УДК 517.97

С. Н. Бак, А. А. Панков

О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов

(Представлено академиком НАН Украины Е.Я. Хрусловым)

We consider infinite chains of linearly coupled nonlinear oscillators under some assumption of spatial periodicity. In the case where the linear part is positive definite, we prove the existence of solution T-periodic in time for all sufficiently large values of T.

1. Рассматривается бесконечная цепочка нелинейных осцилляторов, каждый из которых в отсутствие взаимодействия описывается уравнением

$$\ddot{q}_n = -U_n'(q_n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где q_n – обобщенная координата, отвечающая n-му осциллятору. Предполагается, что каждый осциллятор линейно взаимодействует с двумя своими ближайшими соседями. Тогда уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид

$$\ddot{q}_n = -U_n'(q_n) + a_{n-1}(q_{n-1} - q_n) - q_n(q_n - q_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Таким образом, (1) – бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматриваются такие решения системы (1), что

$$\lim_{n\to\infty} q_n(t) = 0. \tag{2}$$

Иначе говоря, осцилляторы находятся в состоянии покоя на бесконечности.

Интерес к системам вида (1) объясняется многочисленными физическими приложениями (см., например, [1]). Однако в литературе отсутствуют строгие результаты о цепочках осцилляторов. Исключение составляет работа [2], где рассмотрены бегущие волны в таких системах. В то же время периодические движения для близкого класса систем-цепочек Ферми–Паста–Улама достаточно хорошо исследованы (см., например, [3, 4]).

В настоящей работе для изучения периодических решений задачи (1), (2) применяются вариационные методы в варианте, развитом в [5-6].

2. Основные предположения. Потенциал U_n запишем в виде

$$U_n(r) = -\frac{c_n}{2} r^2 + V_n(r).$$

Предполагается, что рассматриваемая цепочка пространственно периодична, т.е. существует такое натуральное n_0, что $a_{n+n_0} = a_n$, $c_{n+n_0} = c_n$ и $V_{n+n_0}(r) = V_n(r)$. Положим

$$b_n = c_n - a_n - a_{n-1}.$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\ddot{q}_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n - V_n'(q_n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Это уравнение можно рассматривать как дифференциально-операторное уравнение вида

$$\ddot{q} = Aq - B(q)$$

в гильбертовом пространстве l^2 двусторонних последовательностей $q = \{q_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ с ограниченным линейным оператором

$$(Aq)_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n$$

и нелинейным оператором

$$B(q)_n = V_n'(q_n).$$

Ограниченность оператора A в l^2 очевидна.

Скалярное произведение и норма в l^2 обозначаются $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ соответственно.

Всюду далее предполагается, что

(i) A – положительно определенный в l^2, т.е. существует такое $\alpha_0 > 0$, что

$$(Aq,\, q) \ge \alpha_0 \|q\|^2;$$

(ii) для любого $n \in \mathbb{Z}$ функция $V_n'(r)$ непрерывно дифференцируема, $V_n(0) = 0$ и $V_n'(r) = o(r)$ при $r \to 0$;

(iii) существует такое $\mu > 2$, что

$$0 < \mu V_n(r) \le V_n'(r) r, \quad r \ne 0.$$

3. Вариационная постановка задачи и основной результат. Пусть $T > 0$. Обозначим X_T – подпространство T-периодических функций из $H^1_{loc}(\mathbb{R};\, l^2)$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(q,\, s)_T = \int_{-T/2}^{T/2} \left[(\dot{q}(t),\, \dot{s}(t)) + (q(t),\, s(t)) \right] dt.$$

Норма в X_T обозначается $\|\cdot\|_T$.

Рассмотрим функционал

$$\Phi(q) = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\| + \frac{1}{2}(Aq,\, q) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} V_n(q_n(t)) \right] dt \qquad (4)$$

на пространстве X_T. В сделанных предположениях нетрудно проверить, что функционал Φ корректно определен на X_T и принадлежит классу C^1, а его критические являются (обобщенными) T-периодическими решениями задачи (1), (2) или, что то же самое, уравнения (3). Отметим, что $q \equiv 0$ – тривиальное решение задачи (1), (2). Кроме того, возможны стационарные (не зависящие от t) решения, которые T-периодичны для любого T. Поэтому интерес представляют непостоянные периодические решения.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие пространственной периодичности и условия $(i)-(iii)$. Существует такое $T_0 > 0$, что для любого $T \ge T_0$ задача (1), (2) имеет непостоянное T-периодическое решение в пространстве X_T.*

4. Вспомогательная задача. Можно проверить, что функционал Φ удовлетворяет всем условиям теоремы о горном перевале [10, 11], за исключением условия Пале–Смейла. Следовательно, непосредственное построение критических точек затруднительно. Поэтому, используется идея периодических аппроксимаций, развитая в [5-8].

Для любого натурального N будем искать T-периодические решения уравнения (1), удовлетворяющие условию периодичности

$$q_{n+N_0}(t) = q_n(t). \tag{5}$$

Эта задача допускает вариационную формулировку. Обозначим l_N^2 – пространство Nn_0-периодических последовательностей $q = \{q_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Это конечномерное евклидово пространство размерности Nn_0. Обозначим $X_{T,N}$ – подпространство в $H^1\left(\mathbb{R}; l_N^2\right)$, состоящее из T-периодических функций. На этом пространстве корректно определен функционал

$$\Phi_N(q) = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{2} \|\dot{q}(t)\|_{l_N^2} + \frac{1}{2}(Aq, q)_{l_N^2} - \sum_{n=0}^{Nn_0} \left(V_n(q_n(t))\right) \right] dt,$$

который принадлежит классу C^1. Более того, Φ_N удовлетворяет условию Пале–Смейла и всем остальным условиям теоремы о горном перевале [10-11]. Его критические точки – суть решения задачи (1), (5). Отсюда следует

Теорема 2. *Пусть выполнено условие пространственной периодичности и условия* $(i)-(iii)$. *Тогда для любых* $T > 0$ *и натурального* N *задача (1), (5) имеет ненулевое* T*-периодическое решение* $q = q^{(T,N)} \in X_{T,N}$. *При этом существует такая константа* $C > 0$ *не зависящая от* T *и* N*, что*

$$\left\| q^{(T,N)} \right\|_{T,N} \le C. \tag{6}$$

5. Предельный переход. Построение решений задачи (1), (3) основано на предельном переходе при $N \to \infty$. Тогда $q^{(N,T)} = q_{n+kN}^{(N,T)}$ также является решением уравнения (1) и удовлетворяет оценке (6). Используя результаты о дискретной концентрированной компактности, можно показать, что найдутся такие последовательности $N_i \to \infty, K_i \in \mathbb{Z}$, вещественное число $\eta > 0$, и целое n_0, что

$$\int_{-T/2}^{T/2} \left| q_{n_0}^{(N_i,T,k_i)}(t) \right|^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} \left| q_{k_i N + n_0}^{(N_i,T,k_i)}(t) \right|^2 dt \ge \eta. \tag{7}$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $q_n^{(N_i,T,k_i)} \to q_n^{(T)}$ слабо в $H^1(-$ $-T/2, T/2)$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Нетрудно проверить, что $q^{(T)} = \left\{q_n^{(T)}\right\}$ – решение уравнения (1), лежащее в X_T. Из (6) следует $q_{n_0}^{(T)} \ne 0$ и тогда $q^{(T)} \ne 0$. При этом

$$\left\| q^{(T)} \right\| \le C. \tag{8}$$

Любое стационарное решение (1), (3) является критической точкой функционала

$$\frac{1}{2}(Aq,\, q) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(q_n) \tag{9}$$

на l^2. Как и в [5, 9], можно показать, что существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой нетривиальной критической точки q функционала (9), $\|q\| > \varepsilon$. Рассматривая q как постоянную функцию t, имеем $\|q\|^2_{X_T} = T\|q\|^2 > T\varepsilon^2$. Тогда X_T – норма любого стационарного решения $> C$ и, следовательно, $q^{(T)}$ – непостоянное решение при $T \geq T_0$.

1. *Braun O.M., Kivshar Y.S.* Nonlinear dynamics of the Frenkel – Kontorova model //Physics Repts. – 1998. – **306**. – P. 1 – 108.
2. *Iooss G., Kirschgässner K.* Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators //Commun. Math. Phys. – 2000. – **211**. – P. 439 – 464.
3. *Arioli G., Gazzola F.* Existence and approximation of periodic motions of an infinite lattice of particles //Z. Angew. Math. Phys. – 1995. – **46**. – P. 898 – 912.
4. *Arioli G., Gazzola F.* Periodic motion of an infinite lattice of particles with nearest neighbor interaction // Nonlin. Anal. – 1996. – **26**, №6. – P.1103 –1114.
5. *Pankov A., Pflüger K.* On a semilinear Schrödinger equation with periodic potential // Nonlin. Anal. – 1998. – **33**, №6. – P. 593 – 609.
6. *Pankov A., Pflüger K.* Periodic and solitary traveling waves for the generalized Kadomtsev–Petviashvili equation // Math. Meth. Appl. Sci. – 1999. – **22**. – P. 733 – 752.
7. *Pankov A., Pflüger K.* On ground traveling waves for the generalized Kadomtsev-Petviashvili equations // Math. Phys., Anal., Geom. – 2000. – **3**. – P. 33 – 47.
8. *Pankov A., Pflüger K.* Traveling waves in lattice dynamical systems // Math. Meth. Appl. Sci. – 2000. – **23**. – P.1223 – 1235.
9. *Pankov A., Zakharchenko N.* On some discrete variational problems //Acta Appl. Math. – 2001. – **65**. – P. 295 – 303.
10. *Rabinowitz P.* Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. – Providence, R. I.: American Math. Soc. – 1986. – 100 pp.
11. *Willem M.* Minimax theorems. – Boston, Birkhäuser. – 1996. – 162 pp.

Винницкий государственный педагогический университет им. М. Коцюбинского

Поступило в редакцию 25.09.2003