

ІСНУВАННЯ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В СИСТЕМАХ ТИПУ ФЕРМІ-ПАСТИ-УЛАМА ІЗ НАСИЧУВАНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Анотація. В статті встановлено існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама із насичуваною нелінійністю. Для цього використано варіаційний підхід.

Ключові слова: система Фермі-Пасти-Улама, біжучі хвилі, критичні точки, насичувана нелінійність.

Система Фермі-Пасти-Улама (ФПУ) представляє собою нескінченну систему ідентичних частинок на прямій з взаємодією найближчих сусідів. Рівняння руху системи мають вигляд

$$\ddot{q}_n = U'(q_{n+1} - q_n) - U'(q_n - q_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

де $q_n = q_n(t)$ – координата n -ї частки в момент часу t , а $U(r)$ – потенціал їх взаємодії. Це нескінченна система звичайних диференціальних рівнянь. Рівняння (1) можна записати у вигляді нескінченновимірної гамільтонової системи з гамільтоніаном

$$H = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} p_n^2 + U(q_n - q_{n+1}) \right)$$

де $p_n = \dot{q}_n$ – імпульс.

Найбільш повний огляд результатів для таких систем можна знайти в [5]. Умови існування біжучих хвиль для систем типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці одержано в статтях [1; 3].

У цій статті ми будемо вивчати системи (1) із насичуваними нелінійностями, які не задовольняють умови, одержані в [5]. Це означає, що на нескінченності $U'(r)$ росте як $\text{const} \cdot r$. Зауважимо, що такі нелінійності вивчалися в статтях [2; 4; 6].

Метою статті є одержання умов існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама із насичуваною нелінійністю.

Нагадаємо, що біжучою хвилею є розв'язок вигляду

$$q_n(t) = u(n - ct), \quad (2)$$

де $u(s)$ – функція дійсної змінної $s \in \mathbb{R}$, яка називається профілем хвилі, і константа $c > 0$ – швидкість хвилі. Підставляючи біжучу хвилю (2) в систему (1), одержуємо рівняння для профілю біжучої хвилі

$$c^2 u''(s) = U'(Au(s)) - U'(Au(s-1)), \quad (3)$$

де лінійний оператор A визначається рівністю

$$(Au)(s) = u(s+1) - u(s) = \int_s^{s+1} u'(\tau) d\tau.$$

Функція $r(s) = (Au)(s)$ називається *профілем відносного зміщення*.

Під розв'язком рівняння (3) ми розуміємо функцію класу C^2 , яка задовольняє це рівняння.

Зауважимо, що в статті [6] вивчалися два види біжучих хвиль: періодичні і відокремлені. Періодична біжуча хвиля – це біжуча хвиля профіль відносного зміщення $r(s)$ (рівнозначно, $u'(s)$) – періодична функція. А відокремлена біжуча хвиля – хвиля, профіль відносного зміщення $r(s)$ (рівнозначно, $u'(s)$) розпливається на нескінченності.

На відміну від статті [5] ми будемо накладати умови не на профіль відносного зміщення, а на сам профіль. Тобто у випадку періодичних біжучих хвиль достатньо знайти розв'язок, який задовольняє умову (періодичність)

$$u(s+2k) = u(s), \quad k > 0. \quad (4)$$

А у випадку відокремлених біжучих хвиль (розпливання)

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \quad (5)$$

Для формулювання припущень про потенціал $U(r)$ відокремимо гармонічну і ангармонічну частини

$$U(r) = \frac{c_0^2}{2} r^2 + V(r).$$

Стала $c_0 \geq 0$ називається швидкістю звуку [5].

Наші основні припущення щодо потенціалу V :

(i) функція V є неперервно диференційовною на $\mathbb{R}$, $m V(0) = V'(0) = 0$, а $V'(r) = o(r)$ при $r \rightarrow 0$;

(ii) існує скінченна границя $\lim_{r \rightarrow \pm\infty} \frac{V'(r)}{r} = a$, а функція $g(r) = V'(r) - ar$

обмежена;

(iii) для кожного $r_0 > 0$ існує $\delta_0 = \delta_0(r_0) > 0$ таке, що

$$\frac{1}{2} r V'(r) - V(r) \geq \delta_0$$

для $|r| \geq r_0$, і $V(r) \geq 0$ для всіх $r \in \mathbb{R}$.

Для стислості ми також покладемо

$$f(r) = V'(r) = ar + gr.$$

Позначимо через X_k гільбертів простір

$$X_k = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}) : u(s+2k) = u(s), u(0) = 0\}$$

зі скалярним добутком

$$(u, v)_k = \int_{-k}^k u'(s)v'(s)ds$$

і відповідною нормою $\|u\|_k = (u, u)_k^{\frac{1}{2}}$.

Нехай X замикання простору $C_0^\infty(\mathbb{R})$ по відношенню до норми

$$\|u\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u'(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, що X є замкненим підпростором гільбертового простору

$$\tilde{X} = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}) : u' \in L^2(\mathbb{R})\}$$

зі скалярним добутком

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u'(s)v'(s)ds + u(0)v(0),$$

а тому функції з X задовольняють умову (5).

На просторах X_k та X розглянемо відповідно функціонали

$$J_k(u) := \int_{-k}^k \left\{ \frac{c^2}{2} |u'(s)|^2 - \frac{c_0^2}{2} Au(s) - V(Au(s)) \right\} ds,$$

$$J(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{c^2}{2} |u'(s)|^2 - \frac{c_0^2}{2} Au(s) - V(Au(s)) \right\} ds.$$

Неважко переконатися, що критичні точки цих функціоналів є розв'язками рівняння (3), які задовольняють відповідно умови (3) і (4).

Наступна теорема встановлює існування періодичних біжучих хвиль.

Теорема 1. Нехай виконуються умови (i)-(iii). Тоді якщо

$$c_0^2 < c^2 < c_0^2 + a \text{ і}$$

$$G(r) := \int_0^r g(\rho) d\rho \rightarrow -\infty \text{ при } r \rightarrow \pm\infty$$

або

$$c^2 \left(\frac{\pi n}{k} \right)^2 - 4(c_0^2 + a) \sin^2 \frac{\pi n}{2k} \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

то рівняння (3) має несталий розв'язок u , який задовольняє умову (4).

Для доведення теореми 1 достатньо перевірити виконання умов теореми про гірський перевал для функціоналу J_k . Зокрема, цей функціонал задовольняє умову Пале-Смейла та геометрію гірського перевалу, а отже, за теоремою про гірський перевал має нетривіальну критичну точку. Несталість розв'язку впливає з означення простору X_k .

Відокремлені хвилі є в деякому сенсі граничним випадком розглянутих вище періодичних біжучих хвиль при $k \rightarrow \infty$. Тому вони будуються за допомогою граничного переходу при $k \rightarrow \infty$ в критичних точках функціоналу J_k .

Наступний результат встановлює існування відокремлених біжучих хвиль.

Теорема 2. Нехай виконуються умови (i)-(iii). Тоді якщо $c_0^2 < c^2 < c_0^2 + a$, то рівняння (3) має несталий розв'язок u , який задовольняє умови (5). Більше того, цей розв'язок має експоненціальну оцінку, тобто

$$|u'(s)| \leq C \exp(-\alpha|s|)$$

з деякими додатними константами C і α .

Список використаних джерел

1. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. *Математичні студії*. 2012. Т. 37, №1. С. 76–88.
2. Бак С. М., Ковтонюк Г. М., Печериця І. В. Стоячі хвилі з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінґера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. 2018. Вип. 18. С. 5-13.
3. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50, No.1. P.75-87.
4. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.
5. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi–Pasta–Ulam Lattices. London–Singapore : Imperial College Press, 2005. 96 p.
6. Pankov A. Traveling Waves in Fermi–Pasta–Ulam Lattices with saturable nonlinearities. *Discrete and continuous dynamical systems*. 2011. Vol. 30, № 3 (July). P. 835-849.

Abstract. The article established the existence of periodic and solitary traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems with saturable nonlinearity. For this, a variational approach is used.

Keywords: Fermi-Pasta-Ulam system, traveling waves, critical points, saturable nonlinearity.