УДК 517.97

С. М. Бак

ІСНУВАННЯ ПЕРІОДИЧНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В СИСТЕМІ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ, РОЗМІЩЕНИХ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

S. M. Bak. *Existence of periodic travelling waves in systems of nonlinear oscillators on 2D-lattice*, Mat. Stud. **35** (2011), 60–65.

It is considered the system of differential equations that describes the dynamics of an infinite system of linearly coupled nonlinear oscillators on 2D-lattice. Results on existence of the periodic travelling waves are obtained.

С. Н. Бак. *Условия существования периодических бегущих волн в системе нелинейных осцилляторов на двумерной решетке* // Мат. Студії. – 2011. – Т.35, №1. – С.60–65.

Рассматривается система дифференциальных уравнений, описывающая динамику бесконечной системы линейно связанных нелинейных осцилляторов на двумерной решетке. Получен результат о существовании периодических бегущих волн.

1. Вступ. У цій статті вивчаються рівняння, що описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на плоскій цілочисловій гратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n,m)-го осцилятора в момент часу t. Припускається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = -U'(q_{n,m}) + c_1(q_{n+1,m} + q_{n-1,m} - 2q_{n,m}) + c_2(q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 2q_{n,m}) \qquad (1)$$

$(n,m) \in \mathbb{Z}^2$. Рівняння (1) — нескінченна система звичайних диференціальних рівнянь.

Подібні системи є цікавими з огляду на численні застосування у фізиці ([6], [8], [9]). У статтях [1], [7], [12] вивчались біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів. Огляд відомих результатів про такі системи зроблено в [14].

У статті [16] вивчались періодичні розв'язки для системи осциляторів на двовимірних гратках, а в статтях [10] та [11] — біжучі хвилі в подібних системах дещо іншого типу та іншими методами. Зокрема, в [10] розглядалась система із непарною 2π–періодичною нелінійністю.

У статті [2] за допомогою теореми про гірський перевал і методу періодичних апроксимацій досліджено питання існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль для системи осциляторів на двовимірних гратках, а також встановлено експоненціальну оцінку профілю відокремленої біжучої хвилі.

У цій статті отримано умови існування періодичних біжучих хвиль за допомогою теореми про зачеплення. Дана робота узагальнює результати, отримані автором в статтях [1], [2] і [7].

2010 *Mathematics Subject Classification:* 35Q51, 35Q55, 39A12.

2. Постановка задачі. Розглянемо систему осциляторів з потенціалом
$$U(r) = -\frac{a}{2}r^2 + V(r).$$
Тоді рівняння (1) набуває вигляду
$$\ddot{q}_{n,m} = c_1\Delta_{(1)}q_{n,m} + c_2\Delta_{(2)}q_{n,m} + aq_{n,m} - V'(q_{n,m}), \tag{2}$$
де $(\Delta_{(1)}q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} - 2q_{n,m}$ і $(\Delta_{(2)}q)_{n,m} = q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 2q_{n,m}$ — дискретні оператори Лапласа відповідно за змінними n і m. Якщо $c_1 = c_2 = 1$, то
$$c_1(\Delta_{(1)}q)_{n,m} + c_2(\Delta_{(2)}q)_{n,m} = (\Delta q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}$$
— двовимірний дискретний оператор Лапласа.

Біжуча хвиля має вигляд $q_{n,m}(t) = u(n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct)$ і для її профілю $u(s)$, де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$, отримаємо рівняння
$$c^2u''(s) = c_1(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s)) + \\ + c_2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) - 2u(s)) + c_0u(s) - V'(u(s)). \tag{3}$$
При цьому *профілем хвилі* називаємо функцію неперервного аргументу $u(s)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Стала $c \neq 0$ — *швидкість хвилі.* Якщо $c > 0$, то хвиля зміщується праворуч, а якщо $c < 0$ — ліворуч. Цікавими є нетривіальні хвилі з профілем, який не дорівнює тотожно нулю. Зауважимо, що профіль періодичної біжучої хвилі задовольняє умову
$$u(s + 2k) = u(s), \ s \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Відмітимо, що у випадку, коли $\varphi \equiv 0, \pi/2 \mod \pi$, хвиля поширюється вздовж відповідної координатної осі. Такі хвилі зводяться до хвиль на одновимірній гратці, які досліджено в [1], [7]. Результати цієї статті містять, як часткові результати з [1], [7], і узагальнюють результати статті [2].

Скрізь далі під *розв'язком рівняння* (3) розуміємо функцію $u(s)$ з класу $C^2(\mathbb{R})$, яка задовольняє рівняння (3) для всіх $s \in \mathbb{R}$.

3. Варіаційне формулювання задачі. Скрізь нижче припускаємо, що потенціал V задовольняє умову

(h) *функція $V(r)$ неперервно диференційовна, $V(0) = V'(0) = 0$ і $V'(r) = o(r)$, при $r \to 0$ та існує $\mu > 2$ таке, що $0 < \mu V(r) \leq V'(r)r, \quad r \neq 0$.*

Зазначимо, що в рівняння (3) швидкість c входить в квадраті. Звідси випливає, що якщо функція $u(t)$ задовольняє рівняння (3), то існують дві біжучі хвилі з даним профілем та швидкостями $\pm c$. Одна з них рухається вправо, інша — вліво.

З рівнянням (3) та умовою (4) пов'язується функціонал J_k
$$J_k(u) = \int_{-k}^{k}\Big\{\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - \frac{1}{2}(u(s+\cos\varphi) - u(s))^2 - \\ -\frac{1}{2}(u(s+\sin\varphi) - u(s))^2 + \frac{c_0}{2}u^2(s) - V(u(s))\Big\}ds, \tag{5}$$
який визначений на просторі $E_k = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R})\colon u(s+2k) = u(s)\}$ з нормою
$$\|u\|_k = (\|u\|^2_{L^2(-k,k)} + \|u'\|^2_{L^2(-k,k)})^{1/2} = \Big(\int_{-k}^{k}(|u(s)|^2 + |u'(s)|^2)ds\Big)^{1/2}.$$
Тобто E_k — простір Соболєва $2k$-періодичних функцій. Нагадаємо, що за теоремою вкладення $E_k \subset C([-k,k])$, де $C([-k,k])$ — простір неперервних функцій на $[-k,k]$.

Далі нам знадобляться наступні дві леми, отримані в статті [2].

Лема 1. *У зроблених вище припущеннях, J_k — функціонал з класу C^1 на E_k, а його похідна для $u, h \in E_k$ виражається формулою*

$$\langle J_k'(u), h\rangle = \int_{-k}^{k}\Big\{c^2u'(s)h'(s) + c_1(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s))h(s) +$$
$$+c_2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) - 2u(s))h(s) + au(s)h(s) - V'(u(s))h(s)\Big\}ds. \qquad (6)$$

Лема 2. *Критичні точки функціоналу J_k є C^2-розв'язками рівняння (3), що задовольняють умову (4).*

Для спрощення записів позначимо

$$(Au)(s){:=}u(s+\cos\varphi) - u(s), \quad (Bu)(s){:=}u(s+\sin\varphi) - u(s).$$

4. Основні результати. За допомогою теореми про зачеплення встановимо існування нетривіальних періодичних біжучих хвиль з періодичним профілем. За лемою 2, для цього достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k. Зазначимо, що $u = 0$ завжди є тривіальною критичною точкою та дає тривіальну біжучу хвилю, яка тотожно дорівнює нулю.

Основним результатом статті є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконується умова (h) і $a > 0$. Тоді для будь-яких $k \geq 1$ і $c > 0$ рівняння (3) має розв'язок u, що задовольняє умову (4). Тобто, існують дві біжучі хвилі з профілем u та швидкостями $\pm c$.*

Сформулюємо теорему про зачеплення ([14], [15], [17]).

Нехай H — гільбертів простір, $H = Y \oplus Z$. Нехай також $\rho > r > 0$ і $z \in Z\colon \|z\| = r$. Позначимо $M{:=}\{u = y + \lambda z\colon y \in Y, \|u\| \leq \rho, \lambda \geq 0\}$ і $M_0{:=}\{u = y + \lambda z\colon y \in Y, \|u\| = \rho$ і $\lambda \geq 0,$ або $\|u\| \leq \rho$ і $\lambda = 0\}$, тобто $M_0 = \partial M$ — межа M. Нехай $N{:=}\{u \in Z\colon \|u\| = r\}$. Розглянемо функціонал φ на H і припустимо, що

$$\beta{:=}\inf\{\varphi(u)\colon u \in N\} > \alpha{:=}\sup\{\varphi(u)\colon u \in M_0\}.$$

В такому випадку говорять, що функціонал φ відповідає геометрії зачеплення.

Теорема 2 (Про зачеплення). *Нехай φ — функціонал класу C^1 на гільбертовому просторі H, що відповідає геометрії зачеплення та задовольняє умову Пале–Смейла:*

(PS) *якщо послідовність $u_n \in H$ така, що $\varphi'(u_n) \to 0$ ($n \to \infty$) і $\varphi(u_n)$ обмежена, то вона містить збіжну підпослідовність.*

Нехай $b{:=}\inf\{\sup\{\varphi(\gamma(u))\colon u \in M\}\colon \gamma \in \Gamma\}$, де $\Gamma{:=}\{\gamma \in C(M,H)\colon \gamma = \mathrm{id}$ на $M_0\}$. Тоді b — критичне значення φ і $\beta \leq b \leq \sup\{\varphi(u)\colon u \in M\}$.

Почнемо з умови Пале-Смейла.

Лема 3. *За умов теореми 1 функціонал J_k задовольняє умову Пале–Смейла.*

Доведення. Нехай $u_n \in E_k$ — послідовність Пале-Смейла на деякому рівні b (b — критичне значення функціоналу J_k). Виберемо $\beta \in (\mu^{-1}; 2^{-1})$. Тоді для достатньо великих n маємо

$$b + 1 + \beta\|u_n\|_k \geq J_k(u_n) - \beta\langle J_k'(u_n), u_n\rangle =$$
$$= \Big(\frac{1}{2} - \beta\Big)\int_{-k}^{k}(c^2|u_n'|^2 - c_1|Au_n|^2 - c_2|Bu_n|^2 + a|u_n|^2)ds - \int_{-k}^{k}(V(u_n) - \beta V'(u_n)u_n))ds.$$

Якщо $c_1 \leq 0$ і $c_2 \leq 0$, то

$$J_k(u_n) - \beta\langle J_k'(u_n), u_n\rangle \geq \Big(\frac{1}{2} - \beta\Big)\int_{-k}^{k}(c^2|u_n'|^2 + a|u_n|^2)ds \geq \Big(\frac{1}{2} - \beta\Big)\alpha_0\|u_n\|_k^2,$$

де $\alpha_0 = \min\{c^2; a\}$. Отже, $b + 1 + \beta\|u_n\|_k \geq \Big(\frac{1}{2} - \beta\Big)\alpha_0\|u_n\|_k^2$, а це і означає, що (u_n) — обмежена послідовність в E_k.

Якщо $c_1 > 0$ і $c_2 \leq 0$, то

$$J_k(u_n) - \beta\langle J_k'(u_n), u_n\rangle \geq \Big(\frac{1}{2} - \beta\Big)(c^2\|u_n'\|_{L^2}^2 - c_1\|Au_n\|_{L^2}^2 +$$
$$+a\|u_n\|_{L^2}^2) + C(\beta\mu - 1)\|Au_n\|_{L^\mu}^\mu - C_0.$$

Оскільки для $\mu > 2$ маємо $\|Au_n\|_{L^2}^2 \leq C\|Au_n\|_{L^\mu}^2 \leq K(\varepsilon) + \varepsilon\|Au_n\|_{L^\mu}^\mu$, де $K(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то

$$b + 1 + \beta\|u_n\|_k \geq \Big(\frac{1}{2} - \beta\Big)c^2\|u_n'\|_{L^2}^2 + \Big(\frac{1}{2} - \beta\Big)a\|u_n\|_{L^2}^2 - \Big(\frac{1}{2} - \beta\Big)c_1\varepsilon\|Au_n\|_{L^\mu}^\mu -$$
$$-\Big(\frac{1}{2} - \beta\Big)c_1K(\varepsilon) + C(\beta\mu - 1)\|Au_n\|_{L^\mu}^\mu - C_0.$$

Вибираючи ε достатньо малим, отримаємо

$$b + 1 + \beta\|u_n\|_k \geq \Big(\frac{1}{2} - \beta\Big)(c^2\|u_n'\|_{L^2}^2 + a\|u_n\|_{L^2}^2) + C_1\|Au_n\|_{L^\mu}^\mu - C_0 \geq$$
$$\geq \Big(\frac{1}{2} - \beta\Big)\alpha_1\|u_n\|_k^2 + C_1\|Au_n\|_{L^\mu}^\mu - C_0,$$

де $\alpha_1 = \min\{c^2; a\}$. Оскільки $\beta\mu - 1 > 0$, то $C_1 = C(\beta\mu - 1) > 0$, звідки маємо $b + 1 + \beta\|u_n\|_k \geq \Big(\frac{1}{2} - \beta\Big)\alpha_1\|u_n\|_k^2 - C_0$. Остання нерівність і доводить обмеженість u_n.

Подібно міркуємо і у випадках, коли $c_1 \leq 0$, $c_2 > 0$ та $c_1 > 0, c_2 > 0$.

Оскільки (u_n) — обмежена в гільбертовому просторі E_k, то переходячи до підпослідовності маємо, що $u_n \to u$ слабко в E_k, а отже, $Au_n \to Au$ і $Bu_n \to Au$ слабко в E_k, і сильно в $L^2(-k; k)$ (згідно компактності соболєвського вкладення). Прямі обчислення дають

$$c^2\|u_n - u\|_k^2 = \int_{-k}^{k}(c^2|u_n' - u'|^2 + c^2|u_n - u|^2)ds =$$
$$= \langle J_k'(u_n) - J_k'(u), u_n - u\rangle + c_1\|Au_n - Au\|_{L^2}^2 + c_2\|Bu_n - Bu\|_{L^2}^2 -$$
$$-a\|u_n - u\|_{L^2}^2 + \int_{-k}^{k}(V'(u_n) - V'(u))(u_n - u)ds.$$

Очевидно, що всі доданки в правій частині збігаються до нуля. Перший та останній згідно слабкої збіжності, а інші два згідно сильної збіжності в $L^2(-k; k)$.
Отже, $\|u_n - u\|_k \to 0$, що і доводить лему. □

Далі нам знадобиться лема, доведена в [7].

Лема 4. *Якщо V задовольняє умову (h), то існують такі сталі $d > 0$ та $d_0 \geq 0$, що*

$$V(r) \geq d|r|^{\mu} - d_0. \tag{7}$$

Лема 5. *За умов теореми 1 функціонал J_k відповідає геометрії зачеплення.*

Доведення. Розглянемо оператор

$$(Lu)(s) := -c^2 u''(s) + c_1(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s)) + \\ + c_2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) - 2u(s)) + au(s).$$

Оператор L — самоспряжений в $L^2(-k;k)$, обмежений знизу та має дискретний спектр, який накопичується біля $+\infty$, тобто нижче нуля власних чисел є скінченна кількість. Власні значення та власні функції можна обчислити. Нагадаємо, що всі власні значення λ_j із несталими власними функціями є подвійними. Позначимо через $h_j^{\pm} \in E_k$ лінійно незалежні пари власних функцій із власними значеннями λ_j.

Нехай Z — підпростір E_k, утворений функціями $h_j^{\pm}$ з $\lambda_j > 0$ і Y — підпростір E_k, утворений функціями $h_j^{\pm}$ з $\lambda_j \leq 0$. Відмітимо, що $\dim Y < \infty$. Легко перевірити, що $Y \perp Z$ і $E_k = Y \oplus Z$.

Позначимо через Q_k квадратичну частину функціоналу J_k

$$Q_k(u) = \frac{1}{2}\int_{-k}^{k} (c^2|u'|^2 - c_1|Au|^2 - c_2|Bu|^2 + a|u|^2)ds.$$

Легко бачити, що $Q_k(y+z) = Q_k(y) + Q_k(z)$, де $y \in Y, z \in Z$.

Зауважимо, що квадратична форма Q_k додатно визначена на Z, тобто $Q_k(u) \geq \alpha\|u\|_k^2$, з $\alpha > 0$. З умови (h) випливає, що для деякого $\varepsilon > 0$ існує таке $r_0 > 0$, що $|V(r)| \leq \varepsilon r^2$, при $|r| \leq r_0$. Тоді

$$J_k(u) \geq Q_k(u) - \varepsilon \int_{-k}^{k} |u|^2 ds \geq Q_k(u) - \varepsilon\|u\|_k^2 \geq \delta\|u\|_k^2,$$

де $\delta > 0$. Отже, $J_k(u) > 0$ на $N = \{u \in Z \colon \|u\|_k = r\}$ з достатньо малим $r > 0$.

Зафіксуємо $z \in Z, \|z\|_k = 1$ та множину $M = \{u = y + \lambda z \colon y \in Y, \|u\|_k \leq \rho, \lambda \leq 0\}$. Доведемо, що $J_k(u) \leq 0$ на $M_0 = \partial M$ для достатньо великих ρ.

Нагадаємо, що $M = \{u = y + \lambda z \colon y \in Y, \|u\|_k = \rho$ і $\lambda \geq 0$, або $\|u\|_k \leq \rho$ і $\lambda = 0\}$. Маємо

$$J_k(y+\lambda z) = Q_k(y) + \lambda^2 Q_k(z) - \int_{-k}^{k} V(y+\lambda z)ds.$$

За лемою 4 маємо, що існують такі константи $d > 0$ і $d_0 \geq 0$, що правильна нерівність (7) $\mu > 2$. Тоді, враховуючи, що $Q_k(y) \leq 0$

$$J_k(y+\lambda z) \leq \lambda^2\gamma_0 + 2kd_0 - d\|y+\lambda z\|_{L^{\mu}}^{\mu},$$

де $\gamma_0 = Q_k(z)$. Оскільки

$$\rho^2 = \|y+\lambda z\|_k^2 = \|y\|_k^2 + \lambda^2,$$

то $\lambda^2 \leq \rho^2$. До того ж, у скінченновимірних просторах всі норми еквівалентні. Отже,

$$\|y+\lambda z\|_{L^{\mu}} \geq c\|y+\lambda z\|_k = c\rho \text{ і } J_k(y+\lambda z) \leq \gamma_0\rho^2 + 2kd_0 - d\rho^{\mu}.$$

Оскільки $\mu > 2$, то права частина від'ємна, якщо ρ — достатньо велике. Отже, $J_k(y+\lambda z) \leq 0$. Якщо $u \in M_0, \|u\|_k \leq \rho$ і $\lambda = 0$, то $u = y \in Y$ і, очевидно, що $J_k(u) \leq 0$. Отже, функціонал J_k відповідає геометрії зачеплення. □

Доведення теореми 1. Лема 3 та лема 5 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про зачеплення. Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in E_k$. За лемою 2, u — C^2-розв'язок задачі (3), (4). Теорему доведено. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

1. Бак С.М. *Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів*// Mat. Stud. – 2006. – T.26, №2. – C. 140–153.
2. Бак С.Н., Панков А.А. *Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках*// Український математичний вісник. – 2010. – T.7, №2. – C. 154–175.
3. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972. – 415 с.
4. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1956. – 392 с.
5. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: В 4-х т. – М.: Мир, 1978, Т.2. – 395 с.
6. Aubry S. *Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization*// Physica D. – 1997. – V.103. – P. 201–250.
7. Bak S.M. *Peridoc traveling waves in chains of oscillators*// Communications in Mathematical Analysis. – 2007. – V.3, №1. – P. 19–26.
8. Braun O.M., Kivshar Y.S. *Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model*// Physics Repts. – 1998. – V.306. – P. 1–108.
9. Braun O.M., Kivshar Y.S. The Frenkel–Kontorova model. – Berlin: Springer, 2004. – 427 p.
10. Feckan M., Rothos V. *Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions*// Nonlinearity. – 2007. – V.20. – P. 319–341.
11. Friesecke G., Matthies K. *Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice*// Discrete and continuous dynamical systems. – 2003. – V.3, №1. – P. 105–114.
12. Iooss G., Kirchgässner K. *Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators*// Commun. Math. Phys. – 2000. – V.211. – P. 439–464.
13. Pankov A. *Periodic nonlinear Schrödinger equation with an application to photonic crystals*// Milan J. Math. – 2005. – V.73. – P. 259–287.
14. Pankov A. Traveling waves and periodic oscillations in Fermi-Pasta-Ulam lattices. — London–Singapoore: Imperial College Press, 2005. – 196 p.
15. Rabinowitz P. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. – Providence, R. I.: American Math. Soc., 1986. – 100 p.
16. Srikanth P. *On periodic motions of two-dimentional lattices*// Functional analysis with current applications in science, technology and industry. – 1998. – V.377. – P. 118–122.
17. Willem M. Minimax theorems. — Boston, Birkhäuser, 1996. – 162 p.

Вінницький державний педагогічний університет ім. М. Коцюбинського
sergiy.bak@gmail.com

Надійшло 27.06.2070