeoGebra під час вивчення геометрії.*

Ключові слова: *GeoGebra, програмне середовище, комп'ютер, математика, геометрія.*

Abstract: *The article covers the main approaches to using the geogebra software environment while teaching geometry.*

Keywords: *GeoGebra, software environment, computer, mathematics, geometry.*

Завдання сучасної освіти полягає тому, щоб навчити дітей творчо мислити, самостійно застосовувати набуті компетентності й результати навчання до розв’язування тих чи інших завдань. Тому під час навчання слід застосовувати такі методи та прийоми, що спонукають прагнення учнів опановувати нові знання, отримувати навички самостійної роботи та розвивати творче мислення.

Наразі використання комп'ютерів та інформаційних технологій посідає вагоме місце під час вивчення математики. Вони використовуються для посилення візуальної та експериментальної складової уроку, реалізації практичної спрямованості навчання математики на основі комп'ютерної візуалізації навчальної інформації та комп'ютерного моделювання досліджуваних об'єктів, унаочнення математичних закономірностей чи властивостей геометричних фігур тощо. Серед програмних засобів навчання звернемо увагу на практичні можливості використання інформаційної системи GeoGebra.

GeoGebra – вільно-поширюване динамічне геометричне середовище, що об’єднує в собі геометрію, алгебру та арифметику [3]. Даний програмний продукт був створений під керівництвом Маркуса Хохенвартера, роботу над яким він розпочав у 2001 році на базі Зальцбурзького університету та продовжив в Університеті Флорида Атлантік (2006–2008 роки), Університеті штату Флорида (2008-2009 роки), і тепер в університеті в Лінці. Розроблене програмне забезпечення розраховане для вивчення математики у загальноосвітніх навчальних закладах [1] і не тільки.

За допомогою інструментарію програмного середовища GeoGebra можна швидко створити якісні зображення математичних об’єктів, таких як геометричні фігури, графіки, діаграми тощо. Їх можна зберегти у файлах і використовувати в мультимедійних презентаціях чи «традиційних» дидактичних матеріалах (картки завдань, плакати) тощо.

Розглянемо основний набір інструментів програми GeoGebra, що стосуються вивчення геометрії у загальноосвітніх навчальних закладах. До них належать:

- побудова різноманітних геометричних фігур на площині (точок, прямих, променів, ламаних, паралельних і перпендикулярних прямих, векторів, кутів, бісектрис кутів, многокутників, правильних многокутників, серединних перпендикулярів, кіл (за центром і точкою, за центром і радіусом, за трьома точками), дуг кіл і конічних перетинів, дотичних до кола тощо);
- обчислення площ: многокутника, круга, сектора, частини площини, обмеженої еліпсом;
- знаходження: довжини відрізка, градусної міри кута, периметра многокутника, відстані від точки до прямої,довжини вектора, тангенса кута між прямою і додатнім напрямком осі абсцис тощо;
- перетворення фігур на площині: симетрія відносно точки і прямої, гомотетія, поворот навколо точки, паралельне перенесення;
- знаходження точок перетину двох фігур (двох прямих, прямої і кола тощо);
- знаходження середини відрізка, центра кола (еліпса) тощо [2].

GeoGebra може використовуватись для виконання учнями самостійних навчально-дослідницьких завдань на уроці (або вдома). Вчитель ставить перед учнями завдання побудувати або дослідити певний об'єкт. Школярі проводять комп’ютерний експеримент. Цей процес схожий на традиційну побудову на папері за допомогою креслярських інструментів, але всі побудови виконуються на комп'ютері. Спостерігається чітка лінія міжпредметних зв’язків математики та інформатики, що спонукає до розвитку творчого мислення, дослідницької та інформатичної компетентності учнів.

Програма також може бути використовуватись для створення конкретних моделей-завдань, що містять пояснення матеріалу, заготовки геометричних об'єктів, тексти з умовами та креслення з даними, покрокові плани побудов. Тоді учні працюють не з інструментами програми, а з цими готовими моделями. Перевага динамічних комп'ютерних моделей полягає в тому, що учень може безпосередньо бачити результат впливу зміни тих чи інших параметрів на стан чи поведінку об'єкта.

Часто в учнів існує проблема розвитку просторового мислення. Особливо помітним це стає під час вивчення стереометрії. Використання динамічного програмного середовища GeoGebra допоможе учням самим побудувати будь-яку об'ємну геометричну фігуру, дослідити її властивості залежно від зміни параметрів, а також отримати її розгортку на площині.

Розглянемо алгоритм побудови чотирикутної призми.

Для побудови нам потрібно виконати такі дії:

1. відкриваємо динамічне геометричне середовище GeoGebra;

2. в панелі *Меню* обираємо *Вид – Полотно 3D*, після чого у правій частині вікна з'явиться просторова система координат;

3. на *Панелі Інструментів* обираємо *Многогранник* та малюємо довільний чотирикутник. Далі обираємо *Витиснути призму* (Рис. 1). Для побудови розгортки призми використовуємо інструмент *Розгортка* (Рис. 2).

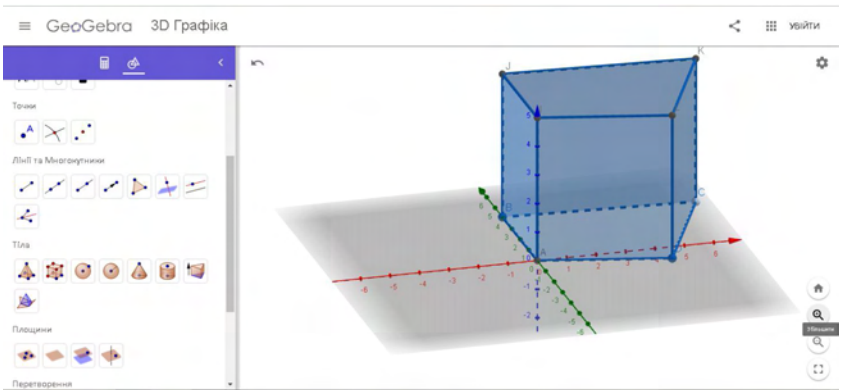


Рис. 1 Побудова призми в GeoGebra

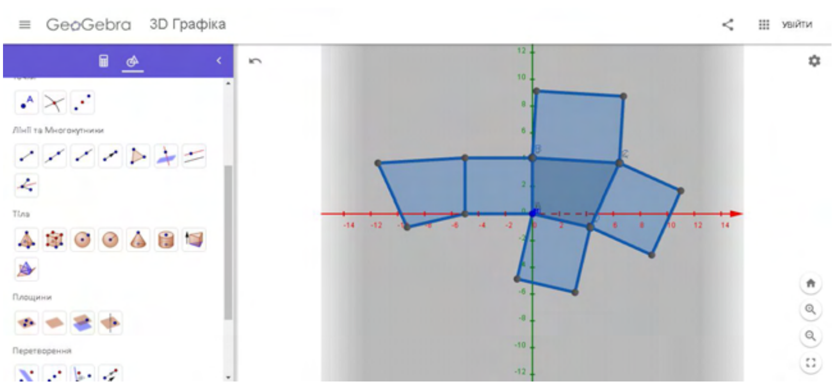


Рис. 2. Побудова розгортки призми в GeoGebra

Отже, динамічне програмне середовище GeoGebra є сучасним засобом навчання математики, що сприяє поліпшенню якості навчального процесу, забезпечує візуалізацію освітньої інформації, посилює мотивацію, розвиває дослідницькі здібності учнів тощо. Цей пакет динамічної математики є гарним помічником для вивчення геометрії в школі, адже значно покращує процес засвоєння навчального матеріалу й робить його цікавим та наочним.

Література:

1. GeoGebra. Загальна інформація [Електронний ресурс] / В.В. Пікалова. – Сайт кафедри інформатики Харківського національного педагогічного університету імені Г.С. Сковороди. – Режим доступу: http://kafinfo.org.ua/geogebra
2. Горошко Ю.В. Використання комп'ютерних програм для створення динамічних моделей при вивченні математики / Ю.В. Горошко, Є.Ф. Вінниченко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: зб. наук. праць / К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2006. – № 4 (11). – С. 56-62.
3. GeoGebra [Electronic resource]. – 2010. – Mode of access: http://www.geogebra.org

Науковий керівник: канд. пед. наук, асистент Соя Олена Миколаївна

УДК 004.4

Шелест Оксана

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

ІСТОРІЯ СТВОРЕННЯ МОВИ ПРОГРАМУВАННЯ С++

Анотація: *У статті розглядається історія створення мови програмування С++, її особливості та переваги над мовою програмування С.*

Ключові слова: *мова програмування високого рівня, С, С++.*

Annotation: *The article deals with the history of creating the C ++ programming language, its features and advantages over the programming language C.*

Key words: *high level programming language, C, C ++.*

Мова програмування високого рівня С++ була розроблена програмістом Б'єрном Страуструпом в 1979 році та початково отримала назву «С з класами». Згодом Страуструп перейменував мову на С++ у 1983 р. Базується вона на мові С. Вперше описана стандартом ISO/IEC 14882:1998, найбільш актуальним же є стандарт ISO/IEC 14882:2014.

У 1990-х роках С++ стала однією з найуживаніших мов програмування загального призначення. Мову використовують для системного програмування, розробки програмного забезпечення, написання драйверів, потужних серверних та клієнтських програм, а також для розробки розважальних програм, наприклад, відеоігор. С++ суттєво вплинула на інші популярні сьогодні мови програмування: C# та Java. [1]

При створенні С++ прагнули зберегти сумісність з мовою С. Тому С++ має синтаксис, заснований на синтаксисі С. Більшість програм на С справно працюватимуть і з компілятором С++.

Нововведеннями С++ порівняно з С є:

- підтримка об'єктно-орієнтованого програмування через класи;
- підтримка узагальненого програмування через шаблони;
- доповнення до стандартної бібліотеки;
- додаткові типи даних;
- обробка винятків;
- простори імен;
- вбудовані функції;

- перевантаження операторів;
- перевантаження імен функцій;
- посилання і оператори управління вільно розподіленою пам'яттю.

У 1998 році ратифіковано міжнародний стандарт мови С++: ISO/IEC 14882 «Standard for the C++ Programming Language». Поточна версія цього стандарту — ISO/IEC 14882:2011. [2]

Для того щоб вивчити мову програмування С, зовсім не обов'язково знати якусь іншу мову програмування. С є простою і зрозумілою мовою, все завдяки її зручному синтаксису. Звичайно, для початківців програмістів, частина коду написана на С, може бути менш зрозумілою, ніж еквівалентний код, написаний іншою мовою. Це пов'язано з тим, що С інтенсивно використовує спеціальні символи ({} [] * & |! і т. д.), замість інтуїтивно зрозумілих англійських слів. Спеціальні символи просто необхідно один раз запам'ятати і все життя користуватися. Крім того, спрощення інтерфейсу введення / виводу в С++ в порівнянні з мовою С, а також стандартна бібліотека шаблонів (STL), роблять обмін і маніпулювання даними в програмі досить простими операціями. При цьому мова С не втрачає свою потужність. [3]

Є дуже багато способів вивчення С, головне щоб було бажання. І ще, все залежить від часу, який буде виділятись на вивчення С. Якщо часу багато, то можна вивчати С по самовчителях, підручниках або книгах. Так можна з нуля поетапно напрацювати хорошу базу знань з С . Якщо ж ви не можете багато приділяти часу на вивчення С, то ваш спосіб вивчення С – це інтернет. Заходьте на різні сайти, читайте статті, пишіть програми проходите тестування і задавайте питання.

Мова С є об'єктно-орієнтованою мовою програмування. Це модель програмування (парадигма), основна концепція якої – розглядати кожен компонент в програмуванні як об'єкт, зі своїми властивостями і методами. Дана парадигма є заміною структурного програмування, де акцент був зроблений на процедури. [4]

Зауважимо, що ніхто не володіє правами на мову програмування С. Будь-який бажаючий може використовувати мову С ++ без всяких ліцензій.

Стандартом мови С є стандарт ANSI-C, який був складений і опублікований міжнародними організаціями стандартизації ANSI / ISO. Але перш, ніж цей стандарт був опублікований, С вже широко використовувалась, і тому існує багато кодів, які не відповідають стандарту ANSI-C .

Мова C++ багато в чому є надмножиною С. Нові можливості C++ включають оголошення у вигляді виразів, перетворення типів у вигляді функцій, оператори new і delete, тип bool, посилання, розширене поняття константності та змінності, функції, що підставляються, аргументи за замовчанням, перевизначення, простори імен, класи (включаючи і всі пов'язані з класами можливості, такі як успадкування, функції-члени (методи), віртуальні функції, абстрактні класи і конструктори), перевизначення операторів, шаблони, обробку винятків, динамічну ідентифікацію і багато що інше. C++ є також мовою строгої типізації і накладає більше вимагань щодо дотримання типів, порівняно з С. [5]

У C++ з'явилися коментарі у вигляді подвійної косої риски («//»), які були в попереднику С — мові BCPL.

Деякі особливості C++ пізніше були перенесені в С, наприклад ключові слова const і inline, оголошення в циклах for і коментарі в стилі C++ («//»). У пізніших реалізаціях С також були представлені можливості, яких немає в C++, наприклад макроси vararg і покращена робота з масивами-параметрами. [6]

Отже, однією з переваг мови С++ є швидкодія. Швидкість роботи програм на С++ практично не поступається програмам на С, хоча програмісти отримали в свої руки нові можливості і нові засоби. На мові С++ розробляють програми для найрізноманітніших платформ і систем. Тут є можливість роботи на низькому рівні з пам'яттю, адресами, портами (що, при необережному використанні, може легко перетворитися на недолік.) До переваг також належить можливість реалізації узагальнених алгоритмів для різних типів даних, їх спеціалізація, і обчислення на етапі компіляції, з використанням шаблонів. В С++ підтримуються різні стилі та технології програмування, включаючи традиційне директивне програмування.

Література:

1. Джамаса К. Учимся програмировать на языке С++: Пер. С англ. / К. Джамаса. – М.: Мир, 1997. – 320с.
2. Шпак З.Я. Програмування мовою С / З.Я. Шпак. – Львів: Оріяна-Нова, 2006. – 432 с.
3. Культин Н.Б. С++ / Н.Б. Культин. – СПб:БХВ-Петербург, 2005. – 288с.
4. Шилдт Г. Полный справочник по С++=C++:The Complete Reference. 4-е изд / Г. Шилдт. – М. Вильямс, 2006. – 800с.
5. CppStudio [Електронний ресурс] – режим доступу: http://cppstudio.com/uk/post/2025/.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Бак Сергій Миколайович

УДК: 512.552

Яремчук Аліна

студентка факультету математики,

фізики і технологій

Вінницького державного педагогічного університету

імені Михайла Коцюбинського

НОРМОВАНА АЛГЕБРА ГІПЕРКОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ V_3

Анотація: *У роботі означено алгебру гіперкомплексних чисел* $V_3^{''}$ *та наділено її нормою. Мета цієї роботи – наділити алгебру топологічною структурою,щоб мати можливість будувати в ній аналітичну частину.*

Ключові слова: *Гіперкомплексні числа, нормована алгебра, алгебра гіперкомплексних чисел.*

Annotation: *The paper describes the algebra of hypercomplex numbers and its norm. The purpose of this work is to give algebra a topological structure in order to be able to construct an analytic part in it.*

Keywords: *Hypercomplex numbers, normalized algebra, algebra of hypercomplex numbers.*

Різноманітне і успішне застосування комплексних чисел спонукало математиків вже в перше десятиліття XIX ст. задуматися над питанням, чи не можна подібно до того, як комплексні числа будуються у вигляді пар дійсних чисел, побудувати вищі комплексні числа, зображені трійками, четвірками і т. д. дійсних чисел. Починаючи з середини минулого століття було досліджено багато різних приватних систем таких вищих комплексних або гіперкомплексних чисел, а в кінці минулого і першій половині поточного століття була розроблена загальна теорія гіперкомплексні чисел, що знайшла ряд важливих застосувань в суміжних галузях математики і фізики.

Візьмемо арифметичний лінійний простір R^3 над полем P, тобто множину R^3 наділену додаванням

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

і множенням на число

$$\alpha(x.y.z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z) .$$

Добутком елементів $(x_1, y_1, z_1)\ i\ (x_2, y_2, z_2)$ з R^3 назвемо трійку

$$(x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2) := (x_1x_2, x_1y_2 + y_1x_2 - y_1y_2 - y_1z_2, x_1z_2 + z_1x_2 - z_1y_2 - z_1z_2).$$

R^3 відносно цих трьох операцій є алгеброю рангу 3. Якщо за базис взяти елементи

$$e_0 = (1,0,0), e_1 = (0,1,0), e_2 = (0,0,1),$$

то кожен елемент можна подати у вигляді:

$$(x, y, z) = xe_0 + ye_1 + ze_2.$$

Отож, далі будемо мати справу з множиною

$$\{xe_0 + ye_1 + ze_2 | x, y, z \in R\} ,$$

яку будемо позначати $V_3^{"}$, а її елементи $v = xe_0 + ye_1 + ze_2$ будемо називати гіперкомплексними числами, а саму множину $V_3^{"}$ - алгеброю гіперкомплексних чисел [1].

Перейдемо до алгебри гіперкомплексних чисел $V_3^{"}$ і на ній означимо функцію

$$f : V_3^{"} \to R$$

за правилом

$$v = xe_0 + ye_1 + ze_2 \to \sqrt{3x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x(y+z)}$$

Теорема 1. Функція $v = xe_0 + ye_1 + ze_2 \to \sqrt{3x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x(y+z)}$ наділяє алгебру $V_3^{"}$ нормою.

Доведення.

Перевіримо, що ця функція задовольняє властивості норми. Оскільки

$$3x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x(y+z) = x^2 + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2xz + z^2 + z^2 =$$
$$= x^2 + y^2 + (x-y)^2 + (x-z)^2 + z^2,$$

то для будь-якого $v = xe_0 + ye_1 + ze_2 \in V_3^{"}$ $f(v) \geq 0$.

$f(v) = 0$, коли $x^2 + y^2 + (x-y)^2 + (x-z)^2 + z^2 = 0$, а це можливо тоді і лише тоді, коли $x = y = z = 0$, тобто коли $v = 0e_0 + 0e_1 + 0e_2$.

Для будь-якого $v \in V_3^{"}$ і будь-якого $\alpha \in R$

$$f(\alpha v) = f(\alpha x e_0 + \alpha y e_1 + \alpha z e_2) = \sqrt{3(\alpha x)^2 + 2(\alpha y)^2 + 2(\alpha z)^2 - 2\alpha x \alpha y + 2\alpha x \alpha z} =$$
$$= \sqrt{\alpha^2 (3x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x(y+z))} = |\alpha| f(v).$$

Скориставшись нерівністю Коші-Буняковського

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2},$$

де $x_i, y_i \in R \; (i = \overline{1,n})$, дістанемо для будь-яких $v_1 = x_1 e_0 + y_1 e_1 + z_1 e_2, v_2 = x_2 e_0 + y_2 e_1 + z_2 e_2$

$$f(v_1+v_2)=f((x_1+x_2)e_0+(y_1+y_2)e_1+(z_1+z_2)e_2=$$
$$=\sqrt{3(x_1+x_2)^2+2(y_1+y_2)^2+2(z_1+z_2)^2-2(x_1+x_2)(y_1+y_2-(z_1+z_2))}=$$
$$=\sqrt{3x_1^2+2y_1^2+2z_1^2-2x_1(y_1+z_1)}+\sqrt{3x_2^2+2y_2^2+2z_2^2-2x_2(y_2+z_2)}=$$
$$=f(v_1)+f(v_2).$$

Таким чином, функція f наділяє алгебру $V_3^{''}$ нормою ■

Отже, алгебра гіперкомплексних чисел $V_3^{''}$ є нормований простір, норма якого означена таким чином

$$\|v\|=\|xe_0+ye_1+ze_2\|=\sqrt{3x^2+2y^2+2z^2-2x(y+z)}$$

Теорема 2. (кільцева властивість норми). Для будь-яких $v_1, v_2 \in V_3^{''}$

$$\|v_1 \cdot v_2\| \le \|v_1\| \cdot \|v_2\|.$$

Доведення.

Очевидно, що нерівність $\|v_1 \cdot v_2\| \le \|v_1\| \cdot \|v_2\|$ еквівалентна нерівності $(\|v_1 \cdot v_2\|)^2 \le (\|v_1\|)^2 \cdot (\|v_2\|)^2$.

Скористаємося нерівністю Коші-Буняковського

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2},$$

де $x_i, y_i \in R\ (i=\overline{1,n})$, яка еквівалентна нерівності

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i y_i|\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}y_i^2 .$$

Нехай $v_1 = x_1e_0+y_1e_1+z_1e_2,\ v_2 = x_2e_0+y_2e_1+z_2e_2$. Тоді

$$\|v_1^2 \cdot v_1^2\| = \|(x_1e_0+y_1e_1+z_1e_2)(x_2e_0+y_2e_1+z_2e_2)\| = \|v_1\| \cdot \|v_2\|$$

Що і треба було довести ■

Будь-яка норма породжує метрику. Отже, нормована алгебра гіперкомплексних чисел $V_3^{''}$ є метричний простір.

Одержані результати дозволяють далі розбудовувати теорію в алгебрі $V_3^{''}$. Адже тепер можна ввести поняття границі послідовності, функції гіперкомплексної змінної, неперервності і диференційовності такої функції.

Література:

1. Вотякова Л. А. Про один метод побудови алгебри гіперкомплексних чисел // Десята міжнародна конференція ім. Академіка М. Кравчука. Матеріали конференції. – К. – 2004. – 334 с.

2. Давидов Н. А. Курс математичного аналізу, ч.3. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища школа, Головне в-во, 1979. – 384 с.

3. Калужнин Л. А. Введение в общую алгебру. – 1973. – 447 с.

4. Хорн Р., Джонсон У. Матричный анализ: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 665 с.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Вотякова Леся Андріївна

Зміст

Вінницький державний педагогічний університет

імені Михайла Коцюбинського

Кафедра математики та інформатики

Науково-популярний альманах

«Математика та інформатика навколо нас»

Випуск 2

Підписано до друку 21.12.2018 р.

Папір офсетний. Друк різографічний.

Формат 60х84/16.

Ум. друк. арк. 13

Наклад 100 прим.

Замовлення №__

Виготовлювач ФОП Рогальська І.О.

м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 145

тел. (0432) 43-51-39, 65-80-80

E-mail: dilo_vd@ukr.net

Свідоцтво ВОЗ № 635744 від 01.03.2010 р.