УДК 517.97

Сергій Бак,
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
доцент кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Галина Ковтонюк,
канд. пед. наук, доцент
кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Богдан Лисак,
студент факультету математики, фізики,
комп'ютерних наук і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СОЛІТОННОГО ТИПУ В СИСТЕМАХ ТИПУ ФЕРМІ-ПАСТИ-УЛАМА

Анотація. *У статті одержано умови існування відокремлених біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. Для цього використано варіаційний підхід і метод періодичних апроксимацій.*

Ключові слова: *відокремлена біжуча хвиля, солітон, система типу Фермі-Пасти-Улама, двовимірна ґратка.*

Abstract. *The conditions for the existence of solitary traveling waves in a Fermi-Pasta-Ulam-type sysytems on a two-dimensional lattice are obtained. For this, the variational approach and the method of periodic approximations are used.*

Key words: *solitary traveling wave, soliton, Fermi-Pasta-Ulam-type sysytem, two-dimensional lattice.*

У 1953 році один із найвидатніших фізиків XX століття Е. Фермі попросив своїх колег по Лос-Аламоській лабораторії С. Улама, Дж. Пасту та М. Цингу розв'язати одну з нелінійних задач на ЕОМ «MANIAC I» (англ.: Mathematical Analyzer, Numerical Integrator and Computer). Вони повинні були дослідити питання про термалізацію енергії в нелінійних дискретно навантажених струнах на прикладі коливання 64 важок, пов'язаних одна з одною пружинками, які при відхиленні від положення рівноваги отримували силу повернення. Створюючи початкове коливання, дослідники хотіли подивитися, як ця початкова мода буде розподілятися по всіх інших модах. Передбачалося, що енергія в кінці кінців рівномірно розподілиться між модами, тобто по всій довжині хвилі, тим самим відбудеться термалізація енергії. Фактично задача зводилася до дослідження поведінки систем звичайних диференціальних рівнянь, які спочатку були лінійними, але в які було внесено нелінійність як збурення. Якби такого збурення не було, то енергія кожної нормальної моди лінійної системи, тобто коливань із заданою частотою, була б сталою. Тому можна було сподіватися, що нелінійні взаємодії між модами приведуть до того, щоб енергія системи рівномірно розподілилася між модами. Рух ланцюга важок, який розглядали Фермі, Паста та Улам, описувався системою

$$m\ddot{q}_n(t) = U'\big(q_{n+1}(t) - q_n(t)\big) - U'\big(q_n(t) - q_{n-1}(t)\big),\ n = \overline{1, N},$$

де $q_n(t)$ – відхилення n-ої важки в момент часу t, m – маса важки, $N = 64$. Вони розглядали потенціали $U(r)$ вигляду

$$U(r) = \frac{\gamma}{2}r^2 + \frac{\alpha}{3}r^3$$

та

$$U(r) = \frac{\gamma}{2}r^2 + \frac{\beta}{4}r^4 .$$

Пізніше системи Фермі–Пасти–Улама (ФПУ) з такими потенціалами назвали α-модель та β-модель ФПУ відповідно.

У 1954 році після проведення розрахунків цієї задачі на «MANIAC I» очікуваного результату вони не отримали, але виявили, що перекачування енергії в дві або три моди на початковому етапі розрахунку дійсно відбувається, але потім спостерігається повернення до початкового стану ([7]). Про цей парадокс, пов’язаний з поверненням початкового коливання, стало відомо кільком математикам і фізикам. Зокрема, про цю задачу дізналися американські фізики Н. Забускі і М. Крускал, які вирішили продовжити обчислювальні експерименти з моделлю, запропонованою Фермі. Виявилося, що в ланцюжку виникають особливі відокремлені хвилі (пізніше вони їх назвали *солітонами*), які не дають енергії рівномірно розподілятися по всій її довжині. Це було виявлено тільки через 11 років. [11]

Один з перших строгих результатів щодо загальних систем типу ФПУ був отриманий у 1994 році Ж. Фрізеке та Дж. Ваттісом в статті [8]. Вони довели існування відокремлених біжучих хвиль з деякими загальними припущеннями щодо потенціалу взаємодії між частинками. Зокрема, клас їх потенціалів включає потенціали типу Тоди, Леннарда–Джонса та ін. Для одержання основних результатів вони використали процедуру умовної мінімізації та принцип концентрованої компактності П. Ліонса.

У 2000 році в статті [10] О. Панков та К. Пфлюгер переглянули останній підхід, вибравши періодичні біжучі хвилі як відправну точка. Існування періодичних хвиль вони встановили за допомогою стандартної теореми про гірський перевал. А відокремлені хвилі було одержано за допомогою методу періодичних апроксимацій.

Подібну задачу для нескінченних ґраток вивчали Г. Аріолі, Дж. Чабровскі, Ф. Газ зола, А. Шульгін, С. Терраціні та ін.

У цій статті вивчається система типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ – координата (n,m)-ї частинки в момент часу t. Передбачається, що кожна частинка нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\begin{gathered}\ddot{q}_{n,\,m}=W_1'\left(q_{n+1,\,m}-q_{n,\,m}\right)-W_1'\left(q_{n,\,m}-q_{n-1,\,m}\right)+\\+W_2'\left(q_{n,\,m+1}-q_{n,\,m}\right)-W_2'\left(q_{n,\,m}-q_{n,\,m-1}\right),\ \left(n,\,m\right)\in\mathbb{Z}^2,\end{gathered}\qquad(1)$$

де $W_1,\ W_2\in C^1\left(\mathbb{R}\right)$ – потенціали взаємодії сусідніх частинок.

Біжучою хвилею в даному випадку є розв'язок вигляду

$$q_{n,\,m}(t) = u\left(n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct\right), \tag{2}$$

де $\vec{l}\left(\cos\varphi,\, \sin\varphi\right)$ – фіксований хвильовий вектор, який задає напрям поширення хвилі. Нагадаємо, що функція неперервного аргументу $u(s),\ s \in \mathbb{R}$, називається профілем біжучої хвилі. Стала $c \neq 0$ представляє собою швидкість хвилі. Якщо $c > 0$, то хвиля зміщується вправо, а якщо $c < 0$, то вліво.

Для профілю $u\left(s\right)$ біжучої хвилі (2), де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$, рівняння (1) набуде вигляду

$$\begin{aligned} c^2u''(s) &= W_1'\big(u(s+\cos\varphi) - u(s)\big) - W_1'\big(u(s) - u(s-\cos\varphi)\big) + \\ &+ W_2'\big(u(s+\sin\varphi) - u(s)\big) - W_2'\big(u(s) - u(s-\sin\varphi)\big). \end{aligned} \tag{3}$$

За допомогою варіаційної техніки встановлено існування відокремлених біжучих хвиль, профілі яких задовольняють крайові умови

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \tag{4}$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови*

$\left(i\right)$ $W_i\left(r\right) = \dfrac{c_i}{2}r^2 + f_i\left(r\right), i = 1, 2$, *де* $f_i \in C^1\left(\mathbb{R}\right)$, $f_i\left(0\right) = f_i'\left(0\right) = 0$ *і* $f_i'\left(r\right) = o\left(\left|r\right|\right)$ *при* $r \to 0$;

$\left(ii\right)$ *існують такі* $r_0 \in \mathbb{R}$ *і* $\mu > 2$, *що* $f_i\left(r_0\right) > 0$ *і* $\mu f_i\left(r\right) \le r f_i'\left(r\right), r \in \mathbb{R}$.

Тоді для будь-яких $c^2 > a := \max\left\{c_1,\, c_2,\, 0\right\}$ *рівняння (3) має несталий розв'язок* u, *що задовольняє умову (4).*

Для доведення теореми використано метод критичних точок і метод періодичних апроксимацій.

Зауважимо, що такі хвилі вивчалися в системах осциляторів і дискретних рівняннях типу синус-Ґордона ([1; 2; 6; 13; 14]). А в статтях [4; 12] вивчались періодичні і відокрмлені хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама, в яких умова періодичності і крайові умови на нескінченності накладалися не на сам профіль хвилі (як це зроблено вище), а на його похідну.

В статті [3] вивчались стоячі хвилі (*лакунарні солітони*) в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці.

Таким чином, у цій статті одержано результат про існування розв'язків солітонного типу – відокремлених біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці.

Література:

1. Bak S.M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice. *Ukrainian mathematical Journal*. 2017. Vol. 69, №4. P.509-520.
2. Bak S. M. Homoclinic traveling waves in discrete sine–Gordon equation with nonlinear interaction on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2019. Vol. 52, № 2. P. 176-184.
3. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.
4. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50, № 1. P.75-87.
5. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Український математичний вісник*. 2020. Т.17, №3. С. 301-312.
6. Bak S. N., Pankov A. A. Traveling waves in systems of oscillators on 2D-lattices. *Journal of Mathematical Sciences*. 2011. Vol. 174, № 4 (April). P. 437–452.
7. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonliniear problems. *Los Alamos Sci. Lab. Rept.* LA-1940. 1955. Reprinted in *Lect. Appl. Math.* 1974. Vol. 15. 156 p.
8. Friesecke G., Wattis J. A. D. Existence theorem for solitary waves on lattices. *Commun. Math. Phys*. 1994. Vol. 161. P. 391–418.
9. Pankov A. Traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam chains with nonlocal interaction. *Disr. Cont. Dyn. Syst. Ser. S.* 2019. Vol. 12, № 7 (November). P. 2097–2113.
10. Pankov A., Pflüger K. Traveling waves in lattice dynamical systems. *Math. Meth. Appl. Sci.* 2000. Vol. 23. P.1223–1235.
11. Zabusky N. J., Kruskal M. D. Interaction of "solutions" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.* 1965. Vol. 15. P. 240–243.
12. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. *Математичні студії*. 2012. Т. 37, № 1. С. 76-88.
13. Бак С. М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці. *Український математичний журнал*. 2017. Т. 69, № 4. С. 435-444.
14. Бак С. Н., Панков А. А. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках. *Український математичний вісник*. 2010. Т. 7, №2. С. 154-175.