УДК 517.97

С. М. Бак

ІСНУВАННЯ СТОЯЧИХ ХВИЛЬ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА ІЗ НАСИЧУВАНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

S. M. Bak. *Existence of standing waves in discrete nonlinear equation of Shrödinger type with saturable nonlinearity*, Mat. Stud. **33** (2010), 78–84.

In this paper we obtained results on existence of standing waves in discrete nonlinear equation of Shrödinger type with saturable nonlinearity. We consider two types of solutions: with periodic amplitude and vanishing at infinity. Calculus of variations and Nehari manifold are employed to establish the existence of these solutions.

С. Н. Бак. *Условия существования стоячих волн для дискретного нелинейного уравнения типа Шредингера с насыщаемой нелинейностью* // Мат. Студiї. – 2010. – Т.33, №1. – С.78–84.

В данной статье получены условия существования стоячих волн для дискретного нелинейного уравнения типа Шредингера с насыщаемой нелинейностью. Рассмотрены два вида решений: с периодической амплитудой и амплитудой, которая сходится к нулю на бесконечности. Для получения условий существования таких решений реализован вариационный подход с использованием многообразия Нехари.

1. Вступ. У даній статті вивчається дискретне нелінійне рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю

$$\dot{\psi}_n - a_n\psi_{n+1} - a_{n-1}\psi_{n-1} - b_n\psi_n + \frac{\mu|\psi_n|^2}{1+|\psi_n|^2} = 0, \tag{1}$$

де $\mu \neq 0, a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

Розглядатимемо так звані *стоячі хвилі,* тобто розв'язки вигляду

$$\psi_n = \exp(-i\omega t)u_n, \tag{2}$$

де амплітуда $u_n \in \mathbb{R}$. Тоді, підставивши розв'язок (2) в рівняння (1), матимемо рівняння

$$Au_n - \omega u_n = f(u_n), \tag{3}$$

де $f(u_n) = \frac{\mu u_n^3}{1+u_n^2}, \mu \neq 0$ і $(Au)_n = a_n u_{n+1} + a_{n-1}u_{n-1} + b_n u_n$.

Подібні рівняння є цікавими з огляду на численні фізичні застосування ([4], [6]). Особливо цікавими є рівняння вигляду (1) з оператором

$$(Au)_n = -u_{n+1} - u_{n-1} + (2+v_n)u_n = -\triangle u_n + v_n u_n,$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 35Q51, 35Q55, 39A12.

де $\triangle u_n = u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n$ — одновимірний дискретний оператор Лапласа і v_n — задана дійсна послідовність (потенціал). Такі оператори виникають, наприклад, у нелінійній оптиці. Результати про існування стоячих хвиль у випадку, коли $A = -\triangle$ отримано у недавній роботі [10]. Вкажемо також статті [8], [9], в яких досліджено нелінійні рівняння типу Шредінгера із нелінійністю степеневого типу. Як і в [10], у цій статті використовується варіаційний метод, який ґрунтується на многовиді Нехарі.

Слід відзначити, що варіаційні методи використовувалися і в інших дискретних задачах, таких як ланцюги Фермі-Паста-Улама та ланцюги нелінійних осциляторів ([1, 2, 3, 5, 7]).

2. Постановка задачі та основні припущення. Розглядатимемо рівняння

$$Au_n - \omega u_n = f(u_n), \tag{4}$$

з деякою нелінійністю $f(u_n)$ та два види його розв'язків, які задовольняють відповідно умови

$$u_{n+k} = u_n, \tag{5}$$

$$\lim_{n\to\pm\infty} u_n = 0. \tag{6}$$

Нехай $F(t)$ є первісною функцією для функції $f(t)$, тобто $F(t) = \int_0^t f(s)ds$. Скрізь далі припускаємо, що виконуються наступні умови:

(a_1) *послідовності* $(a_n), (b_n)$ *дійсних чисел періодичні, тобто* $a_{n+N} = a_n, b_{n+N} = b_n$ *і нижньою межею спектра оператора* A *є число* 0;

(a_2) $f(t) = o(t), t \to 0$ *i* $\lim_{t\to\pm\infty} \frac{f(t)}{t} = l < \infty$;

(a_3) $f \in C^1(\mathbb{R})$ *i* $f(t)t < f'(t)t^2, t \neq 0$;

(a_4) $\lim_{t\to\pm\infty}(\frac{1}{2}f(t)t - F(t)) = \infty$.

Зауваження 1. Легко перевірити, що при виконанні умови (a_1) оператор A обмежений і самоспряжений оператор в l^2, а при виконанні умов $(a_2), (a_3)$ функція $\frac{f(t)}{|t|}$ строго зростаюча, тоді як функція $\frac{1}{2}f(t)t - F(t)$ строго зростає при $t \geq 0$ і строго спадає при $t \leq 0$.

Нехай $k \geq 2$ — ціле число. Позначимо

$$Q_k := \{n \in \mathbb{Z}\colon\ -[\tfrac{k}{2}] \leq n \leq k - [\tfrac{k}{2}] - 1\},$$

де $[\cdot]$ — ціла частина числа. Через X_k позначимо простір всіх k-періодичних послідовностей (умова (5)). Це скінченно вимірний простір з нормою $\|u\|_k = (\sum_{n\in Q_k} |u_n|^2)^{\frac{1}{2}}$. Через X позначимо простір l^2 з нормою $\|u\| = (\sum_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|^2)^{\frac{1}{2}}$. Його елементи автоматично задовольняють умову (6). Іноді ми будемо розглядати l^p-норму на X_k

$$\|u\|_{l^p_k} = (\textstyle\sum_{n\in Q_k} |u_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Нагадаємо, що при $1 \leq p \leq q \leq \infty$

$$\|u\|_{l^q_k} \leq \|u\|_{l^p_k}, \|u\|_{l^q} \leq \|u\|_{l^p}. \tag{7}$$

Через L (відповідно L_k) позначимо оператор, який діє в просторі X (відповідно в X_k):

$$L = A - \omega. \tag{8}$$

Оператор L є обмеженим і самоспряженим в просторах X_k та X. Відповідно на цих просторах розглянемо функціонали

$$J_k(u) = \frac{1}{2}(L_k u, u)_k - \sum\nolimits_{n\in Q_k} F(u_n), \tag{9}$$

$$J(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) - \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} F(u_n). \tag{10}$$

Неважко перевірити, що похідні цих функціоналів визначаються формулами

$$\langle J_k'(u), v\rangle = (L_k u, v)_k - \sum\nolimits_{n\in Q_k} f(u_n)v_n, v \in X_k, \tag{11}$$

$$\langle J'(u), v\rangle = (Lu, v) - \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} f(u_n)v_n, v \in X, \tag{12}$$

а їх критичні точки є відповідно k-періодичними розв'язками і l^2-розв'язками рівняння (4).

3. Допоміжні леми. Для початку означимо многовиди Нехарі, які відповідають функціоналам (9) та (10) відповідно

$$N_k := \{v \in X_k | \langle J_k'(v), v\rangle = 0, v \neq 0\} \subset X_k, \quad N := \{v \in X | \langle J'(v), v\rangle = 0, v \neq 0\} \subset X.$$

Введемо позначення $I_k(u) = \langle J_k'(u), u\rangle$ і $I(u) = \langle J'(u), u\rangle$. Це C^1-функціонали, похідні яких визначаються формулами

$$\langle I_k'(u), v\rangle = 2(L_k u, v)_k - \sum\nolimits_{n\in Q_k}(f(u_n) + f'(u_n)u_n)v_n, \tag{13}$$

$$\langle I'(u), v\rangle = 2(Lu, v) - \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}}(f(u_n) + f'(u_n)u_n)v_n. \tag{14}$$

Лема 1. *Нехай виконуються умови (a_1)–(a_4) і $\omega + l > 0, \omega < 0$. Тоді множини N_k та N є непорожніми замкненими C^1-підмноговидами в X_k та X відповідно, на яких похідні $I_k'(u) \neq 0$ та $I'(u) \neq 0$. Крім того, існує $\beta_0 > 0$ таке, що $\|u\|_k \geq \beta_0, u \in N_k$ та $\|u\| \geq \beta_0, u \in N$.*

Доведення. Розглянемо випадок многовиду N_k. Нехай $\delta \in (-\omega, l)$ і E_δ — спектральний підпростір оператора (8) в l_k^2, що відповідає $[0, \delta]$. Оскільки $-\omega \in \sigma(L_k)$, то $E_\delta \neq \{0\}$. Нехай $v \in E_\delta$ і $v \neq 0$. За умовою (a_2)

$$\langle J_k'(tv), tv\rangle = t^2(L_k v, v)_k - \sum\nolimits_{n\in Q_k} f(tv_n)tv_n = t^2(L_k v, v)_k - o(t^2) > 0$$

для достатньо малих $t > 0$. З іншої сторони

$$\langle J_k'(tv), tv\rangle = t^2 \left(L_k v, v)_k - \sum\nolimits_{n\in Q_k} f(tv_n)tv_n \leq t^2(\delta\|v\|_k^2 - \sum\nolimits_{n\in Q_k} \frac{f(tv_n)v_n^2}{tv_n} \right).$$

За умовою (a_2) сума в дужках збігається до $l\|v\|_k^2$, а тому $\langle J_k'(tv), tv\rangle < 0$ для достатньо великих $t > 0$. Тоді існує $t^* > 0$ таке, що $\langle J_k'(t^*v), t^*v\rangle = 0$ і $t^*v \in N_k$. Отже, $N_k \neq \varnothing$.

Нехай $u \in N_k$. З рівностей (9) і (10) та означення N_k маємо

$$\langle I_k'(u), u\rangle = \langle I_k'(u), u\rangle - 2I_k(u) = \sum\nolimits_{n\in Q_k}(f(u_n)u_n - f'(u_n)u_n^2).$$

За умовою (a_3) ця сума є від'ємною. Тому, $I_k'(u) \neq 0$ і за теоремою про неявну функцію N_k є C^1-підмноговидом l_k^2. Замкненість N_k очевидна.

Перейдемо тепер до другої частини леми. Нехай $\varphi(r) = \sup_{|t|\leq r} \frac{f(t)}{t}$. Це зростаюча функція для $r \geq 0$ і згідно (a_2) $\varphi(r) \to 0$ при $r \to 0$. Нехай $u \in N_k$. Зазначимо, що оператор L_k додатно визначений. Тоді з означення многовиду Нехарі і нерівності (7)

$$|\omega|\|u\|_k^2 \le (L_k u, u)_k = \sum_{n\in Q_k} f(u_n)u_n \le \varphi(\|u\|_{l_k^\infty}) \cdot \|u\|_k^2 \le \varphi(\|u\|_k) \cdot \|u\|_k^2.$$

Отже, $\varphi(\|u\|_k) \ge |\omega|$. Оскільки функція φ зростаюча, то знайдеться $\beta_0 > 0$ таке, що $\|u\| \ge \beta_0, u \in N_k$.

Доведення у випадку N аналогічне і навіть дещо простіше. Лему доведено. □

Зауваження 2. Доведення леми показує, що якщо $I_k(v) \le 0 (I(v) \le 0)$, то існує єдине $t^* \in (0; 1]$ таке, що $t^*v \in N_k$ $(t^*v \in N)$, а також лема дає існування такого $v \in X_k (v \in X)$, $v \ne 0$, що $J_k(v) < 0 (J(v) < 0)$.

З (9) та (10) випливає, що на N_k та N відповідно

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{2}I_k(u) = \sum_{n\in Q_k} (\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)), \tag{15}$$

$$J(u) = J(u) - \frac{1}{2}I(u) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\frac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)). \tag{16}$$

Лема 2. *Існує число* $\alpha_0 = \alpha_0(k) > 0$ *таке, що* $J_k(u) \ge \alpha_0$ $(J_k(u) \ge \alpha_0)$ *для всіх* $u \in N_k (u \in N)$.

Доведення. На N_k маємо

$$J_k(u) = J_k(u) - \tfrac{1}{2}I_k(u) = \sum_{n\in Q_k} (\tfrac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)).$$

За лемою 1: $\|u\|_k \ge \beta_0 > 0$. Отже, існує $n_0 \in Q_k$ (залежить від u) і $\delta_0 = \delta_0(k, \beta_0) > 0$ (але не залежить від u) такі, що $|u_{n_0}| \ge \delta_0$. Тоді поклавши $\alpha_0 = \frac{1}{2}f(\delta_0)\delta_0 - F(\delta_0)$, за зауваженням 1 маємо, що $J_k(u) \ge \alpha_0$ для $u \in N_k$.

У випадку J доведення аналогічне. Лему доведено. □

Лема 3. *Якщо* $u \in N_k (u \in N)$, *то функція* $J_k(tu) (J(tu)), t > 0$ *має єдину критичну точку при* $t = 1$.

Доведення. Нехай $\varphi(t) = J_k(tu)$. Знайдемо її похідну

$$\varphi'(t) = (\tfrac{1}{2}(L_k(tu), tu)_k - \sum_{n\in Q_k} F(tu_n))' = (\tfrac{1}{2}t^2(L_k u, u)_k - \sum_{n\in Q_k} F(tu_n))' = t(L_k u, u)_k -$$
$$- \sum_{n\in Q_k} f(tu_n)u_n = t((L_k u, u)_k - \sum_{n\in Q_k} \tfrac{f(tu_n)}{tu_n} u_n^2).$$

Оскільки $\varphi'(1) = (L_k u, u)_k - \sum_{n\in Q_k} f(u_n)u_n = \langle J_k'(u), u\rangle = 0$ на N_k, то $t = 1$ є критичною точкою функції $\varphi(t) = J_k(tu)$. Її єдиність випливає зі строгої монотонності функції $\frac{f(t)}{t}$.

У випадку J доведення аналогічне. Лему доведено. □

За лемою 3 точки мінімуму функціоналів J_k та J відповідно на N_k та N є розв'язками рівняння (4). Тому природно розглянути наступні задачі мінімізації

$$m_k = \inf\{J_k(v) \colon v \in N_k\}, \tag{17}$$

$$m = \inf\{J(v) \colon v \in N\}. \tag{18}$$

Лема 4. *Нехай виконуються умови* (a_1)–(a_4) *і* $l + \omega > 0, \omega < 0$. *Тоді задача (17) має розв'язок.*

Доведення. Нехай $(u^j), u^j \in N_k$ — мінімізуюча послідовність для J_k, тобто $J_k'(u^j) \to m_k$. З рівності (15) маємо

$$J_k(u^j) = \sum_{n\in Q_k}(\tfrac{1}{2}f(u_n^j)u_n^j - F(u_n^j)).$$

Тоді умова (a_4) означає, що $\|u^j\|_{l^\infty}$ обмежена. Оскільки простір X_k є скінченновимірним, а l^∞-норма еквівалентна евклідовій нормі на X_k, то послідовність (u^j) є обмеженою. Переходячи до підпослідовності, ми можемо вважати, що (u^j) збігається до $u \in X_k$. Оскільки множина N_k замкнена і функціонал J_k є неперервним, то ми отримали $u \in N_k$ і $J_k(u) = m_k$. Лему доведено. □

Аналогічну лему для задачі (18) довести складно, а тому для отримання l^2-розв'язку рівняння (4) ми перейдемо до границі при $k \to \infty$. Для того, щоб це здійснити потрібна наступна лема.

Лема 5. *Нехай u^k — k-періодичний розв'язок задачі (17). Тоді послідовності $m_k = J_k(u^k)$ і $\|u^k\|_k$ обмежені.*

Доведення. Нехай $w \in X$ — ненульовий вектор, який належить спектральному підпростору оператора $L = A - \omega$ в X, що відповідає $[0,\delta]$ з $\delta \in (-\omega, l)$. Оскільки

$$\langle J'(tw), tw\rangle = t^2(Lw, w) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(tw_n)tw_n \le t^2(\delta\|w\|_k^2 - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tfrac{f(tw_n)}{tw_n}w_n^2),$$

то за умовою (a_2) сума в дужках збігається до $l\|w\|^2$, а тому $\langle J'(tw), tw\rangle < 0$ для достатньо великих $t > 0$. Звідки, знайдеться $t > 0$ таке, що $I(tw) < 0$. Оскільки послідовності зі скінченним носієм щільні в X, то ми можемо апроксимувати tw елементом $\widetilde{w} \in X$ зі скінченним носієм таким, що $I(\widetilde{w}) < 0$. За зауваженням 1 існує $t^* \in (0,1)$ таке, що $I(v) = 0$, де $v = t^*\widetilde{w}$. Для всіх достатньо великих k маємо, що $\operatorname{supp} v \subset Q_k$. Тоді для будь-якого такого k нехай $v^k \in X_k$ єдиний елемент такий, що $v_n^k = v_n$ для $n \in Q_k$. Легко бачити, що $I_k(v^k) = I(v) = 0$ і $J_k(v^k) = J(v)$. Отже, послідовність $m_k \le J_k(v^k) = J(v)$ обмежена.

Доведемо методом від супротивного, що $\|u^k\|_k$ обмежена. Припустимо протилежне. Переходячи до підпослідовності (яку будемо позначати так само), ми можемо вважати, що $\|u^k\|_k \to \infty$. Для $v^k = \frac{u^k}{\|u^k\|_k}$ виконується одна з наступних умов:

(i) послідовність (v^k) задовольняє умову $\|v^k\| = \|v^k\|_{l^\infty} \to 0, k \to \infty$;

(ii) знайдуться $\delta > 0$ і $y_k \in \mathbb{Z}$ такі, що $|v_{y_k}^k| \ge \delta$ для всіх k (після переходу до наступної підпослідовності).

Розглянемо випадок (i). Оскільки $0 = \frac{1}{\|u^k\|_k^2} I_k(u^k) = (L_k v^k, v^k)_k - \sum_{n\in Q_k} \frac{f(u_n^k)}{u_n^k}(v_n^k)^2$, то

$$|\omega| = |\omega|\|v^k\|_k^2 \le (L_k v^k, v^k)_k = \sum_{n\in Q_k} \frac{f(u_n^k)}{u_n^k}(v_n^k)^2. \tag{19}$$

За умовою (a_2) існує $t_0 > 0$ таке, що $\frac{f(t)}{t} \le \frac{|\omega|}{2}$ при $t < |t_0|$. Нехай $A_k = \{n \in Q_k : |u_n^k| < t_0\}$ і $B_k = \{n \in Q_k : |u_n^k| \ge t_0\}$. Тоді матимемо

$$\sum_{n\in A_k} \frac{f(u_n^k)}{u_n^k}(v_n^k)^2 \le \frac{|\omega|}{2}\sum_{n\in A_k}(v_n^k)^2 \le \frac{|\omega|}{2}\|v^k\|_k^2 = \frac{|\omega|}{2}.$$

Звідки, враховуючи (19), маємо

$$\varliminf_{k\to\infty} \sum_{n\in B_k} \frac{f(u_n^k)}{u_n^k}(v_n^k)^2 \ge \frac{|\omega|}{2}. \tag{20}$$

З іншої сторони, $\|f(t)\| \leq C_0|u|$ з деякою сталою $C_0 > 0$ і за нерівністю Гельдера

$$\sum\nolimits_{n\in B_k} \frac{f(u_n^k)}{u_n^k}(v_n^k)^2 \leq C_0|B_k|^{\frac{p-2}{p}}\|v^k\|^{\frac{2}{p}}_{l^p_k} \tag{21}$$

для будь-якого $p > 2$, де $|B_k|$ — кількість елементів множини B_k. Проте легко перевірити, що $\|w\|_{l^p_k} \leq \|w\|^{\frac{p-2}{p}}_{l^\infty_k}\|w\|^{\frac{2}{p}}_k$. Оскільки $\|v^k\|_{l^\infty_k} \to 0$, то нерівності (20) і (21) показують, що $|B_k| \to \infty$. Нехай $\alpha_0 = \min\{\frac{1}{2}f(\pm t_0)(\pm t_0) - F(\pm t_0)\}$. Тоді з (15) та зауваження 1 маємо

$$m_k = \sum\nolimits_{n\in Q_k}(\tfrac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)) \geq \sum\nolimits_{n\in B_k}(\tfrac{1}{2}f(u_n)u_n - F(u_n)) \geq \alpha_0|B_k| \to \infty.$$

Отримали суперечність.

Розглянемо випадок (ii). З інваріантності рівняння (4) відносно дискретних зсувів, кратних k, переходячи до підпослідовності, ми можемо вважати, що $c_k = c$. Оскільки $\|v^k\|_k = 1$, то переходячи знову до підпослідовності, ми можемо також вважати, що існує $v = (v_n)$ таке, що $v_n^k \to v_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$. Крім того, очевидно, що $v \in X$ з $\|v\| \leq 1$ і $|v_c| \geq \delta$. Отже, $v \neq 0$.

Оскільки u^k — k-періодичний розв'язок рівняння (4), то маємо

$$Av_n^k - (\omega + l)v_n^k = \frac{g(u_n^k)}{\|u^k\|_k}, \tag{22}$$

де $g(t) = f(t) - lt$ і за умовою (a_2) $\lim_{t\to\pm\infty}\frac{g(t)}{t} = 0$. Якщо $n \in \mathbb{Z}$ і $v_n \neq 0$, то $|u_n^k| \to \infty$. Переходячи до границі в (22) при $k \to \infty$, маємо $Av_n - (\omega + l)v_n = 0$, тобто $v \in X$ — ненульовий власний вектор оператора A з власним значенням $\omega + l$. Але спектр оператора A в X є абсолютно неперервним (див. [11]). Знову отримали суперечність. Отже, $\|u^k\|_k$ — обмежена. Лему доведено. □

4. Основні результати. З леми 4 випливає наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (a_1)–(a_4) і $l + \omega > 0, \omega < 0$. Тоді для будь-якого $k \geq 2$ рівняння (4) має нетривіальний k-періодичний розв'язок $u^{(k)} \in X_k$. Крім того, якщо функція f непарна, то рівняння (4) має два нетривіальних розв'язки $\pm u^{(k)}$.*

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (a_1)–(a_4) і $l + \omega > 0, \omega < 0$. Тоді рівняння (4) має нетривіальний розв'язок $u \in X$. Крім того, якщо функція f непарна, то рівняння (4) має два нетривіальних розв'язки $\pm u$.*

Доведення. Нехай $u^k \in X_k$ розв'язок рівняння (4). За лемою 5 послідовність $\|u^k\|_k$ обмежена і тому u^k також задовольняє умову (i) або (ii). У випадку (i), як у доведенні леми 5, маємо, що $\|u^k\|_{l^p_k} \to 0$ при $k \to \infty$ для будь-якого $p > 2$. За умовою (a_2) для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $C_\varepsilon > 0$ таке, що

$$|f(t)| \leq \varepsilon|t| + C_\varepsilon\|u^k\|^p_{l^p_k}.$$

Оскільки u^k — k-періодичний розв'язок, то

$$|\omega|\|u^k\|_k^2 \leq (L_k u^k, u^k)_k = \sum\nolimits_{n\in Q_k} f(u_n^k)u_n^k \leq \varepsilon\|u^k\|_k^2 + C_\varepsilon\|u^k\|^p_{l^p_k}.$$

Поклавши $\varepsilon = \frac{|\omega|}{2}$, отримаємо $\varepsilon = \frac{|\omega|}{2}\|u^k\|_k^2 \le C_\varepsilon \|u^k\|_{l_k^p}^p \to 0$. А це протирічить лемі 1 і, отже, виконання (i) неможливе.

Отже, виконується умова (ii). Роблячи перехід до підпослідовності і використовуючи інваріантність дискретних зсувів ми можемо вважати, що $|u_c^k| \ge \delta$ з деяким $\delta > 0$. Переходячи знову до підпослідовності, ми також можемо вважати, що існує послідовність $u = (u_n)$ така, що $u_n^k \to u_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$. Легко бачити, що $u \in X$ і $u \neq 0$. Крім того, для рівняння (4) маємо поточкову збіжність і, отже, $u \in X$ — його нетривіальний розв'язок.

Можна показати, що побудований розв'язок є розв'язком задачі (18).

Існування двох нетривіальних розв'язків $\pm u$ у випадку непарної функції очевидне. Теорему доведено. □

Оскільки насичувана нелінійність $f(u_n) = \frac{\mu u_n^3}{1+u_n^2}, \mu \neq 0$ задовольняє умови (a_2)–(a_4), то з теорем 1 та 2 випливають основні результати цієї статті

Теорема 3. *Нехай виконується умова* (a_1) *і* $\mu + \omega > 0, \omega < 0$. *Тоді для будь-якого* $k \ge 2$ *рівняння (3) має два нетривіальних розв'язки* $\pm u^{(k)} \in X_k$.

Теорема 4. *Нехай виконується умова* (a_1) *і* $\mu + \omega > 0, \omega < 0$. *Тоді рівняння (3) має два нетривіальних розв'язки* $\pm u \in X$.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бак С. Н., Панков А. А.* О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов // Доповіді НАН України. — 2004. — №9. — С. 13-16.
2. *Бак С. Н.* Метод условной минимизации в задаче о колебаниях цепочки нелинейных осцилляторов // Математическая физика, анализ, геометрия. — 2004. — №3. — Т.11. – С. 263-273.
3. *Бак С. М.* Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів // Математичні студії. — 2006. — Т. 26, №2. — С. 140-153.
4. *Aubry S.* Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization // Physica D. — 1997. — V. 103. — P. 201 – 250.
5. *Bak S. M.* Peridoc traveling waves in chains of oscillators// Communications in Mathematical Analysis. — 2007. — V. 3, N 1. — P. 19-26.
6. *Henning D., Tsironis G.* Wave transmission in nonliniear lattices // Physics Repts. — 1999. — V. 309. — P. 333-432.
7. *Pankov A.* Traveling waves and periodic oscillations in Fermi–Pasta–Ulam Lattices. – London–Singapore: Imperial College Press, 2005. – 196 pp.
8. *Pankov A.* Gap solitons in periodic discrete NLS equations// Nonlinearity. — 2006. — V. 19. — P. 27-40.
9. *Pankov A.* Gap solitons in periodic discrete NLS equations II: A generalized Nehari manifold approach// Discr. Cont. Dyn. Syst. — 2007. — V. 19. – P. 419–430.
10. *Pankov A., Rothos V.* Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity// Proc. Roy. Soc. A. – To appear.
11. Teschl G. Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices, Amer. Math. Soc., Providence, 2000. – 251 pp.

Вінницький державний педагогічний університет ім. М. Коцюбинського
sergiy.bak@gmail.com

Надійшло 11.09.2008