https://doi.org/10.31652/978-617-552-037-6-1-184

ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, ФІЗИКИ І КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК

А.Л. ВОЄВОДА

ЦІКАВА МАТЕМАТИКА НА УРОКАХ ТА В ПОЗАУРОЧНІЙ РОБОТІ

Вінниця
«ТВОРИ»
2021

УДК 373/5.016:51 (072)
В63

Рекомендовано до друку Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського
Протокол № 5 від 18.11.2021р.

Рецензенти:

Годованюк Т. Л. – доктор педагогічних наук, проректор з наукової роботи, професор кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини;

Матяш О.І. – доктор педагогічних наук, професор кафедри алгебри і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського;

Нестюк В.М. – директор фізико-математичного ліцею №17 м. Вінниці, учитель-методист

А. Л. Воєвода

В 63 Цікава математика на уроках та в позаурочній роботі. Методичний посібник / За редакцією доктора педагогічних наук, професора, дійсного члена (академіка) НАПН України Гуревича Р.С. Вінниця: ТВОРИ, 2021.184с.

ISBN 978-617-552-037-6

У посібнику пропонуються методичні матеріали, що допоможуть учителям математики закладів загальної середньої освіти активізувати навчально-пізнавальну діяльність учнів, сприятимуть поглибленню здобутих у межах шкільної програми знань з математики. Розглядаються можливості підвищення інтересу до вивчення математики в різних аспектах, зокрема, на уроках математики та в позаурочній роботі.

Посібник призначений для вчителів математики закладів загальної середньої освіти та здобувачів вищої освіти за спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика) педагогічних закладів вищої освіти.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Те, що я встиг пізнати, - чудово.
Сподіваюся, так само чудове те,
що мені ще доведеться пізнати.
Сократ

Останні десятиліття в українському освітньому середовищі йдеться про гуманізацію та гуманітаризацію змісту математичної освіти. Адже зміст освіти нині – це не лише знання, вміння й навички в певній науковій галузі, а й основи загальнолюдської культури, що відображається в цій сфері. Сучасні тенденції оновлення змісту освіти передбачають його культуровідповідність, гуманізацію, гуманітаризацію, інтеграцію й особистісну організацію. Тому ефективним засобом оновлення змісту освіти у вказаних напрямах має стати історія науки.

Сторінки минулого математичної науки переконливо доводять, що більшість математичних ідей, понять, задач, котрі згодом об'єднувалися в теорії, виникла з практичної діяльності людини. Водночас пошуки розв'язків багатьох задач математики часто приводили вчених до відкриттів нових теорем і формул.

Уміле використання учителем елементів історії математики в процесі навчання може допомогти учням глибше зрозуміти сутність математичних понять і теорем, «оживити» уроки й позаурочні заходи, зробити сам предмет максимально привабливим і доступним.

Гуманітарний аспект позаурочної роботи з математики (вікторини, турніри, ранки, вечори, тижні математики, інтелектуальні ігри тощо) сприяє залученню учнів до загальнолюдської культури, творчої діяльності, озброює їх методами наукового пошуку, котрі, окрім поглиблення знань учнів, покликані створити умови для спонукання їх до активної навчально-пізнавальної діяльності.

Тому у посібнику наведено історичні довідки, визначні задачі різних часів і народів, математичні софізми, цікаві матеріали з історії математики, вікторини, сценарії позаурочних заходів.

Матеріал першого розділу посібника містить відомості з історії математики, розподілені за темами, розповіді про деякі іменні теореми шкільного курсу математики, історичні задачі. Ми не прагнули передати повністю стиль викладу умов задач різних епох та методи їх розв'язання. Вони, як правило, подані в сучасних термінах з використанням сучасної символіки. Переважну більшість зібраних тут задач можуть розв'язати учні основної чи старшої школи. Зауважимо, що деякі історичні відомості та задачі можна використовувати безпосередньо на уроках математики, інші – в позаурочній роботі.

Також в першому розділі наведено математичні софізми. Їх розгляд має важливе педагогічне значення, бо розібрати софізм означає знайти помилку. Процес відшукання помилки в різних математичних судженнях варто зробити захоплюючим, а розгляд помилок може стати засобом для підвищення інтересу до вивчення математики.

Другий розділ посібника присвячений питанням позаурочної роботи з математики. У ньому зібрані цікаві факти про математику і математиків, математичні фокуси, цікаві запитання та задачі до математичних вікторин та інших інтелектуальних ігор, сценарії позаурочних заходів та методичні рекомендації щодо їх реалізації.

Сподіваємося, що вони допоможуть учителю пожвавити процес навчання та позаурочну роботу з математики.

Систематичне, методично виважене введення в освітній процес елементів історизму, на нашу думку, може сприяти формуванню математичної компетентності учнів.

Англійський математик Дж. Літлвуд писав: «Моєю метою є зацікавлення, а не підвищення рівня знань читачів. Турбота про це є вже їхньою власною справою». Приєднуючись до цих слів, сподіваємось, що посібник допоможе вчителям урізноманітнити процес навчання математики, а студентам – навчатися творчо і самостійно.

РОЗДІЛ 1.
ВИКОРИСТАННЯ ВІДОМОСТЕЙ З ІСТОРІЇ МАТЕМАТИКИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Ніяке знання математики не можна вважати повним, якщо воно не підкріплюється знанням обставин, за яких було встановлено той чи інший математичний факт, що передувало цьому відкриттю і хто його здійснив.

М. Кованцов

Нині математика прийшла практично в усі науки, хоча багато людей про це навіть не здогадуються. Загалом, математики мають справу з розв'язанням різних абстрактних і прикладних завдань майже за всіма напрямами – від медицини й ІТ до філології. Перед тим як учені запропонують нові ліки чи вакцини, а інженери вдосконалюють різноманітні технології, вони часто використовують поняття, які винайшли математики ще кілька століть тому. Так, теорія чисел досить довго вважалася суто теоретичним розділом математики, який не може мати практичної користі, проте зараз її широко застосовують у криптографії для шифрування інформації та забезпечення комп'ютерної безпеки. Тож кожен, хто має смартфон і банківську картку, користується здобутками теорії чисел.

Роль математики в різні часи оцінювалася по-різному. Творець неевклідової геометрії М. Лобачевский, відомий також своїми педагогічними працями, вважав, що інтерес учнів до вивчення математики має формуватися різними засобами, тому рекомендував застосовувати історичний підхід до викладання не лише математики, а й будь-якого навчального предмета.

У шкільній програмі з математики не вказано, які відомості з історії науки варто повідомляти школярам, у яких класах та в якому обсязі. Але буде корисним, вивчаючи, наприклад, формули скороченого множення, згадати, що стародавні греки їх доводили геометрично. В багатьох сучасних підручниках геометрії подається алгебраїчне доведення теореми Піфагора, але при цьому втрачається її геометричний зміст. Ознайомлюючи учнів з індійською («арабською») позиційною нумерацією, можна показати її перевагу перед римською чи слов'янською нумераціями тощо. Тобто, включення в зміст навчання елементів історизму має показати учням, що математика – це наука, в розвиток якої зробили свій внесок представники різних культур і народів.

Український математик-методист О. Астряб вважав, що відбираючи до уроку, наприклад, біографічні відомості про знаних математиків, учитель має не лише ознайомити учнів з датами його життя або переліком фактів з історії математики. Виклад біографії вченого варто супроводити характеристикою історичної епохи, в якій він жив і працював, показом прагнення вчених зробити математичну культуру досягненням людства.

Проводячи узагальнюючі бесіди на уроках математики в 7-9 класах, варто поступово розкривати прямі і зворотні зв'язки математики з іншими науками. Це створюватиме основу для усвідомлення учнями в 10-11 класах логічної структури математики, ролі абстрактного мислення в пізнанні дійсності.

Для роботи з історичним матеріалом на факультативних заняттях з математики можна використати дослідницький метод, який певною мірою імітує процес наукового дослідження. Щоб учні прийшли до самостійного «перевідкриття» вже давно відкритого в математиці, а знання стали результатом їхніх власних пошуків, учителю необхідно вміло організувати ці пошуки, враховуючи, що емоції та емоційні стани мають значний вплив на пам'ять людини та на процес розвитку мислення. Адже у кожної людини дві пам'яті. Одна схожа на записник. Це пам'ять мозку, пам'ять знань. У ньому акуратно все записано: дати, цифри, імена, алгебраїчні формули, стовпчики логарифмів... Шкода, що чорнила в ньому з роками вицвітають. А інша пам'ять схожа на альбом з картинками. Порядку в цьому альбомі набагато менше, ніж у записнику, але зате всі картинки розфарбовані, а деякі навіть звучать. Це пам'ять почуттів. Відчувши «радість відкриття», учні сміливо йдуть на пошук вирішення нових завдань.

Використання елементів історії математики на уроках та в позаурочній роботі дозволяє вчителю вирішувати низку педагогічних задач: 1) підвищення інтересу до вивчення предмету; 2) розширення кругозору учнів, формування їх загальної культури; 3) формування наукового мислення тощо.

Наведені нижче матеріали з історії математики можна використовувати в таких випадках: пояснення походження терміну; розповідь про першовідкривача формули, теореми або методу; огляд життя і творчості видатних математиків; узагальнення і систематизація знань учнів за допомогою історичного огляду, в якому аналізується розвиток певної змістової лінії шкільного курсу математики та ін.

Вибір залишається за учителем…

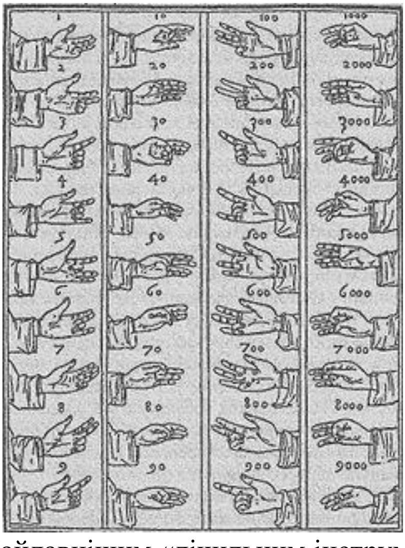
1.1. *ЕЛЕМЕНТИ ІСТОРІЇ МАТЕМАТИКИ НА УРОКАХ АЛГЕБРИ*

Числа

Число – монарх, що зводиться на трони,
На книги й вежі міст являти чудо й суд.
І замкнуто міста, і замкнуто закони,
І в знаки чисел входить абсолют.

М. Бажан.

Натуральні числа. Поняття числа виникло в найдавніші часи і було розвинене багатьма народами впродовж тисячоліть у зв'язку із запитами людства, що висували дедалі зростаючі вимоги до техніки



лічби предметів. Найдавнішим «лічильним інструментом» були власні руки людини – десять пальців, на яких вони вчились рахувати. Роль одиниці відігравав указівний палець. У стародавній слов'янській нумерації перші десять цифр називали «перстами» – пальцями.

Першими позначеннями чисел були вузли на мотузці, зарубки на паличках, якими «записувались» боргові зобов’язання, а пізніше й податки. Паличку з нанесеними на ній надрізами (їх називали «карбики» на Поділлі, «бірки» на Київщині, «цурки» на Полтавщині) розколювали навпіл і віддавали одну половину боржнику, іншу – кредитору. При поверненні боргу обидві половини палички прикладали одну до одної, таким чином перевіряючи правильність визначення сум, що мали повернути.

Одна з перших спроб дати означення натурального числа належить давньогрецькому математику Евкліду: «Число – це безліч одиниць». Він не вважав нуль і одиницю числами, бо нуль – ніщо, а одиниця – «причина числа» (вперше одиницю визнав числом французький учений Н. Орем у XIV ст.).

Про «натуральний ряд» чисел йдеться у «Вступі до арифметики» (I ст. до н. е.) грецького математика Нікомаха. У VI ст. н. е. книгу переклав латиною і переробив римський учений і письменник Боецій (бл. 475-525). У ній уперше введено термін «натуральне число». Називаючи одиницю матір’ю всіх інших чисел, Боецій не вважав її числом. Нідерландський математик С. Стевін (1548-1620) називав число «мірою кількості деякої речі» і наголошував, що «одиниця подільна» (1585). Формальне означення натуральних чисел сформулював італійський математик Джузеппе Пеано у 1889 році.

Поділ натуральних чисел на парні і непарні приписують піфагорійцям, але описаний він набагато раніше в єгипетському папірусі Ахмеса-Рінда (переписаний бл. 1650 р. до н.е.).

Піфагорійці одиницю означали як те, з чого складено числа, і не визнавали її числом. Аристотель (384-322 рр. до н.е.) зазначав, що число виникає зі своєї міри, тобто одиниці. А одиниця – це те, чим рахують числа. В його праці «Підрахування піщинок» («Псамміт») зазначається, що числовий ряд можна продовжувати необмежено, але разом з тим він зауважив, що для практичних задач досить невеликого відрізка. Філософ установив принципи для побудови назв та позначень як завгодно великих чисел, зокрема більших за «число піщинок у світі».

Піфагорійці першими означили прості і складені числа, розробили теорію подільності на два. Евклід у своїй праці «Начала» (бл. 300 р. до н. е.) довів, що за кожним простим числом слідує більше просте число, тобто найбільшого простого числа не існує.

Уперше в сучасному розумінні термін і поняття натурального числа зустрічається в працях французького математика XVIII століття Ж. Даламбера.

Цілі числа. Назва «цілі числа» виникла на противагу числам, які позначають «нецілі» кількості, – дробам. Цілі числа утворюються на основі натуральних за допомогою введення нових понять і позначень: нуля (0, латинське *nullus* – ніщо, відсутність будь-якої кількості) та від'ємних чисел, тобто таких кількостей, додаючи до яких додатні кількості (які позначаються натуральними числами), ми одержуємо нуль.

Від'ємні числа і операції над ними використовували ще у Вавилоні. У Стародавніх Єгипті, Вавилоні та Греції від'ємні числа не використовували і не визнавали від'ємних коренів рівняння. Однак давньогрецький математик Діофант (III ст.) уже знав правило знаків, умів як проміжний результат знаходити добуток від'ємних чисел.

У китайському трактаті «Математика в дев'яти книгах» (II ст. до н. е.) додатні числа називали «чжен», а від'ємні – «фу». Для додавання і віднімання чисел застосовували спеціальне правило «чжен-фу» (плюс-мінус). У праці вже розглядались рівняння з від'ємними коефіцієнтами.

Індійські математики з VII ст. почали використовувати від'ємні числа. Вони пояснювали додатні числа як нагромаджене майно, а від'ємні – як борг. Брахмагупта у віршованому математичному трактаті «Перегляд системи Брахми» (628) розглядав від'ємні числа нарівні з додатними, виклав правила виконання арифметичних дій з «майном»та «боргом»:» «…сума двох «боргів» є «борг»; сума «майна» і нуля є «майно»; «борг», який віднімають від нуля, стає «майном», а «майно» – «боргом»…». Однак навіть індійські вчені вважали, що «люди не схвалюють абстрактних від'ємних чисел».

Трактат «Про те, що слід знати писарям з науки арифметики» персидського математика Абу-л-Вафа (940-998) став першим математичним твором у країнах ісламу, в якому розглядались від'ємні числа (дайни – «борг»).

Цікаві міркування висловлювали стародавні арабські вчені, говорячи про добутки додатних і від’ємних чисел: «плюс на плюс дає плюс» – «друг мого друга – мій друг»; «мінус на мінус дає плюс» – «ворог мого ворога – мій друг»; «мінус на плюс дає мінус» – «ворог мого друга – мій ворог»; «плюс на мінус дає мінус» – «друг мого ворога – мій ворог».

В Європі вперше від’ємні числа з’явились у «Книзі про абак» (1202) Леонардо Пізанського (Фібоначчі) і теж розглядались як «борг». Від’ємні числа називали «числами від сатани», «хибними», «меншими, ніж ніщо». Німецький математик М. Штіфель називав їх «абсурдними», бо «все в них навпаки: додавання їх зменшує суму, а віднімання збільшує». Французький математик Б. Паскаль ще у XV ст. називав число менше від нуля «безглуздим».

Терміни «додатний» і «від’ємний» з’явились у Європі у XV ст. як переклад арабських термінів «мусбат» і «манфі» на латину та грецьку мову. Їх і нині використовують в Туреччині, Ірані, Азербайджані та Середній Азії.

Італійський математик Дж. Кардано при розв’язуванні рівнянь і систем рівнянь використовував додатні («істинні») і від’ємні («фіктивні») числа. Р. Декарт позначав додатні величини буквами, а перед від’ємними ставив знак «–». Однак навіть введене в «Геометрії» (1637) Декарта геометричне тлумачення від’ємних чисел у вигляді напрямлених ординат не призвело до їх повного визнання.

І лише у XIX ст. В. Гамільтон, Г. Грасман, М. Остроградський та ін. завершили розробку теорії від’ємних чисел.

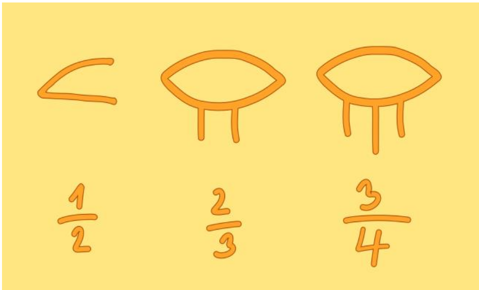
Погляд на нуль як корінь рівняння, тобто число, належить французькому вченому XV ст. Н. Шюке, однак англійський математик Дж. Валліс ще в кінці XVII ст. писав, що «нуль не є число». Аж у 1768 році Л. Ейлер у праці «Універсальна арифметика» відніс нуль до натуральних чисел. Зазначимо, що в українській школі нуль є цілим, а не натуральним числом.

Раціональні числа (латинське *ratio* – розум, відношення, розумне число, пов’язане з відношенням). Італійський учений Р. Бомбеллі удосконалив правила дій над раціональними числами (1572).

Звичайні дроби. Римський філософ Цицерон (І ст. до н. е.) говорив: «Без знання дробів ніхто не може вважати себе обізнаним в арифметиці».

Дріб (латинське *fractura* – від *frango* – розбивати, ламати) на багатьох мовах називається «ламаним (роздрібненим) числом».

Необхідність виконання практичних вимірювальних робіт призвела людство до введення дробових чисел. В Єгипті ще 4000



років тому використовували звичайні дроби, але лише з чисельником 1 (одиничні дроби), дроби $\frac{2}{3}$ та $\frac{3}{4}$. Інші дроби вони за допомогою спеціальних таблиць зводили до одиничних (наприклад, $\frac{5}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$).

Походження шістдесяткової системи числення вавилонян (ІІІ тис. до н. е.) пов'язане з грошовою і ваговою одиницями, які поділялись на 60 рівних частин. Вавилоняни користувалися дробами, в яких знаменники були степенями числа 60, тобто шістдесятковими дробами. Вчені багатьох країн використовували їх в астрономічних обчисленнях аж до XVII ст. і називали астрономічними. Дроби з будь-яким іншим знаменником називали звичайними.

Тривалий час дроби не вважали числами. Їх намагались уникати стародавні греки (наприклад, Евклід). Архімед (ІІІ ст. до н. е.), не визнаючи дроби числами, все ж користувався ними. Понад 2500 років тому греки вже виконували арифметичні дії над звичайними дробами. Герон (І ст. н. е.) застосовував дроби з будь-яким чисельником і знаменником (розглядав відношення натуральних чисел у вигляді дробу).

Стародавні римляни користувались одиницею вимірювання маси «ас», який також служив і грошовою одиницею. Ас ділився на 12 частин – унцій. З них складали дроби зі знаменником 12 – римські дванадцяткові дроби. Замість 1/12 римляни говорили «одна унція».

У Стародавній Індії в V ст. запис звичайного дробу відрізнявся від сучасного лише відсутністю дробової риски. В Брахмагупти (VII ст.) зустрічаються одиничні дроби і дроби з будь-яким чисельником. Магавіра (в перекладі з санскриту – велика людина, IX ст.) ввів сучасне правило ділення числа на дріб, зазначивши, що ділення на нуль «не є діленням». Бхаскара II (XII ст.) цілі числа записував у вигляді дробів із знаменником 1.

Трактат Бхаскари «Сіддханта-широмани», написаний на полосах пальмових листів

Узбецький математик, астроном і географ IX ст. ал-Хорезмі (з міста Хорезм – частини Середньої Азії, яка нині належить до Узбекистану) дроби із знаменником від 2 до 9 називав такими, що вимовляються (вони в арабській мові мали назви), а інші – «німими». Дроби в стародавній арабській математиці, на відміну від грецької арифметики, вважались такими ж числами, як і натуральні. Записували їх, як і індійці, вертикально.

Найдавнішою арифметичною пам’яткою Київської Русі вважається трактат «Порадник, як людині пізнати числення літ»

(1136) монаха Кирила (Кирика) Новгородського. Його розглядали як підручник для тих, хто цікавиться літочисленням, і як посібник для укладачів великодніх таблиць. У трактаті використовувались поняття циклічності часу, дроби (їх називали «частки», а згодом «ламані числа») тощо.

Італійський математик Леонардо Пізанський (Фібоначчі) в «Книзі про абак» (1202) використовував дробову риску і сучасний запис звичайних дробів, а в мішаному числі цілу частину записував справа, але читав його так, як прийнято нині. Чіткий виклад учення про звичайні дроби в Європі дано в «Арифметиці» С. Стевіна (1585).

Терміни «чисельник» і «знаменник» використовував у своїх працях грецький математик кінця XIII ст. М. Плануд. Термін «обернений дріб» з'явився в праці німецького математика Я. Відмана «Швидка і красива лічба…» (1489). Терміни «звичайний дріб» ввів француз Ж. Траншан (1558), «правильний і неправильний дріб» – угорець Я. Зегнер (1747).

Найдавніший опис алгоритму знаходження найбільшого спільного дільника, яким користуються і нині, подано в «Началах» Евкліда.

У китайському трактаті «Математика в дев'яти книгах» (II ст. до н. е.), крім дій з дробами, описано і скорочення дробів. У Європі скорочення і зведення дробів до спільного знаменника вміли виконувати з XII ст., але самі терміни введено лише у XV ст. Сучасний спосіб знаходження найменшого спільного знаменника подав у праці «Загальний трактат про число і міру» (1556) італійський математик Н. Тарталья.

Німецький математик XIII ст., професор Паризького університету, І. Неморарій виконував ділення дробів за допомогою ділення чисельника на чисельник і знаменника на знаменник, доповнюючи для цього члени першого дробу множниками:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{acd}{bcd}:\frac{c}{d}=\frac{acd:c}{bcd:d}=\frac{ad}{bc}.$$

Сучасне правило ділення дробів як множення на дріб, обернений до дільника, ввів у праці «Повна арифметика» (1544) німецький математик М. Штіфель.

Німецький учений Х. Клавій (1585) довів, що величина дробу не зміниться, якщо його чисельник і знаменник помножити на одне й те саме число. Сучасне правило додавання звичайних дробів вперше зустрічається у голландського математика А. Жирара (1629).

Десяткові дроби відомі в Стародавньому Китаї з II ст. до н. е., де застосовувалась десяткова система мір довжини, а пізніше десяткова лічба поширилась на міри ваги та об'єму. Однак ще й в середні віки вони не мали повної самостійності, а були пов'язані з метрологією. Китайський математик Чжу-Ші-цзе (XIII ст.) ввів термін *сяу-шу* – «десятковий дріб». В Європі термін «десяткові дроби» замість «десяткові числа» введено в 1724 році.

Ідею десяткових дробів висунув і арабський математик Ал-Уклідісі, автор найбільш ранньої з відомих нині арабських праць з арифметики «Книга розділів про індійську арифметику» (953). Проте лише в 1427 році відомий математик і астроном ал-Каші в праці «Ключ до арифметики» ввів «дроби, в яких знаменниками є число 10 та його степені», тобто десяткові дроби. Вчений перший виклав правила дій десятковими дробами, навів приклади дій з ними.

У Європі десяткові дроби майже через 150 років, не знаючи про відкриття ал-Каші, першим ввів С. Стевін. У 1585 році в семисторінковій праці «Децималь» («Десятина») він виклав теорію десяткових дробів, запропонував ввести десяткову систему грошових одиниць, мір ваги.

Якщо ал-Каші цілу і дробову частину писав в один рядок, або записував їх різними кольорами, чи ставив між ними вертикальну риску, то С. Стевін для відокремлення цілої частини від дробової ставив нуль у кружечку. В кінці XVI ст. німецький астроном і математик Й. Кеплер цілу і дробову частини став відокремлювати комою, а Х. Клавій – крапкою.

У «Трактаті про коло» (бл. 1427) ал-Каші вперше зафіксовано спосіб перетворення шістдесяткових дробів у десяткові й навпаки. Німецький математик П. Апіан (1495-1552) з тією самою метою, що і сучасний учитель під час початку вивчення десяткових дробів, вперше використав приклади найпростіших випадків перетворення звичайних дробів у десяткові і навпаки.

Розглядаючи складніші приклади перетворення звичайних дробів у десяткові і навпаки, італійський математик Б. Кавальєрі (1643) першим у Європі став займатись періодичними дробами.

У 1703 році вчення про десяткові дроби виклав Л. Магніцький у першому російському підручнику з математики «Арифметика», хоча десятковим дробам було відведено всього три сторінки, а звичайним дробам – всю другу частину книги. В підручниках другої половини XVIII ст. десяткові дроби розглядалися вже ширше, але після звичайних дробів, коренів і логарифмів. Відомий російський і український математик В. Буняковський (народився у м. Бар, нині Вінницької області) в праці «Арифметика» (1844) вперше подав десяткові дроби паралельно з цілими числами перед звичайними дробами.

Учення про неперервні (ланцюгові) дроби бере свій початок від старогрецьких учених Теетета і Евкліда. Алгоритм утворення скінчених неперервних дробів описав індійський математик Бхаскара II у праці «Вінець системи» (1150). Термін «неперервні дроби» ввів Л. Ейлер (1723).

Ірраціональні числа. У математиці термін «ірраціональний» (латинське *irrationalis* – нерозумний, недоцільний) вживається в розумінні «той, що немає відношення».

Поняття **ірраціонального числа** виникло набагато пізніше, ніж поняття дробу. Шукаючи спільну міру між стороною і діагоналлю квадрата, піфагорійці (V ст. до н. е.) відкрили, що ці відрізки спільної міри не мають, тобто не існує числа, яким можна було виразити відношення цих відрізків, але ірраціональних чисел вони не ввели. Намагання приховати відкриття, яке суперечило їх уявленням про числа, призвело до першої кризи основ математики, яку завершило вчення старогрецького математика Евдокса про несумірності (V книга «Начал» Евкліда).

Ірраціональності, які виникали при розв’язуванні квадратних рівнянь, Евклід будував геометрично. Пошук розв’язання задачі про подвоєння куба призвів до ірраціональностей вищого порядку. Доведення про те, що не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2, подано в «Началах» Евкліда. Старогрецький математик

Феодор з Кірени (кінець V ст. до н. е.) для кожного окремого випадку довів, що сторони квадратів, площі яких дорівнюють 3, 5, 6,…, 17 кв. од., несумірні із стороною одиничного квадрата (в сучасному розумінні $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, …, $\sqrt{17}$ – ірраціональні числа). Перше загальне доведення здійснив Теетет, учень Феодора.

У X-XII ст. арабські та індійські вчені ввели поняття ірраціональних чисел, перенесли правила дій з раціональними числами на дії з ірраціональними.

Щоб позбутись ірраціональності в знаменнику дробу, Бхаскара II (XII ст.) множив чисельник і знаменник на той самий ірраціональний множник.

У працях європейських математиків ірраціональні числа з'явились у XII ст. Їх називали «безголосими», «глухими», «такими, що не можна вимовити», але до XVI ст. не вважали «справжніми» числами.

Бхаскара II

У своїй «Геометрії» Декарт (1637) подав геометричну інтерпретацію ірраціональних коренів рівняння (ірраціональні числа, як і раціональні, зображувались точками на координатній площині).

Загальну теорію ірраціональних чисел створили в другій половині XIX ст. німецькі математики Р. Дедекінд, К. Вейєрштрасс, Г. Кантор та ін.

Дійсні числа. Азербайджанський математик Насіреддін Тусі в трактаті «Про повний чотирибічник» (1260) ввів розширене поняття числа, яке визначається як відношення, раціональне або ірраціональне. А вже в «Геометрії» (1637) Декарта дійсне число фактично виступає як відношення будь-якого відрізка до одиничного, хоч сформулював таке означення числа англійський учений І. Ньютон лише на початку XVIII ст. Однак усі ці означення числа відображають певну властивість чисел, але кожне з них не охоплює всього поняття в цілому.

Термін **«дійсні числа»** ввів Р. Декарт (1637). Теорію дійсних чисел, яка лише термінологією й окремими деталями відрізняється від теорії відношень давньогрецького вченого Евдокса, у 1872 році розробив Р. Дедекінд. Оригінальну теорію дійсних чисел у 1939 році запропонував і український математик Є. Ремез (1896-1975).

Комплексні числа. Вперше уявні величини при розв’язуванні рівнянь другого і третього степенів з’явились у працях Д. Кардано в 1545 році. Найпростіші правила дій над ними подано в «Алгебрі» (1572) Р. Бомбеллі.

Уявними назвав комплексні числа Р. Декарт, не розглядаючи їх нарівні з дійсними. «Хоч числа називаються уявними, але від цього вони не перестають бути корисними і навіть необхідними для аналітичного виразу реальних величин», – вважав Г. Лейбніц. Термін «комплексне число» (дослівно – складене число) вперше вжив у 1803 році французький математик Л. Карно.

У 1707 році французький математик А. Муавр вивів формули піднесення до степеня й добування кореня n-ого степеня з комплексних чисел, поданих у тригонометричній формі. У сучасній символіці формули опубліковані у 1722 році Л. Ейлером.

Повне визнання комплексні числа отримали завдяки працям К. Гаусса, зокрема строгому доведенню у 1799 році основної теореми алгебри, яка стверджує, що кожний многочлен має хоча б один дійсний чи комплексний корінь. Геометричне тлумачення комплексних чисел і арифметичних дій над ними дали датчанин К. Вессель (1799), швейцарець Ж. Арган (1806).

Вираз $a+bi$ французький учений О. Коші назвав «алгебраїчною формою комплексного числа» (1821).

Англійський математик В. Гамільтон (1833) розглядав комплексні числа як пари дійсних чисел з особливими правилами множення для символу i (i – перша буква французького слова imaginaire – уявний, позначення $i = -1$ ввів Л. Ейлер у 1794 році).

Г. Лейбніц вважав, що «дух Божий знайшов найтоншу віддушину в цьому диві (математичного) аналізу, двоїстої сутності, що перебуває між буттям і небуттям, яку ми називаємо уявним коренем з від’ємної одиниці». Тому знак $i = -1$ він заповів викарбувати на своїй могильній плиті як символ потойбічного світу.

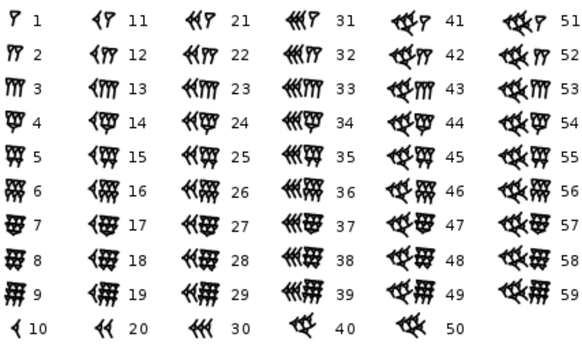
Сучасні вчені вважають числа математичними моделями реального світу, придуманими людиною для пізнання кількісного розмаїття явищ світу.

Цифри

Думка подавати всі числа не багатьма знаками, надаючи їм, крім значення за формою, ще значення за місцем, настільки проста, що саме через цю простоту важко оцінити, наскільки вона дивовижна.

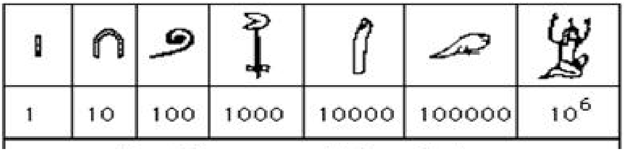
П. Лаплас

Найдавніші відомі цифри створено у Вавилоні та Єгипті (ІІІ тис. до н. е.).



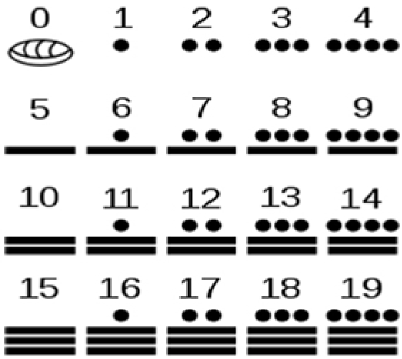
Вавилонські цифри використовувалися в їх шістдесятковій системі числення. Числа записувалися клинописом на глиняних табличках; поки глина ще м’яка, дерев’яною паличкою для письма або загостреним очеретом видавлювали знаки.

Єгипетська система числення – десяткова, непозиційна, і вживалася в Єгипті аж до початку X століття. Стародавні єгиптяни числа позначали ієрогліфічними символами



Фіксованого напрямку запису чисел не існувало: вони могли записуватися справа наліво або зліва направо і навіть вертикально. Наприклад: ієрогліфічний запис Ωll та зворотний запис тих же ієрогліфів llΩ, позначали одне й те ж число — «12».

Римськими цифрами почали користуватися близько 500 р. до н. е. Для позначення чисел використовували сім букв латинського алфавіту: I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000. Натуральні числа записувались за допомогою повторення цих цифр, а позначення нуля було відсутнє.



У VI ст. індіанці племені майя, які жили на території сучасної Мексики, розробили для календарних розрахунків двадцяткову систему числення. Цифри майя складалися з трьох елементів: нуля (знак порожньої мушлі), одиниці (точка) і п’ятірки (горизонтальна риска).

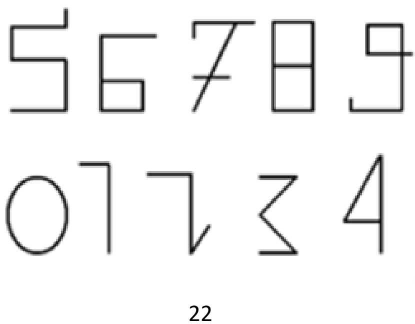
У I–V ст. в Індії була винайдена позиційна десяткова система числення, яка стала загальноприйнятою через багато століть. Математик Якуб-Тарік (VIII ст.), який працював у Багдаді, вивіз з Індії десяткову систему числення. Вперше поза межами Індії узбецький математик ал-Хорезмі в книзі «Про індійську лічбу» (820) описав, як за допомогою дев'яти цифр і нуля записати будь-яке число, виконати «подвоєння» і «роздвоєння» (множення і ділення на 2), а також чотири арифметичні дії та обчислити квадратний корінь.

Індійські цифри в X-XIII ст. були завезені в Європу арабами, через що їх часто називають «арабськими».

Найстаріший запис числа з нулем, знайдений в Індії, датовано 876 роком.

Еволюція індійських цифр

І досі розповсюджена в Єгипті та Північній Африці легенда розповідає, що «арабські» цифри є винаходом арабського скляра-геометра. Він вважав, що дев'ятьом цифрам варто надати форму, яка відповідала б їхньому значенню, пропонуючи для цього фігури з відповідною кількістю кутів.



Французький монах і математик Герберт одним з перших серед європейців познайомився з цими цифрами і, зрозумівши зручність їх використання в порівнянні з римськими, почав широко пропагувати їх впровадження. Ставши главою римо-католицької церкви (139-й папа римський Сильвестр II (999-1003)), він здійснив реформу викладання математики і запровадив десяткову систему числення.

Французький математик Олександр з Вільдьє (XIII ст.) у віршах виклав правила дій над цілими числами. Його «Пісня про алгоритм», яка налічує 2645 віршів, посприяла поширенню «арабських» (індійських) цифр у Європі.

Завдяки першим друкованим математичним книгам італійця Л. Пачолі в другій половині XV ст. «арабські» цифри здобули загальне визнання.

У XVII ст. їх вже використовували для нумерації сторінок у книжках, деяких друкованих та рукописних працях, на золотих монетах.

На початку XVII ст. десяткова нумерація з'являється і в Росії, але церква вважала її безбожною і забороняла, оскільки до цього використовували алфавітну нумерацію.

У старослов’янській алфавітній нумерації одиниці, десятки і сотні зображали слов’янськими буквами з поставленим над ними знаком ~ , що називався «титло», для відмінності цифр від букв. Алфавітні системи нумерації застосовували також греки, вірмени та інші народи.

Закріпилась десяткова система числення в Росії завдяки підручнику «Арифметика» (1703) Л. Магніцького, за яким учні навчалися майже 50 років. ньому цифрою називали лише нуль, адже слово «цифра» в перекладі з арабської мови означає «порожнє місце».

Давньогрецький вчений Птоломей ще у II ст. символ 0 (*омікрон,* від слова *ονδεν* – *ніщо*) писав при відсутності розряду. Згодом для позначення знаку, що показував відсутність одиниць певного розряду, стали використовувати латинське слово «нюллюс» – «ніякий», а цифрами почали називати десять знаків для позначення чисел.

Навіть у XV ст. математики вважали, що нуль «завдає чи не найбільше ускладнень і плутанини».

Знаки арифметичних дій

Давні єгиптяни (коли робили записи справа наліво) використовували як знак додавання малюнок двох ніг, що рухалися вперед а як знак віднімання – малюнок ніг, що рухалися назад.

Спеціальні знаки додавання та віднімання були в стародавніх вавилонян і греків, пізніше в індійських та арабських учених.

Знаки «+» і «–» вперше з’явились у праці німецького математика Я. Відмана «Швидка і красива лічба…» (1489).

У XVII ст. вони стали загальноприйнятими, хоч поряд із знаком «–» використовувався і знак «÷».

А. Жирар (1626) ввів знак «±». Значення «+» і «–» як знаків дій чи додатних і від’ємних чисел стали чітко розрізняти лише з 1800 року.

Ймовірно, що знак «+» утворився з останньої букви латинського слова *et* (сполучник «і»). Інші вважають, що знаки «+» і «–» виникли завдяки виноторговцям, які позначали кількість мір проданого з бочки вина рисочками. Доливаючи вино в бочку, вони перекреслювали стільки рисочок, скільки мір вливали.

Тривалий час для позначення дії множення використовували букву M, а для ділення – D. Знак множення «×» ввів англійський учений У. Оутред (1631). Його використовували і для ділення дробів, бо при цьому обчислення виконували навхрест: чисельник першого дробу множили на знаменник другого. Англійський математик Т. Гарріот використовував крапку як знак множення (1631). Двокрапку як знак ділення вперше вжив Г. Лейбніц (1684).

У підручнику «Арифметика» (1522) німецького математика А. Різе було введено сучасний спосіб множення. Таблиця множення вперше подана в праці Я. Відмана «Швидка і красива лічба» (1489). Сучасний спосіб ділення, описаний в італійському рукописі 1460 року, називали «золотим діленням». Аж до XV ст. ділення виконували методом послідовного віднімання.

Термін «множник» уперше ввів Боецій (VI ст.). Термін «ділене» і «дільник» уперше з'явились у Герберта (X ст.). Леонардо Пізанський (Фібоначчі) першим ужив термін «частка» та найстаріший із сучасних знаків ділення – горизонтальну риску (1202). Терміни «зменшуване» і «від'ємник» увів німецький математик Х. Вольф (1710).

Допоміжні знаки

Сучасний знак рівності «=», який увів у 1557 році англійський лікар і математик Р. Рекорд, став загальновживаним лише у XVIII ст. Вчений вважав, що ніякі два предмети не можуть бути між собою більш рівними, ніж два паралельних відрізки. За аналогією із знаком рівності Р. Рекорда, англійський математик Т. Гарріот (1631) ввів знак «≠» і знаки нерівності: якщо дві величини не рівні, то відрізки в знаку рівності вже не паралельні, а перетинаються. Перетин може бути справа (>, більше) або зліва (<, менше). У 1670 році англійський математик Дж. Валліс увів знаки «≥» – більше або дорівнює, «≤» – менше або дорівнює.

Н. Шюке в трактаті «Наука про число» (1484, опублікований в 1848 році) вираз, який треба було взяти в дужки, підкреслював горизонтальною рискою. Круглі дужки ( ) вперше вжив Н. Тарталья (1556), квадратні дужки [ ] – Р. Бомбеллі (1572), а фігурні дужки

$\{\ \}$ – Ф. Вієт (1593). Дужки (термін увів Л. Ейлер) почали широко використовувати лише у XVIII ст. Правила розстановки дужок увів німецький математик Ф. Шредер (1873).

Поняття квадратного і кубічного коренів були відомі у Вавилоні та Стародавньому Єгипті майже за дві тисячі років до нашої ери. Старогрецькі математики замість «добути корінь» говорили: «знайти сторону за даною площею квадрата», тому корінь квадратний називали «стороною». Від латинського *radix* походять терміни «радикал», «корінь», які ввійшли в математику завдяки перекладам «Начал» Евкліда з арабської на латину англійського математика Р. Честерського (1145). У Європі у XIII ст. позначали корінь латинським словом *Radix* – скорочено R. Так, Н. Шюке писав: $R^2 5\left(\sqrt{5}\right)$. Німецькі математики XV-XVI ст. позначали квадратний корінь крапкою перед числом (виразом).

З часом крапки замінили рисками, які пізніше перетворились на символ . Один такий символ перед числом означав квадратний корінь, два таких знаки – корінь четвертого степеня, а три – кубічний корінь. Знак кореня $\vee$ ввів чеський математик К. Рудольф (1525). Позначення $\overset{2}{\vee}$, $\overset{3}{\vee}$, введене А. Жираром (1626), поступово витіснило знак R. Однак ще довгий час писали $\vee\overline{a+b}$. Декарт (1637), з’єднавши знак кореня з горизонтальною рискою, ввів сучасний знак кореня $\sqrt{\ }$.

Відсотки

Ще у Вавилоні (початок II тис. до н. е.) мали місце розрахунки відсотків за боргами. В Індії відсотки були відомі з V ст. Для обчислення відсотків там використовували так зване потрійне правило, тобто за допомогою пропорції.

Грошові розрахунки з відсотками були дуже поширені в Стародавньому Римі.

Римляни називали відсотками гроші, які платив боржник позикодавцеві за кожну сотню. Навіть римський сенат змушений був встановити максимально допустимий відсоток, що стягується з боржника, оскільки деякі позикодавці намагались отримати надприбутки від позичених грошей. Від римлян відсотки перейшли до інших народів.

У середні віки в Європі у зв'язку з широким розвитком торгівлі особливу увагу звертали на вміння обчислювати відсотки. Доводилось обчислювати відсотки з відсотків, тобто складні відсотки.

Знак відсотка, який зустрічається в італійських рукописах XIV ст., є скороченням виразу *«per 100»* («пер центо» – на сто).

У «Комерційній арифметиці» (1685) внаслідок помилки (друкар скорочення «cto» прийняв за дріб) воно набуло вигляду $\frac{\circ}{\circ}$. Знак % стали використовувати в середині XIX ст. з типографських міркувань.

Першу таблицю відсотків в Європі опублікував С. Стевін (1584).

З часом люди навчились добувати речовини, компоненти яких становлять тисячні долі відсотка від маси самої речовини. Для зручності запису ввели нову величину, в якій визначають солоність води, нахил річки і рейкових шляхів у підземних виробках тощо – проміле (‰). 1‰ = 10^{-3} = 0,001 = 0,1%.

Пропорції. Пропорційність величин

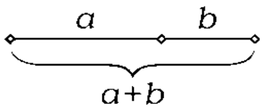
Теорія пропорцій розроблялась старогрецькими математиками і була завершена в працях Евдокса Кнідського та його учня Теетета (IV ст. до н. е.). Цю теорію викладено в «Началах» Евкліда, зокрема, доведено й основну властивість пропорції.

Учення про відношення і пропорції піфагорійці називали музикою і вважали галуззю математики. В кожному музичному інструменті є кілька струн, які під час гри мають звучати приємно для слуху людини, а для цього довжина струн має перебувати в певному відношенні.

Сучасне означення пропорції належить італійському математику XV ст. Б. Цамберті. Сучасний запис пропорції $a:b=c:d$ ввів Г. Лейбніц (1708).

Золотий перетин (переріз) був відомий ще Евкліду (III ст. до н. е.), але сам термін увів італійський художник і вчений Леонардо да

Вінчі (XVст.). У математиці дві величини утворюють «золотий перетин», якщо відношення їх суми і більшої величини дорівнює відношенню більшої і меншої величин. Це відношення позначають грецькою літерою φ.



Число $\varphi = \dfrac{a+b}{a} = \dfrac{a}{b}$ іноді називають «золотим» числом.

Нехай $a + b = 1, a = x$. Тоді $1 : x = x : (1 - x)$,

звідки $x^2 + x - 1 = 0,\ x = 0,5(\sqrt{5} - 1)$.

Отже, $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887...$

На практиці часто застосовують наближений золотий перетин (поділ), досліджений Леонардо Пізанським (Фібоначчі, XII ст.) і названий на його честь. Це такі співвідношення, де кожне наступне число є сумою двох попередніх: 3:5; 5:8; 8:13; 13:21 і т. д. Властивостям золотого перерізу та пропорцій в архітектурі і будові людського тіла присвячено працю Л. Пачолі «Про божественну пропорцію» (1498), ілюстрації до якої виконав Леонардо да Вінчі.

Буквена символіка

В «Арифметиці» грецького математика Діофанта (ІІІ ст. н. е.) вперше з'явилась буквена символіка і спеціальні позначення для степенів аж до шостого степеня. Невідому величину вчений називав *ἀριθμός* (грецькою – число) і позначав літерою *ς*, а квадрат невідомої – δ (від *δύναμις* – степінь). У праці введені позначення для від'ємних степенів, від'ємних чисел, а також знак рівності, стислий запис правил множення цілих чисел.

В XV ст. ал-Каші a^4 називав квадрато-квадрат, a^5 – квадрато-куб, a^6 – кубо-куб, a^{16} – квадрато-квадрато-кубо-кубо-кубо-куб. У своїх працях він уперше подав рівність $a^n \cdot a^0 = a^n$. Незалежно від нього одночасно нульовий показник ввів Н. Шюке. М. Штіфель запропонував рівність $a^0 = 1$ і ввів термін «показник» (латинське *exponens)*. Від'ємні показники ввів М. Штіфель у книзі «Повна арифметика» (1544). Н. Орем у праці «Обчислення пропорцій» (XIV ст.) вперше використав дробові показники степеня.

Символіка Вієта, яка дуже відрізняється від сучасної (наприклад, вираз x^3 записували *Acubus*), вдосконалювалась його послідовниками, і остаточного вигляду їй надав Р. Декарт (1637). Учений ввів сучасні позначення змінних і шуканих величин (*x, y, z*), буквених коефіцієнтів (*a, b, c*), позначення степенів $a^2, a^3, \dots, a^n$. Ці позначення степенів використали для від'ємних і дробових показників Дж. Валліс і І. Ньютон (1676).

У 1591 році Вієт, крім символів змінних, уперше ввів позначення для довільних величин, тобто параметрів (грецьке *parametreo* – вимірюю що-небудь, порівнюючи з чим-небудь іншим), і поняття «коефіцієнт» (латинські *co* – з, разом, *efficiens* – той, що виробляє, складає, є причиною чого-небудь). Числові коефіцієнти застосовував ще Діофант (ІІІ ст. до н.е.), записуючи їх після знака невідомої. Поняття коефіцієнта вживали і староіндійські вчені.

Рівняння. Системи рівнянь

У збережених математичних папірусах єгиптян (ІІ тис. до н. е.) є не лише задачі, що розв'язуються за допомогою рівнянь першого степеня з одним невідомим, а й такі, що призводять до рівнянь виду $ax^2 = b$. Ще складніші задачі вміли розв'язувати математики Вавилону: квадратні й біквадратні рівняння, системи рівнянь з двома невідомими і найпростіші кубічні рівняння. Вавилоняни, як і єгиптяни, не використовували буквених позначень, а наводили розв'язки типових задач, які супроводжувалися вказівкою: «Роби, як робиться, і ти дістанеш правильне».

Китайські математики розробили метод послідовного виключення невідомих для розв'язання систем лінійних рівнянь (152 р. до н. е.).

З VI ст. до н. е. грецькі вчені висловлювали всі алгебраїчні твердження в геометричній формі: замість додавання чисел виконували додавання відрізків, добуток двох чисел розглядали як площу прямокутника, добуток трьох чисел – як об'єм прямокутного паралелепіпеда. Так з'явились терміни «квадрат числа», «куб числа». Греки розв'язували квадратне рівняння геометрично, шукаючи сторони прямокутника за заданими периметром і площею.

Діофанту належить постановка і розв'язування задач, які зводились до невизначених рівнянь та систем рівнянь, у тому числі до систем, де кількість рівнянь менша кількості невідомих. Для таких рівнянь учений шукав лише додатні раціональні розв'язки.

З VI ст. н. е. центр математичних досліджень переходить в Індію та країни Близького Сходу і Середньої Азії. Алгебра вже розглядалась як самостійна галузь математики, що займається розв'язуванням рівнянь. Термін *алгебра* (арабське *ал-джебр* – відновлення, поновлення), введений у праці ал-Хорезмі «Кітаб ал-джебр і ал-мукабала» («Книга про відновлення і протиставлення», 825 р.), означав перенесення від'ємних членів рівняння з однієї частини в іншу зі зміною знаку. В роботі, присвяченій розв'язанню рівнянь першого і другого степеня, подано загальні правила розв'язання рівнянь першого степеня. На початку XIII ст. в Європі книгу переклали на латинську мову, а слово «алджебр» стало назвою всієї науки – алгебри, яка довгий час була наукою про рівняння.

Індійський математик Бхаскара II отримував від'ємні корені рівнянь, хоча і сумнівався в їхньому значенні.

Леонардо Пізанський (Фібоначчі) у «Книзі про абак» (1202) перший в Європі дав відомості з алгебри (до квадратних рівнянь включно).

Пошуки розв'язування рівнянь третього і четвертого степенів почались ще в Стародавній Греції. Вчені Сходу вміли розв'язувати деякі кубічні рівняння, хоча не мали загальної формули для їх коренів. Геометричні задачі, що призводять до розв'язування рівнянь третього степеня, вперше зустрічаються в китайського астронома і математика Ван Сяотуна (VII ст.). Методи розв'язування рівнянь четвертого і вищих степенів подано в працях китайських математиків XIII-XIV ст. Цзінь Цзю-шао, Ян Хуея та ін.

Перше значне досягнення європейських математиків XVI ст.

належить італійцям С. дель Ферро, Н. Тартальї та Дж. Кардано. Тарталья розв'язав у радикалах деякі типи неповних кубічних рівнянь (1535). Після довгих умовлянь, давши клятву про нерозголошення «великого алгебраїчного секрету», Кардано отримав (у віршованій формі) від Тартальї його спосіб розв'язування. Кардано зумів узагальнити цей спосіб і поширив його на розв'язування в радикалах повних кубічних рівнянь, знайшовши лінійне перетворення коренів, яке зводило повне кубічне рівняння до виду, вільного від члена другого степеня. В 1545 році вийшла праця Дж. Кардано «Велике мистецтво». З посиланням на Н. Тарталью подано правило розв'язування кубічного рівняння (назване формулою Кардано) і спосіб розв'язування в радикалах рівнянь четвертого степеня, знайдений його учнем Л. Феррарі.

Розвиваючи результати Кардано, Вієт відкрив названу його ім'ям теорему про співвідношення між коренями і коефіцієнтами многочлена. Окремим випадком цієї залежності є теорема Вієта для квадратних коренів. Вієт вивів формулу коренів квадратного рівняння (1591). Він показав, що кубічне рівняння може мати три дійсних корені, причому сума цих коренів завжди дорівнює коефіцієнту при x^2 з протилежним знаком (одна з формул Вієта). У працях Вієта (1646) вже зустрічається термін «однорідність» (латинське *homogeneus*– однорідний). Учений в алгебраїчних рівняннях додавав лише «однорідні» величини: довжини, площі, об'єми.

Т. Гарріот у праці «Практика аналітичного мистецтва» (1631), записуючи рівняння, у лівій частині прирівнював його до нуля. Він першим помітив, що число коренів рівняння визначається його степенем, а ліва частина рівняння повинна розкладатися на таке ж число лінійних множників. С. Стевін став використовувати від'ємні корені рівняння, сформулював умови існування кореня на даному інтервалі (1585). А. Жирар у праці «Нове відкриття в алгебрі» (1629) розглядав від'ємні («розв'язки з мінусом») та уявні («приховані») корені рівнянь, першим став вважати нуль коренем рівняння, тобто числом. Р. Декарт називав від'ємні корені рівняння «брехливими».

У XVIII ст. для розв'язку систем лінійних рівнянь були виведені формули, які дозволяли виразити розв'язок через коефіцієнти і вільні члени.

Арифметична та геометрична прогресії

Термін «прогресія» походить від латинського *progredior* – йду вперед, *progression* – рух уперед, успіх, поступове зусилля.

Назви «арифметична» і «геометрична» перенесені на прогресії з теорії неперервних пропорцій, які вивчали стародавні греки. Назва «геометрична прогресія» пояснюється тим, що будь-який її член є середнім геометричним між двома сусідніми.

У II тис. до н. е. в клинописних таблицях вавилонян, єгипетських папірусах, китайському трактаті «Математика в дев'яти книгах» подано задачі на арифметичну та геометричну прогресії і вказівки до їх розв'язування.

Перші відомості, що до нас дійшли, про прогресії та їх суми знаходимо в працях давньогрецьких математиків. Їм були відомі формули суми n перших членів послідовності:

натуральних чисел $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,

парних чисел $2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$,

непарних чисел $1+3+5+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$.

У праці «Підрахування піщинок» («Псаміт») Архімед співставив арифметичну прогресію *1, 2, 3, 4, 5, …* з геометричною $10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 \ldots$. Якщо в геометричній прогресії перемножити два будь-яких члени, що стоять на місцях з номерами a та b, то одержимо член прогресії, який стоїть на місці з номером $a+b$, тобто для множення двох членів геометричної прогресії досить додати відповідні члени арифметичної прогресії і поставити одержану суму показником степеня з основою *10*.

Індійський математик Аріабхата (V ст.) знав формули загального члена і суми членів арифметичної прогресії. Правило знаходження суми членів арифметичної прогресії в Європі вперше подав Леонардо Пізанський (Фібоначчі,1202). Н. Шюке у праці «Наука про числа» (1484) увів загальне правило для обчислення суми нескінченної спадної геометричної прогресії. Суму членів нескінченної геометричної прогресії за допомогою граничного переходу обчислив бельгійський математик А. Таке (1656).

Знак $\div$ для позначення арифметичної прогресії став загальноприйнятим у XVIII ст.

Функція

Перші кроки на шляху творення загального поняття функції зробили математики Вавилону. Давньогрецькі вчені розв’язали деякі задачі на найбільше і найменше значення, встановили співвідношення між довжинами хорд і діаметрів кола, однак поняття функції не ввели.

Н. Орем у праці «Про конфігурацію якостей і рухів» (до 1370) розвинув ідею функціональної залежності (спеціальний графічний метод вираження відношень між фізичними об’єктами).

П. Ферма одночасно з Р. Декартом (незалежно один від одного) встановив відповідність між алгебраїчними рівняннями з двома змінними та їх графіками на площині, де задана система прямокутних координат. Учений розглядав графіки загального лінійного рівняння, рівняння кола, гіперболи $yx = a$ (лише її вітку в I квадранті) та ін. Метод координат почав широко застосовуватися для графічного дослідження функцій. Важливим кроком у розвитку математики стало встановлення залежності між лініями (графіками) і рівняннями (формулами), які їм відповідають.

У XVII ст. в поняття функції вкладався геометричний зміст (Г. Лейбніц функцією називав відрізок, довжина якого змінюється за певним правилом) і механічний (І. Ньютон досліджував залежність шляху і швидкості – функції від часу). У 1718 році швейцарський математик Й. Бернуллі звільнив означення функції від геометричної мови. Він задавав функцію формулою, яка одну змінну величину пов’язувала з другою, відповідною їй. Однак функцію не можна ототожнювати з формулою, якою її задано, позаяк є функції, які на різних проміжках області визначення задаються різними формулами, і функції, що задаються однаковими формулами, але мають неоднакові області визначення.

На початку XIX ст. французький математик Ж. Фур’є довів, що будь-яку довільно накреслену лінію, складену з відрізків дуг різних кривих, можна задати єдиним аналітичним виразом. До сучасного шкільного означення функції наблизився російський математик М. Лобачевский, розглядаючи її як залежність між двома змінними (1834). Це означення уточнив німецький математик П. Діріхле (1837), наголосивши, що «немає значення, як встановлена ця відповідність – аналітичною формулою, графіком, таблицею чи просто словами». Л. Ейлер дав означення функції як аналітичного виразу та спосіб задання функції формулою (1755).

Прообразом табличного способу задання функції вважають таблиці квадратів і кубів вавилонян, близькосхідні таблиці тангенсів і котангенсів.

Термін «функція» (латинські *functus* – виконувати, *functio* – функція, дія) належить Г. Лейбніцу (1692). Л. Ейлер позначив функцію $f(x)$ (1747).

Термін «аргумент» (латинське *argumentum* – доведення, зміст, ознака, знак) у математиці має різні значення: незалежна змінна величина (Лейбніц увів термін «змінна величина» у 1692 р.) або вираз, що стоїть під знаком функції. Вираз «аргумент функції», який уперше в науковій літературі з'явився у 1862 році, став загальновживаним у двадцятих роках XX ст.

Сучасна математика поняття функції не пов'язує зі змінною величиною, а означає його через відповідність чи через відношення.

Вивчати тему «Функції» в шкільному курсі математики вперше запропонував М. Остроградський.

Система координат

Вважають, що, по суті, ідеєю координат вже у III ст. до н. е. володіли Архімед, Аполлоній.

Гіпарх (200 р. до н. е.) увів географічні координати (широту і довготу) для визначення положення точки на земній поверхні.

Герон (I ст.), даючи у праці «Про діоптр» (знайдена в 1814 р.) правила земельної зйомки, фактично використав прямокутні координати. Такі ж координати, для зручного знаходження своїх легіонів, стародавні римляни застосовували при облаштуванні військового табору.

Н. Орем (XIV ст.) уперше застосував ідею Гіпарха в математиці, задавши положення точок на площині широтою і довготою, що відповідали поняттям абсциси і ординати.

Значні можливості використання ідеї Гіпарха були розкриті в працях П. Ферма і Р. Декарта. В 1635 році Ферма систематизовано виклав метод координат, увів прямолінійні координати, але «Геометрія» Декарта, опублікована через 2 роки, набула більшого поширення. Тому прямокутну систему координат часто називають *декартовою*.

Термін «координати» (латинські *co* – з, разом, *ordinatus* – упорядкований, визначений) ввів Г. Лейбніц, щоб підкреслити рівноправність абсцис і ординат точок. Він увів і термін «осі координат» (1692).

Терміни «абсциса», «ордината», «апліката» вперше ввів Аполлоній Пергський. Італійський математик Б. Кавальєрі (1635) термін *абсциса* (латинське *abscissus* – відрізаний, відокремлений – відрізок) використовував у розумінні відрізка. У сучасному значенні термін вперше вжив Г. Лейбніц (1694). Від'ємні абсциси вперше ввів англійський математик Дж. Валліс (1655). Вираз «вісь абсцис» увів англійський математик І. Барроу (1670).

Термін *ордината* (латинське *ordinatae* – упорядкований, визначений) як назву певного відрізка конічного перерізу застосовував Декарт. У 1694 році Г. Лейбніц назвав так одну з координат точки. Французький математик К. Раб'юель в «Коментарях до геометрії пана Декарта» (1730) вперше використав другу координатну вісь.

У 1715 році Й. Бернуллі вперше означив просторові координати x (абсциса), y (ордината), z (апліката, латинське *applicatae* – прикладений, приєднаний) як перпендикуляри на три взаємно перпендикулярні площини. Завдяки книзі французького математика А. Клеро «Дослідження про криві подвійної кривизни» (1731) в аналітичній геометрії стали систематично використовувати просторові координати.

Французький математик Ф. де Лагір увів термін «початок координат» і його позначення буквою O (1679). Формули перетворення прямокутних координат у полярні вивів шотландський учений Дж. Грегорі (1700).

Тригонометричні функції

Термін **«тригонометрія»** (від грецьких *trigonon* – трикутник, *metreo* – міряю, буквально вимірювання трикутників) вперше зустрічається в праці німецького математика Б. Пітіскуса (1595).

Леонард Ейлер

У 1260 році Насіреддін ат-Тусі виділив тригонометрію з астрономії в окрему науку. Першим європейським автором рукописної праці з тригонометрії став англійський математик XIV ст. Т. Брадвардін. У середині XV ст. першим в Європі німецький математик Регіомонтан став розглядати тригонометрію як самостійну науку. Він склав дуже точні таблиці синусів і тангенсів.

Сучасного вигляду тригонометрія набула у XVIII ст. в працях Л. Ейлера. На основі його робіт були написані підручники з тригонометрії.

Термін **«тригонометричні функції»** вперше введено у «Математичному словнику» (1803) німецького математика Г. Клюгеля.

Вже в працях індійських астрономів та математиків V ст. зустрічається термін «синус». Замінивши хорду синусом, індійці спочатку називали синус «ардхаджива», тобто половина хорди, а пізніше – просто «джіва». Араби при перекладі математичних творів індійських вчених замінили санскритське слово «джіва» (половина тятиви лука) на «джіба» (хорда), а у ІХ ст. – на арабське слово «джайб» – пазуха, западина, опуклість. Англійський учений XII ст. Р. Честерський, здійснюючи переклад з арабської мови на латину, використав слово *«sinus»* – дослівний переклад слова «джайб». Є й інші гіпотези походження цієї назви.

Позначення *sin* вперше ввів у першій половині XVII ст. А. Жирар. Французький математик О. Фабрі в праці «Геометричний трактат про лінію синусів і циклоїду» (1659) ввів термін «лінія синусів» (вертикальний діаметр одиничного круга). Першим графіком тригонометричної функції була синусоїда, подана в книзі французького математика Ж. П. де Робельваля (1738). Лише у 1670 році англійський математик Дж. Валліс подав знаки синуса в кожному квадранті та накреслив два повних оберти синусоїди, констатувавши, що їх нескінченно багато.

Л. Ейлер вперше доступно виклав питання про знаки тригонометричних функцій у кожному квадранті, встановив формули зведення, чітко дослідив області визначення цих функцій і ввів символами для їх позначення *sin x, cos x, tang x, cot x* та ін. У праці «Введення в аналіз нескінченних» (1748) учений вперше трактує синус, косинус та ін. не як тригонометричні лінії, пов'язані з колом, а як тригонометричні функції, які він розглядав як відношення сторін прямокутного трикутника, як числові величини.

Термін «косинус» (скорочення латинського виразу *complementisinus* – синус доповнення) ввів англійський математик Е. Гунтер (1620). Скорочення *cos* ввів Оутред (1657). Графік функції *y=cosx* – косинусоїду для першого квадранта вперше подав І. Бароу (1674).

Французький учений Ж. Біо (1803) вперше запропонував розглядати синус і косинус як координати точок круга з радіусом одиниця і на цій підставі визначати їх знак.

У IX-X ст. вчені країн ісламу (ал-Хабаш, ал-Баттані, Абул-Вафа та ін.) ввели нові тригонометричні величини: тангенс і котангенс, секанс і косеканс. Середньоазійський математик і астроном IX ст. ал-Хабаш ал-Хасіб, тобто обчислювач, перший увів поняття тангенса і котангенса через відношення сторін прямокутного трикутника, склав найперші в історії науки таблиці цих функцій.

В Європі тангенси відкрив Т. Брадвардін (XIV ст.), не підозрюючи, що таблиці тангенсів було складено ще у IX ст. Він назвав тангенс – *umbraversa* – обернена тінь. Термін «тангенс» (латинське *tangens* – дотична; той, що торкається), який став загальноприйнятим у XVII ст., ввів датський математик Т. Фінке (1583). Графік тангенса побудував Р. Котс (1722). Вперше знаки тангенса для кутів різних квадрантів і період функції встановив французький математик Том Фанте де Ланьї (1705). Позначення *tgx* стало загальновживаним завдяки Ейлеру.

Котангенси, які з'явилися раніше тангенсів, винайшов арабський математик ал-Баттані (IX ст.). В Європі їх «перевідкрив» у XIV ст. англійський математик Т. Брадвардін. Він назвав котангенс *umbrarecta* – пряма тінь. Термін «котангенс» (від латинського *complementi tangens*– тангенс доповнення) введено Е. Гунтером (1620).

Термін «секанс» (від латинського *secans*– той, що січе, розтинає) ввів датський математик Т. Фінке (1583).

Графік секанса належить англійському математику Р. Котсу (1722).

Термін «косеканс» (скорочення від латинського *complementisecans: complementus*– доповнення, *secans* – той, що січе – секанс доповнення) ввів австрійський математик Г. Ретік (1551).

Індійським математикам ще в V ст. були відомі формули (в словесному формулюванні) і співвідношення: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

Математик Сходу X ст. Абу-л-Вефа першим виклав теореми, відповідні формулам: $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ і $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Назви обернених тригонометричних функцій утворюються додаванням *арк* (латинське *arcus* – дуга, дугоподібна лінія, лук) до назв відповідних тригонометричних функцій. Знак функції, оберненої синусу кута *arcsin,* ввів Ж. Лагранж (1772).

Логарифми

Принцип, покладений в основу будь-якої системи логарифмів, був відомий ще математикам Вавилону (близько 2000 р. до н. е.).

В «Арифметиці цілих чисел» (1544) М. Штіфель з метою розвитку прийомів, які спрощували обчислення з великими числами, вперше зіставляв геометричну і арифметичну прогресії.

Дж. Непер

Але це були лише перші кроки в напрямку, який привів І. Бюргі та Дж. Непера до створення логарифмів. Дж. Непер відкрив їх у 1594 році, назвавши «штучними числами», для позначення яких не ввів ніяких символів. В «Описі чудесних таблиць логарифмів» (1614) Непер виклав означення і властивості логарифмів, дав опис таблиць, правила користування ними і приклади застосування. При складанні таблиць він виходив з порівняння арифметичної і геометричної прогресій, причому члени арифметичної прогресії назвав логарифмами (грецькі $\lambda o \gamma o \varsigma$ – вчення, розум, відношення, $\alpha \rho \iota \vartheta \mu o \varsigma$ – число, лічба, номер, тобто «співвіднесені числа»), яким у геометричній прогресії відповідають певні числа. Таблиці призначались для знаходження логарифмів синусів і тангенсів, але їх можна було використати для знаходження логарифмів натуральних чисел.

У 1620 році швейцарський математик Й. Бюргі незалежно від Непера надрукував таблиці логарифмів «Арифметичні й геометричні таблиці прогресій» (1603-1611), однак таблиці Непера були практичніші і зручніші в користуванні. По суті, таблиці Бюргі були таблицями антилогарифмів з основою, близькою до числа e.

Ідея десяткових логарифмів виникла в англійського математика Г. Брігса (1561-1630) після ознайомлення з таблицями Непера. У 1617 році Брігс опублікував восьмизначні таблиці десяткових логарифмів, і не лише синусів, а й самих чисел (від 1 до 1000, з чотирнадцятьма знаками). Він уточнив означення логарифма, наблизивши його до сучасного, показав, що логарифм одиниці дорівнює нулю. В його «Логарифмічній арифметиці» (1624) подано таблиці десяткових логарифмів чисел 1-20000, 90000-100000. Голландець А. Влакк (1628) завершив працю Г. Брігса і видав десятизначні таблиці десяткових логарифмів чисел від 1 до 100000. У 1633 році видано таблиці логарифмів тригонометричних функцій Брігса. Однак в таблицях Брігса були допущені помилки. На основі таблиць словенського і австрійського математика Г. Веги німецький астроном К. Бремікер підготував першу безпомилкову збірку логарифмічних таблиць,

Англійський математик Дж. Спейдель у праці «Нові логарифми» (1619) подав перші таблиці натуральних логарифмів чисел від 1 до 1000.

У 1639 році Б. Кавальєрі видав книгу «Сто різних задач для демонстрування корисності й легкості застосування логарифмів у тригонометрії, астрономії, географії». У Росії вперше таблицю логарифмів синусів і тангенсів видано Л. Магніцьким (у співавторстві) в 1703 році.

Сучасне означення логарифмування як операції, оберненої до піднесення до степеня, вперше дав Дж. Валліс («Трактат з алгебри», 1685). Л. Ейлер першим поширив логарифмічну функцію на комплексні числа.

Термін «характеристика» (з грецької – риса, особливість) для цілої частини десяткового логарифма і знак логарифма log ввів Брігс. Німецький математик Н. Меркатор увів терміни «натуральний логарифм», «модуль переходу» (1668), Л. Ейлер (1748) – терміни «основа логарифма», «мантиса» (з латинської – додаток, придаток) для позначення десяткових знаків логарифма.

Похідна

Поняття похідної, необхідної для роз-в'язання деяких задач фізики, механіки і математики, виникло у XVII ст.

Розв'язання задач на визначення швидкості прямолінійного нерівномірного руху виклав Ньютон у трактаті «Метод флюксій і нескінченних рядів» (1671, надруковано у 1736 р.). Він функцію називав флюентою (латинське *fluere* – текти), а похідну – флюксією. Цю термінологію і символи похідної використовують у фізиці й механіці і нині (іноді позначають крапками над літерами похідні за часом).

Математики XV-XVII ст. намагалися знайти загальний метод побудови дотичної до кривої. Окремі випадки розв'язування цієї задачі дали Евклід (дотична до кола), Архімед (дотична до спіралі Архімеда), Аполлоній (дотична до еліпса, гіперболи, параболи).

Перший загальний спосіб побудови дотичної до алгебраїчної кривої подано в «Геометрії» Декарта (1637). Більш загальним і важливим для розвитку диференціального числення став метод побудови дотичних Ферма. Ґрунтуючись на його результатах, Лейбніц розробив свій алгоритм (латинське *algorithmus* – від перекрученого прізвища ал-Хорезмі. Дехто пов'язує його з арабським al-horethm (корінь) або з грецьким *ariphmos* – число) побудови дотичних, який зводився до визначення ординат за відомими їх різницями. Знаходження кутового коефіцієнта дотичної в точці M до плоскої кривої, заданої функцією, вчений звів до знаходження похідної функції y по незалежній змінній x при даному її значенні (в даній точці).

У мемуарі «Новий метод максимумів і мінімумів, а також дотичних» (1684) він назвав цей алгоритм диференціальним численням, похідну – диференціальним відношенням $\frac{dx}{dy}$.

І. Ньютон

Г. Лейбніц

Завдяки працям Г. Лейбніца з диференціального числення (1684) словом «алгоритм» почали називати точні вказівки виконання в певному порядку операцій для розв'язування задач певного типу. Сучасне поняття алгоритму встановилось у середині тридцятих років XX ст.

Г. Лейбніц сформулював правила диференціювання суми, різниці, добутку, степеня, частки, знаходження точок екстремуму і перегину.

Позначення похідної $f'(x)$ (1770) і термін «похідна» (1797) ввів Лагранж. Французький математик Л. Арбогаст (1800) першим позначив похідну символом Dy (перша літера французького *derive*– похідна).

Термін «асимптота» **(**грецьке *asimptotus* – такий, що не збігається) приписують старогрецькому математику Аполлонію Пергському (ІІІ ст. до н. е.). Учення про асимптоти алгебраїчних кривих розвинув Л. Ейлер (1748). Сучасний спосіб відшукання асимптот показав О. Коші (1826).

Інтеграл та його застосування

Які натхнені Ньютон з Лейбніцем були,
якими барвами їх формули заграли,
яку могуть побачили творці, коли
зійшлись їх похідні та інтеграли.
Зійшлись – немов злилися два струмки
В стократ потужнішу ріку єдину.
Їх теоремі славній завдяки
те, що колись долали вчені за віки,
тепер школяр долає за годину.
Г. Бевз. Теорема Ньютона-Лейбніца

Початки інтегрального числення закладені в працях давньогрецьких учених Демокрита, Евдокса, Евкліда, Архімеда. У IVст. до н. е. Евдокс фактично виконував операцію граничного переходу, застосовуючи метод вичерпування для визначення площ і об'ємів. Для знаходження площ і об'ємів геометричних фігур Архімед розкладав плоску фігуру або геометричне тіло на елементи, тобто вперше складав для визначення об'єму суми, які нині називаються інтегральними сумами Дарбу. Метод Архімеда для обчислення площ і об'ємів спростив і узагальнив італійський математик Л. Валеріо (1604), який довів загальну теорему.

У праці «Стереометрія винних бочок» (1615) німецький математик і астроном Й. Кеплер застосував ідею методу неподільних (кожне тіло обертання складається з безлічі «найтонших кружечків») і певними прийомами інтегрування визначив об'єми 80 тіл обертання.

У праці «Геометрія» (1625) Б. Кавальєрі для визначення площ і об'ємів уявляв, що кожна геометрична фігура складена з «неподільних» (плоска фігура – з відрізків, тіло – з плоских фігур). Італійський вчений Е. Торріччелі (1644) удосконалив і широко застосував метод неподільних при розв'язувані задач на дотичні.

П. Ферма вивів формули інтегрування за частинами (1635). Залежність $\left(\int_0^x y dx\right)' = y$, встановлена І. Барроу (1670), дозволила обчислювати інтеграли за допомогою первісної – операції, оберненої до диференціювання. І. Ньютон (1666, опубліковано в 1704 р.) і Г. Лейбніц (1675, надруковано в 1686 р.) завершили розробку інтегрального числення. У 1716 році Ньютон писав: «Я не заперечую, що пан Лейбніц міг відкрити його (диференціальне й інтегральне числення) сам. Але це було вже після мене».

Знак інтеграла $\int$ і запис $\int ydx$ Г. Лейбніц ввів у першій друкованій праці з інтегрального числення «Про глибоку геометрію і аналіз неподільних» (1686). Термін **«інтеграл»** (латинське *integer* – цілий, тобто ціла, вся площа) запропонував швейцарський математик Й. Бернуллі (1690). Позначення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ ввів Ж. Фур'є.

Комбінаторика

Елементи комбінаторики були відомі ще стародавнім китайцям, індійцям та античним грекам. Окремі задачі комбінаторики розв'язував ще Аристотель (IV ст. до н.е.). Індійські математики II ст. до н.е. знали число комбінацій з *n* елементів по *m* та формулу $1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^n=2^n$.

Бхаскара (XII ст.) розглядав перестановки з повтореннями. Основи комбінаторики закладено у книзі швейцарського математика П. Гульдіна «Арифметична задача про комбінації» (1622). Число комбінацій з *n* елементів по *m* визначив у праці «Практична арифметика» (1634) французький математик П. Ерігон (незалежно від Н. Тартальї). Термін «combination» – «поєднання» у сучасному розумінні вперше вжив Б. Паскаль (1653). Наукове обґрунтування комбінаторики дав двадцятирічний Г. Лейбніц у праці «Роздуми про комбінаторне мистецтво» (1666), звідки й отримала назву ця галузь математики. Він удосконалив символіку комбінаторики, ввівши індекси (1700).

У праці Я. Бернуллі «Мистецтво припущень» (1713), надрукованій через 8 років після його смерті, були викладені формули комбінаторики: для числа перестановок з *n* елементів, для числа сполучень без повторень і з повтореннями, для числа розміщень з повтореннями і без повторень.

Л. Ейлер розглядав комбінаторні задачі про розбиття натуральних чисел на доданки, циклічні розстановки, побудову магічних квадратів тощо. Термін «факторіал» (від англійського *factor* – множник; від латинського *factor* – той, що робить, виробляє) увів французький вчений Л. Арбогаст (1800), а позначення n! – німецький математик Х. Крамп (1808). Лише в 1916 році рада лондонського математичного товариства рекомендувала прийняти позначення n! (були пропозиції читати його «n-захоплення»).

У ХХ ст. значне піднесення комбінаторика отримала у зв'язку з розвитком кібернетики, теорії інформації тощо.

Теорія ймовірностей

Ще в Стародавніх Китаї, Єгипті, Греції, Римі на основі імовірнісних понять (стійкість частоти випадкових подій) робились окремі спроби підрахунку населення, кількості щорічно зібраного хліба. В літописах Київської Русі (Х-ХІІ ст.) є вказівки на збір деяких статистичних даних.

У поемі римського поета і філософа Лукреція Кара (98 – 55 р. до н. е.) «Про природу речей» говориться, що закони природи виявляються через багато випадкових подій, але вперше ця думка виникла у давньогрецьких філософів-матеріалістів (Демокріт, Епікур та ін.) Один з творців теорії ймовірності Б. Паскаль посилається у своїх працях на античного філософа Платона (427-347 р. до н. е.).

До перших задач теорії ймовірності належать задачі, пов'язані з азартними іграми, які в Стародавніх Греції та Римі, а пізніше в середньовічній Європі були досить поширені. Перша відома спроба підрахувати кількість можливих варіантів при киданні трьох гральних кубиків, включаючи і перестановки, зустрічається в працях першої половини ХІІІ ст. Перші поняття теорії ймовірностей, зокрема математичне сподівання, які з'являються в працях італійських математиків XV-XVI ст. Л. Пачолі, Дж. Кардано, Г. Галілея, Н. Тартальї. Б. Паскаль, П. Ферма заклали основи теорії ймовірностей, встановили теореми додавання і множення ймовірностей. Перший трактат з теорії ймовірностей «Про розрахунки в азартних іграх»

(1657) написав Х. Гюйгенс. Одне з найважливіших тверджень теорії ймовірностей – теорема Бернуллі, яка є окремим випадком закону великих чисел, – введено в праці Я. Бернуллі «Мистецтво припущення» (1713).

Помітний внесок у розвиток теорії ймовірностей у XVIII-XIX ст. зробили А. Муавр, П. Лаплас, К. Гаусс, С. Пуассон та ін. Нормальний розподіл спочатку в астрономії та природознавстві, а потім і в математиці стали називати законом Гаусса, хоча нормальний розподіл розглядав ще Муавр. В «Аналітичній теорії ймовірностей» (1812) Лаплас привів отримані ним та попередниками результати в струнку систему, спростив методи доведення. Його ім'ям названа теорема про відхилення частоти появи події від її ймовірності. Ця відома праця Лапласа дала можливість широко застосовувати науково обґрунтовані методи в теорії ймовірностей – теорію найменших квадратів, геометричну ймовірність тощо.

Важливу роль у розвитку теорії ймовірностей та математичної статистики в Росії та Україні відіграли праці В. Буняковського, П. Чебишова, А. Маркова та ін., у яких було введено поняття випадкової величини, закон великих чисел, перші поняття про випадкові процеси.

Важливий внесок у розвиток теорії ймовірностей зробили й вітчизняні вчені XX ст. Б. Гнєденко, С. Беренштейн, Є. Слуцький, А. Скороход та ін. У 1930-х роках було створено основи теорії стохастичних (ймовірнісних, випадкових) процесів.

Слово «статистика» (латинське *status* – стан) вперше як науковий термін застосували в Англії в розумінні «політичний стан» (1770), однак ще в 1602 році драматург В. Шекспір використовував його в трагедії «Гамлет». У XVIII ст. вираз «статистичні дані» означав довідки про населення, політичну ситуацію, виробництво, і тому науку називали «політична арифметика».

Основи новітньої статистики заклав бельгійський математик і соціолог А. Кетле в книгах «Про людину і розвиток її здібностей» (1835) і «Про соціальну систему і закони, які керують нею» (1848). Видатний внесок у розвиток статистики зробив англійський учений К. Пірсон, який розробив теорію кореляцій, теорію вибірок, склав розширені статистичні таблиці. Поняття дисперсії (латинське *dispersion* – розкидання, розсіювання), нормальної дисперсії ввів німецький економіст і статистик В. Лексіс (1877).

Дисперсійний аналіз, який відіграє важливу роль для прикладного застосування статистики в інших науках, створив англійський математик і статистик Р. Фішер.

1.2. ЕЛЕМЕНТИ ІСТОРІЇ МАТЕМАТИКИ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРІЇ

Кути

Поняття кута перейшло в грецьку математику від вавилонян, які використовували кути в астрономії. Означення кута дав Евклід.

Прямий кут – одне з найстаріших понять у геометрії. Знак величини прямого кута *d* – початкова буква латинського *«directus»* – прямий.

Термін перпендикуляр (від латинського *perpendiculum* – прямовисний) виник у Середньовіччі. Французький математик П. Ерігон (1634) ввів сучасний знак для позначення перпендикулярності $\perp$.

До XVII ст. в Європі розглядали лише кути, менші за два прямих. Ерігон (1634) для позначення кута ввів знак $\langle \widehat{a, b}$, який у праці Оутреда (1657) перетворився в сучасний $\angle$. Позначення для кута, утвореного прямими *a, b,* почали застосувати французький математик Ж. Біне (1813) і німецький математик А. Мебіус (1827).

Сучасне поняття кута (в радіанах), який набуває додатніх і від’ємних значень, ввів Л. Ейлер.

Вертикальні кути **(**від латинського *verticalis,* утворене від *vertex* – вершина) ще в середині XIX ст. називали «вершинними». Вважають, що рівність вертикальних кутів вперше довів Фалес.

Слово «бісектриса» походить від латинських слів *bis* – двічі, *secare* – сікти, розтинати і означає – «та, що розтинає надвоє».

Назва приладу для вимірювання та побудови кутів «транспортир» походить від латинського *transportare* – переносити, перекладати.

Назва приладу для побудови прямих кутів на земній поверхні «екер» (французьке *equerre*) походить від латинського слова *quadrare* – зробити чотирикутм.

Трикутники

Перші відомості про трикутник та його властивості подано в єгипетських папірусах, яким більше 4000 років. У них, зокрема, згадується спосіб знаходження площі рівнобедреного трикутника.

У Стародавній Греції вивчення властивостей трикутника досягло високого рівня. Властивості трикутника систематично викладено в «Началах» Евкліда біля 300 до н. е.

Давньогрецький математик Герон (I ст. н. е.) застосовував для позначення трикутника знак ∇. З IV ст. н. е. для позначення трикутника застосовується знак Δ. Позначення відрізків двома буквами, що відповідають їх кінцям, а також позначення буквами вершин фігур запровадили стародавні греки.

Те, що сума кутів трикутника дорівнює 180^o, було відомо ще стародавнім єгиптянам, проте вважають, що доведення цього твердження дав Піфагор.

Перша книга «Начал» Евкліда містить майже сучасне доведення цієї теореми на основі аксіоми паралельності.

Арабський математик X ст. Ібн-Юнус перший подав способи розв'язування трикутників за допомогою введення допоміжних кутів.

Стародавні греки зображали *прямокутний трикутник* так, щоб одна зі сторін, які утворюють прямий кут, була горизонтальною. Її називали основою. Друга сторона була прямовисною (висотою), і тому її називали катетом (грецьке *kathetos* – прямовисний, опущений перпендикуляр. У XVII ст. обидві сторони прямокутного трикутника, що утворюють прямий кут, стали називати катетами. Сторона прямокутного трикутника, що лежить проти прямого кута, називається гіпотенузою (грецьке *hipoteinousa* – та, що стягує; та, що тягнеться під чимось). У «Началах» Евкліда вона так і називається: «сторона, що прямий кут стягує». Позначення катетів буквами *a, b,* гіпотенузи – *c* і вершин прямокутного трикутника – *A, B* і *C* (позначає вершину прямого кута) застосовував ще Евклід у «Началах».

Уже Фалес знав, що в *рівнобедреного трикутника* кути при основі рівні. Довгий час властивість суміжних кутів практично не використовували. До XVIII ст. в підручниках доводили, зокрема, що в рівнобедреного трикутника рівні кути при основі, а також рівні зовнішні кути при основі.

Стародавні греки першими стали здалеку визначати відстань до корабля в морі або до іншого недоступного предмета. Для цього вони використовували властивості *рівнобедреного прямокутного трикутника*.

Фалес знав, що трикутник визначається однією стороною і двома прилеглими кутами.

Теорему про рівність двох трикутників за стороною і двома прилеглими кутами (друга ознака рівності трикутників) учений використав для визначення відстані від берега до корабля в морі.

Три ознаки рівності трикутників були подані ще в «Началах» Евкліда.

Теорему синусів у X ст. довів таджицький астроном і математик ал-Ходжанді. В Європі її знову відкрив у 1342 році французький математик Л. Герсонід (справжнє ім'я Леві бен Герсон). Ж. Лагранж вивів теорему синусів з теореми косинусів (1799).

Твердження, які узагальнюють теорему Піфагора і еквівалентні теоремі косинусів, були сформульовані окремо для випадків гострого і тупого кута в II книзі «Начал» Евкліда.

У Європі теорему косинусів пропагував Ф. Вієт (XVI ст.). На початку XIX ст. її стали записувати в прийнятих донині алгебраїчних позначеннях.

Подібність фігур

У VI книзі «Начал» Евкліда виклад подібності базується на вченні про пропорційність відрізків. Вавилонські математики використовували теорему, яку приписують Фалесу: паралельні лінії, які перетинають будь-які прямі, поділяють їх на пропорційні відрізки. Вчення про подібні фігури виникло в Греції (V – IV ст. до н.е.).

Принципом подібності користувалися ще стародавні єгипетські художники і скульптори, коли їм треба було перенести рисунок на інше місце або збільшити його.

Для збільшення і зменшення рисунка в певному відношенні італійський учений Галілео Галілей на початку XVII ст. створив пропорційний циркуль.

Знак подібності $\sim$ ввів Г. Лейбніц (1679).

Принцип подібності переніс на фізичні явища в середині XVII ст. І. Ньютон.

Коло і круг

Близько 6 тисяч років тому у Вавилоні було винайдено колесо. Тому і не дивно, що 4-5 тисяч років тому в стародавніх Вавилоні, Китаї, Індії та Єгипті вже знали основні властивості кола. За часів Піфагора (VI ст.) коло вважали найдосконалішою з фігур.

Стародавні вавилоняни і індійці вважали радіус найважливішим елементом кола, проте не користувалися цим терміном. Евклід називав радіус «прямою з центру», пізніше застосовували термін «півдіаметр». Термін «радіус» (латинське *radius* – промінь, спиця в колесі), який ввів французький вчений П. Рамус (1569), став загальноприйнятим у XVIII ст. Термін «діаметр» походить від грецького *diametros*– поперечник, звідси і позначення діаметра *D, d.*

Центром (грецьке $\chi\varepsilon\nu\tau\rho o\nu$ – вістря, гострий кінець палиці, якою підганяли биків, пізніше – ніжка циркуля, а потім і точка, яку ця ніжка відмічала) Евклід називав центр кола і сфери, а Архімед – центр еліпса.

Евклід називав хорду (грецьке *chorde* – кишка, струна, бо струни вироблялись з волових кишок) «прямою в крузі», маючи на увазі прямолінійний відрізок, вписаний в круг. Теореми про залежність між хордами та їх відстанню від центра викладені ще в «Началах» Евкліда. У сучасному змісті термін введено європейськими математиками XII-XIII ст.

Проблема знаходження площі круга формувалася в Стародавній Греції (V ст. до н. е.) як задача побудови за допомогою лише циркуля і лінійки квадрата, рівновеликого даному кругу. Архімед звів цю задачу до задачі про спрямлення кола, тобто до знаходження довжини кола. Він довів, що круг рівновеликий прямокутному трикутнику, одним з катетів якого є радіус круга, а другий дорівнює довжині його кола, тобто площа круга дорівнює півдобутку довжини кола на його радіус. Отже, формула $S = \pi r^2$ була відома вже в III ст. до н. е., залишалось знайти з достатньою точністю число π.

Італійський художник і вчений Леонардо да Вінчі також цікавився квадратурою круга. На початку XVI ст. в одному з своїх записників він написав: «Рух візків завжди показував нам, як спрямлювати коло. Повний оберт колеса, товщина якого дорівнюватиме половині радіуса, залишає слід, що дорівнює квадратурі круга».

Лише в XIX ст. було строго доведено, що розв’язати задачу про квадратуру круга за допомогою циркуля та лінійки неможливо.

Старогрецький астроном Птоломей ділив коло круга на 360 частин, і назвав їх «відрізки». Латинською «відрізок» було перекладено як *segmentes*.

Обчисленням площі сегмента займалися ще у Вавилоні, вважаючи, що площа сегмента дорівнює $\frac{2}{3}$ добутку його основи на висоту. Для кола результат наближений (чим менша висота сегмента порівняно з його основою, тим менша похибка).

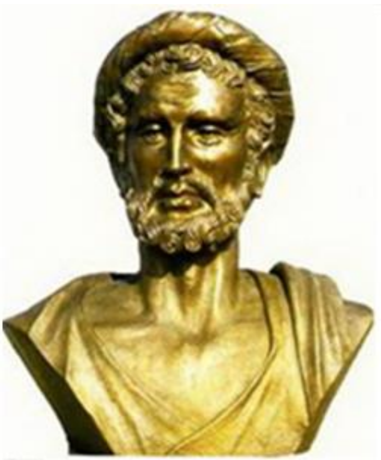
Термін «сектор» (від латинського *sector* – той, що відсікає, відокремлює, буквально – вирізка) застосовував ще Евклід.

Ще стародавні вавилоняни і ассирійці використовували циркуль (латинське *circulus*– коло, круг, обвід) для креслення кіл, їх дуг. Старогрецькі математики циркуль і лінійку вважали основними приладами для геометричних побудов.

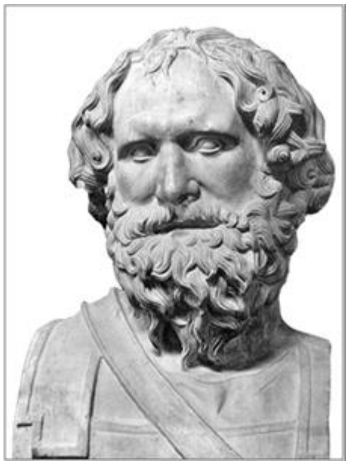
Давньогрецький математик Евдокс Кнідський (IV ст. до н. е.) за допомогою розробленого ним «методу вичерпування» довів теорему: «Площі двох кругів відносяться, як квадрати їхніх діаметрів».

Термін «градус» походить від латинського слова *gradus* – крок, ступінь. Позначення, схожі до сучасних (μ^o), використовував старогрецький математик Птоломей.

Він називав градуси «частинами» і позначав мінути (латинське *minuta*– зменшена частка) штрихом, а секунди двома штрихами ($1^o = 60'$, $1' = 60''$). Термін «градус» почали використовувати в Російській імперії з XVII ст.



Архіт Таренський



Архімед

Сучасне означення дотичної до кола вперше зустрічається в 1794 році в підручнику «Елементи геометрії» французького математика Лежандра .

Про те, що дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику, знав ще старогрецький математик Архіт Таренський (IV ст. до н. е.).

Доведення теореми про рівність відрізків дотичних, які проведені з однієї точки поза колом, приписують Герону (І ст. н. е.).

Теорема про вимірювання вписаного кута половиною дуги, на яку він спирається, міститься ще в «Началах» Евкліда.

Те, що вписаний кут, який спирається на діаметр, – прямий, знали вавилоняни ще 4000 років тому. Перше доведення теореми приписують Фалесу Мілетському.

Першим математиком, який поставив і розв'язав на науковій основі питання про знаходження відношення довжини кола до діаметра, був Архімед.

У творі «Про вимірювання круга» він встановив досить точне наближення числа $\pi = \frac{22}{7}$, яке застосовується й нині. Грецьку букву π (першу літеру слова $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$: $\pi\varepsilon\rho\iota$– навколо, $\mu\varepsilon\tau\rho\varepsilon\iota\nu$– вимірювати, дослівно – обвід, довжина замкненої кривої) для позначення відношення довжини кола до діаметра вперше використав англійський математик В. Джонс (1706), загальноприйнятим воно стало завдяки Ейлеру (1736).

Термін «периметр» зустрічається у старогрецьких учених Архімеда, Герона, Паппа. В російських підручниках геометрії кінця XIX ст. однаково часто використовували терміни «периметр» та «обвід».

Чотирикутники

Вже піфагорійці (VI ст. до н. е.) мали уявлення про паралелограм і деякі його властивості. Термін «паралелограм», введений Евклідом, походить від грецьких слів *палалелос* – той, що йде поряд, і *«грамма»* – риска, лінія.

Термін «діагональ» (грецьке *diagonos* – та, що проходить через вершини кутів) зустрічається в Евкліда. Цей термін давньогрецькі геометри застосовували для чотирикутників, вписаних в коло, а потім поширили на довільні многокутники термін «діаметр» (від грецького слова *diametros*– «поперечник»). Поняття «діагональ» і «діаметр» розмежували у XVIII ст.

В стародавні часи слово *«ромб»* (грецьке $\rho o\mu\beta$ – веретено, дзиґа; $\rho o\mu\beta o\varsigma$ – бубон, бо раніше бубон мав форму квадрата або ромба, про що свідчить зображення «бубен» на гральних картах) означало будь-яке кругле або обертове тіло.

В означеннях I книги «Начал» Евкліда зустрічається лише означення ромба.

Квадрат (латинське *quadratum* – зробити чотирикутним, переклад з грецької *тетрагон* – чотирикутник) був першим чотирикутником, який розглядався в геометрії.

В «Началах» Евкліда всі чотирикутники, крім квадрата, прямокутника і ромба, називалися *трапеція* (латинська форма грецького *трапедзіон* – столик. Від цього ж кореня походить слово «трапеза» (грецьке – стіл)).

У Вавилоні трапецію називали «чоло бика». У сучасному розумінні термін зустрічається вперше у старогрецького вченого Посидонія (II – I ст. до н. е.), але загальноприйнятим термін став лише у XVIII ст.

Як свідчать рукописи, що дійшли до нас, у стародавньому Єгипті вже XX-XVII ст. до н. е. вміли вимірювати площі прямокутника, трикутника і трапеції за відомими нині правилами.

Твердження про те, що середня лінія трапеції дорівнює півсумі основ, було відоме стародавнім єгиптянам (II ст. до н. е.).

Вектори

Векторні величини ввійшли в науку в зв'язку з потребами механіки. Вже в працях давньогрецького математика і фізика Архімеда (III ст. до н. е.) сили зображуються напрямленими відрізками.

Ф. Вієт розглядав у своїй алгебрі не тільки довжини, площі, об'єми, але й величини, які не мали геометричного змісту: квадрато-квадрат, квадрато-куб тощо.

Ці степені утворюють шкалу – «драбину», а величини він назвав скалярами – «сходинками».

У 1799 році данський математик К. Вессель у зв'язку з розробкою теорії комплексних чисел розглядає вектори на площині і дії над ними. У 1806 році швейцарський математик Ж. Арган розробляє алгебру векторів. Німецький математик Г. Грасман у праці

«Вчення про лінійний простір» (1844) дав повний виклад теорії векторів, ввівши скалярний добуток векторів у формі, близькій до сучасної. Найстаріше з позначень вектора $A\overline{B}$ ввів Арган (1806).

Г. Грасман

Сучасні терміни «скалярна величина» (від латинського *scale* – шкала, драбина, 1843) та «вектор» **(**латинське *vector* – той, що несе; той, що везе, 1846), які стали загальноприйнятими, ввів ірландський математик У. Гамільтон. Проте терміни *rayonmobile, rayonvecteure* у розумінні «рухомий радіус» використовували О. Коші (1802) і К. Гаусс (1809).

Многокутники

Формули для суми внутрішніх кутів опуклого многокутника в «Началах» Евкліда немає.

Вперше вона зустрічається в грецького філософа Прокла Діадоха (V ст.).

З європейських учених вперше подав її з доведенням німецький астроном і математик Регіомонтан (XV ст.).

Правильні многокутники (чотирикутник, шестикутник, восьмикутник) зустрічаються в старовинних вавилонських і єгипетських пам’ятках у вигляді зображень на стінах. Такі многокутники привернули до себе увагу математиків ще за часів Піфагора. Як свідчать археологічні розкопки, орнаменти з використанням правильного трикутника і квадрата були поширені 25 000 років тому.

Учення про правильні многокутники систематизував і розвинув Евклід. У своїх «Началах» учений за допомогою циркуля і лінійки розв'язує задачі про побудови правильного трикутника, чотирикутника, п'ятикутника, шестикутника і п'ятнадцятикутника.

Протягом двох тисячоліть математикам не вдавалось побудувати за допомогою циркуля і лінійки правильних семикутника, дев'ятикутника, одинадцятикутника і т.д.

Лише в 1896 році 19-річний К. Гаусс показав, як за допомогою циркуля та лінійки побудувати правильний сімнадцятикутник. Він довів, що поділити коло на *n* рівних частин, тобто побудувати правильний *n*-кутник за допомогою циркуля і лінійки можна лише тоді, коли *n* є просте число виду $n = 2^{2^k} + 1$, де *k* – ціле додатне число або нуль. Тобто $n = 3,\ 5,\ 17,\ 257,\ \dots$ При цьому, якщо побудовано правильний *n*-кутник, то легко побудувати і правильний 2*n*-кутник. Вважають, що Піфагор перший показав, що площину можна заповнити без накладання і прогалин рівносторонніми трикутниками, квадратами і правильними шестикутниками.

Якщо на кожній стороні правильного п'ятикутника побудувати рівні рівнобедрені трикутники, то одержимо *пентаграму* (грецькі $\pi\acute{\varepsilon}\nu\tau\varepsilon$ – п'ять, $\gamma\varrho\acute{\alpha}\mu\mu\alpha$ – риска, лінія). Пентаграма була відома ще в кам'яному віці і вважалася «магічною фігурою».

Перші відомі зображення пентаграми (намальовані на глині п'ятикутні зірки) знайдені в Межиріччі (сучасний Ірак) на руїнах давнього міста-держави шумерів Урук (3500 р. до н. е.). Пентаграми зустрічаються на стародавніх єгипетських статуях. У Вавилоні їх вирізали на дверях магазинів і складів, щоб уберегти товари від псування та крадіжок. Знак пентаграми зустрічався на царських печатках, і, на думку сучасних учених, уособлював собою «владу правителя, яка поширювалась на всі чотири сторони світу». Пентаграму використовували піфагорійці як особливий знак належності до їхнього товариства.

Задачу про вписане коло в даний трикутник розв'язано ще в «Началах» Евкліда. З розв'язування цієї задачі випливає, що три бісектриси внутрішніх кутів трикутника перетинаються в одній точці – в центрі вписаного кола.

Про те, що медіани трикутника перетинаються в одній точці, знав ще Архімед (ІІІ ст. до н. е.). Він довів, що ця точка є центром ваги (барицентром) трикутника.

У 1765 році Л. Ейлер довів, що точка перетину висот трикутника (ортоцентр), точка перетину його медіан і центр описаного кола лежать на одній прямій, яку назвали «прямою Ейлера».

Птолемей (ІІ ст.) довів теорему, названу його ім'ям: «Якщо в коло вписано опуклий чотирикутник, то добуток його діагоналей дорівнює сумі добутків його протилежних сторін».

Перетворення фігур

Деякі геометричні перетворення були відомі ще в стародавній Греції. Ними цікавились (зокрема, осьовою симетрією) в школі Піфагора, значну увагу приділяв їм Аполоній Пергський (ІІІ ст. до н. е.).

Грецький математик і механік Папп (ІІІ – ІVст. н. е.) свідчить: «Аполлоній вперше визначив геометричні перетворення – *гомотетію* (грецькі *homos* – однаковий, *thetos* – розміщений у певному порядку, тобто однакове розміщення фігур) та *інверсію* (від латинського *inversio* – перевертання, обертання, які переводять плоскі місця в плоскі місця)».

Загальну теорію геометричних перетворень створив у XVIII ст. Л. Ейлер.

Площі плоских фігур

У стародавніх єгиптян обчислення площі або поверхні фігури

– квадратури (від латинського *quadrature* –надання квадратної форми) – зводилось до побудови квадрата, що мав таку саму площу.

Для позначення площі (поверхні) фігури використовують знак S – першу букву латинського слова *superficies* – поверхня. Знак H або h походить від латинського слова *hipsos* – висота.

Іноді для визначення площ криволінійних фігур і обсягів на плані і карті, а також для креслення за ними копій і схем застосовується палетка (від франц. *palette* – пластинка, планка) – прозора пластина, розмічена точками, розграфлена на квадратики або рівнобіжні прямі лінії. Для більшої точності роботи використовується планіметр – механічний прилад, який дає можливість шляхом обводу контуру фігури будь-якої форми визначити її площу. Найбільш відомі полярний планіметр та планіметр-сокирка, який винайшов у 1903 році академік О. М. Крилов.

Многогранники

Куб (грецьке *kibos*– гральна кістка). Назву ввели піфагорійці. Евклід не використовував термін «об'єм», термін «куб» означав і об'єм куба.

У працях Герона (І ст.) подано правила для обчислень об'єму куба, призми, паралелепіпеда. З обчисленням об'єму куба пов'язана задача про подвоєння куба (Vст. до н.е.).

Призма (латинська форма грецького слова *prizma* – обпилена колода, від *prio* – пиляю, відпиляний шматок, тіло). У Вавилоні та Стародавньому Єгипті ще 4 тисячі років тому визначали об'єм призми як добуток площі основи на висоту. Евклід (XI книга «Начал») дав означення призми, довів теореми про порівняння об'ємів паралелепіпедів.

Формула об'єму призми наведена в трактаті індійського математика Шрідхара (X ст.).

У «Практичній геометрії» (1220) Леонардо Пізанського (Фібоначчі) доведено теорему, якої немає в «Началах» Евкліда: квадрат діагоналі прямо-кутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.

Піраміда – латинська форма грецького слова *пураміс,* яким греки називали єгипетські піраміди. В папірусі Ахмеса зустрічається слово «пірамус» – діагональ основи піраміди.

Леонардо Пізанський

Евдокс Кнідський

«Апофема» походить від грецького *αποτιθημι* — відкладаю.

Давньогрецький філософ Демокрит (V ст. до н. е.) перший встановив, що об'єм піраміди дорівнює третині об'єму призми з тією ж основою і висотою. Використовуючи «метод вичерпування» Евдокса Кнідського (IV ст. до н. е.), Архімед строго довів теорему про об'єм піраміди. Давньогрецький математик Евдокс Кнідський (IV ст. до н. е.), за допомогою розробленого ним «методу вичерпування», довів теореми:

1. Площа двох кругів відносяться, як квадрати їх діаметрів.
2. Об'єм піраміди дорівнює третині об'єму призми з тими самими основою і висотою.

Евклід вперше дав означення піраміди і систематизував знання про піраміду в «Началах».

В одній із задач так званого «Московського папірусу» (XIX ст. до н. е.) подано точну формулу для обчислення об'єму зрізаної піраміди з квадратною основою.

Формула для обчислення об'єму зрізаної піраміди в Європі вперше зустрічається в Леонардо Пізанського (Фібоначчі) (1220).

Тіла обертання

Поняття про циліндричну форму виникло ще в стародавні часи. Так, колони циліндричної форми прикрашали споруди стародавньої Греції.

Термін **«циліндр»** (від латинського *цилíндрус*, що є латинською формою грецького слова *кулíндрос* – вал, каток) має технічне походження.

Як математичний термін зустрічається в грецьких учених Евкліда, Аристарха. Бічну поверхню циліндра впеше обчислив Архімед (III ст. до н. е.).

Стародавні математики використовували формулу об'єму циліндра, яку вивели на основі практики. Грецький математик Евдокс Кнідський (IV ст. до н. е.) за допомогою розробленого ним «методу вичерпування» довів теорему: «Об'єм конуса дорівнює третині об'єму циліндра з тими самими основою і висотою».

Термін **«конус»** (латинська форма грецького слова *konos* – соснова шишка, гострокінцеве тіло, кегля, верхівка шолома) мав сучасний зміст ще в «Началах» Евкліда (XI книга), але розглядався лише прямий конус. Він утворювався обертанням прямокутного трикутника навколо одного з катетів, який називається віссю конуса, а круг, утворений обертанням другого катета, – основою конуса. Формулу бічної поверхні конуса вивів Архімед.

У трактаті індійського вченого Шрідхара (X ст.) наводиться правильна формула для обчислення об'єму зрізаного конуса.

Піфагор вважав кулю найдосконалішим з усіх геометричних тіл. Він твердив, що Земля повинна мати форму кулі. Довів кулястість Землі лише через 200 років старогрецький філософ Аристотель.

Грецький учений Ератосфен (IIIст. до н. е.) вперше визначив довжину кола меридіана Землі (39375 км, за сучасними даними 40080 км) і наближено обчислив радіус Землі (6287 км, за сучасними даними 6371 км). Евклід В XI книзі «Начал» дає означення кулі як фігури, утвореної обертанням півкруга навколо його діаметра, і доводить, що об'єми куль відносяться як куби їх радіусів. Формули об'єму і поверхні кулі вивів Архімед.

Китайський математик Цзу Сянь (V-VI ст.) для обчислення об’єму кулі застосував принцип, відомий нині як принцип Кавальєрі. Формулу об’єму кулі наведено у праці Бхаскари II (XII ст.).

Термін **«сфера»** походить від латинської форми грецького слова *сайра* – кругле тіло, м’яч, куля.

Архімед знайшов формулу для визначення поверхні сфери. Вчений показав, що відношення об’єму кулі, вписаної в циліндр, до об’єму цього циліндра 2:3, тобто: $V\kappa = \frac{2}{3}V_{ц}$. Він навіть заповів, щоб рисунок кулі, вписаної в циліндр, зобразили на його могилі, а напис свідчив про його видатне відкриття. Через двісті років після його смерті за цим рисунком знайшли могилу Архімеда.

1.3. ДЕЯКІ ІМЕННІ ТЕОРЕМИ ТА ФОРМУЛИ ШКІЛЬНОГО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Теорема Фалеса

Наскільки мала ця гробниця, настільки велика слава цього царя астрономів у світі зірок.
Напис на гробниці Фалеса

Один із перших відомих в історії математиків – Фалес Мілетський (625–547 рр. до н. е.) розпочав формування ключових понять математики – доведення і теорема. Він знав, що кути при основі рівнобедреного трикутника рівні; вертикальні кути рівні; діаметр ділить круг навпіл. Теорему про рівність двох трикутників за стороною і двома прилеглими кутами (друга ознака рівності трикутників) вчений використовував для визначення відстані від берега до корабля в морі. Теорему про вписаний кут, що спирається на діаметр, у Західній Європі іноді теж називають теоремою Фалеса.

Ще вавилонським математикам було відомо, що паралельні лінії, перетинаючи будь-які прямі, поділять їх на пропорційні відрізки. Фалесу приписують теорему: «Якщо паралельні прямі, що перетинають сторони кута, відсікають рівні відрізки на одній його стороні, то вони відсікають рівні відрізки і на другій його стороні».

Фалес Мілетський

Її названо на його честь для збереження імені першого грецького вченого-геометра в пам’яті майбутніх поколінь.

Для розв’язування геометричних задач на побудову Фалес перший застосував циркуль і лінійку як основні геометричні інструменти. Він першим описав коло навколо прямокутного трикутника, тому йому приписують твердження, яке знали вавилонські математики ще кілька тисячоліть тому: вписаний у півколо кут, що спирається на діаметр, є прямим.

Алгоритм Евкліда

Алгоритм знаходження найбільшого спільного дільника (спосіб послідовного ділення) описано в VII книзі «Начал» Евкліда для цілих чисел, а в X – у геометричній формі для знаходження найбільшої спільної міри двох відрізків, тому його назвали алгоритмом Евкліда. Алгоритм знаходження найбільшого спільного дільника двох чисел при скороченні дробів використано в «Математиці в дев’яти книгах» (Китай, II ст. до н. е.)

Евклід

Швейцарський математик Ж. Штурм (1829) відкрив нові можливості застосування алгоритму Евкліда для знаходження дійсних коренів поліномів на заданому інтервалі (метод Штурма).

Теорема Піфагора

Геометрія володіє двома скарбами: теоремою Піфагора і «золотим» перерізом.

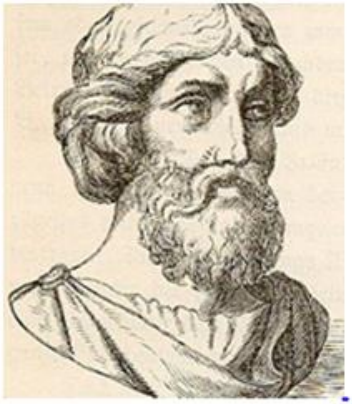
Й. Кеплер

Історики науки вважають, що Піфагор увів строгі доведення в математику.

Відкриття теореми, що встановлює співвідношення між сторонами прямокутного трикутника, приписують Піфагору (за іншою версією – її довів його учень Гіппас). Теорема Піфагора була відома ще стародавнім єгиптянам.

Знайдені іракськими археологами глиняні клинописні таблички свідчать, що теорему ще за 1500 років до Піфагора вавилонські математики застосовували для розв'язування геометричних задач практичного характеру, складання і розв'язування задач на квадратні рівняння. Математична книга «Чу Пей» (Китай, 50-

200 рр. до н.е.) дає візуальне доведення теореми Піфагора (її в Китаї називають теоремою Гугу для трикутника зі сторонами 3, 4, 5). В Індії теорема Піфагора була відома як теорема Бхаскари.



Піфагор Самоський

Те, що знамениту теорему названо ім'ям Піфагора, свідчить, якого значення надавали греки доведенню математичних тверджень.

Одне з найдавніших строгих доведень теореми Піфагора дано у «Началах» Евкліда. Нині теорему Піфагора занесено до книги рекордів Гінеса, як таку, що має найбільшу кількість різних доведень (понад 500).

Прямокутні трикутники, сторони яких задані трьома натуральними числами (5, 12, 13; 6, 8, 10; 8, 15, 17; 7, 24, 25;…), називаються піфагоровими трикутниками. Їх сторони можна знайти, розв'язавши невизначене рівняння $x^2 + y^2 = z^2$, назване рівнянням Піфагора.

Решето Ератосфена

Після Ератосфена до XIX століття не було досягнуто нових результатів, які відносяться до способу відшукання простих чисел…

Ф. Кероджі,
американський математик

Старогрецький математик Ератосфен (275-194 рр. до н. е.) прославився працями з астрономії (описував сузір'я з відповідними міфами), філології (досліджував стародавню комедію), географії й математики. Він успішно займався і поезією, музикою, філософією, тому його прозвали Пентатл (Багатоборець).

У праці «Решето» Ератосфен виклав метод знаходження простих чисел, які не перевищують даного натурального числа. Він полягав у поступовому викреслюванні з ряду натуральних чисел тих чисел, які діляться на 2, на 3, на 4 і т.д. Учений писав на дощечці, вкритій воском, і послідовно проколював у воску дірочки над числами, кратними 2, 3, 4,…, внаслідок цього дощечка ставала схожою на решето, крізь яке ніби просіювали складені числа. Цей спосіб знаходження простих чисел назвали «решето Ератосфена».

Ератосфен

Італійський математик П. Катальді (1603) видав першу таблицю простих чисел, менших від 750. Німецький математик Й. Ламберт (1770) опублікував таблицю найменших дільників усіх чисел, менших від 102000, які не діляться на 2, 3 і 5. Він гарантував безсмертя тому, хто доведе таблицю дільників до 1000000.

Як неперевершений обчислювач і укладач таблиць простих чисел до ста мільйонів увійшов в історію математики професор Празького університету Я. Кулик (народився у Львові, навчався у Львівському університеті).

З 1865 року у бібліотеці Віденської АН зберігаються сім томів рукописних таблиць Я. Кулика «Великий канон дільників усіх чисел, які не діляться на 2, 3 і 5, і простих чисел між ними до 100330201». Цій праці, яка містить 4212 сторінок, автор численних праць з математичного аналізу присвятив останніх 20 років життя.

Удосконалив «решето Ератосфена» індійський студент Сундарам (1934), склавши таблицю з безлічі арифметичних прогресій, у яких кожний член першої прогресії 4, 7, 10, 13, 16,… починає нову прогресію.

Різницями прогресій є всі непарні числа, починаючи з 3. Якщо число n є в цій таблиці, то $2n+1$ – складене число (у таблиці є $n=4$, $2\cdot 4+1=9$ – число складене). Якщо n у таблиці немає, то $2n+1$ – число просте (у таблиці немає $n=2$, отже, $2\cdot 2+1=5$ – число просте). Так можна знайти всі прості числа, крім найменшого (число 2).

У 1939 році російський учитель В. Голубєв для спрощення складання таблиці простих чисел розробив систему «трафаретів», за допомогою яких він майже безпомилково виділив найменші прості дільники всіх чисел 11-го мільйона, а у 1941 році – 12-го мільйона.

«Решето» Аткіна – осучаснена версія «решета Ератосфена» – швидкий алгоритм знаходження всіх простих чисел до деякого цілого числа, створений у 90-х роках ХХ ст. А. Аткіним і Д. Бернштейном (США). «Решето» Аткіна виконує деяку попередню роботу, а потім викреслює числа, кратні квадрату простих чисел.

Формула Герона

Невідомо точні дати народження і смерті цього давньогрецького ученого і винахідника з міста Александрії. Лише майже через 2000 років були знайдені і перекладені сучасними мовами арабські списки математичних праць Герона Александрійського (імовірно І ст.), які вважають енциклопедією античної прикладної математики. У найважливішій з них – «Метриці» – викладені формули для точного і наближеного обчислення площ правильних многокутників, об’ємів зрізаних піраміди і конуса, кульового сегмента, п’яти правильних многогранників тощо. В ній подана формула Герона (була відома Архімеду вже в ІІІ ст. до н. е.)

для обчислення площі трикутника за трьома сторонами:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де a, b, c – сторони трикутника, p – півпериметр.

Герон Александрійський

Герона цікавили трикутники з цілочисловими сторонами, площі яких також виражаються цілими числами. Такі трикутники назвали героновими трикутниками.

«Задача Герона»: знайти всі трикутники з цілочисловими сторонами, площі яких також виражаються цілими числами.

Серед прямокутних трикутників – це всі трикутники Піфагора, зі сторонами 3,4,5; 5,12,13; 7,24,25; ...

Задача Герона є узагальненням задачі Піфагора. Різниться вона лише заміною в умові наявності прямого кута вимогою виразу площі цілим числом.

Формула Герона є окремим випадком теореми Брахмагупти (VII ст.): якщо вписаний у коло чотирикутник має довжини сторін a, b, c, d і півпериметр p, то його площа $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(c-d)}$.

Брахмагупта не попереджає, що ця теорема справедлива для чотирикутників, вписаних у коло, хоч і розглядає її лише для чотирикутників, діагоналі яких перетинаються під прямим кутом, і рівнобічних трапецій. Для них ця формула справджується.

Теорема Вієта

Ф. Вієт розглядав алгебру як вчення про алгебраїчні рівняння, що ґрунтується на буквених символах. Це дало йому змогу виразити властивості рівнянь та їх коренів загальними формулами.

Ф. Вієт

Вієт розробляв методи розв'язування алгебраїчних рівнянь другого, третього, четвертого степенів, розв'язав задачу про визначення всіх елементів трикутника за трьома даними, вивів формулу коренів квадратного рівняння (1591).

Теорему, яка виражає зв'язок між коефіцієнтами і коренями квадратного рівняння, називають теоремою Вієта. Її знали ще вавилоняни, а залежність між коефіцієнтами і коренями рівняння більш загального вигляду належить Кардано. Теорему можна узагальнити для многочленів будь-якого степеня.

Формула Муавра

Англійський математик А. Муавр дружив з видатними англійськими вченими Е. Галлеєм (у 1705 р. «на кінчику пера» відкрив комету, згодом названу його ім'ям) та І. Ньютоном. Основні його праці зробили внесок у теорію рядів, теорію ймовірностей, комплексних чисел.

Муавр вивів правила піднесення до степеня й добування кореня *n*-ого степеня з комплексних чисел (1707). Ці формули, які широко застосовуються в тригонометрії і алгебрі при розв'язуванні рівнянь, відомі тепер як «формули Муавра». У сучасній символіці вони опубліковані Л. Ейлером (1722).

А. Муавр

Біном Ньютона

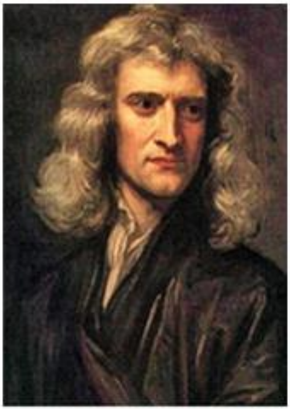
Формула для натуральних n, названа біномом Ньютона, була частково відома в Індії ще в II ст. до н.е.

Персидському поету і математику Омару Хайяму (1100) біноміальна формула була відома для будь-якого *n*, тому послідовність біноміальних коефіцієнтів в Ірані називають трикутником Хайяма.

Коефіцієнти бінома для $n = 6$ подано в книзі «Яшмове дзеркало чотирьох елементів» (Китай, 1303). У ній трикутник біноміальних коефіцієнтів названо трикутником Ян Хуея.

В «Арифметиці» німецького математика П. Апіана (1529) вперше в Європі представлено трикутну послідовність біноміальних коефіцієнтів до $n = 9$.

У 1553 році М. Штіфель подав правило утворення біноміальних коефіцієнтів і склав їх таблиці до 18-го степеня.



І. Ньютон

Праця Н. Тартальї «Загальний трактат про число і міру» (1560) містила таблицю коефіцієнтів, записаних у вигляді трикутної таблиці.

У «Трактаті про арифметичний трикутник» (1665) Паскаль запропонував спосіб обчислення біноміальних коефіцієнтів за таблицею коефіцієнтів розкладу $(a+b)^n$ для різних показників степеня *n*, розміщених у вигляді трикутника, який назвали трикутником Паскаля.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} &&&&&&\mathbf{1}&&&&&& \\ &&&&&\mathbf{1}&&\mathbf{1}&&&&& \\ &&&&\mathbf{1}&&\mathbf{2}&&\mathbf{1}&&&& \\ &&&\mathbf{1}&&\mathbf{3}&&\mathbf{3}&&\mathbf{1}&&& \\ &&\mathbf{1}&&\mathbf{4}&&\mathbf{6}&&\mathbf{4}&&\mathbf{1}&& \\ &\mathbf{1}&&\mathbf{5}&&\mathbf{10}&&\mathbf{10}&&\mathbf{5}&&\mathbf{1}& \\ \mathbf{1}&&\mathbf{6}&&\mathbf{15}&&\mathbf{20}&&\mathbf{15}&&\mathbf{6}&&\mathbf{1} \end{array}$$

Трикутник Паскаля

Біноміальні коефіцієнти (число комбінацій з *n* елементів по *m*), утворені за допомогою повної математичної індукції, Паскаль вперше (спільно з Ферма) використав у теорії ймовірностей для обчислення ймовірності події. Метод математичної індукції пов'язують з ім'ям італійського математика Ф. Мавроліко (1575), який, як і Евклід, обмежувався розглядом випадків $n = 1,2,3,4$ з вказівкою «і так далі до нескінченності». Метод математичної індукції в сучасному розумінні вперше введено Б. Паскалем.

Шотландський математик і астроном Дж. Грегорі майже одночасно з Ньютоном і незалежно від нього довів теорему про розклад бінома.

І. Ньютон зробив першу спробу (1669, надруковано у 1711 р.) загального доведення відомої формули бінома для цілого додатного *n*, узагальнивши її на дробові і від'ємні значення *n*. Норвезький математик Н. Абель дав строге доведення формули і обґрунтував справедливість за певних умов узагальненої формули для ірраціональних і уявних значень показника *n* (1826).

Велика теорема Ферма

Французький математик П. Ферма (1601-1655) приблизно в 1637 році на полях «Арифметики» Діофанта (III ст.) записав твердження: «Неможливо розкласти ні куб на два куби, ні біквадрат на два біквадрати, ні взагалі довільний степінь, більший від квадрата, на два степені з еквівалентним показником. Я знайшов цьому воістину чудове доведення, але ці поля для нього занадто малі». Тобто, рівняння $x^n + y^n = z^n$ не має цілих додатних розв'язків при жодних значеннях $n > 2$. Це твердження пізніше назвали великою (останньою) теоремою Ферма.

Впродовж майже чотирьох століть цю теорему намагались довести найвидатніші математики світу: Р. Декарт, Дж. Валліс, Ж. Лагранж, Л. Ейлер, Е. Куммер та ін. Сам Ферма надрукував доведення своєї теореми для випадку *n* = 4.

Доведення для *n* = 3 подав швейцарсько-російський математик Л. Ейлер (1707-1783), але, не зумівши знайти доведення для *n* > 4, жартома запропонував влаштувати обшук у будинку Ферма, щоб знайти ключ до загубленого доведення. У XIX столітті нові методи теорії чисел дозволили довести це твердження для багатьох цілих чисел в межах 200 (однак не для всіх). Знаменита теорема привернула до себе ще більшу увагу серед учених і любителів математики на початку XX століття, коли німецький математик Вольфскель тому, хто не пізніше 2000 року розв'яже цю проблему, призначив премію

100000 марок.

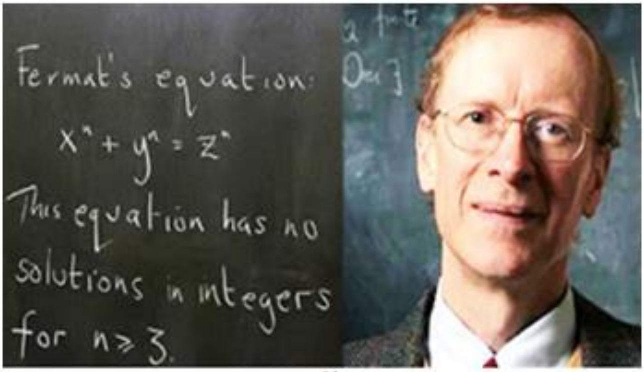
П. Ферма

З появою арифмометрів, а потім і комп'ютерів до початку Другої світової війни теорема була доведена для $n = 617$, а в 1976 році – до $n = 125\ 000$.

Ю. Таніяма, Г. Шімура (Японія), А. Вейль, Ж-П. Серр (Франція), І. Шафаревич (народився в Житомирі), В. Коливагін (Росія), Г. Фрей, Г. Фалтінгс (Німеччина), Б. Мазур, К. Рібет (США) – ось неповний список учених, які наблизились до розкриття таємниці знаменитої теореми.

Остаточне доведення теореми було завершене в 1995 році Е. Вайлсом за участі Л. Тейлора. На Міжнародному конгресі математиків (Берлін, 1995) в присутності двох тисяч видатних учених планети англійський та американський математик Е. Вайлс продемонстрував доведення великої теореми Ферма (її повний виклад займає 129 сторінок!).

Велика теорема Ферма – символ надскладної наукової проблеми – нерідко згадується в пригодницьких та фантастичних творах письменників різних країн. (П. Загребельний «Розгін», Є. Велтістов «Переможець неможливого», К. Буличов «Мрія заочника», С. Ларссон «Дівчина, яка грала з вогнем», О. Казанцев «Вістря шпаги» та ін.). За їх мотивами знято художні фільми (наприклад,



Е. Вайлс

«Математик і чорт» (1972 р.) за мотивами оповідання «Саймон Флегг і диявол» американського математика і письменника А. Порджеса та ін.), створено мюзикли, причому в деяких з них теорема не просто згадана, але є суттєвою частиною сюжету.

1.4. ЗАДАЧІ-МАНДРІВНИЦІ

Задачі й теореми, доведені сотні й тисячі років тому, і досі захоплюють нас своєю красою, витонченістю логічних міркувань. Гортаючи сторінки минулого науки, переконуємось, що більшість математичних ідей, понять, потім об'єднаних у теорії, беруть свій початок із практичної діяльності людини. Водночас пошуки розв'язків багатьох математичних задач, поставлених життям, часто призводили до нових математичних відкриттів.

Визначні математичні задачі, які переходили від одного народу до іншого, зберегли національний колорит, народну мудрість, містять немало історичних відомостей. Серед них є задачі-«мандрівниці», знані ще в Стародавньому Єгипті, Вавилоні, Китаї та Індії, а втім, цікаві й нині.

У написаному 4000 років тому папірусі Ахмеса (Рінда) «Способи, за допомогою яких можна дійти до розуміння всіх темних речей, всіх таємниць, які містяться в речах» подана задача:

У семи людей по сім кішок; кожна кішка з'їдає по сім мишей, *кожна миша з'їдає по сім колосків, із кожного колоска може вирости по сім мірок ячменю. Знайдіть числа цього ряду і їх суму.*

Відповідь: 7, 49, 343, 2401, 16807. Сума -19607.

Схожі задачі були відомі в народній математиці Київської Русі понад тисячу років тому.

Ішло сім сестриць, несло по сім палиць, на кожній палиці по сім сучків, на кожному сучку по сім торбин, у кожній торбині по сім паляниць. Скільки всіх паляниць?

На семи горах росте по сім дерев, під кожним деревом по сім нір, у кожній норі живуть по сім лисиць, у кожної лисиці по сім лисенят. Скільки всього лисиць?

*Старовинна українська задача. Стоїть стовп, а на стовпі сорок кілець***,** *до кожного кільця прив'язано по 40 кобил, у кожної кобили 40 лошат. Скільки всього лошат?*

Відповідь: 64000 лошат.

Співзвучну задачу аргентинський письменник Х. Л. Борхес в оповіданні «Жахливі дзеркала» (1934) «одягнув» у літературну форму.

«Тим, хто відкидає Слово, ... обіцяю я дивне Пекло. Бо кожен з них буде царювати над 999 царствами вогню, і в кожному царстві 999 вогняних гір, і на кожній горі 999 вогняних веж, і в кожній вежі 999 вогняних кімнат, і в кожній кімнаті 999 вогняних лож, і на кожному з них буде лежати ... 999 вогняних фігур... » Скільки буде таких фігур?

Середньоазіатський філософ, астроном і математик Аль-Біруні в книзі «Індія» (1030) розповідає давню легенду про творця шахів (V-VI ст.). За свій винахід він попросив у раджі незначну, на перший погляд, нагороду: стільки пшеничних зерен, скільки виявиться на шаховій дошці, якщо на першу клітку покласти одне зерно, на другу – два зерна, на третю – чотири зерна і т. д. Виявилося, що такої кількості зерна немає на всій планеті (воно дорівнює $2^{64}-1 \approx 1{,}845\times10^{19}$ зерен, яких достатньо, щоб заповнити сховище об'ємом 180 км^3).

Власну версію легенди про розумного математика і неосвіченого короля, який не знав законів геометричної прогресії, подав український поет Олег Ольжич в оповіданні «Хитрий математик» (1922).

«В одному Королівстві, у великому місті жив на горищі вчитель математики. Раз він якось прислуживсь самому королеві… так, що король покликав його перед свої очі.

... Прийшов він до царського палацу ... і таки діждався, що провели його до королівської опочивальні. ... питає король: «Що ти хочеш в нагороду за свою працю?» Замислився наш математик, а далі промовляє: «Як маєте мені, Ваша Величність, що дарувати, то покладіть мені на оцю шахову дошку житніх зерен у такому порядку: на першу кліточку покладіть два зерна, а на іншу в степенях. Але я як учитель математики гімназії імені Вашої Величності запевняю, що ви не зумієте дістати стільки хліба, щоб мені заплатити, а якби здобули, то я став би найбагатшим з людей усього світу…»

Для викладання в Палатинській Академії Карла Великого (м. Ахен, сучасна Німеччина, бл. 790), яка стала центром класичних знань тогочасної Західної Європи, її засновник – ірландський учений, монах і поет – Алкуін (Флакк Альбін) написав ряд популярних в IX –XI ст. підручників з філософії, граматики, риторики, математики. Він намагався урізноманітнити форми викладу матеріалу, зокрема, використовував загадки і відгадки в віршах і прозі. Алкуіну приписують одну з перших у Європі книжок з цікавої математики «Задачі для вдосконалення розуму юнацького». В ній було багато задач на кмітливість, які користуються популярністю і нині. Серед них і задача «Вовк, коза і капуста».

Якась людина мала перевезти в човні через річку вовка, козу і капусту. В човні може поміститися тільки один чоловік, а з ним або тільки вовк, або тільки коза, або тільки капуста. Але якщо залишити вовка з козою, то вовк з'їсть козу, а якщо залишити козу з капустою, то коза з'їсть капусту, а в присутності людини «ніхто нікого не їв». Людина все-таки перевезла свій вантаж через річку. Як вона це зробила?

Відповідь. Вовк не їсть капусти, тому людині слід перевезти козу, оскільки вовка і капусту можна залишити без людини. Переправивши козу на інший берег, людина повертається, бере в човен капусту і також перевозить її на інший берег, де її залишає, але бере в човен козу і везе її назад – на перший берег. Тут вона залишає козу і перевозить вовка. Капусту вона залишає з вовком, а сама повертається за козою, перевозить її, і переправа закінчується благополучно.

Американський письменник В. Паундстоун в книжці «Як зрушити гору Фудзі?» наголошує, що за минулі більше дванадцяти століть було створено багато варіацій на тему цієї задачі, в яких «річка іноді замінюється мостом, який ось-ось обвалиться, або на блок чи мотузку і відро, за допомогою яких люди можуть утекти з башти. Обмеженнями можуть бути вага, час, заборона залишати жінок без нагляду або вже згадувані вище відносини між хижаком і його здобиччю».

Такі задачі («Вовк, коза і в'язка сіна», «Мелас, Метур і Марасан»), які допомагають розвивати в учнів кмітливість і винахідливість, вміщені в збірнику байок і новел «Про мудрість брехні» класика грузинської літератури Сулхан-Саба Орбеліані (1658-1725).

Я перекину вузький місток. А ти переправ через нього поодинці на інший берег вовка, козу й в'язку сіна, так, щоб вовк не розірвав козу і коза не з'їла сіно.

Відповідь автора. Перекинув Рукха місток. Привели вовка і козу, принесли в'язанку сіна. Тоді прийшов Джумбер, взяв козу, перевів через місток і залишив козу на тому боці.

Повернувся, взяв вовка, перейшов міст, залишив вовка на тому боці й перевів назад козу. Залишив козу, взяв сіно, перейшов міст і склав сіно на землі поруч з вовком. Повернувся ще раз, взяв козу і перевів її на той бік.

Троє незнайомих чоловіків: Мелас, Метур і Марасан – зустрілися на березі великої річки. З кожним була його дружина. Біля річки вони знайшли лише одного маленького човника, який міг умістити тільки двох осіб. Отже, перевези усіх шістьох через річку так, щоб жодний мужчина не залишився в човні з дружиною іншого.

Розв'язання автора. Мелас притягнув човна, сів, посадив свою дружину, переправився на інший бік, висадив її на березі і повернувся назад. Двоє інших чоловіків посадили в човен своїх дружин, і ті переправилися до жінки, яка вже була на тому березі. Дружина Меласа сіла в човен і, переправившись назад, повернулася до свого чоловіка. Метур і Марасан сіли в човен і переправилися до своїх дружин. Метур сів у човен, узяв свою дружину і повернувся до Меласа. Метур і Мелас залишивши своїх дружин на тому березі, сіли в човен і переправилися до Марасана. Дружина Марасана сіла в човен і переправила на інший берег дружину Меласа, тоді човен узяв Метур, перевіз свою дружину, і всі рушили далі.

Старовинні задачі «Переправа через річку», «Лицарі і зброєносці» краще розв'язувати практично, пересуваючи по столу шашки чи сірники через уявну річку.

Невеликий військовий загін підійшов до річки, через яку необхідно переправитися. Міст підірвано, а річка глибока. Як бути? Раптом офіцер помічає на березі двох хлопчиків, що граються в човні. Але човен такий малий, що в ньому може переправитись лише один солдат або два хлопчики.

Однак усі солдати переправилися через річку саме на цьому човні. Яким чином?

Три лицарі, кожен у супроводі зброєносця, з'їхалися на березі річки і хочуть переправитися на інший берег. Є човен, який може вмістити тільки двох людей. Чи можуть переправитися лицарі та їх зброєносці на інший берег за умови, що, опинившись окремо від свого лицаря, жоден зброєносець не перебував б при цьому в товаристві інших лицарів?

Мисливці розповіли: «До широкої річки нас підійшло четверо. Біля причалу стояв лише один човен, який міг вмістити не більше двох людей. Однак всі ми переправились за допомогою цього човна через річку без сторонньої допомоги. І продовжили свій шлях далі, причому човен був залишений біля того ж причалу». Спробуйте розкрити «секрет» переправи, здійсненої чотирма мисливцями.

Відповідь. З умови задачі не випливає, що всі чотири мисливці підійшли до одного берега, вони могли підійти по двоє до протилежних берегів. Якщо це було саме так, то, дійсно, кожна пара мисливців могла переправитися на інший берег річки так, щоб човен залишився біля причалу після їх переправи.

Відомий історик математики А. П. Юшкевич (1906-1993) вважав, що праця італійського математика Леонардо Пізанського (Фібоначчі) «Книга абака» (1202) «підноситься над європейською арифметико-алгебраїчною літературою XII-XIV ст. різноманітністю і силою методів, багатством завдань, доказовістю викладу. ... Наступні математики широко черпали з неї як завдання, так і прийоми їх розв’язування».

Задачі Фібоначчі можна зустріти в праці «Сума арифметики, геометрії, відношень і пропорцій» (1494) італійського математика Л. Пачіолі, в збірнику цікавих арифметичних задач «Приємні і цікаві завдання» (1612) французького математика і поета Баше де Мізіріака, в підручниках «Арифметика» (1703) російського педагога і математика Л. Магніцького і «Алгебра» (1768) швейцарсько-російського математика Л. Ейлера.

Наведемо відому задачу Фібоначчі.

Скільки пар кроликів народиться за рік від однієї пари, якщо кожна пара дає щомісяця приплоду по одній парі, яка, в свою чергу, здатна до розмноження через місяць, і якщо жодна пара не загине?

Відповідь. На початку маємо 1 пару кролів, через місяць – 2 пари, через 2 місяці – 3, через три – 5, потім через кожний місяць кролів буде відповідно 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 пар. Всього 986 пар.

Розв’язання задачі призвело до цікавої рекурентної числової послідовності: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55;…, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Французький математик XIX ст. Е. Люка назвав послідовності, члени яких утворюються за таким рекурентним законом, рядами, або послідовностями Фібоначчі, а їх члени – числами Фібоначчі.

Італійський математик Н. Тарталья (1500-1557) у своїх працях наводив велику кількість вправ і задач, серед яких були й задачі на кмітливість.

У заповіті померлого батька сімейства говорилося, що 17 коней, які були в господарстві, слід поділити між трьома його синами у співвідношенні одна друга до однієї третьої до однієї дев’ятої. Як виконати заповіт?

В іншому варіанті задачі три спадкоємці мають розділити між собою за тих же умов 17 верблюдів.

Не знайшовши розв'язання самостійно (адже задача в цілих верблюдах розв'язку не має), брати звернулися до мудреця.

– О мудрий! – сказав старший брат. – Батько залишив нам 17 верблюдів і велів розділити між собою таким чином ... Але 17 не ділиться ні на 2, ні на 3, ні на 9. Чи можеш ти, о вельми поважний, допомогти нашій біді, бо ми хочемо виконати волю батька?

- Нема нічого простішого, – відповів мудрець, – якщо до 17 ваших чудових приєднати ще одного – мого старенького верблюда. Ось слухайте.

Брати слухали й дуже дякували мудрецю, який задовольнив усі умови батьківського заповіту, і не випадково, замість свого старенького, сів, щоб їхати далі, на найкращого з верблюдів. Як розділив мудрець спадщину?

Відповідь. Мудрець підмінив умови заповіту, приєднавши до спадщини свого верблюда. Тоді старший син отримав 9, середній – 6, а молодший – 2 верблюди. Але такий розв'язок не є точною реалізацією заповіту, а лише доцільним наближенням до його вимоги. Старший син фактично отримав більше на $\frac{1}{2}$ верблюда, середній на $\frac{1}{3}$, а молодший на $\frac{1}{9}$. Ці надбавки в сумі вичерпують $\frac{17}{18}$ верблюда, який, згідно із заповітом, залишився поза розподілом.

Важливу роль у розвитку математичної освіти в Європі відіграла чотиритомна енциклопедична праця французького письменника і математика Ж. Озанама «Математичні та фізичні розваги» (1694), яка багаторазово перевидавалась.

Семеро друзів зібралися разом пообідати, але між ними виникла суперечка, кому і з ким сідати. Хтось із присутніх запропонував усім сісти за стіл як доведеться, але за умови, щоб знову зібратися на другий день і потім в наступні дні обідати разом, причому кожного разу сідати по-різному до тих пір, поки не будуть випробувані всі можливі комбінації. Питається, скільки разів доведеться їм обідати разом для цієї мети?

Відповідь. На помилкову думку Озанама, задача зводиться до визначення числа перестановок з семи елементів: $P_7 = 7! = 5040$, бо він розглядав усі місця як абсолютно різні. І це було б правильно, якби сім чоловік сиділи, скажімо, на одній довгій лаві з одного боку прямокутного столу. Але якщо вони всідаються кругом столу (хоча б і прямокутного, а не круглого), тобто так, що останній з тих, що сіли, виявляється сусідом першого, то відносне положення тих, що обідають, не зміниться, якщо по даному знаку кожен з них пересяде на сусідній стілець праворуч. Оскільки гості можуть подібним чином пересідати шість разів праворуч, то Озанам, вважаючи їх за різні, знайшов сім прямолінійних переміщень, тоді як насправді тут буде тільки одне колове. Отже, число обідів має скоротитися до 720. Але якщо взяти до уваги, що замість пересаджування праворуч всі могли б пересісти ліворуч, то число різних переміщень зменшиться вдвічі, тобто дорівнюватиме 360.

Озанам вирахував, що гості повинні обідати разом близько 14 років, а насправді їм для цієї мети довелося б збиратися щодня тільки протягом одного року.

Складніше завдання поставив перед своїм гостями російський письменник Л. Толстой.

Одного разу, коли всі (було 20 чоловік) сіли за стіл, а дружина Софія Андріївна затрималась, письменник запропонував їм відповісти на питання: чи встигнуть всі, хто сидить за столом, до її приходу, міняючись місцем із своїм сусідом, побувати на всіх можливих комбінаціях розміщень за столом. Дехто з гостей думав дослідним шляхом розв'язати цю задачу, але письменник сказав, що на це потрібно понад 72 мільярди років, якщо на кожне пересідання витрачати 1 секунду. Усі були здивовані й не дуже повірили, що це пов'язано з таким значним часом. Знайдіть число пересідань і перевірте правильність твердження Л. Толстого про тривалість цієї кількості пересідань.

Насправді, якщо на кожне пересідання витратити 10 секунд і займатися цілодобово й без перерви цією справою, то на всі пересідання треба витратити приблизно 4 000 000 000 років.

Перед розв'язуванням історичних задач учителю слід лаконічно, в доступній для сприйняття формі, повідомити учнів про автора задачі. Для ілюстрації задачі варто використати комп'ютерну графіку, рисунки, кінофрагменти. Якщо дозволяє час, можна запропонувати учням розв'язування задачі методом автора, а потім – сучасним методом, при цьому звернувши увагу учнів на ті пояснення та помилки, які допускали в тлумаченні математичних понять учені різних епох.

Отже, історичні задачі можна використовувати на уроках і в позакласній роботі для розвитку пізнавальної самостійності учнів, бо, на думку американського математика і педагога Дж. Пойа, «в розв'язуванні будь-якої задачі є крупинка відкриття». Задачі-«мандрівниці» надають учителю можливість розвивати логічне мислення учнів, більш ґрунтовно і свідомо засвоїти математичні поняття.

Пропонована нижче добірка історичних задач допоможе вчителю показати учням красу математичного пошуку.

Задачі з папіруса Ахмеса (Рінда), Стародавній Єгипет

1. У пастуха, який вів 70 биків, запитали: «Яку частину биків своєї численної череди ти ведеш?»

Він відповів: «Я веду дві третини від третини худоби». Скільки биків було у всій череді?

(Задачу можна використовувати при відпрацюванні вмінь та навичок знаходження числа за його дробом).

Відповідь: 315 биків.

2. Поділити 10 мірок ячменю між 10 людьми так, щоб другий одержав на $\frac{1}{8}$ мірки ячменю більше, ніж перший, третій – на $\frac{1}{8}$ мірки більше, ніж другий, …, десятий – на $\frac{1}{8}$ мірки більше, ніж дев'ятий. Скільки мірок ячменю одержить кожна людина?

Відповідь: $\frac{25}{16},\frac{23}{16},\frac{21}{16},\frac{19}{16},\frac{17}{16},\frac{15}{16},\frac{13}{16},\frac{11}{16},\frac{9}{16},\frac{7}{16}$ *мірки ячменю.*

Задачі з вавилонських клинописів

1. Є два кільця. Сума $\frac{1}{7}$ частини ваги першого кільця і $\frac{1}{11}$

частини ваги другого кільця дорівнює 1, а різниця ваги першого кільця і її сьомої частини дорівнює різниці ваги другого кільця і її одинадцятої частини. Обчистити вагу кожного кільця.

Відповідь: $4\frac{3}{8};1\frac{3}{8}$.

2. Капітал в 1 гур віддано в борг із розрахунку $\frac{1}{5}$ річних. Через який час капітал подвоїться?

Відповідь: $3{,}801$ *роки*.

Задачі Піфагора, стародавня Греція

1. Довести, що сума довільного числа послідовних непарних чисел, починаючи з одиниці, є точний квадрат.

2. Довести, що кожне непарне число, крім 1, є різницею двох квадратів.

Задачі Архімеда, стародавня Греція

1. Довести, що площа круга, описаного навколо квадрата, вдвічі більша за площу круга, вписаного в квадрат.

2. Сіракузькому царю Гієрону виготовили золоту корону, але пішли чутки, що майстер підмінив частину золота сріблом. Архімед, якому доручили це перевірити, знайшов розв'язок задачі, сидячи у ванні. Не чуючи себе від радості, з вигуком «Еврика!» кинувся на вулицю, бо він розв'язав не просто задачу царя, а відкрив важливий закон гідростатики.

Корона царя Гієрона, виготовлена із золота і срібла, має вагу 10 *кг*. У воді її вага становить $99{,}55\%$ її ваги в повітрі. Знаючи, що 1 *кг* золота втрачає в воді $\frac{9}{77}$ *кг*, а срібло $9\frac{11}{12}\%$ своєї ваги в повітрі, обчисли, скільки золота і срібла витратив майстер на виготовлення корони?

Відповідь: золота 7,1005 кг, срібла – 2,8995 кг.

Давньоримська задача II ст.

Один чоловік, помираючи, заповів: «Якщо дружина народить сина, то віддайте йому $\frac{2}{3}$ майна, а решту – їй. Якщо народиться донька, то їй – $\frac{1}{3}$, а дружині – решта». Народилася двійня – син і донька. Як розділити майно, щоб виконати заповіт небіжчика?

Відповідь: майно сина, дружини і доньки має відноситись як 4:2:1.

Задачі з «Арифметики» Діофанта, стародавня Греція

1. Знайти два числа, сума яких дорівнює 20, а добуток 96.

Відповідь: 12; 8.

2. Знайти два числа, відношення яких дорівнює 3, а відношення суми їх квадратів до їх суми дорівнює 5.

Відповідь: 6; 2.

3. Знайти три числа, якщо відомо, що добуток суми перших двох чисел на третє дорівнює 35, добуток суми першого і третього чисел на друге число дорівнює 27, а добуток суми другого і третього чисел на перше дорівнює 32.

Відповідь. 4; 3; 5.

Задача Сунь-Цзи (III ст.) , Китай

Знайти число, яке при діленні на 3 дає остачу 2, а при діленні на 5 – остачу 3, а при діленні на 7 – остачу 2.

Задачі Метродора (IV ст.), Греція

Метродор – грецький філософ, епіграміст, автор праць з географії й астрономії. Написані ним у віршованій формі понад 30 цікавих задач у свій час входили в рукописні збірники і були досить поширеними.

1. Учні Піфагора

« Піфагоре благородний,
Геліконських муз потомку,
На моє скажи питання,
Скільки учнів справді гідних
Маєш ти у своїм домі,

Що, немов борці на площі,
Раді премії добиться?»
«Радо скажу, Полікрате.
Бачиш, учнів половина
Математику зглибляє,
А натомість четвертина
На безсмертную природу
Свої досліди звертає.
Сьома часть ніщо не робить,
Лиш заховує мовчання,
Лиш моє у душах своїх,
Знай, ховаючи мовчання.
Ще додай до них три жінки,
Що встають не дуже рано, –
Серед них найвизначніша – Моя любая Теано.
Ось і всі, яких по змозі
Я до мудрості доводжу, –
Може, муз їм пієрійських
Позискаю ласку божу».
Скільки ж учнів у Піфагора?
Відповідь: 28 учнів.
2. *Загадка*
Раз мул ішов з ослицею шляхом,
Обоє опаковані вином.
Під тягарем ослиця застогнала,
Та мул, якого від коня вона за сина мала,
Питає:« Мамо, що це за причина,
Що заскиглила ти, як молода дівчина?»
Вона відмовила, що потяжко її двигать.
«Еге, хотіла б ти ще, як дівчина, плигать!
Я більше двигаю, й мені не дуже гірко:
Якби від тебе взяв одно, то мав би вдвоє стілько,
А якби ти одно та відняла мені,
То мали б ми обоє по рівні».
Хто хоче тії числа відгадати,

Не треба пальців обох рук зачисляти.

Відповідь: мул ніс 7 мішків, ослиця – 5.

3. Пори дня

«О премудрий часознавче,
Яка часть нам дня пройшла вже?» –
«Що пройшло вже з цеї днини,
Візьми з того дві третини,
А на все дозвілля своє
Матимеш ще стільки вдвоє».

Вказівка: задача зводиться до розв'язування рівняння $\frac{4}{3}x + x = 12$.

4. Украдені яблука

Уздрівши, що плаче Ерот, Кіпріда його запитала:
« Що тебе так засмутило, хотіла б я знати?»
«Із Гелікона ішов я, ніс яблук чимало, – Ерот на те каже,
– Та музи, раптово напавши, солодку загарбали ношу.
Долю двадцяту вмить захопила Евтерпа, а Кліо
П'яту частину вділила, і Талія – восьму,
Долю двадцяту забрала собі Мельпомена,
а чверть – Терпсихора,
Сьому частину поцупивши, зникла, мов привид, Ерато.
Тридцять плодів узяла Полімнія. Сто двадцять
Уранії тут перепало, а триста плодів – Калліопі.
Тож повертаюсь додому я майже з пустими руками.
Тільки півсотні лишилося яблук у мене».

Скільки яблук ніс Ерот, і скільки з них забрала кожна з богинь?

Відповідь: Кліо – 672 яблука, Евтерпа – 280, Талія – 420, Терпсіхора – 840, Мельпомена – 168.

(Задачі 1-4 подано в перекладі І. Франка.)

5. Надгробок Діофанта

У фантастичному романі О. Казанцева «Вістря шпаги», присвяченому Ферма та його сучасникам, подано немало цікавих задач. Так, Декарт, пропонуючи своє розв'язання задачі, до якого зводиться епітафія на надгробку Діофанта, написана Метродором, під час суперечки ледь не викликав Ферма на дуель.

Прах Діофанта гробниця ховає, вдивися, і камінь
Мудрим мистецтвом розкриє покійного вік:
З волі богів шосту частину життя був він дитина.
А ще половину шостої – стрів із пушком на щоках.
Тільки минула сьома, з коханою він одружився.
З нею п'ять років проживши, сина діждався мудрець.
Та пів життя свого тішився батько лиш сином:
Рано могила дитину у батька забрала.
Років двічі по два батько оплакував сина,
А по роках цих і сам стрів він кінець свій печальний...
Скільки років жив Діофант?

Відповідь: 84 роки.

Історія знає дуже мало біографічних відомостей про Діофанта Олександрійського (III ст.). Ця епітафія, якщо вона достовірна, – єдине, що відомо про його життя. Збереглася (не повністю) «Арифметика» Діофанта. В ній подано початки алгебри та 189 задач, які зводяться до невизначених рівнянь і систем невизначених рівнянь різних степенів, та вказано деякі методи розв'язування цих рівнянь. Чимало задач Діофанта й досі не розв'язані, хоча над ними працювали видатні математики різних епох.

Праці Діофанта з теорії чисел лягли в основу подальших досліджень Ферма, Ейлера, Гаусса та ін. У теорії чисел два великих розділи названі на честь ученого – теорія діофантових рівнянь і теорія діофантових наближень.

Задачі Апастамби (IV або V ст.), Індія

1. Знайти сторону квадрата, площа якого дорівнює сумі площ даних квадратів.

2. Знайти сторону квадрата, площа якого дорівнює різниці площ даних квадратів.

Задача Брахмагупти (VIIст.), Індія

Знаючи висоту свічки і висоту вертикального стовпа, а також відстань між ними, знайти довжину тіні стовпа.

Задачі Магавіра (IX ст.), Індія

1. Під час бою півнів один з глядачів домовився з двома власниками півнів. Першому він сказав: «Якщо переможе твій півень, то виграш віддаси мені, якщо ж програєш, то я сплачу тобі $\frac{2}{3}$ твого можливого виграшу». Другому учаснику він сказав: «Якщо переможе твій півень, то виграш віддаси мені, якщо ж програєш – сплачу тобі $\frac{3}{4}$ твого можливого виграшу». В обох випадках глядач одержить 12 монет. Який виграш мав бути в кожного учасника бою?

Відповідь: 42 і 40 монет.

2. Плоди граната, манго і лісових яблук продаються відповідно по 3 штуки за 2 монети, 5 штук за 3 монети, 7 штук за 5 монет. Як за 76 монет купити стільки плодів, щоб плодів манго було в 3 рази, а гранатів у 6 разів більше, ніж лісових яблук?

Відповідь: гранатів купили 70, манго – 35, лісових яблук – $11\frac{2}{3}$.

3. Один сказав своєму другові: «Дай мені 100 рупій, і я буду вдвічі багатший за тебе». На це останній відповів: «Якщо ти мені віддаси лише 10 рупій, то я стану вшестеро багатшим за тебе». Скільки рупій було в кожного? (Рупія – грошова одиниця Індії).

Відповідь: 40 і 170 рупій.

Європейські задачі

1. Драбину завдовжки 13 футів приставили до стіни так, щоб нижня її частина була віддалена від стіни на 5 футів. На скільки опуститься драбина по стіні, якщо її основу відсунути ще на 7 футів?

Відповідь: на 7 футів.

2. Скільки разів проб'є годинник протягом 12 год., якщо він відбиває і півгодини?

Відповідь: 90 разів.

3. У клітці знаходяться фазани й кролики. У всіх тварин 35 голів і 94 ноги. Скільки в клітці кроликів і скільки фазанів?

Відповідь: 13 кроликів і 22 фазани.

4. ***Задача Ейлера.*** Селянин продає свого коня за кількістю підковних цвяхів, яких у нього 32. За перший цвях він просить 1 пфеніг, за другий – 2, за третій – 4 пфеніги, тобто за кожний наступний – удвічі більше, ніж за попередній. За скільки він продає коня?

Відповідь: 4 294 967 295 пфеніги.

1.5. СОФІЗМИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Модернізація української школи потребує підвищення активності та самостійності учнів, формування в них умінь опрацьовувати та плідно використовувати освітню інформацію.

Одним із засобів впливу на формування знань учнів з математики та рівень розвитку їх пізнавальної активності є застосування математичних софізмів на уроках.

Історія математики сповнена цікавих парадоксів і софізмів.

Парадокси – це справедливі, хоча й несподівані твердження (наприклад, «Ахіллес ніколи не наздожене черепаху»).

Софізми (грецьке Sophizma – вигадка, хитрість) – це хибні результати, отримані за допомогою міркувань, які здаються правильними, але обов’язково містять якусь помилку. Стародавні вчені залишили нам немало таких суджень. Наприклад: «Те, що ти не загубив, ти маєш. Ти не загубив крила, отже, ти їх маєш».

Засновником школи софістів був давньогрецький філософ Протогор із Адбери (480 – 410 р. до н. е.).

Введення софізмів сприяло вдосконаленню ораторського мистецтва, підвищенню логічної культури мислення. Щоправда, пізніше в деяких філософів-софістів мистецтво софістики перетворилося на суперечку заради суперечки.

Різні приклади софізмів наводить у своїх діалогах Платон (427 -347 р. до н.е.). Евклід (IV ст. до н.е.) створив збірник «Псевдарій», який, на жаль, не дійшов до нас. Це був перший збірник саме математичних софізмів та парадоксів. Вперше аналіз та класифікацію софізмів дав Арістотель у трактаті «Про софістичні спростування».

Нині софізми, і зокрема математичні, навчають мислити, доводити й спростовувати, чітко висловлювати свої думки.

Аналіз софізмів має важливе педагогічне значення, бо розібрати софізм – означає знайти помилку. Відомий математик і методист М. Брадіс відзначав, що, добре ознайомившись з якоюсь помилкою, ми страхуємо учнів від повторення такої помилки в майбутньому, «процес відшукання помилки в різних математичних судженнях легко зробити дуже захоплюючим, а розгляд помилок може стати засобом для підвищення інтересу до вивчення математики».

Помилки в міркуваннях, найчастіше виникають через порушення законів формальної логіки.

Виділимо найбільш поширені помилки, які покладені в основу багатьох софізмів:

- ділення на нуль;
- неправильні висновки з рівності дробів;
- неправильне добування квадратного кореня з квадрату виразу;
- порушення правил дій з іменованими величинами;
- плутанина з поняттями «рівність» і «еквівалентність» відносно множин;
- нерівносильний перехід від однієї нерівності до іншої;
- виконання перетворень над математичними об'єктами, що не мають змісту;
- висновки і обчислення за неправильним малюнком до задачі;
- помилки, що виникають при операціях з нескінченними рядами і граничним переходом.

Софізми на уроках математики можна застосовувати з метою:

- попередження типових помилок на узагальнюючих уроках;
- створення проблемної ситуації при поясненні нового матеріалу;
- перевірки рівня засвоєння вивченого матеріалу;
- більш цікавого повторення і закріплення вивченого матеріалу.

У залежності від мети застосування софізмів на уроках математики перед учнями можуть ставитись різні завдання, зокрема: знайти помилку в міркуваннях; дізнатися, які бувають софізми; навести приклади софізмів; скласти свій софізм тощо.

Учні 5-7 класів з цікавістю сприймають софізми, в яких порушені правила дій з іменованими величинами. Такі софізми є пропедевтикою для використання іменованих величин при розв’язуванні фізичних задач.

Так, у софізмах «Один метр не дорівнює 100 сантиметрів» та «4 грн = 40000 к» пропонуємо учням знайти помилку в міркуваннях.

1*м* = 100 *см* (1)

10 *м* = 1000 *см* (2)

Перемножимо обидві частини рівностей (1) і (2), одержимо:

10 *м* = 100000 *см*, звідки: 1 *м* = 10000 *см*.

Аналогічно: 2 *грн* = 200 *к*. Піднесемо обидві частини рівності до квадрату. Одержимо: 4 *грн* = 40000 *к*.

Після розгляду подібних софізмів разом з учнями доходимо висновку: множення обох частин різних рівностей та піднесення до квадрату грошей не має змісту.

Окремі математичні софізми можна розглядати при вивченні різних тем, причому хибні результати в них отрмані за допомогою відмінних одне від одного міркувань.

Наведемо приклади застосування таких софізмів на уроках математики.

Типовою помилкою учнів при виконанні перетворень, розв’язуванні рівнянь є ділення обох частин рівностей на вираз, рівний нулеві.

Попередити такі помилки може допомогти розгляд софізму «$2 \cdot 2 = 5$».

Зокрема, при вивченні у 7 класі теми «Розкладання многочлена на множники. Винесення спільного множника за дужки» доведення вказаного софізму допомагає учням глибше усвідомити необхідність перевірки відмінності від нуля виразу, на який діляться обидві частини рівності.

Нехай $a = b + c$. Помножимо обидві частини рівності на 5:

$5a = 5b + 5c$ (1). Додамо почленно рівність (1) до рівності $4b + 4c = 4a$ і віднімемо від обох частин утвореної рівності по $9a$:

$5a + 4b + 4c - 9a = 5b + 5c + 4a - 9a$;

$4b + 4c - 4a = 5b + 5c - 5a$; 4

$(b + c - a) = 5(b + c - a)$.

Звідки, $4 = 5$, тобто $2 \cdot 2 = 5$.

При вивченні теми «Різниця квадратів двох виразів» у 7 класі можна розглянути ще один спосіб «доведення» софізму *«$2 \cdot 2 = 5$»*, який англійський математик і письменник Ч. Доджсон (літературний псевдонім Льюїс Керролл) запропонував у листі знайомому хлопчику: «Якщо кожна з величин x і y дорівнює 1, то зрозуміло, що $2(x^2 - y^2) = 0$ і $5(x - y) = 0$. Отже, $2(x^2 - y^2) = 5(x - y)$. Поділимо обидві частини рівності на $x - y$, одержимо $2(x + y) = 5$. Але $x + y = 1 + 1 = 2$. Звідки випливає, що $2 \cdot 2 = 5$. З тих пір, як цей тривожний факт став мені відомий, я втратив спокій…Сподіваюсь, ви… поясните, в чому тут справа».

Також попередженню вказаної помилки можуть сприяти завдання:

Знайдіть помилку в розв'язанні рівняння: $15x - 30 = 12x - 24$.

В обох частинах рівняння винесемо спільний множник за дужки: $15(x - 2) = 12(x - 2)$. Розділивши обидві частини рівняння на $x - 2$, одержимо: $15 = 12$.

(Праву і ліву частини рівняння поділили на нуль, тому, що корінь рівняння $x = 2$)

Часто при розв'язуванні рівнянь учні роблять неправильні висновки з рівності двох дробів. Щоб уникнути подібних помилок, можна розглянути з учнями наступне завдання.

Знайдіть помилку в розв'язанні рівняння:

$$\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x};$$

$$\frac{(x+5) - 5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x};$$

$$\frac{-4x+40}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x};$$

$$\frac{4x-40}{7-x}=\frac{4x-40}{13-x};$$

$$7-x=13-x;$$

$$7=13.$$

(*Якщо у двох рівних дробів чисельники рівні, то знаменники будуть рівні лише тоді, коли чисельники не дорівнюють нулю. В даному рівнянні чисельники дробів дорівнюють нулю.*)

Корисним на уроках алгебри буде розгляд наступних софізмів:

«Усі числа рівні між собою»

Нехай $a>b$. Знайдеться таке додатне число c, що $a=b+c$. (1)

Помножимо обидві частини рівності (1) на $a-b$:

$aa-ab=ab-bb-bc+ca$;

$aa-ab-ac=ab-bb-bc$;

$a(a-b-c)=b(a-b-c)$ (2).

Поділимо обидві частини рівності (2) на $a-b-c$, дістанемо $a=b$.

(*Вираз $a-b-c$ дорівнює нулю*)

«Будь-яке число дорівнює його половині»

Беремо два рівних числа a і b, $a=b$. Обидві частини цієї рівності помножимо на a, потім віднімемо від них по b^2.

Отримаємо: $a^2-b^2=ab-b^2$,

або $(a-b)(a+b)=b(a-b)$. Звідси: $a+b=b$, або $a+a=a$.

Отже, $2a=a$, тобто $a=0{,}5a$.

(*Вираз $a-b$ дорівнює нулю).*

У 8 класі при вивченні теми «Квадратний корінь» розгляд софізму **«1=2»** може допомогти попередити помилки, які виникають при добуванні кореня з виразу, піднесеного до квадрату.

Нехай маємо рівність: $1-3=4-6$. Додавши до обох частин цієї рівності число $\frac{9}{4}$, отримаємо рівність

$$1-3+\frac{9}{4}=4-6+\frac{9}{4},$$

в якій права і ліва частини є повними квадратами, тобто

$$\left(1-\frac{3}{2}\right)^2=\left(2-\frac{3}{2}\right)^2 \quad (*)$$

Добувши з правої і лівої частин рівності (*) квадратний корінь, одержимо: $1-\frac{3}{2}=2-\frac{3}{2}$, звідки 1=2.

(Не враховано, що $\sqrt{x^2}=|x|$).

«Квадрат будь-якого числа дорівнює 1»

Нехай m – деяке довільне число. Позначимо: $x=y=\frac{m^2}{4}$.

Маємо, $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ і $x-\sqrt{x}=y-\sqrt{y}$, або $x-y=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ (1). Запишемо (1) у вигляді: $(\sqrt{x}-\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ (2).

З рівності (2) маємо: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$. Отже, $2\sqrt{x}=1$, але $x=\frac{m^2}{4}$, тому $2\sqrt{\frac{m^2}{4}}=1$, або $m^2=1$.

($x=y$, то $\sqrt{x}-\sqrt{y}$=0)

Міркування над подібними софізмами вимагає від учня глибокого розуміння математичних фактів, уміння застосовувати наявні знання на практиці. Прості, очевидні на перший погляд логічні кроки і дивний висновок наприкінці софізму зацікавлюють учнів, змушують відшукати допущену помилку.

Методично грамотно вибудувані знаходження і аналіз помилки, допущеної в софізмі, часто бувають більш повчальними, ніж розгляд розв'язків «безпомилкових» завдань.

Для розвитку пізнавальної самостійності учнів софізми також можна використовувати:

- при виконанні домашніх завдань (з метою більш осмисленого розуміння матеріалу);
- на факультативних та гурткових заняттях (з метою поглибленого вивчення окремих тем з математики);

- при написанні дослідницьких робіт (можна використати софізми давньогрецьких філософів, наприклад, Прокла «Дві непаралельних на площині прямі не перетинаються» та ін.)
- в позакласних заходах (з метою збудження інтересу до математики).

Розглядаючи математичні софізми, необхідно дуже уважно читати їх тексти, ретельно слідкувати за точністю формулювань і записів, дотриманням усіх умов застосовування теорем, відсутністю неправильних узагальнень, заборонених дій, посилань на «видимі» властивості фігур і допоміжних побудов, щоб софізм не перетворився на паралогізм *(з грецької - неправильне),* тобто хибне міркування, логічну помилку, допущену не навмисне, а через втрату послідовності в міркуваннях чи порушення одного з законів логіки.

РОЗДІЛ 2.
ЕЛЕМЕНТИ ЦІКАВОЇ МАТЕМАТИКИ В ПОЗАУРОЧНІЙ РОБОТІ

Особливістю організації навчально-виховного процесу в сучасних умовах є орієнтація на досягнення всіма учнями обов'язкового рівня математичної підготовки і створення умов для навчання на більш високому рівні тим учням, які мають здібності та проявляють інтерес до математики. Тому вчителю слід приділяти увагу диференційованому навчанню та індивідуальній роботі з учнями не лише на уроках, а й у позаурочний час.

Сучасна школа має цілий ряд форм організації навчання, які доповнюють та поглиблюють виконання завдань уроку. До таких форм відносяться домашня навчальна робота, позаурочна робота, позакласна робота та позашкільна робота.

Аналіз дидактичної і методичної літератури, вивчення досвіду роботи вчителів-практиків дають підстави стверджувати, що дуже часто терміни «позаурочна робота» та «позакласна робота» ототожнюють. Спробуємо розібратися в цьому питанні, розглянувши різні види діяльності школярів та їх взаємозв'язок.

Види діяльності школярів умовно можна класифікувати за наступними ознаками:

- за місцем проведення (класна і позакласна діяльність);
- за часом проведення (урочна і позаурочна діяльність);
- за відношенням до розв'язання навчальних завдань (навчальна і позанавчальна діяльність).

У класі можуть проводитися як урочні, так і позаурочні заняття. Багато урочних занять можуть проводитися поза класом, до прикладу, урок-екскурсія в парку чи на виробництві.

Проте неможливо провести зв'язок між урочною і позанавчальною діяльністю школяра, оскільки на уроках безпосередньо вирішуються поставлені навчальні завдання.

У зв'язку з вищесказаним допустимо можливість ототожнення понять класної і урочної діяльності учня, а також певним чином позакласної і позаурочної діяльності.

Щодо діяльності учителя, то у поняття «позакласна робота» часто вкладають надзвичайно широкий зміст, відносячи до неї всі види занять з учнями, які проводяться у позаурочний час, у тому числі й додаткові заняття з учнями, що відстають у навчанні. На нашу думку, додаткові заняття з математики варто виділити в окремий вид роботи – групові позаурочні заняття, які мають проводитися в малих групах, однорідних як з точки зору наявних у школярів прогалин у знаннях, так і з точки зору їх здібностей до навчання. В ідеалі такий вид роботи вчителя повинен мати яскраво виражений індивідуальний характер і проводитися лише у виняткових випадках: довготривала хвороба, перехід із школи одного типу в школу іншого типу тощо. На жаль, у даний час така робота вимагає значних затрат часу і зусиль з боку вчителя без відповідної оплати.

Надалі будемо вживати термін «позаурочна робота з математики», оскільки цей вид роботи вчителя може відбуватися і в класі, але в позаурочний час.

Позаурочна робота з математики – це заняття, які відбуваються в позаурочний час, ґрунтуються на принципі добровільності участі, мають на меті підвищення рівня математичного розвитку учнів і цікавості до предмета завдяки поглибленню та розширенню основного змісту програми. Вона має стати невід'ємною частиною добре організованого навчання учнів математики.

Основні завдання позаурочної роботи з математики:

- розвиток стійкого інтересу учнів до математики.
- забезпечення глибокого розуміння важливих ідей математики;
- розвиток математичних здібностей учнів (логічного мислення, просторових уявлень і уяви, алгоритмічної культури, пам'яті тощо), прищеплення учням деяких навичок науково-дослідного характеру;
- розвиток позитивних рис особистості (розумової активності, пізнавального інтересу, пізнавальної самостійності, потреби в самоосвіті, ініціативі, творчості) та навичок творчо працювати з навчальною і науково-популярною математичною літературою;

- ознайомлення учнів з історією математики, біографіями видатних математиків, зокрема українських;
- ознайомлення з найважливішими математичними відкриттями та забезпечення глибокого розуміння математичних ідей;
- створення додаткових умов для інформування про застосування математики в різних галузях науки і техніки та її роль у пізнанні навколишнього світу; формування навичок математизації ситуацій у процесі дослідження явищ природи і суспільства;
- створення учнівського активу, котрий здатний допомогти учителю в організації ефективного навчання математики.

Проводячи позакласні заходи з математики, учитель має більше можливостей показати джерела виникнення і рушійні сили її розвитку, наголосити на драматичних сторінках її історії.

Залучати учнів до позаурочної роботи варто різними педагогічно виправданими засобами. Учні мають зрозуміти, що набуті знання і навички будуть потрібні у майбутньому. Розвиваючи самостійність учнів, важливо спрямовувати їхні пізнавальні інтереси в потрібне русло, формувати комфортний мікроклімат відносин у колективі.

У проведенні позаурочної роботи з математики слід враховувати вікові особливості учнів. Так, у 5-6 класах доцільно розглядати цікаві питання арифметичного і геометричного матеріалу. При цьому слід пам'ятати, що математична розвага – не самоціль, а лише один із прийомів стимулювання пізнавальної активності, який збуджує увагу, викликає позитивні емоції та ситуативний, епізодичний учнівський інтерес, а завдання вчителя – перетворити цей інтерес у стійкий. Необхідно навчити учнів звертати увагу не на зовнішні ознаки, а на суть питання, розвивати допитливість.

Існують різні форми позаурочної роботи з математики, які часто використовуються в школі:

- математичні гуртки;
- математичні вечори;
- математичні ранки для учнів 1-6 класів;
- математичні вікторини, турніри та естафети;
- математичні олімпіади;

- шкільні наукові конференції;
- математичні газети, бюлетені;
- математичні екскурсії.

Учителям математики для активізації позаурочної роботи слід шукати інтерактивні форми роботи, наприклад, ведення математичних блогів та каналів, проведення математичних подорожей, інтелектуальних ігор («Брейн-ринг», «Що? Де? Коли?», «Поле чудес», «Зоряний час», «Найрозумніший», «Я люблю математику» тощо.)

Для учнів 10-11 класів можна проводити тематичні прес-конференції, на яких учителі та запрошені гості відповідають на запитання старшокласників про життя і наукову діяльність видатних математиків, сучасний розвиток математики тощо.

Основоположник сучасної космонавтики К. Ціолковський писав, що спочатку він робив відкриття, відомі всім, потім – відомі небагатьом і, нарешті, нікому не відомі. Отже, слід будувати позаурочну роботу так, щоб вона ставала для учнів школою маленьких відкриттів.

На позаурочних заняттях в 9-11 класах діяльність окремих учнів може носити творчий характер. Це проявляється в самостійній постановці проблеми (задачі), в складанні плану та знаходженні способу її розв'язання, в постановці гіпотез та їх перевірці, в проведенні власних досліджень.

Важливо, щоб зусилля вчителів, спрямовані на позаурочну (позакласну) роботу з математики, давали результат, а уроки та позакласні заходи, зберігаючи свої особливості, сприяли підвищенню ефективності навчання, виховання та розвитку школяра.

2.1. МАТЕМАТИЧНІ ГУРТКИ

Математичні гуртки є найпоширенішою формою позаурочної (позакласної) роботи, в яких учні розширюють і поглиблюють набуті на уроках знання, готуються до математичних олімпіад різних рівнів, знайомляться з сучасними проблемами математики, вчаться самостійно працювати з математичною літературою. Це сприяє підвищенню математичної культури та інтересу учнів до предмету.

Провідним напрямом у роботі гуртка учнів 5-6 класів є формування початкової цікавості до предмету та розвиток математичного мислення. Головне завдання для гуртка учнів 8-11 класів полягає в поглибленні та розширенні знань з математики і розвитку критичного мислення учнів.

Ініціатором і організатором гурткової роботи з математики має стати вчитель. Він залучає гуртківців до підготовки повідомлень, до участі в організації та проведенні математичних ранків і вечорів, тижнів математики, засідань клубу веселих і кмітливих математиків тощо. Найкраще виявляти учнів, що цікавляться математикою, на уроці, запропонувавши їм фрагмент з історії розвитку математики, цікаву задачу.

Наприклад, для учнів 5-6 класів можна провести фокус: «Кожний задумує яке-небудь трицифрове число, приписує до нього справа таке саме трицифрове число. Одержане шестицифрове число ділить на 13, результат ділить на 7, новий результат ділить на 11. У кожного вийде число, яке він задумав». Учитель не розкриває «секрет» фокусу на уроці, а запрошує учнів знайти відповідь на питання «Чому це так?» на засіданні гуртка.

Окремі задачі та запитання для гурткових занять бажано добирати так, щоб труднощі в процесі їх розв’язування спонукали учнів до розгляду деяких питань теорії та нових способів діяльності, які дещо розширюють і поглиблюють програму. Тривалі доповіді на занятті гуртка краще замінити короткими повідомленнями (до 10 хв.) з конкретної теми, які готують 2-3 учні. Крім доповідей, на математичному гуртку розв’язують багато різноманітних цікавих за змістом або способом розв’язування задач.

Робота математичного гуртка відрізняється від проведення групових позаурочних занять.

1. В основу залучення учнів до гурткової роботи покладено принцип добровільності.

2. Під час підготовки і проведення занять гуртка учні проявляють значно більше самостійності та ініціативи, бо позаурочні групові заняття з математики, як правило, готує і проводить сам учитель.

3. Методи проведення занять гуртка більш різноманітні, ніж методи проведення групових позаурочних занять.

Наведемо теми окремих занять математичних гуртків для учнів 5-11 класів, які, звичайно, не вичерпують усієї можливої тематики.

Теми занять математичних гуртків для учнів 5-6 класів.

- Цифри в різних народів світу.
- Дроби в різних народів світу.
- Загадки простих чисел.
- Подільність чисел. Узагальнена ознака подільності на 7, 11,13.
- Виникнення та історія створення метричної системи мір.
- Розв'язування задач практичного змісту.
- Математика в Стародавньому світі (Вавилон, Єгипет, Греція).
- Пропорції. Пропорційність величин. Золотий перетин.
- Календар і його історія.
- Числові кросворди.
- Задачі логічного змісту.
- Прийоми швидких обчислень.
- Наближені обчислення.
- Задачі на відсотки.
- Числа-велетні і числа-карлики.

Теми занять математичних гуртків для учнів 7-9 кл.

- Елементи історії геометрії.
- Помилки в геометричних доведеннях.
- Періодичні десяткові дроби.

- З історії розвитку вчення про рівняння.
- Різні доведення теореми Піфагора. Узагальнення теореми Піфагора – теорема Евкліда.
- Теорема Птоломея та її застосування.
- Невизначені (діофантові) рівняння.
- Математичні софізми.
- Кола Аполлонія.
- Велика теорема Ферма.
- Магічні квадрати.
- Числа Фібоначчі та їх властивості.
- Інверсія.
- Цікаві нерівності.
- Деякі задачі на побудову, що не розв'язуються за допомогою циркуля і лінійки.

2.2. ОРГАНІЗАЦІЯ І ПРОВЕДЕННЯ ТИЖНЯ МАТЕМАТИКИ

Тиждень математики дає можливість залучити до позаурочної (позакласної) роботи багатьох учнів різних класів, розкрити їхні потенційні здібності, розвинути пізнавальний інтерес, розширити кругозір, показати роль математики в житті людини. Ця форма роботи насичена конкретними заходами, тому успішне проведення тижня потребує тривалої підготовки (1-2 місяці).

Протягом тижня учні можуть знайомитись з цікавими фактами історії математики, взяти участь математичних вікторинах, конкурсах, естафетах, виконати запропоновані проекти, випустити математичні стінніки, відзняти різноманітні відеоролики тощо.

Підготовча робота до Тижня математики

Обирається оргкомітет на чолі з учителем математики, до якого входять учителі, учні 8-11 класів, спонсори, батьки. Комітет розробляє програму Тижня математики, призначає відповідальних за випуск стіннівок, оформлення залу, написання сценарію математичного вечора, підготовки питань для проведення математичних вікторин, тощо.

За десять днів до проведення Тижня математики слід випустити шкільну математичну стіннівку з подальшим поширенням, зокрема, і в соціальних мережах, з планом проведення і змістом його заходів та завданнями першого туру шкільної математичної олімпіади для всіх бажаючих –учнів 6-11 класів (його переможці візьмуть участь у другому турі олімпіади, який проводиться під час Тижня математики), почепити скриньку для запитань до гри «Що? Де? Коли?» тощо.

Шкільна бібліотека може підготувати виставку науково-популярної математичної літератури, старшокласники можуть відзняти тематичні відеоролики.

Орієнтовна програма проведення Тижня математики в школі

На початку Тижня математики на видному місці з’являється яскрава об’ява з планом проведення, стіни прикрашені плакатами з висловами про математику, видатних математиків минулого і сучасності.

Протягом Тижня старшокласники, враховуючи вікові особливості, на уроках математики в основній школі можуть робити повідомлення про видатних математиків та математичні відкриття, в старшій школі – проводити класні математичні години.

На заключному вечорі старшокласників підводяться підсумки Тижня математики, оголошується наказ директора школи про нагородження учнів, які брали активну участь у його підготовці і проведенні, відзначення переможців олімпіади.

Понеділок

Відкриття Тижня математики.

Математична олімпіада для учнів 3-4 класів.

Засідання «Клубу цікавих зустрічей» (10-11 кл.).

Вівторок

Ранок «Попелюшка в країні математичних чудес» (5 кл.).

Другий тур математичної олімпіади (6-11кл.).

Математичний «Брейн-ринг» (готують учні 9 кл.).

Середа

Турнір юних математиків (6 кл.).

Конкурс ерудитів-математиків «Зоряний час» (9 кл.).

Четвер

Інтелектуальна гра «Що? Де? Коли?» (7-8 кл.).

Математичний КВК (10 кл.).

Конкурс на краще відео «Математика на службі людства» (9-11 кл).

П'ятниця

Уроки цікавої математики в початкових класах та математичні години для учнів основної школи (готують учні 10-11 кл).

Засідання оргкомітету Тижня математики.

Інтелектуально-розважальна гра «Я люблю математику» (11кл.).

2.3. ІНТЕЛЕКТУАЛЬНІ МАТЕМАТИЧНІ ІГРИ

Гуманітарний аспект позаурочної роботи з математики (вікторини, турніри, ранки, вечори, тижні математики, інтелектуальні ігри тощо) сприяє залученню школярів до загальнолюдської культури, творчої діяльності, озброює їх методами наукового пошуку, які, крім поглиблення знань учнів, покликані створити умови для спонукання їх до активної діяльності

З метою закріплення, повторення вивченого матеріалу на уроках та в позаурочній роботі корисно проводити тематичні вікторини (наприклад, «Прогресії», «Функції», «Похідна»).

Завдання учасникам вікторини можна пропонувати різними способами: виразно читаючи один-два рази текст («слухові» вправи) або читаючи і разом проектуючи на екран дані завдання («зорові» вправи). В окремих випадках бажано спроектувати на екран повний текст задачі, малюнок, схему тощо.

Оскільки у вікторині беруть участь учні різного рівня підготовки, то її запитання мають бути різного рівня складності. Запитання зачитує ведучий (учитель чи учень). На обдумування відповіді відводиться певний час (залежно від складності запитань). При підготовці до вікторини корисно визначити для кожної вправи кількість балів за правильну відповідь.

Переможець визначається за сумою набраних балів.

Наведемо орієнтовні завдання вікторин для учнів різних вікових груп.

Ф. Кривін, автор книги «Несерйозні Архімеди», вважав, що постійна серйозність – це ознака обмеженості, тим більше, що і про серйозні речі можна говорити не зовсім серйозно. Саме тому серед наведених нижче завдань зустрічаються і задачі-жарти.

5 клас

Жартівливі і «підступні» запитання

1. Десять телеграфних стовпів стоять рядком. Відстань між двома сусідніми стовпами 50 м. Яка відстань між крайніми стовпами? *(450 м)*

2. 5 картоплин зварилося в каструлі за 30 хв. За скільки хвилин зварилась одна картоплина? *(За 30 хв.)*

3. Двоє батьків і двоє синів поділили між собою порівну 30 грн, при цьому кожен з них дістав по 10 грн. Як це могло статись? *(Дідусь, син і внук)*

4. Скільки одержимо десятків, якщо два десятки помножити на три десятки? *(60 десятків)*

5. Годинник з боєм відбиває щогодини один удар за 1 секунду. За який час годинник відіб'є 12 годин? *(За 11 с.)*

6. Скільки буде тричі по 40 і 5? *(*$3 \cdot 45 = 135$*)*

7. Велосипедисти одночасно виїхали назустріч один одному. Один з міста А зі швидкістю 20 км/год, а другий з міста В – 15 км/год. Який з велосипедистів буде ближче до міста А в момент зустрічі? *(На однаковій відстані)*

8. Два землекопи викопують 2 м канави за 2 години. Скільки землекопів за 5 годин викопають 5 м канави? *(2 землекопи)*

9. Батька громадянина звати Микола Петрович, сина громадянина – Олексій Володимирович. Як звати громадянина? *(Володимир Миколайович)*

10. На шальці терезів лежить цеглина, а на другій – половина такої цеглини і гиря в 1 кг. Ваги в рівновазі. Скільки кілограмів

важить цеглина? *(2 кг)*

11. Літак долає віддаль між містами А та В за 1 год. 20 хв. На зворотний шлях він затрачає 80 хв. Як це пояснити? *(1 год. 20 хв.= 80 хв.)*

12. Два батька і два сини спіймали трьох зайців, а дісталось кожному по одному. Як це могло статись? *(Дідусь, його син та внук)*

13. Скільки кінців у 3 палиць? У 4 з половиною палиць? *(6; 10)*

14. Двоє хлопчиків грали в шахи 40 хв. Скільки хвилин грав кожний хлопчик? *(40 хв.)*

15. Який знак, що застосовується в математиці, слід поставити між числами 4 і 5, щоб дістати число, більше за 4 і менше за 5? *(Кому)*

16. Як з трьох сірників, не ламаючи їх, зробити 4? *(IV)*

17. З трьох однакових на вигляд кілець одне трохи легше від двох інших. Як за допомогою лише одного зважування виявити це кільце?

18. За 3 хвилини колоду розпиляли на півметровки, причому кожне розпилювання займало одну хвилину. Знайти довжину колоди. *(2 м)*

19. Хочуть 30 яблук розкласти на три купки так, щоб число яблук у кожній купці було непарним. Чи можна це зробити? *(Не можна)*

20. На запитання, хто зображений на портреті, що висить на стіні, чоловік відповів: «Батько того, що висить на стіні – єдиний син батька, що говорить». Чий же був портрет? *(Онук)*

21. На сосні росло 20 груш. Подув сильний вітер і 12 груш впало. Скільки груш залишилося на дереві? *(Жодної. На сосні груші не ростуть)*

22. Що це може бути? Дві голови, дві руки, шість ніг. *(Вершник на коні)*

23. Пішов мірошник до млина. У кожному з кутків він побачив 3 мішки, на кожному мішку сиділо по три кішки, а кожна кішка при собі мала трьох кошенят. Під мішком сиділо по три мишки. Скільки всього ніг було у млині? *(Дві)*

24. Що важче: 1 кг вугілля чи 1 кг пуху? *(Однаково)*

25. Як можна одним мішком пшениці, змоловши її, наповнити два таких мішки?

6 клас
Усні вправи та за задачі, жартівливі задачі

1. Знайти добуток послідовних цілих чисел, який починається з числа - 5 і закінчується числом 5. *(0)*

2. $\frac{2}{3}$ числа дорівнює $\frac{3}{5}$ його. Назвіть це число. *(0)*

3. Знайти такі числа, добуток яких 24 і частка від ділення більшого числа на менше також 24. *(24 і 1)*

4. Одне яйце може зваритись за 4 хвилини. Скільки хвилин треба, щоб зварити 5 яєць? *(4 хв.)*

5. Виписано підряд всі числа від 1 до 99. Скільки разів написана цифра 5? *(20 разів)*

6. Як число 1888 поділити на дві частини, щоб у кожній половині вийшло по тисячі? *(Провести посередині горизонтальну лінію)*

7. З чотирьох п'ятірок і знаків арифметичних дій отримати число 100. *(Наприклад, (5+5)×(5+5), або* $(5 \cdot 5 - 5) \cdot 5$*)*

8. Знайти зменшуване і від'ємник: $**** - *** = 1$ *(1000-999 = 1)*

9. Скільки буде півтори третини від ста? *(50)*

10. Як розставити 12 солдатів у прямокутній фортеці, щоб біля кожної стіни стояло по 4 солдати? *(Поставити по одному солдату у кожному із чотирьох кутків (вершин) фортеці, а потім ще по 2 солдати біля кожної стінки)*

11. На яке число треба поділити 2, щоб одержати 4? *(На* $\frac{1}{2}$ *)*

12. Написано цифри 1, 2, 3 ,4, 5. Не змінюючи порядку цифр, поставте між ними знаки арифметичних дій так, щоб утворилось число 100. Переставляти цифри заборонено.

($(1+23-4)\cdot 5$ *або* $(1\cdot 2+3)\cdot 4\cdot 5$ *)*

13. У змаганнях з шахів беруть участь 4 шахісти. Кожен з них грає по одному разу з рештою гравців. Скільки всього буде зіграно

партій? *(6 партій)*

14. Половина від половини числа рівна половині. Яке це число? *(2)*

15. Розділити десять апельсинів порівну між дванадцятьма особами, за умови, що різати кожний апельсин можна не більше як на 3 рівні частини. *(6 апельсинів розрізати навпіл, а кожний з решти – на 3 рівні частини, потім дати кожній особі по половині і одній третині апельсина)*

16. Мотоцикліст їхав до міста. Дорогою він зустрів три легкових автомобілі та вантажівку. Скільки всього машин їхало до міста? *(Не менше однієї (мотоцикл їхав од міста)*

17. У кожному з чотирьох кутів кімнати сидить кіт. Навпроти кожного сидить по 3 коти. Скільки всього котів у кімнаті? *(4 коти)*

18. Є 4 шматки ланцюга. Три на 4 ланки і один – на 2 ланки. Як з'єднати ці шматки в один ланцюг, щоб число розкованих (а потім скованих) було найменше? *(Розкувати ланцюг, який має 2 ланки. Цими ланками скувати інші три ланцюги)*

19. На столі стоять в ряд 6 склянок: перші три з водою, решта – порожні. Що треба зробити, щоб порожня склянка чергувалася зі склянкою з водою? Брати можна лише одну склянку і один раз.

(Взяти другу склянку і перелити з неї воду в передостанню)

20. Щука важить стільки, скільки важить кілограм та ще пів щуки. Яка вага щуки? *(2 кг)*

7-8 класи

Усні вправи з математики, алгебри і геометрії

1.Якщо квадрат і ромб мають рівні сторони, то площа якої фігури більша? *(Площа квадрата більша, оскільки висота ромба менша за його сторону)*

2. У трикутника відрізали три кути. Скільки кутів залишилось? *(6 кутів)*

3. Чи існують трикутники, в яких середини трьох висот лежать на одній прямій? *(Всі прямокутні трикутники)*

4. Як записати число 1024 за допомогою трьох четвірок і знаків дій (включаючи піднесення до степеня)? *(* $4^4 \cdot 4$ *)*

5. Сума, добуток і частка яких двох чисел рівні між собою? *(0,5; -1)*

6. Щоб перевірити, чи вирізаний кусок тканини має форму квадрата, кравчиня перегинає його по кожній з діагоналей і переконується, що краї обох частин співпадають. Чи достатньо такої перевірки? *(Ні, оскільки вказані дії задовольняють також і ромб)*

7. Неподалік від берега стоїть корабель. З нього спущено на воду за борт мотузяну драбину. На ній 10 щаблів, відстань між якими 30 см. Найнижчий щабель торкається води. Океан спокійний, але починається приплив, який підіймає воду щогодини на 10 см. Через скільки годин вкриється водою третій щабель? *(Щабель не може вкритися водою, бо під час припливу корабель піднімається разом з водою)*

8. 2 півні можуть розбудити своїм співом одну людину. Скількох людей розбудять співом 6 півнів? *(Всіх людей поблизу)*

9. Чи може четвертий степінь цілого числа закінчуватися 4? *(Ні)*

10. Знайти найбільше значення виразу $3-(5+x)^2$. *(3)*

11. Коли моєму батькові минув 31 рік, мені було 8 років. А тепер батько старший від мене вдвічі. Скільки мені тепер років? *(23 роки)*

12. Сума двох непарних чисел ділиться на п’ять. Якою цифрою закінчується сума кубів цих чисел? *(0)*

13. Як поділити рівносторонній трикутник на 3 частини так, щоб з них можна було скласти два рівних між собою ромби? *(Провести дві середні лінії)*

14. Паралелограм і прямокутник мають рівні основи і периметри. Площа якої фігури більша? *(Прямокутника)*

15. Чи можуть бути перпендикулярними радіус і хорда, проведені з однієї і тієї ж точки? *(Ні)*

16**.** Як розставити 16 стільців, щоб біля кожної з чотирьох стін стояло по 5 стільців? *(Щоб розставити 5 стільців біля кожної стіни, треба поставити по одному стільцю в кожному кутку, а потім ще по три стільці біля стін)*

17. Рибалка ловив рибу. На запитання, скільки він впіймав

риби, відповів: «Половину восьми, шість без голови, дев'ять без хвоста». Скільки ж це? *(Жодної: 8, 6, 9 – скрізь отримуємо нуль)*

18. Старовинна задача. Два батька і два сини спіймали трьох зайців, а дісталось кожному по одному зайцю. Як це могло статись ? *(Це були дідусь, його син і внук)*

19. Всі висоти трикутника перетинаються в одній з вершин. Який це трикутник? *(Прямокутний)*

20. На глобусі через один градус проведені паралелі. Скільки всього кіл побудовано на глобусі? *(179)*

9 клас
Усні вправи з алгебри та геометрії, «підступні» запитання

1. Різниця квадратів двох послідовних натуральних чисел дорівнює 81. Знайдіть ці числа. *(40 і 41)*

2. Що більше: 10^{20} чи 20^{10}? *(Більше 10^{20})*

3. На скільки сума всіх парних чисел першої сотні більша суми всіх непарних чисел цієї сотні? *(на 50)*

4. Не виконуючи дії, сказати, чи ділиться число 9432 на 36? *(Так)*

5. Чи можна з 36 сірників, не ламаючи їх, скласти прямокутний трикутник? *(Можна, прямокутний трикутник зі сторонами 9; 12; 15)*

6. З 8 однакових на вигляд куль одна дещо важча за інші. Яка потрібна найменша кількість зважувань, щоб виявити трохи важчу кулю?

7. В записі 88888888 поставте між деякими цифрами знаки додавання так, щоб в сумі отримати 1000. *(888+88+8+8+8)*

8. Всі висоти даного трикутника перетинаються в одній з вершин. Який це трикутник? *(Прямокутний)*

9. Десятилітровий бідон наповнений водою. Як за допомогою семилітрового і трилітрового бідонів відлити з нього п'ять літрів води? *(Наповнити семилітровий бідон, відлити з нього за допомогою трилітрового бідону 6 л води у десятилітровий бідон, а залишок (1л) у*

трилітровий. Ще раз наповнити семилітровий бідон, відлити з нього 2 л у трилітровий)

10. О третій годині настінний годинник відбиває 3 удари за 6 секунд. За скільки секунд цей годинник відіб'є 6 ударів о шостій годині? *(За 15с. Між трьома ударами 2 проміжки, отже, 1 проміжок триває 3 с.)*

11. 1 коштує 2 гривні, 12 коштує 4 гривні, 123 коштує 6 гривень, 1234 коштує 8 гривень. Що я купував? *(Цифри для позначення номеру квартири)*

10-11 класи
Усні вправи з алгебри та геометрії, «підступні» запитання

1. Що більше: $cos 40^0$ чи $\sin 50^0$? *(Рівні)*

2. Чи можна побудувати 6-кутну піраміду, в якої всі ребра рівні? *(Ні)*

3. В одній області 10 міст, і будь-які два міста з'єднані шосейною дорогою. Скільки всіх шосейних доріг, що з'єднують міста цієї області? *(45)*

4. Якщо від задуманого тризначного числа відняти 7, то одержане число поділиться на 7, якщо від задуманого числа відняти 8, то результат поділиться на 8, якщо відняти 9, то результат поділиться на 9. Яке число задумали? *(504, найменше спільне кратне чисел 7, 8, 9)*

5. Який знак має вираз $sin(\,cos\,\pi)$? *(Мінус)*

6. Чи існують піраміди, в яких бічні ребра і бічні грані однаково нахилені до площини основи, причому основою піраміди є трапеція? *(Ні)*

7. Чи має рівняння $\lg(2-x)-\lg(x-3)=3$ розв'язки? *(Ні. ОДЗ даного рівняння визначається системою нерівностей, яка не має розв'язку)*

8. Як, маючи два бідони місткістю 5 л і 9 л, набрати з криниці рівно 3 л води?

9. Периметр трикутника дорівнює 1 км. Чи може радіус

описаного навколо цього трикутника кола бути більшим 1км? *(Може, якщо один з кутів трикутника тупий і його градусна міра близька до* 180^0 *)*

10. Яким найменшим числом площин можна обмежити частину простору? ***(Чотирма площинами, що утворюють трикутну піраміду)***

Запитання для математичних вікторин з історії математики

1. Які числа у стародавні часи називали боргом? *(Від'ємні)*

2. Арістотель сказав: «Ми з насолодою пізнаємо математику… Вона захоплює нас, наче квітка лотоса». Символом якого числа була квітка лотоса в Стародавньому Єгипті та Китаї? *(1000)*

3. Яке визначне творіння давньогрецької математики лежить в основі підручника геометрії для середньої школи в усіх країнах світу? Хто її автор?*(«Начала» Евкліда, близько 300 р. до н. е.)*

4. Кому зі старогрецьких учених приписують вислів: «Дайте мені точку опори – і я зрушу Землю!»? *(Архімеду)*

5. Кому з відомих математиків давнини належить вислів «У геометрії немає царського шляху»? *(Евкліду)*

6. Який видатний сучасний математик насправді ніколи не існував?*(Н. Бурбакі – псевдонім, яким колектив відомих французьких учених, зокрема, А. Вейль, Ж. Дьєдоне А. Картан, підписував свої праці)*

7. Перша у світі жінка – професор математики. Хто це? *(С. Ковалевська)*

8. Назвіть ім'я першої жінки-математика. *(Гіпатія)*

9. На честь якої відомої жінки-математика названа одна з кривих ліній? *(На честь італійського математика Марії Гаетани Аньєзі плоску криву, виражену рівнянням* $y(x^2 + a^2) = a^3$ *, назвали «локон Аньєзі»)*

10. Де вперше з'явились від'ємні числа? *(Китай, II ст. до н. е.)*

11. На будинку якої академії було написано: «Хто не знає геометрії –нехай сюди не входить? *(На академії Платона)*

12. Хто вивів формули об'єму та поверхні кулі? *(Архімед)*

13.Хто вперше використав латинське слово *limes* (границя, межа) для позначення границі? *(І. Ньютон)*

14. Хто першим визнав нуль коренем рівняння, тобто числом? *(Французький математик А. Жирар)*

15. Хто вперше сполучив знак кореня з горизонтальною рискою $\sqrt{a+b}$ тобто ввів сучасний знак кореня? *(Французький математик Р. Декарт)*

16. У 1865 році в Парижі це математичне позначення ввели завдяки типографській помилці. Назвіть його. *(Знак $\%_0$)*

17. Хто першим розробив метод координат і застосував його для дослідження ліній? *(У 1836 році П. Ферма (на рік раніше, ніж Р. Декарт) більш систематизовано виклав метод координат, увів прямолінійні координати, хоч систему координат, якою ми нині користуємося, називають декартовою)*

18. Хто систематизував і розвинув учення про правильні многогранники? *(Евклід)*

19. Це слово в математичному сенсі стали вживати з XIX ст. завдяки німецькому художнику А. Дюреру. Математичне означення поняття дав німецький математик Р. Дедекінд. Назвіть його. *(Нескінченність)*

20. Як називається нині математичний термін, що з'явився ще у XIX ст., а в 1916 році його рекомендували читати «*n*-захоплення»? *(Факторіал)*

Запитання для проведення інтелектуальної гри-вікторини «Видатні математики»

Подані нижче запитання можна використати і при проведенні інтелектуальної гри *«Доганялки»*. В ній беруть участь 2-3 команди, перед кожною з яких ставляться запитання і подаються 3 підказки. За відповідь після першої підказки команда одержує 3 бали, після другої – 2 бали, а після третьої – 1 бал. Якщо відповідь команди неправильна, то інші команди продовжують відповідь. За правильну відповідь чи за доповнення відповіді суперників команда отримує додатковий бал.

1. Старогрецький філософ і логік заснував у Афінах

філософську школу (Лікей), яка проіснувала кілька століть.

2. З 343 р. був вихователем майбутнього видатного полководця Олександра Македонського.

3. Він добре знав елементарну математику, висловлював глибокі міркування про границю і нескінченність, розв'язав задачу про додавання сил. *(Арістотель)*

1. Старогрецький математик, астроном, полководець, послідовник Піфагора, вперше систематично займався механікою, побудував автоматичного дерев'яного голуба, який міг літати.

2. Одну з кривих обертання восьмого порядку, яка є результатом перерізу тора й циліндра, названо його ім'ям.

3. Учений вперше розв'язав знамениту задачу про подвоєння куба та описав три види відомих пропорцій – арифметичну, геометричну і гармонійну. *(Архіт Тарентський)*

1. Старогрецький винахідник створив еоліпіл (прообраз парової реактивної турбіни), прилад для вимірювання довжини шляху (прообраз сучасного таксометра), автомат для продажу води, водяні годинники.

2. Займаючись питаннями геодезичних робіт, не лише розробив правила знімання планів земельних ділянок, що ґрунтуються на способах, близьких до сучасного методу координат, а й сконструював прилад для вимірювання кутів на місцевості.

3. Формула для визначення площі трикутника за трьома сторонами названа його ім'ям, хоча середньовічні арабські вчені приписують її Архімеду. *(Герон Александрійський)*

1. Старогрецький математик ІІІ ст., один із основоположників алгебри, мав уявлення про від'ємні числа і буквену символіку.

2. Праці вченого в галузі теорії чисел послужили основою для досліджень П.Ферма, Л.Ейлера, К.Гаусса та ін. У теорії чисел два великих розділи названі на честь старогрецького вченого – теорія ... (пропущено ім'я) рівнянь і теорія …(пропущено ім'я) наближень.

3. Про його віхи життя і вік можна дізнатися лише з епітафії – напису на надгробку, складеному в формі математичної задачі.

(Діофант Александрійський)

1. До нас дійшов лише один твір цього відомого індійського

вченого, значна частина якого присвячена арифметиці й алгебрі. В ньому він використовував від'ємні числа, нуль і виконував над ними дії.

2. Вчений сформулював правило розв'язування квадратних рівнянь, які мають дійсні розв'язки; займався розв'язуванням лінійних рівнянь з двома невідомими та інших невизначених рівнянь у цілих числах, ввів правило побудови прямокутних трикутників з раціональними сторонами.

3. Його ім'ям названа формула обчислення площі чотирикутника за сторонами. *(Брахмагупта)*

1. Індійський вчений XII ст. у своєму трактаті з математики виклав методи розв'язування деяких алгебраїчних задач та спосіб добування коренів, вказавши на двозначність квадратного кореня з додатного числа.

2. У трактаті «Обчислення коренів» подаються задачі, які можна розв'язати за допомогою квадратних рівнянь.

3. Трактат «Лілаваті» (Красуня) серед інших містить задачі про мавп і бджіл, написані автором у віршованій формі. *(Бхаскара II)*

1. У праці «Про доведення задач алгебри…» він перший серед математиків створив теорію розв'язування рівнянь до третього степеня включно і дав загальну класифікацію всіх рівнянь.

2. Учений дав перше означення алгебри як науки про визначення невідомих величин, які перебувають у деяких співвідношеннях з відомими величинами. А його ідеї застосування алгебри в геометрії нагадують погляди творця аналітичної геометрії Р. Декарта.

3. Перський учений здобув світову славу і як поет, майстер рубаї (чотиривірша). (*Омар Хаям)*

1. Сучасний вигляд тригонометрії надав цей швейцарський учений, який жив у XVIII ст. З 20 років він працював у Російській АН, в 26 років став академіком.

2. Він зробив значний внесок в розвиток різних наук, написавши 886 наукових праць з математики, фізики, астрономії тощо.

3. Його називають «батьком теорії графів». (*Л. Ейлер)*

1. Він – організатор і перший президент Берлінської АН, ідейний натхненник сучасних обчислювальних машин.

2. Розробка основ математичного аналізу закінчена ним незалежно від І. Ньютона, але між ними довго велась суперечка про пріоритет.

3. Учений ввів багато термінів і символів математичного аналізу: функція, диференціал, диференціальне числення, диференціальне рівняння, абсциса, ордината, координата, інтеграл, диференціал тощо. *(Г. Лейбніц)*

1. Назву лише кілька математичних праць, напис аних цим англійським математиком: «Відомості з те орії детермінантів», «Математичні курйози», «Евклід».

2. Свої праці з логіки вчений підписував власним ім'ям. Лише під творами «Логічна гра» і «Символічна логіка» поставив літературний псевдонім, щоб їх прочитало якнайбільше людей, зокрема, і зацікавлені математикою підлітки.

3. Прочитавши його книгу «Пригоди Аліси в Країні чудес», королева Англії наказала подати їй всі книжки цього казкаря. На кожній сторінці з принесеної паки книг автора рясніли формули та незрозумілі терміни. Королева не знала, що написав казку математик, більш відомий під псевдонімом Льюїс Керролл. *(Ч. Л. Доджсон)*

1. Цій російській жінці у 1884 році Геттінгенський університет присудив заочно і без екзаменів ступінь доктора «з найвищою похвалою».

2. Всесвітнє визнання і славу їй принесла праця «Про обертання твердого тіла навколо нерухомої точки» (1888), надіслана на конкурс, оголошений Паризькою АН. Її автору була вручена премія (замість обіцяних трьох тисяч – п'ять тисяч франків).

3. Англійський вчений Дж. Сильвестр присвятив першій російській жінці-професору, члену-кореспонденту Петербурзької АН сонет, в якому назвав її «небесною музою». (*Софія Ковалевська)*

1. Академік П. Александров вважав, що вона «найвидатніша жінка-математик з усіх, які коли-небудь існували».

2. Вчена внесла значний вклад у теорію ідеалів, розробляла питання некомутативних алгебр.

3. Створений нею новий напрямок в алгебрі – абстрактна алгебра – дав можливість проникненню алгебраїчни х понять і алгебраїчних методів у інші математичні теорії. *(Е. Нетер)*

1. Американський математик, удостоєний найвищої нагороди для людей науки в Сполучених Штатах Америки – Золотої медалі вченого, – в 14 років вивчив вищу математику, а в 18 років став доктором філософії.

2. У роки Другої світової війни вчений першим у світі запропонував батареям зенітних установок відмовитися від практики веден ня вогню по окремих цілях, а розробив нову дієву ймовірнісну модель управління силами протиповітряної оборони (ППО).

3. Він став основоположником кібернетики і теорії штучного інтелекту, ввів у науковий обіг термін «біт». *(Н. Вінер)*

1. Учений, крім української мови, вільно розмовляв російською та французькою. Був знайомий з видатними діячам и культри: І. Котляревським, Т. Шевченком, М. Лисенком та ін.

2. Його ім’я носить розроблений ним метод виділення раціональної частини невизначеного інтеграла, який дозволяв алгебраїчним шляхом подати його у вигляді суми двох доданків, причому другий доданок не містив раціональної частини. Поряд з В. Буняковським він відіграв важливу роль у підвищенні наукового рівня викладання вищої математики.

3. Він народився в с. Пашенне на Полтавщині, походив із відомого українського козацько-старшинського роду.

(*М. Остроградський)*

1. Премією Петербурзької АН його імені за видатні дослідження в математиці був нагороджений український математик Г. Вороний.

2. У математичному аналізі він відкрив у 1859 році нерівність, що стосується визначених інтегралів. Іноді її називають «нерівністю Шварца», хоч Шварц вивів її на 16 років пізніше.

3. Видатний математик XIX ст., автор програм та підручників тогочасної середньої школи в Росії, народився в м. Бар (нині Вінницької область) *(В. Буняковський)*

1. У 1884 році читачам київського «Журналу елементарної

математики» було запропоновано написати твір на тему «Розклад многочленів на множники, що ґрунтується на властивостях коренів квадратного рівняння». Кращим став твір шістнадцятирічного учня Прилуцької гімназії …, який був надрукований наступного року в журналі.

2. Учений визнаний фахівцями як один з найяскравіших талантів у теорії чисел на межі XIX-XX ст., розробив повну теорію алгебраїчних полів третього степеня і запропонував алгоритми, що служать узагальненням неперервних дробів для кубічних ірраціональностей.

3. Деякі вчені вважають, що у 1975 ро ці використанням діаграм його імені започатковано комп'ютерну геометрію. Діаграми використовують також у комп'ютерній графіці, побудові географічних інформаційних систем, геометричній конструкції роботів. *(Г. Вороний)*

1. Польський математик, який довгий час працював у Львівському університеті, розробив алгебру, названу його ім'ям. У ній вивчаються лінійні простори його імені.

2. Він – один із засновників Львівської математичної школи, в якій розроблено значну частину сучасного функціонального аналізу. Польське математичне товариство заснувало премію його імені.

3. Учений у 1930-х роках започаткував «Шотландську книгу». У ній учені-математики, які побували у Львові, записували математичні задачі і проблеми, сформульовані ними. *(С. Банах)*

1. Праці одного з найвизначніших математиків XX ст., який народився на Волині, з вищої алгебри, математичного аналізу, математичної статистики, теорії ймовірностей тощо ввійшли до скарбниці світової науки. Він написав ряд цікавих праць з історії математики, методики навчання математики, підручники для вищих навчальних закладів. Учений-академік зробив значний внесок у розвиток української математичної термінології.

2. У роки громадянської війни (1919-1921) молодому вченому довелось поїхати з Києва. Він працював директором сільської школи і вчителем математики. У цій школі під його опікою розпочав свій шлях у велику науку сільський хлопчина А. Люлька, згодом – відомий

український учений, творець реактивних авіадвигунів. Його кращим студентом був майбутній Генеральний конструктор космічних кораблів С. Корольов.

3. Девіз життя видатного українського вченого: «Моя любов – Україна і математика». *(М. Кравчук)*

Запитання для проведення інтелектуальної гри «Що? Де? Коли?»

Готуючись до проведення інтелектуальної гри «Що? Де? Коли?» учні, як гравці, так і глядачі, здобувають самостійно нові знання не лише з математики та інших предметів, але й з історії науки. Труднощі, які долають учні при підборі запитань та пошуку відповідей на них, формують пізнавальний інтерес, сприяють розвитку логічного мислення, пізнавальної самостійності, дають змогу відчути радість досягнутої перемоги.

Ось приклади запитань, які можна використати для проведення гри «Що? Де? Коли?» для учнів 10-11 класів.

1. Йому приписують вислів: «Все є число». До числа він хотів звести весь світ і математику. На його дослідження значний вплив мали філософія та релігія Сходу. Він вперше розділив числа на парні і непарні, прості і складені. Хто цей старогрецький вчений? *Відповідь. Піфагор*

2. Прослухайте уважно цей жартівливий вірш. Вам треба буде за хвилину порахувати, скільки разів у ньому повторюється 100.

У простого сторожа непросторий дім:
Часто там стоніжка бродить під столом.
Дорожить стоніжка чистотою ніг
І столичним кремом чистить сто чобіт
Замість двох непросто – стомливо! – всі сто
Чистити ще й стоптані аж від п’ят до стоп.
Бо, достоту, просто в гордої міс тої,
У тої стоніжки, досвід є пристойний.

(Андрій Куніцин. Скільки разів повторюється 100)

Відповідь. Отже, У про100го 100рожа і так далі…«100» повторюється 20 разів.

3. Який геометричний термін описують ці рядки поета:

Злітає птиця,
Вверх повзе запара,
У світлім келиху ось піна закипає,
І нароста жага…
Вогонь багаття,
Упевненість і віра в завтрашнє. Надія,
Все – знизу вверх.

Відповідь. Термін «вектор» в перекладі з латинської означає «той, що вказує напрям».

4. У середньовічній Європі їх іноді називали «мавританським танцем дев'ятьох». Хто ці танцюристи і в якій країні з'явився їх дивний партнер по танцю?

Відповідь. Так називали в Європі «арабські» цифри. Найстаріший запис числа з нулем знайдений в Індії в 876 році.

5. У 1996 році було прийнято Конституцію незалежної України, пізніше розроблений кримінальний кодекс тощо. А в якій країні кодекс містив розділ «Про злочинців, математиків і їм подібних»?

Відповідь. У VI ст. в кодексі візантійського імператора Юстиніана закон «Про лиходіїв, математиків та їм подібних» свідчив: «Вивчення та викладання науки геометрії ведеться в інтересах загального блага. Цілком забороняється гідне осуду мистецтво математики». Математику піддавали гонінням, бо її часто пов'язували з астрологією, числовою містикою тощо. Учених, які все ж таки займалися математикою, переслідували і карали.

6. У XV ст. арифметику називали «малим мистецтвом», алгебру – «великим мистецтвом». А чим вважав видатний італійський художник і вчений Леонардо да Вінчі механіку?

Відповідь. «Раєм математичних наук» називав механіку Леонардо да Вінчі. Як інженер-механік він залишив немало цікавих проєктів механізмів: самохідний дерев'яний візок – прообраз сучасного автомобіля, обертальний міст, крилатий планер, акваланг тощо.

7. Збереглися історичні відомості про використання у Китаї

повітряних зміїв, що прив'язувались до спини людини, вже в 4 ст. нашої ери, а використання парашута стало ефективним і безпечним лише в кінці XVIII ст. Однак офіційно визнаний винахідник парашута жив майже на 200 років раніше. Назвіть ім'я цього винахідника.

Відповідь. Видатний італійський художник і винахідник Леонардо да Вінчі (1452 - 1519).

8. Про себе він казав: «Я навчився рахувати раніше, ніж читати». Сучасники розуміли велич цього німецького вченого, про що свідчить напис «Король математики», викарбуваний на медалі в його честь. Назвіть ім'я вченого.

Відповідь. Німецький математик К. Гаусс (1777- 1855).

9. Французький письменник Віктор Гюго якось зауважив, що людський розум володіє трьома ключами, які допомагають людям знати, думати, мріяти. Два з них – букви і ноти. А який же ще один ключ?

Відповідь. «Розум людський володіє трьома ключами, що відкривають все: цифрою, буквою, нотою. Знати, думати, мріяти. Все в цьому», – вважав Гюго. Отже, ще один ключ, що відкриває все – це цифра.

10. У 1783 році французький лікар і натураліст Ф. Коммерсон привіз із Японії рідкісну квітку – «японську троянду». На честь відомої жінки-математика і астронома Франції він назвав її «потією». Але закріпилася за квіткою інша назва, яку дав їй французький ботанік А. Жюссьє. Шановні гравці! А яка ж назва закріпилась за квіткою?

Відповідь. Гортензія. Так виникла легенда про жінку-математика Гортензію Лепот, що зустрічається в деяких біографічних довідниках. Плутанину розкрив ще у 1803 році французький астроном Ж. Лаланд. Він високо цінував наукові заслуги Гортензії Ніколь-Рейн Етабель де ла Бріла (після заміжжя Лепот). Вона, як знаний обчислювач, у 1759 році брала участь у дослідженні французького математика і астронома А. К. Клеро руху комети Галлея. На рахунку мадам Лепот й інші відкриття таємниць космосу.

11. В оповідані А. Конан-Дойля «Остання справа Холмса» Шерлок Холмс свідчив: майбутній професор Моріарті в 21 рік

«написав трактат ..., який здобув йому європейську популярність, і він отримав кафедру математики в одному з провінційних університетів». Про який трактат йде мова?

Відповідь. Математичний трактат про біном Ньютона).

12. У романі «Із Землі до Місяця» французький письменник-фантаст Жуль Верн писав: «Один німецький математик запропонував спорядити наукову експедицію до сибірських степів. Там, серед широких рівнин, можна було б за допомогою рефлекторів висвітити гігантські геометричні фігури, і до того ж настільки яскраві, що їх буде видно з Місяця». Які геометричні фігури мав на увазі Верн?

Відповідь. Жуль Верн мав на увазі «трикутник Піфагора, який жартома називають «Піфагорові штани».

Фантаст вважав, що теорема Піфагора справедлива скрізь, тому жителі будь-якої планети повинні зрозуміти такий сигнал.

13. Семюель Ленггорн Клеменс – майбутній американський письменник Марк Твен (1835 – 1910), який народився у Флориді (штат Міссурі), в автобіографії написав: «Я збільшив населення рівно на один відсоток. Не кожний історичний діяч може похвалитися, що зробив більше для рідного міста». Скільки жителів було в Флориді?

Відповідь. 100 осіб.

14. Легендарний образ цього французького математика і церковного діяча X ст. використав письменник М. Булгаков у романі «Майстер і Маргарита». Саме необхідністю розібрати папери вченого пояснює «єдиний у світі спеціаліст» Воланд своє перебування в Москві. Назвіть ім’я цього вченого.

Відповідь. Воланд говорить: «Тут у державній бібліотеці виявлені справжні рукописи чорнокнижника Герберта Аврілакського, десятого століття, так що треба, щоб я їх розібрав». Герберт, ставши папою римським Сильвестром II (999 – 1003), здійснив реформу викладання математики і запровадив десяткову систему числення.

15. Видатний математик XX ст. А. М. Колмогоров вважав, що таблиця множення може служити метафорою простоти. А що, на думку вченого, може служити метафорою складності?

Відповідь. Біном Ньютона.

16. За хвилину ви маєте пояснити незвичайні пригоди барона Мюнхаузена, проявивши, крім математичних знань, ще й почуття гумору.

Отже, увага! «Якось після гарячої битви з турками Мюнхаузен відправився до криниці напоїти свого коня.

Кінь довго пив воду і ніяк не міг вгамувати спрагу.

… Виявилося, кінь барона ... позбувся своєї задньої частини, і вся випита вода тут же виливалася позаду нього».

Чому ця неймовірна історія неможлива з точки зору математики?

Відповідь. Ось як пояснює сам Мюнхгаузен куди поділася інша половина коня. «Коли я помчав за ворогами і вдерся у браму ворожої фортеці, турки саме в ту мить зачинили браму і відтяли задню половину мого коня. Ніби розрубали його навпіл!

Ця задня половина якийсь час залишалася неподалік від воріт, брикаючи і розганяючи турків ударами копит, а потім побігла на сусідній луг».

Але ж за законами геометрії, двоногий кінь не зможе стійко стояти на землі і впаде, а значить, не зможе мирно пастися на лузі, тим більше брикатися і розганяти турків ударами копит! З аксіоми стереометрії (Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, проходить площина, причому тільки одна) випливає, що стійке положення об'єкта досягається при опорі на три точки за умови, якщо вони не лежать на одній прямій.

17. Англійський король сотні років тому одного разу витягнув праву руку і заявив: «Відстань від кінчика мого носа до великого пальця руки буде служити для всього мого народу мірою довжини». Як назвав король цю міру довжини?

Відповідь. Ярд.1 ярд = 3 фути = 36 дюймів = 0,9144 м.

18. Видатний російський письменник умів знайти навіть у математиці можливості літературного самовираження (образи і характери, взаємини людей і події). В одному зі своїх відомих романів він увів поняття диференціала історії.

Назвіть письменника, для якого була «насолода не у відкритті істини, а в її шуканні».

Відповідь. У романі «Війна і мир» письменник Л. М. Толстой вводить по аналогії з математикою поняття диференціала історії. «Только допустив бесконечно-малую единицу для наблюдения – дифференциал истории, то есть однородные влечения людей, и достигнув искусства интегрировать (брать суммы этих бесконечно-малых), мы можем надеяться на постигновение законов истории».

19. Запитання для «бліцу».

А) Що спільного між словами «череда», «табун», «оберемок»? (Усі ці слова виконують таку саму роль, як і слово «багато» для характеристики множин чисел).

Б) Що спільного між теоремою і театром? (Термін «теорема» походить від грецького слова «теоро» – спостерігаю, придивляюсь. У театрі людина дивиться певну виставу).

В) Чи можна снідати за «трапецією»? (Можна, бо термін «трапеція» походить від грецького слова «трапезіон» – столик. Звідси і походження слова «трапеза»).

20. Запитання для «бліцу».

А) Назвіть книгу Тараса Шевченка, у виданні якої надав допомогу видатний математик Михайло Остроградський.

(«Кобзар»).

Б) Назвіть ім’я відомого українського поета, який був учителем Михайла Остроградського в Полтаві в Будинку бідних дворян. (І. Котляревський).

В) Назвіть автора повісті «Художник», у якій згадується про М. Остроградського (Т. Шевченко).

Сценарій інтелектуальної гри «Зоряний час» (9 кл.)

Ведучий 1. Дорогі друзі, ми раді вітати вас на математичній грі «Зоряний час». Девіз нашої гри: «Математика без кордонів!»

Ведучий 2. Сьогодні з нами всі, хто любить таємниці, загадки, пригоди, всі, хто допитливий, працьовитий, упертий!

Ведучий 1. Дозвольте познайомити вас із учасниками гри *(прізвища)* і членами журі *(представлення)*.

Ведучий 2. Шановні учасники гри, візьміть із собою в дорогу кмітливість, винахідливість, сміливість, і тоді перемога завжди буде з вами. Успіхів вам! Починаємо гру. Отже, перший тур – **«Видатні математики»**.

Ведучий 1. Перед вами портрети видатних математиків різних часів. *(проектуються на екран).* Кожен портрет має свій номер, який учасники гри будуть показувати, даючи свою відповідь на запитання. Отже, запитання перше.

Старогрецький математик – автор перших математичних трактатів, що дійшли до нас. У своїй основній праці він підсумував усі попередні досягнення грецьких математиків V-IV ст. до н. е. і створив фундамент для її дальшого розвитку. Вона була першим науковим твором, у якому зроблено спробу дати аксіоматичну побудову геометрії. Назвіть цю відому працю та її автора.

Відповідь. Жодна наукова праця не користувалась таким великим і тривалим успіхом, як «Начала» Евкліда. З 1482 р. одна з найпоширеніших книжок світу, за якою протягом багатьох століть вивчали геометрію в школах, витримала понад 500 видань більшістю мов світу.

Ведучий 2. Старогрецький математик, фізик і механік увів наближене значення числа $\pi = \frac{22}{7} \approx 3{,}14$, яким користуються і нині. Вчений обчислив площі поверхні й об’єми різних фігур, розробивши методи, які через дві тисячі років розвинулись в інтегральне числення. Він винайшов машину для зрошування полів, знайшов спосіб визначення складу сплавів, розробив систему блоків для піднімання великих вантажів, військові метальні машини. Назвіть цього знаменитого вченого.

Ведучий 1.

Коли в задумливім спокої
загадку кола він вивчав,
в той час над ним невіглас-воїн
підняв розбійного меча.
Віки майнули, наче птиця,
в науці пам’ять він здобув.
Ніхто не знає, хто убивця,

та знають всі, хто вбитим був.

(Ю. Єфімовський. Архімед. Переклад О. Герасименко.)

Відповідь. Досвідчений механік, учений Архімед очолив оборону рідного міста Сіракузи. Восени 212 р. до н.е., коли римляни все-таки захопили місто, його вбив римський воїн.

Ведучий 2. Цей видатний німецький учений XIX ст. виявив блискучі здібності з математики ще за шкільною партою. Якось на уроці вчитель запропонував учням знайти суму чисел від 1 до 100 включно. Хлопчик майже одразу подав свою креслярську дошку з правильною відповіддю: 5050. Назвіть ім'я цього майбутнього великого математика.

Відповідь. К. Гаусс у 1801 р. довів можливість побудови з допомогою циркуля і лінійки правильного 17-кутника, розв'язавши проблему, над якою вчені світу працювали більше двох тисяч років. Надаючи цьому відкриттю великого значення, він заповів зобразити 17-кутник на своєму надгробку.

Ведучий 1. Наприкінці XVI ст. французький вчений розробив буквену символіку не лише для змінних, але й для відомих величин. Вона, значно відрізняючись від сучасної, дала можливість записувати алгебраїчні вирази за допомогою формул. Його ім'ям названо теорему, яка виражає зв'язок між коефіцієнтами квадратного рівняння і його коренями. Назвіть цього відомого математика – «батька символічної алгебри».

Відповідь. Хоча залежність між коефіцієнтами і коренями квадратного рівняння знали ще стародавні вавилоняни, але це не применшує заслуг французького математика Ф. Вієта, який довів цю теорему в 1591 р.

Ведучий 2. Отже,відповівши правильно на чотири запитання, учасники переходять до наступного туру *(ведучий ставить ще кілька запитань, щоб у другий тур потрапило лише шість учасників).*

Ведучий 1. У своїй найважливішій геометричній праці «Метрика» (I ст.) Герон Александрійський виклав правила та формули точного і наближеного обчислення площ різних геометричних фігур. У ній він подав формулу для обчислення площі трикутника за трьома його сторонами, яку нині називають формулою Герона. Історики вважають, що її набагато раніше знав інший видатний старогрецький учений. Назвіть його ім’я.

Відповідь. Формула вперше зустрічається в Архімеда (III ст. до н .е.).

Ведучий 2. Понад дві тисячі років тому цей давньогрецький математик винайшов спосіб знаходження простих чисел, які не перевищують даного натурального числа. Він писав на дощечці, вкритій воском, і послідовно проколював у воску дірочки над числами, кратними 2, 3, 4 і т. д. Унаслідок цього дощечка ставала схожою на решето, крізь яке ніби просіювали складені числа. Тому цей спосіб знаходження простих чисел і дістав назву решета … . Яка повна назва цього способу знаходження простих чисел?

Відповідь. Тривалий час решето Ератосфена було єдиним способом знаходження простих чисел. Кращі способи знаходження простих чисел були знайдені лише у XX ст.

Ведучий 1. У працях відомого індійського математика і астронома XII ст. подано методи розв’язування алгебраїчних задач, спосіб добування коренів, вказано на двозначність квадратного кореня з додатного числа. У трактаті «Обчислення коренів» він розглядав прості квадратні рівняння з одним та кількома невідомими. Його трактат з математики «Лілаваті» («Красуня») містив задачі про мавп, бджіл, лотос, написані автором у віршованій формі. Назвіть ім’я вченого.

Відповідь. Індійський математик Бхаскара II у своїх працях також розглянув деякі правила обчислювальної геометрії, подав міркування, досить близькі до сучасних про ділення на нуль.

Ведучий 1. Шановні вболівальники, розв’яжіть задачу Бхаскари.

На березі річки тополя росла в самоті.
Раптом вітру порив білий стовбур її надломив.
Бідолашна упала, і кут, безсумнівно, прямий
З течією ріки її стовбур створив.
Пам’ятати важливо, що в місці отому ріка
в чотири лиш фути завширшки була.
Над рікою верхів’я схилилося бідне її,

три лиш фути лишилося стовбура, що при землі.
Поспішай відповісти, розгадка доволі проста:
Яка у тополі була висота?

(Переклад О. Герасименко)

Відповідь. 8 м.

Свої розв'язки подавайте до столика журі. У вас на це є … хвилин.

(Підводяться підсумки першого туру. Вибуває гравець, який набрав найменшу кількість балів).

Ведучий 2. Шановні друзі, ми пройшли перший бар'єр і підійшли до другого туру – **«Математичний єралаш».**

Ведучий 1. Іноді у гумористичних творах наводяться математичні задачі за принципом: «На городі бузина, а в Києві дядько». За … хвилин ви маєте допомогти письменникам-гумористам знайти відповіді на поставлені запитання, проявивши, крім математичних знань, ще й почуття гумору. *(Кожен учасник отримує «задачу».)*

1. Стоїть триповерховий будинок, а в цьому будинку на кожному поверсі 8 вікон. На даху два дахові віконця і 2 комини. На кожному поверсі живе по двоє квартирантів. А тепер, панове, скажіть мені, в якому році померла бабуня двірника? (Я. Гашек. Пригоди бравого вояка Швейка)

2. Якщо шоферу пана міністра соціального забезпечення 40 років 3 місяці і 20 днів, а міст у канадському місті Квебек має довжину 577 метрів, то на скількох жовтках треба замісити локшину, щоб нагодувати чотирьох людей різного віку, взявши до уваги, що ширина полотна на залізницях Боснії 0,7 м?» (Б. Нушич. Автобіографія)

3. Пораючись на своєму городі, тітка Настя за 1 год. крадькома перекидала на город до дядька Андрія 100 камінців і 100 корінців. Пораючись на своєму городі, дядько Андрій за 2 год. крадькома перекидав на город до тітки Насті 200 камінців і 200 корінців. Що вони потім робили цілий день? (М. Возіянов. Гумористичний задачник)

Відповідь. Лаялись.

4. Якщо поділити пиріг на дві рівні частини, то одержимо половини. Якщо ці половини знову розріжемо навпіл, то матимемо чверті. Учитель доходить так до 1/32 і хоче продовжувати, та учні його зупиняють: «Досить! Далі будуть уже крихти!» Що станеться, якщо таким способом ділити шматок м'яса? (М. Вейцман. Дії над дробами)

Відповідь. Розділивши так м'ясо, одержимо фарш.

(Доки учасники «розв'язують» задачі, виконується художній номер)

Ведучий 1. Отож,давайте дізнаємось думку журі, у кого ж з учасників найкраще з почуттям гумору.

Ведучий 2. А ми повертаємось знову до історії математики. Третій тур недаремно названо **«Молоді – та ранні».**

Ведучий 1. Друзі, послухайте розповіді про знаних математиків, які рано проявили математичні здібності, та доповніть їх. За кожне правильне доповнення учасник гри отримує 1 бал.

Ж. Лагранж в 19 років став професором геометрії, в 23 роки його обрали членом Берлінської академії наук, а в 30 років – став її президентом (1766). Ім'я Ж. Лагранжа внесено в список 72 найвидатніших учених Франції, розміщений на першому поверсі Ейфелевої вежі. Наполеон Бонапарт називав ученого «Хеопсовою пірамідою математичних наук».

У. Гамільтон в 3 роки вмів читати, знав арифметику і географію, в 5 років читав латинською та грецькою мовами, а в 12 – знав 12 іноземних мов. У 22 роки Гамільтон став професором, а в 32 – президентом Ірландської АН.

У характеристиці випускника Прилуцької гімназії Г. Вороного відзначалось, що він «у математиці, до якої має особливу схильність і покликання, здобув визначні знання». Ще навчаючись у випускному класі гімназії, Вороний надрукував свою першу наукову працю «Розклад многочленів на множники, побудований на властивостях коренів квадратного рівняння» (1885) в «Журналі елементарної математики», який видавав у Києві відомий математик і педагог професор В. Єрмаков.

Ведучий 1. Підводимо підсумки третього туру. *(Учасник, який* *набрав найменшу кількість балів, вибуває з гри).*

Ведучий 2. Четвертий тур «Зоряного часу» називається **«Знайди помилку»**. (*Час визначається залежно від рівня знань учнів).*

Ведучий 2. Шановні друзі, увага! Знайдіть помилку в доведенні софізму «Прямий кут завжди дорівнює тупому».

Учитель. Скажи, Петров, який кут називається прямим?

Учень. Кут, більший від гострого, називається прямим.

Учитель. Отак? То може скажеш, який кут називається тупим?

Учень. Кут, більший від гострого, називається тупим.

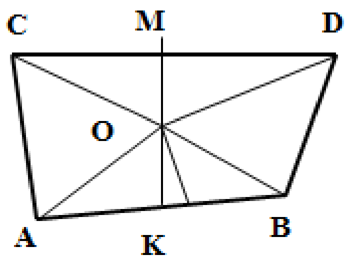
Учитель. А різниця яка-небудь між прямим і тупим є?

Учень. Немає. (*Учитель здивованно дивиться на учня).*

Учень. Прямий кут завжди дорівнює тупому. Я можу це довести.

Учитель. Цікаво. Ану, доводь.

Учень. Будь-ласка. На довільному відрізку *AB* в одному кінці побудуємо прямий кут *CBA*, а в другому – тупий кут *DBA (мал.)*.



Відкладемо рівні відрізки *CA* і *DB(мал.)*, сполучимо *C* з *D*. Очевидно, що відрізки *CD* і *AB* не паралельні, тому їх серединні перпендикуляри обов'язково перетнуться в якійсь точці *O*. Тоді *CO=OD, OA=OB*, а отже, трикутники *ACO* і *DBO* рівні (за трьома сторонами). Тому кути *CAO* і *DBO* рівні. Кути *OAK* і *OBK* також рівні, бо трикутник *AOB* рівнобедрений. Звідси й випливає, що прямий кут *CAK* дорівнює тупому куту *DBK*.

Учитель. Справді, цікаво. Ану повтори! *(Учень ще раз повторює «доведення»*). Хитро придумано. А ви (*до глядачів*) як вважаєте?

Ведучий 2. Російський учений М. Ломоносов сказав: «Математику вже тому вчити треба, що вона розум до ладу приводить». Сьогодні в нас у гостях Факір від математики, який зможе це довести.

Факір. Задумайте будь-які два додатні числа. Додайте їхню суму і добуток. Скажіть мені отриманий результат. Я, як і спортсмен, який для взяття висоти має три спроби, беруся вгадати задумані числа, можливо, навіть з першої спроби.

Спосіб вгадування. Додати до названого результату 1, одержане число розкласти на два множники різними способами і від кожного множника відняти по 1. Отримані пари чисел можуть бути задуманими.

Приклад. Названа сума 34. $34 + 1 = 35$, $35 = 5 \cdot 7$, або $35 = 35 \cdot 1$.

Отже, могли бути задумані такі числа: 4 і 6 або 34 і 0.

Можна запропонувати від отриманої суми задуманих чисел відняти їх добуток. Щоб вгадати задумані числа, треба до названого результату додати 1, отримане число розкласти на два множники різними способами і до кожного з них додати по 1. Серед отриманих пар будуть задумані числа.

(*Журі заслуховує відповіді до туру «Знайди помилку».)*

Ведучий 2. Доки журі підводить підсумки, ми проведемо конкурс вболівальників «Числівники в прислів'ях». Ви по черзі називаєте прислів'я та приказки з числами. Один, два, три – почали. (Наприклад, семеро одного не чекають; сім воріт, а без чобіт; книга – четверо очей тощо).

Ведучий 1. Високоповажне журі прийняло рішення. Сьогодні свій «Зоряний час» святкує переможець…

Звучить «Пісня про математику».

2.4. МАТЕМАТИЧНІ ФОКУСИ

Математичний інтерес фокусу полягає в розкриті його теоретичних основ, які часто прості, але хитро замасковані. Для пояснення «секрету» математичних фокусів зручно застосовувати алгебру, однак перевірити виконання фокусу можна і на прикладі.

Основна тема математичних фокусів – вгадування задуманих чисел чи результатів дій над ними. Після демонстрації фокусу на математичному ранку чи вечорі можна запропонувати глядачам спробувати розгадати, як саме фокусник знаходить правильну відповідь.

Ми пропонуємо «каркас» фокусів, а вчитель, студент-практикант чи самі учні можуть їх «одягнути в цікаву обгортку» (наприклад, інсценізація уривків з літературних творів).

Фокус 1. Відгадування задуманого числа

Задумайте число. Відніміть 1. Різницю помножте на 2 і додайте задумане число. Скажіть результат, і я вгадаю задумане число.

Спосіб вгадування. Додайте до результату 2. А суму поділіть на 3. Одержана частка – задумане число.

Доведення. Нехай задумане число x . Виконаємо вказані дії:

1) $x-1$; 2) $2(x-1)$; 3) $2(x-1)+x$.

Результат: $2x-2+x=3x-2$.

Додаючи 2, отримуємо $3x$, а поділивши на 3, одержуємо задумане число x .

Фокус 2

Задумайте будь-яке число (крім 0). Помножте його на 12.

Результат поділіть на 2, помножте на 5, поділіть на 3. Одержаний результат поділіть на задумане число. До одержаної частки додайте задумане число. По названому результату демонстратор фокусу вгадує задумане число.

Спосіб вгадування. «Фокусник» сам має задумати число (наприклад, 1) і виконувати над ним всі запропоновані дії аж до ділення на задумане спершу число. Тоді частки у «фокусника» і того, хто задумав число, будуть рівні. Після цього йому треба відняти від повідомленого результату власний результат. Різниця буде шуканим числом.

Для посилення ефекту фокусу можна запропонувати учневі, що задумав число, самому призначати числа, на які йому хочеться множити і ділити одержані результати, повідомити їх «фокуснику».

Є такі закономірності в математиці, які призводять до наперед наміченого результату виконання певних дій, які б не були вихідні числа. Так виникають дуже цікаві способи визначення результату обчислень над невідомим числом.

Фокус 3

Перший учень задумав довільне двоцифрове число і записав його на папері. Пропонуємо другому учневі приписати справа і зліва це саме число і поділити його на 3. Третій учень ділить одержану частку на 7, четвертий – ділить нову частку на 13, а п'ятий – новий результат ділить на 37 і передає «фокуснику». Не розгортаючи папірця, він передає першому учневі задумане ним число.

Пояснення. Якщо до довільного двозначного числа приписати справа і зліва це саме число, то одержимо нове шестизначне число, яке в 10101 раз більше початкового. Число 10101=$3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$, отже, одержане шестизначне число ділиться без остачі на 3, на 7, на 13, на 37. Якщо це число поділити послідовно на 3, 7, 13, 37, то воно зменшиться в 10101 раз, а в частці одержимо задумане число.

Фокус 4. Вгадування з трьох спроб.

Задумайте будь-які два додатні числа. Додайте їхню суму і добуток. Скажіть мені отриманий результат. Я, як і спортсмен, який для взяття висоти має три спроби, берусь вгадати задумані числа, можливо навіть з першої спроби.

Спосіб вгадування. Додати до названого результату 1, одержане число розкласти на два множники різними способами і від кожного множника відняти по одиниці. Отримані пари чисел можуть бути задуманими.

Приклад. Названа сума 34. $34 + 1 = 35$, $35 = 5 \cdot 7$, або $35 = 35 \cdot 1$.

Отже, могли бути задумані такі числа: 4 і 6 або 34 і 0.

Можна запропонувати від отриманої суми задуманих чисел відняти їх добуток. Щоб вгадати задумані числа, треба до названого результату додати 1, отримане число розкласти на два множники різними способами і до кожного множника додати по 1. Ці пари чисел можуть бути задуманими.

Фокус 5. Як вгадати слово з книги?

Демонстратор має запам'ятати з якоїсь книги перше слово на сторінках 3, 7, 13, 37 або 13, 21 (3×7) і 37. Один з учнів записує будь-яке двозначне число, потім приписує справа і зліва це саме число і ділить його на 3, 7, 13 і на початкове двозначне число. Відкривши книгу на сторінці, яка позначена одержаною часткою (в даному випадку на 37 сторінці), знаходить перше слово на ній. Демонстратор, наперед знаючи це слово, «вгадує» його. Інші учні мають ділити одержане шестизначне число на інші дільники: на 3, 7, 37 і на задумане число (13); на 3, 13, 37 і на задумане число (7); на 7, 13, 37 і на задумане число (3) і т. п.

Фокус 6. Математична забава М. Лермонтова

«Фокусник» пропонує виконати вказані у розповіді дії і перевірити отриманий результат.

«На початку 1841 року на офіцерській вечірці в присутності російського поета Михайла Лермонтова мова зайшла про кардинала, який міг розв'язувати усно складні математичні задачі.

– Я теж можу продемонструвати вам, якщо бажаєте, дуже цікавий приклад математичних обчислень, – сказав поет.

– Отже, задумайте будь-яке двоцифрове число, додайте до нього нього 25, потім 125, від суми відніміть 36 і задумане число. Одержаний результат помножте на 5, а добуток поділіть на 2. Ваш остаточний результат – 285.

Командир аж підскочив від здивування: – Та ви, пане, ворожбит.

– Ворожбит не ворожбит, а математику вивчав, – відповів поет».

Пояснення

$(A + 25 + 125 - 36 - A) \cdot 5 : 2 = (150 - 36) \cdot 5 : 2 = 114 \cdot 5 : 2 = 285$

При виконанні віднімання задумане число А виключається. Людина, яка задумала число, виконує інші дії лише над тими числами, які їй пропонуються. Тому демонстратору фокусу легко знайти остаточний результат.

Замість чисел 25, 125, 36, 5 і 2 можна взяти й інші числа, але тоді і відповідь буде іншою. Наприклад: задумане число помножити на 5, потім помножити на 2, додати 19, відняти 11, в отриманому числі відкинути десятки, остачу поділити на 2, і додати 6. Маємо 10.

Фокус 7. Як вгадати вік?

Число років гравця помножити на 10, потім будь-яке однозначне число помножити на 9, від першого добутку відняти другий добуток, а різницю повідомити «фокуснику».

Спосіб вгадування. Цифру одиниць додати до цифри десятків. Отримаємо число років гравця. *(Г*равцю має бути не менше 8 років).

Фокус 8. Як вгадати день, місяць і рік народження?

Демонстратор пропонує учням виконати такі дії: «Помножте номер місяця, в якому ви народились, на 100, потім додайте день народження, результат помножте на 2, до одержаного числа додайте 2, результат помножте на 5, до одержаного числа додайте 1, до результату припишіть 0, до одержаного числа додайте ще 1 і додайте число ваших років. Тепер повідомте одержане число».

Спосіб вгадування. «Фокуснику» залишилось від названого числа відняти 111, а потім остачу розбити на три грані справа наліво по дві цифри. Середні дві цифри позначають день народження, перші дві або одна – номер місяця, а останні дві цифри – число років; знаючи число років, можна визначити рік народження.

Фокус 9. Як вгадати задуманий день тижня?

Пронумеруємо всі дні тижня: понеділок – перший, вівторок – другий і т. д. Нехай хтось задумає будь-який день тижня. Демонстратор пропонує виконати такі дії: помножити номер задуманого дня на 2, до добутку додати 5, одержану суму помножити на 5, до одержаного числа приписати в кінці 0, результат повідомити йому.

Спосіб вгадування. Від повідомленого числа відняти 250, і число сотень буде номером задуманого дня.

Фокус 10. Подільність на 11

Демонстратор пропонує написати на класній дошці чи на аркуші паперу будь-яке багатоцифрове число. До цього числа він може приписати зліва чи справа одну цифру так, щоб одержане число ділилось на 11. Якщо, наприклад, ваш товариш написав число 43572, то вам треба приписати зліва чи справа до цього числа цифру 1. Одержане число поділиться на 11.

Спосіб вгадування. Щоб розібратись, яку цифру треба приписати зліва чи справа до числа, щоб одержане після цього число ділилось на 11, скористайтесь ознакою подільності на 11: на 11 діляться ті і тільки ті числа, в яких сума цифр, що стоять на непарних місцях, або дорівнює сумі цифр, що стоять на парних місцях, або більша чи менша від цієї суми на число, що ділиться на 11.

Фокус 11. Миттєве додавання

Запропонуйте одному з ваших товаришів мовчки записати на дошці різницю двох чисел. (Не треба її обчислювати). Той, хто записав першу різницю, або інший має записати нову різницю так, щоб від'ємником у другій різниці було зменшуване першої різниці. Виконувати обчислення також не треба. Потім записується третя різниця, так щоб від'ємником у третій різниці було зменшуване другої різниці. Продовжуючи, можна написати на дошці 8-10 таких різниць. Поки все це робиться, демонстратору фокусу на дошку дивитись не слід. Коли всі різниці будуть записані на дошці, йому можна повернутись до неї лицем, подивитися на записи і одразу сказати, чому дорівнює сума всіх записаних, але не обчислених різниць.

Спосіб вгадування. Для цього треба буде від зменшуваного останньої різниці відняти від'ємник першої різниці.

Нехай, наприклад, на дошці будуть записані такі різниці: 340-80; 450-340; 620-450; 680-620; 700-680; 825-700; 900-825. Сума всіх цих різниць дорівнюватиме 900-80 = 820. Попросіть товаришів перевірити вас, обчислюючи кожну різницю, а потім їхню суму. Фокус виглядатиме ще цікавіше, якщо записувати різниці не тільки цілих чисел, але й звичайних і десяткових дробів або додатних і від'ємних чисел.

Фокус 12. Улюблена цифра

Запитайте в кількох присутніх учнів, яка їхня улюблена цифра. Якщо хтось назве цифру 4, запропонуйте йому 4 помножити на 9, а отриманий результат помножити на число 12 345 679. У результаті він отримає число 444 444 444, тобто, число, записане за допомогою лише улюбленої цифри. Якщо інший назве цифру 8, запропонуйте йому 8 помножити на 9, а отриманий результат 72 помножити на число 12 345 679. У результаті він отримає число, записане за допомогою улюбленої цифри. Якщо хтось назве цифру 0, то скажіть що 0 дуже важлива цифра, але ви її недолюблюєте, і попросіть назвати іншу цифру.

Фокус 13. Піднесення двоцифрових чисел до кубу

«Фокусник» пропонує учням піднести до кубу задумане двоцифрове число. Потім за кінцевими результатами швидко відгадує задумані учнями двоцифрові числа.

Спосіб вгадування. Слід пам'ятати таблицю кубів одноцифрових чисел: $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$, $9^3 = 729$.

Нехай, одна з відповідей учнів x^3=12167.

Щоб знайти число десятків шуканого двоцифрового числа, зверніть увагу на те, скільки тисяч у даному числі – 12 тисяч. У таблиці є число 8, а потім 27. Треба взяти менше число – 8, йому відповідає в лівій частині рівності основа 2. Отже, число десятків – 2.

Одиниці двоцифрового числа знаходимо за числом одиниць даного числа 12167. Числу одиниць 7 відповідає в лівій частині таблиці основа степеня 3. Тому число одиниць дорівнює 3. Отже, було задумано число 23; 23^3= 12167.

Фокус 14. Скільки очок випало?

Відвернувшись, запропонуйте кому-небудь підкинути два кубики, на кожній з шести граней яких написано цифри від 1 до 6. Потім попросіть до подвоєнного числа очок на верхній грані одного з кубиків додати 5. Отриману суму запропонуйте помножити на 5 і до добутку додати число очок на верхній грані другого кубика.

Почувши результат, ви можете одразу назвати число очок на верхніх гранях кожного кубика.

Спосіб вгадування. Треба від повідомленого результату відняти число 25, тоді перша цифра отриманої різниці буде числом очок, які випали на першому кубику, а друга – числом очок, які випали на другому кубику.

2.5. МАТЕМАТИЧНИЙ ТЕАТР

Одним із видів позакласної роботи з учнями може стати підготовка математичних вистав.

Вистава, на відміну від рольової гри, передбачає більш чіткий сценарій, який регламентує діяльність учнів і збільшує їхню самостійність при підготовці сценарію. У виставі можна використовувати не лише теоретичний матеріал, задачі з теми, але й елементи історії математики, художню літературу, поезію, музику тощо. Однак важливо, щоб за зовнішньо привабливою формою вистави не втратити саму математику. Математична вистава має не лише зацікавити учнів предметом, формувати їх пізнавальні мотиви та інтереси, виробляти позитивні якості характеру особистості (працьовитість, наполегливість у досягненні мети тощо), але й розвивати образне мислення, творчий потенціал та здібності учнів. У сучасних умовах можна знімати короткі відеоролики за підготовленими сценаріями і демонструвати у соціальних мережах з метою підвищення інтересу до математики як науки.

Отож, на кожному кроці ми зустрічаємося з числами: і номер будинку, і номер маршруту автобуса, і число на листку календаря, і число на циферблаті годинника, і на монеті… Але ж будь-яке число записується за допомогою цифр. Розповісти про історію виникнення цифр, про деякі властивості чисел можуть учасники «Математичного театру».

Важлива суперечка нуля й одиниці

Нуль намагається заспокоїти цифри, які сперечаються між собою.

Нуль. Заспокойтеся! Що ж ви сперечаєтесь?

Одиниця (з притиском). А тобі що треба! Не влазь у суперечку значущих цифр!

Нуль. Заспокойся. Я потрібен не менше, ніж ти. Якщо хочеш знати, то всі ви назву отримали завдяки мені.

Одиниця. А це як?

Нуль. А так. Придумали мене індійці і назвали «сунна», що означає – пусте, порожнє місце Араби перейняли в індійців запис, перевели назву на свою мову – ас-сифр. Поступово перша частина відпала. Так що цифрою називали спершу нуль. Це вже потім всіх нас стали називати цифрами.

Одиниця. Може й так, але все одно ти нічого не значиш. Так тебе і назвали індійці – пусте, а араби – ніщо.

Нуль (образився). Чому ж це нічого не значу? Дуже навіть значу. Ось я стану за тобою, і зразу замість одиниці десять отримаємо.

Одиниця. Подумаєш – десять. Якщо за мною стане Дев’ятка, то не десять, а дев’ятнадцять отримаємо!

Нуль. Не хвались, адже якщо я стану перед тобою і покличу свою знайому Кому… Стане вона між нами, і що від твоєї величі залишиться?

Одиниця. Ну, якщо і Кома, тоді... А тебе числа вперед ніколи не пускають. Тому ти в числах рідко зустрічаєшся.

Нуль. Вигадуєш ти все.

Одиниця. А ось і не вигадую. Давай порахуємо, яка цифра зустрічається частіше за інших. Я, наприклад, входжу до числа 1, 10, 11, 12, …

Нуль (перебиває). А я в числа 10, 20, 30, …

Дев'ять. Так ви нічого не доведете. Одиниця, хоч і любить сперечатись…

П'ять. Почекайте. Але ж в житті не всі числа використовуються однаково часто. Люди люблять, наприклад, округлювати свій вік. Найчастіше при цьому на останньому місці виявляється нуль, рідше – п'ять. І ціни округлюють так само, і швидкості, і відстані. А ще ви забули, що крім цілих чисел є ще дробові. А в десяткових дробах нулі частенько з'являються. Так що, яка цифра на практиці використовується частіше за інших, ще треба подивитися…

Нуль (весело). Тож-бо і воно. Тут і сперечатися не треба. Тим більше, що ми де в чому схожі .

Одиниця. В чому ж це?

Нуль. А нас до якого натурального степеня не піднось – не змінюємось. А якщо число піднесуть до нульового степеня, одиниця вийде.

Одиниця. При піднесенні до натурального степеня й інші цифри схильні до постійності. У П'ятірки та Шістки будь-який степінь закінчується цифрами 5 і 6.

П'ять (з посмішкою). Я і не те можу. Будь-яка цифра в п'ятому степені закінчується сама собою.

Дев'ять. До постійності і я маю деяке відношення. Якщо число ділиться на 9, то і сума цифр ділиться на 9.

Одиниця. Точно. Число 36 ділиться на 9. Та ще й точний квадрат. Цікаве число. Його ще піфагорійці любили.

Нуль. А що в ньому особливого?

Одиниця. Наприклад, це і сума перших восьми натуральних чисел 1 + 2 + 3 + 4+ 5 + 6 + 7 + 8. Це і сума перших шести непарних натуральних чисел 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11. Це і (1 + 2 + 3)2. *(Звертається до Нуля)* Підпусти тебе до такого числа... І воно стане 306 чи 360. Вже не квадрат, вже не особливе.

Двійка. Що ти причепилася до Нуля? А сама ти чим знаменита? Евклід казав: «Число – це безліч одиниць». Але ж він не вважав і нуль, і одиницю числами, бо нуль – ніщо, а одиниця – «причина числа». Вперше одиницю визнав числом французький вчений Н. Орем аж у XIV ст.

Одиниця. Вперше визнав мене числом французький вчений Н. Орем у XIV ст. Як давно це було!

Учень 1. Сучасний десятковий запис натуральних чисел вперше з'явився в Індії в VI ст. Через арабів, які завоювали в VII-VIII ст. обширні території Середземномор'я й Азії, індійська нумерація отримала тут розповсюдження. Звідси і назва – арабські цифри.

Учень 2. Французький монах, математик Герберт в X ст. одним з перших серед європейців познайомився з арабськими цифрами, зрозумів зручність їх використання в порівнянні з римськими і почав всіляко пропагувати їх впровадження в європейську науку. Ставши главою римо-католицької церкви (папа римський Сильвестр II), він здійснив реформу викладання математики і запровадив десяткову систему числення. На початку XVII ст. ця нумерація з'являється і в Росії, але церква вважала її безбожною, тому й забороняла. Закріпилась десяткова система після появи в Росії в 1703 році підручника «Арифметика» Леонтія Магніцького, в якому для обчислень використовувалась лише ця система числення.

Зявляються знаки + , -, =, :, .

Знак +. Сучасні знаки «+» і «-» вперше зявились у книзі «Швидка і красива лічба» німецького математика Яна Відмана в 1489 р.

Знак рівності. Англіський лікар і математик Р. Рекорд в 1557 році ввів знак =.

Знак множення. А знаки множення і ділення зявились пізніше. В кінці XVII ст. знак множення (крапку) і знак ділення :(двокрапку) ввів німецький вчений Г. Лейбніц.

Пятірка. За допомогою нас, цифр, і цих знаків можна виконувати різні дії над числами.

Учень 1. Правильно. І виконуючи над числами арифметичні дії, ми дістанемо в результаті…

Шістка. Ясна річ. Число.

Учень 2. Отже, число можна отримати не тільки в результаті підрахунку чи вимірювання, але й в результаті дій над числами. Так чи ні?

Трійка і Четвірка. Начебто, так.

Учень 1. А якщо маємо *(розставляє цифри і знаки)* 2 – 2 = . Хто з вас є результатом цієї дії?

(Одиниця намагається відштовхнути нуль, та він займає місце після знаку =).

Нуль. Відступись. Тут повинен стати тільки я.

Трійка. От хвалько!..

Учень 2. Не заважай. Всі згодні, нуль має всі підстави позначити різницю двох рівних чисел?

Одиниця. Яких, яких?

Четвірка. Рівних. От, наприклад, 4–4. Що залишиться?

Одиниця. Нічого.

Вісімка. Нуль в результаті буде.

Одиниця. Тобто він *(показує на нуль).* Ясно.

Учень 1. Отже, нуль – число чи ні?

Двійка. Виходить, що ніби й число.

Трійка. Різниця двох рівних чисел теж число, і це число нуль!..

Учень 1. Отже, слово надається нулю.

Нуль. Ми дуже вдячні Миколі (*Учень 1*), що він переконав вас у тому, що нуль теж число. А над числами можна виконувати дії.

Двійка. А навіщо час витрачати? Це ж звичайна справа!

Учень 1. Обережно. Зараз ми побачимо, чи все так звичайно. *(Шикує цифри 2+0 =)* Хто має позначити результат?

Двійка. Звичайно, я! *(Стає після знака рівності)*

Учень 2. (Міняє + на –) А якщо так?

Двійка. Все одно я на місці залишусь.

Учень 1. Тепер спробуємо так. (Шикує цифри і знаки 0 – 7 =)

Хто повинен стати тут?

Сімка. Та хіба можна віднімати від нуля?

Учень 2. Можна.

Учень 1. А якщо ми зробимо так… (Шикує цифри $0 \cdot 8$). Назвіть результат!

Нуль. В результаті буду я (Стає після знака =. Учні змінють цифри 9; 6; 3 – нуль залишається на місці).

Четвірка. Ясно! Множ на нуль будь-яке число, і отримаєш нуль!

Учень 2. А тепер увага: *(Шикує цифри 0 : 6 =).*

Нуль (гордо). Тут лише моє місце! (Учні змінють цифри 5; 4; 3 – нуль залишається на місці).

Знак множення (задумливо). А давайте перевіримо дію з моєю допомогою!

Нуль. Я знаю, як. Ділене дорівнюю частці, помноженій на дільник.

Учень 1. Молодець. *(Розставляє цифри $0 = 0 \cdot 3$).* Так?

Цифри. Правильно! Все правильно!

Одиниця. Надокучило вже. Досить з цими нулями гратися!

Вісімка. Тебе ніхто, крім себе, не цікавить. Ми це знаємо.

Нуль. Звісно! Чи то два, чи то один – ані в браму ані в тин.

Трійка. От задавака!

Нуль. А ти й сама від них не втекла далеко.

Учень 2. Тепер спробуємо поділити ще так… *(0 : 0 =).* Хто в результаті стане? Сміливіше….

Шістка. А давайте стану я.

Нуль. Перевіримо. Правило ж ми знаємо. *(Перешиковують цифри $0 = 0 \cdot 6$)*

Трійка. То що ж виходить, що кожна з нас може тепер позначити частку?

П'ятірка. Ти правильно і на це й раз збагнула! *(Шикування 0:0 =)*

Учень 1. Підходьте по черзі. (Шістка хоче стати вдруге, але інші цифри її не пускають).

Двійка. Що ж виходить, діли нуль на нуль і пиши скільки хочеш?

Учень 1. Крім нуля. Отже, в у випадку ділення нуля на нуль кажуть, що частка буде невизначеною. При діленні 0 : 0 частку можна виразити яким завгодно числом.

Трійка. Зрозуміло.

Двійка. І де ти, Миколо, дізнався про все?

Учень 1. Я ж на уроках уважно слухаю вчителя і заняття математичного гуртка відвідую. І книжки про цікаву математику читаю.

Двійка. От мороки нам ці нулі завдали.

Дев'ятка. А що станеться, якщо мене поділити на нуль? *(Учні шикують цифри і знаки 9 : 0 =).*

Учень 1. Хто позначить результат?

Цифри. Я не можу. І я! І я!

Дев'ятка. Тепер я маю дорівнювати нулю, поділеному на частку. На яке ж число треба помножити нуль, щоб дістати 9?

Учень 2. Немає в світі такого числа!

Сімка. Що ж виходить?

Учень 1. А виходить, що на нуль ділити не можна.

Трійка. І мене не можна?

Учень 2. Ні тебе, ні будь-яке інше число.

Одиниця. Теж мені число. На нього і поділити не можна.

Шістка. То й що з того? Все одно НУЛЬ – число!

Учень 1. Так, число, з яким треба поводитись делікатно.

Двійка. Подумєш, який ніжний.

Вісімка (до Двійки). Помовчи, давай краще Миколу послухаємо.

Учень 1. Отже, всім ясно: нуль має право називатись числом.

Цифри. Ясно!

Знак ділення. Та ще й особливим числом!

Цифри (співають пісню « От так нуль)

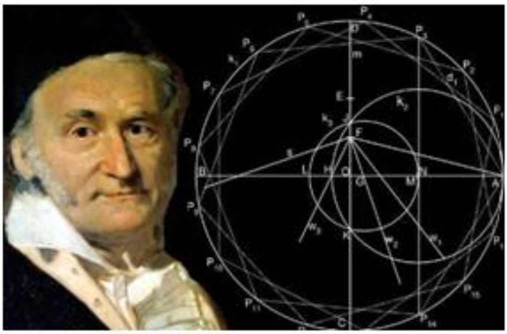
Є число, що зветься нуль, знають його всюди.
Відніми його, додай, що було, те й буде!
Як помножити його, чи то поділити,
В результаті пишуть нуль. І дорослі, й діти!

Та ділить на нього – зась. І під час уроку
Хто про це забуде з вас, Матиме мороку!
Поділивши нуль на нуль, В частку, що й казати,
Можна будь-яке число, крім нуля, писати!.
От які з нулем діла! Знайте добрі люди!
Вже про це ніхто із вас, мабуть, не забуде.

2.6. ЦІКАВІ ФАКТИ ПРО МАТЕМАТИКУ І МАТЕМАТИКІВ

Арифметика – цариця математики

Важливою складовою математики є арифметика (давньогрецьке ἀριθμητική – числове мистецтво, від ἀριθμός – число) – наука про числа і дії над ними. Німецький математик К. Гаусс назвав її царицею математики. У стародавніх вавилонян і єгиптян арифметика мала, в основному, практичний характер, і лише в стародавніх греків вона стала наукою. Перший відомий нам посібник з арифметики було складено близько двох тисяч років тому.



К. Гаусс

Удари з математичною точністю

Через малий зріст учасника кулачних боїв на 58-х Олімпійських іграх (548 р. до н. е.) Піфагора судді не хотіли допустити до змагань.

– Можливо, – заперечив Піфагор, – мій вигляд не викликає у вас довіри, але я буду наносити удари з такою математичною точністю, що супротивнику буде гаряче.

Піфагор дотримав свого слова – став чемпіоном з цього виду спорту.

Розбагатіти не важко

Основоположник грецької філософії Фалес належав до «семи мудреців світу», які заклали основи грецької науки і культури. Легенди розповідають: ученому часто докоряли, що заняття філософією не приносить ніякого прибутку.

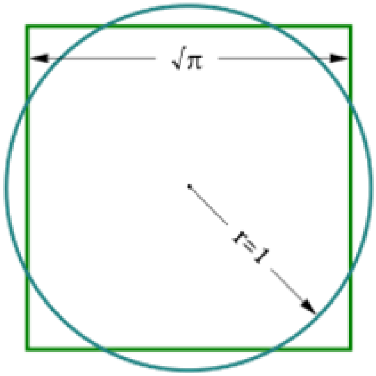
Передбачивши на основі астрономічних даних гарний урожай олив, він ще взимку роздав невелику суму грошей в завдаток власникам всіх олієнь у Мілеті і на Хіосі. Під час збору олив виник великий попит на законтрактовані Фалесом олійні. Віддавши їх на відкуп іншим людям за значно більшу ціну, він заробив багато грошей. Цим учений довів, що й філософам розбагатіти не важко, якби вони цього хотіли.

Стародавні геометри – перші зодчі

До наших днів зберігся барельєф із зображенням Хесіра, зодчого першої піраміди в Стародавньому Єгипті – шестиступінчаста піраміда (розмірами 125 м на 115 м і висотою приблизно 62 м) фараона Джосера (близько 2650 р. до н. е.). В руках він тримає знаряддя праці: прилад для письма і дві палиці, еталони мір, довжини яких відносяться як $1:\sqrt{5}$. У комплексі пірамід у Гізі їх розміри визначаються числами 1; 2; $\sqrt{5}$. Ці числа, з яких легко скласти й число золотого поділу ($\sqrt{5}$-1):2, виражають довжини двох сторін і діагоналі квадрата з відношенням сторін 1:2. Тому за допомогою мірних палиць Хесірі було легко будувати прямий кут і вимірювати елементи багатьох архітектурних деталей.

Чи всесильні циркуль і лінійка?

Старогрецький філософ Платон (429-348 рр. до н.е.) вважав, що математику повинен знати кожний філософ. В його Академії розробили методику розв’язування задач на побудову, яка збереглася і донині. Її учням дозволялось виконувати геометричні побудови лише за допомогою циркуля і лінійки. Саме в Академії Платона було знайдено три «визначні задачі давнини», які не можна розв’язати за допомогою циркуля і лінійки: про подвоєння куба; про трисекцію кута; про квадратуру круга.



Першим, хто висловив думку, що за допомогою циркуля і лінійки задачу про подвоєння куба розв’язати неможливо, був Р. Декарт (1637). Однак строге доведення нерозв’язності цієї задачі, як і задачі про трисекцію кута (поділ кута на три рівні частини), знайшов французький математик П. Ванцель (1837).

Німецького математика К. Ліндемана називають «переможцем задачі про квадратуру круга». У 1882 році він зумів довести трансцендентність числа π, і, як наслідок, знайти строге доведення, що задачу про квадратуру круга за допомогою циркуля і лінійки розв’язати неможливо.

Інквізитор проти математика

У 1486 році іспанський математик П. Вальмес зустрівся в своїх друзів з главою іспанської інквізиції Торквемадою. Інквізитор вважав, що спосіб розв’язування рівнянь четвертого степеня самим богом заховано від людини і цю таємницю ніколи не вдасться розкрити. Однак Вальмес повідомив, що знайшов легкий спосіб розв’язування цих рівнянь. За наказом Торквемади його заарештували, бо він зробив те, що «з волі Божої неприпустимо людському розуму». Через тиждень після жахливих тортур Вальмес був спалений на вогнищі, так і не повідомивши про суть свого відкриття.

Пророк-невдаха

Німецький математик М. Штіфель, який був пастором, «підрахував», що кінець світу настане 13 жовтня 1533 року і попередив про це своїх парафіян. Чекаючи «кінця світу», вони занедбали господарство. А коли пророцтво не збулось, пастора заарештували і посадили до в'язниці. Розгнівані люди зажадали, щоб Штіфель відшкодував їм збитки. Не маючи коштів, невдаха був змушений втекти з села. М. Штіфель почав серйозно займатись наукою і згодом став відомим німецьким математиком.

Виклик математикам світу

Якось посол Нідерландів у розмові з королем Генріхом IV про видатних учених зауважив, що Франція не має математиків. Адже фламандець А. ван Ромен, посилаючи європейським математикам свою задачу-виклик, не назвав жодного француза. Король заперечив і наказав викликати Вієта. Коли вчений з'явився, посол показав йому задачу Ромена. Знання формули синусів і косинусів кратних дуг допомогли Вієту одразу знайти один корінь даного рівняння сорок п'ятого степеня. Він показав, що рівняння, розв'язання якого зводиться до поділу кута на 45 рівних частин, має 23 додатних корені. Наступного дня Вієт знайшов загальну формулу для обчислення ще 22 від'ємних коренів даного рівняння. У 1594 році надруковане розв'язання рівняння принесло Вієту світову славу.

Допоміг перемогти

У 1589 році Ф. Вієту вдалось розкрити секрет складного шифру для листування іспанського короля Філіппа II з ворожими королю Франції угрупованнями під час франко-іспанської війни. Шифр складався приблизно з 500 знаків. Учений протягом двох тижнів, працюючи вдень і вночі, не тільки знайшов ключ до шифру, а навіть і спосіб стеження за всіма його змінами. Після цього Франція несподівано стала перемагати у війні. З таємних джерел іспанцям дізнались, що їхній шифр розгадав Вієт. Іспанська інквізиція оголосила математика боговідступником і чаклуном та заочно засудила до страти, але Франція не видала Вієта.

Число Лудольфа

Рекорд наполегливості й неймовірної точності побив нідерландський математик Лудольф ван Цейлен. Упродовж десяти років учений, подвоюючи методом Архімеда число сторін вписаних і описаних многокутників, дійшов многокутника, число сторін якого перевищувало 32 більйони. За допомогою нього він обчислив 20 точних десяткових знаків числа π.

Трактат «Про коло» (1596) з викладом цих результатів учений закінчив словами: «У кого є бажання – нехай іде далі». Пізніше Цейлен, побудувавши многокутник зі ще більшою кількістю сторін, знайшов 35 точних знаків числа π. Математик заповів вибити їх на своєму надгробку. Сучасники довго називали число π числом Лудольфа.

Якщо розрахувати довжину екватора сфери, яка вміщує відому нам частину Всесвіту, використовуючи число Лудольфа, то похибка не перевищить однієї мільйонної частини міліметра!

Нагородити Декарта?!

На початку XVII ст. глядачі паризьких театрів у боротьбі за кращі місця часто застосовували кулаки, а іноді суперечки закінчувались навіть дуеллю. Р. Декарт запропонував використати координатний метод для нумерації крісел в глядацькій залі по рядах і місцях. Паризькі аристократи-театрали звернулись до короля з проханням нагородити вченого за видатний винахід орденом. Однак король відповів: «Винахід Декарта гідний нагороди, але дати її філософу?! Ні, це вже занадто!»

Хто перший

Більше трьохсот років творцем першої обчислювальної машини вважали Б. Паскаля. Однак у 1957 році директор Кеплерівського наукового центру (Німеччина) Ф. Гаммер знайшов документальні підтвердження, що проект першої лічильної машини розробив німецький математик Шиккард щонайменше на два десятиліття раніше «Паскалевого колеса» (1642), а саму машину було виготовлено в середині 1623 року.

Важливо спростити обчислення

«Я завжди намагався, наскільки дозволяли мої сили і здібності, звільнити людей від труднощів і нудьги обчислень, які звичайно відлякують багатьох від вивчення математики», – писав Дж. Непер. У 1617 році для полегшення арифметичних обчислень він винайшов математичний набір (палички Непера). Він складався з брусків, на яких були нанесені цифри від 0 до 9 і кратні їм числа. Для множення чисел бруски розташовували поряд так, щоб цифри на торцях утворювали це число. Відповідь було видно на бічних сторонах брусків. Набір Непера також дозволяв виконувати ділення і добування квадратного кореня.

Спеціальна медаль від Лейбніца

Один із небагатьох випадків в історії науки, коли на честь математичного відкриття було викарбовано спеціальну медаль. На ній було зображено початковий ряд натуральних чисел в двійковій системі. Це зробив у 1697 році німецький математик Г. Лейбніц, який увів правила виконання арифметичних дій в двійковій системі числення (двійкова арифметика).

Не дільники потрібні, а патрони

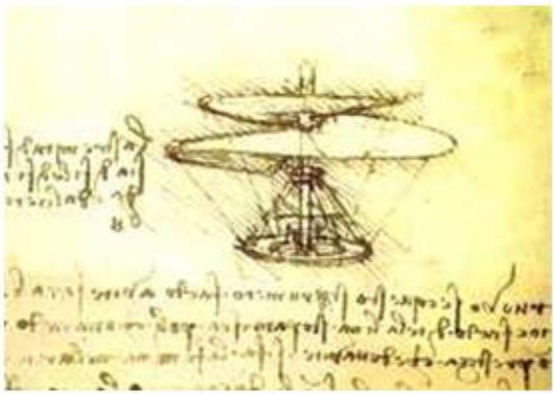
Австрійський математик А. Фелькель склав таблицю всіх дільників чисел від 1 до 2000000, але опублікував лише для чисел від 1 до 408000. В 1787 році через відсутність попиту на таке видання друкування було припинене, а надруковані книжки, за винятком окремих примірників, пішли на виготовлення патронів для військових дій проти турків.

Важкий екзамен життя

Французький математик Е. Безу (1730-1783) дізнався, що на його екзамен не прибули двоє учнів, бо захворіли на віспу. Професор дуже боявся заразитися цією інфекційною хворобою, проте розумів, що учні, не склавши іспит, втратять рік навчання. Забувши про свої страхи, він поїхав до хворих і проекзаменував їх. Безу був щасливий, що його учні виявились гідними жертви, на яку він пішов.

Прототип гелікоптера

Як свідчать архіви Російської АН, видатний учений М. Ломоносов, незалежно від ідеї Леонардо да Вінчі, розробив літальний пристрій вертикального зльоту та виготовив діючу модель гелікоптера (1754). Це був перший прототип гелікоптера, при двох рівних гвинтах на паралельних осях, рівновіддалених від центру тяжіння і осі приладу. Однак він не мав на увазі пілотованих польотів – тільки підйом метеоприладів.



Дотепність не завадить

Ще в шкільні роки К. Гаусс вражав свого вчителя розумом і дотепністю. Одного разу він звернувся до свого кращого учня: «Я поставлю тобі два питання. Якщо на перше даси правильну відповідь, то на друге можеш не відповідати. Отже, скажи мені, юний друже, скільки голок на нашій різдвяній ялинці?»

Учень одразу відповів: «67534».

- Але як ти так швидко полічив голки? – здивувався вчитель.

- А це вже друге запитання, – посміхнувся Гаусс.

Переможець дуелей

Після закінчення Військово-інженерної академії угорський математик Я. Больяй служив офіцером у фортеці Темешвер. Успадковані від матері нестриманість і дратівливість спричиняли часті суперечки з товаришами, які закінчувалися поєдинками. Відомо, що одного дня його викликали на дуель одразу дванадцять офіцерів. Больяй прийняв усі поєдинки за умови, що після кожного з них йому дадуть перепочинок – пограти на скрипці. З усіх дуелей він вийшов переможцем.

Таблиці без помилок

Таблиці семизначних логарифмів словацько-австрійського математика Г. Веги (1754-1802) протягом більше 150-ти років перевидавалися в багатьох країнах. У передмові до першодруку праці «Логарифмічні, тригонометричні та інші таблиці та формули для вживання математиків» автор повідомив, що ставив собі за мету створити повний, дешевий і вільний від помилок збірник таблиць і формул. Виправивши в наступних виданнях своїх таблиць сотні помилок, що містилися в більш ранніх працях інших авторів, Г. Вега оголосив, що заплатить дукат (близько трьох рублів золотом) за кожну знайдену в його праці помилку. За життя вченого в таблиці було виявлено стільки помилок, що було виплачено 2 дукати, а згодом – ще три. Вега, щоб знизити ціну на свою книгу, пізніше навіть відмовився від авторського гонорару. На основі його таблиць у 1857 році німецький астроном К. Бремікер підготував першу безпомилкову збірку логарифмічних таблиць.

Найздібніші – «геометри»

М. Остроградський, читаючи лекції з вищої математики, іноді не робив записів на дошці навіть при виведенні складних формул. Такі лекції подобались студентам з глибокою математичною підготовкою. Їх вчений називав «геометрами» і давав імена видатних філософів і математиків. «Геометри» могли вільно користуватися бібліотекою Остроградського, отримувати необхідні консультації. Саме їм учений доручав переписувати свої рукописи для подання до Петербурзької АН, бо лише вони могли прочитати його нерозбірливий почерк.

По праву перша

Ада Лавлейс, донька знаменитого англійського поета Байрона, мала неабиякі математичні здібності. Зацікавившись у 1833 році працями англійського математика Ч. Беббеджа по створенню аналітичної машини, вона стала його надійним помічником. Її вважають основоположником теорії програмування. В липні 1843 року Лавлейс склала першу в історії програму для розв’язування рівнянь Бернуллі на обчислювальній машині. Її означення «циклу» наведене в сучасних підручниках з програмування. На її честь названа мова програмування – Ада, розроблена Ж. Ішбіа (Франція, 1977-1983).

Праця, яка залишила слід в історії математики

Значний внесок в теорію простих чисел зробив професор Празького університету, голова Королівського Чеського Товариства Наук Я. П. Кулик (1793-1863), який народився у Львові, вивчав філософію і математику у Львівському університеті.

Я. Кулик

В 1825 році він видав працю «Таблиця простих множників всіх великих чисел першого мільйона». Однак з численних наукових праць ученого з математики та фізики значний слід в історії науки залишив рукопис «Великий канон дільників всіх чисел, що не діляться на 2, 3 і 5, і укладених між ними простих чисел до 100 300 201», над яким

Кулик працював останні 20 років життя. 4212 сторінок (!) таблиць з 1868 року зберігаються у Віденській АН.

Переселення душ

Німецький поет XIX століття Г. Гейне в одному зі своїх творів, висміюючи теорію переселення душ, що лежала в основі релігії, створеної Піфагором, писав: «Хто знає! Душа Піфагора може переселилася в бідного кандидата, що провалився на іспиті через невміння довести Піфагорову теорему, а в панах екзаменаторах перебувають душі тих биків, яких Піфагор приніс колись в жертву вічним богам, радіючи відкриттю своєї теореми».

Теорему Піфагора знають у Всесвіті?

У романі «Із Землі до Місяця» (1865) французький письменник-фантаст Жуль Верн писав: «Один німецький математик запропонував спорядити наукову експедицію в сибірські степи. Там, посеред широких рівнин, можна було б за допомогою рефлекторів висвітити гігантські геометричні фігури, і до того ж настільки яскраві, що їх буде видно з Місяця, наприклад трикутник Піфагора, який жартома називають «Піфагорові штани».

Творець теорії множин

Ще навчаючись у школі, Г. Кантор (1845-1918) похвалився своєму вчителеві, що відкрив цікаву арифметику множин.

– Що ви маєте на увазі? – запитав здивований учитель.

Георг накидав на дошці креслення, які ілюстрували означення об'єднання і переріз множин А і В.

– А як бути, коли у множин А і В не буде спільної частини, власне, спільних елементів? – знову запитав учитель.

– Ми скажемо, – не розгубився Кантор, – що А В=0.

Здалося давно відомим

С. Ковалевська здобула всебічну домашню освіту і рано виявила математичні здібності. П'ятнадцятирічна Соня вже на першому уроці дивувала петербурзького викладача математики О. Страннолюбського швидким засвоєнням понять границі і похідної, «ніби знала їх наперед». Під час пояснення дівчинка ясно побачила стіни своєї дитячої кімнати без шпалер, обклеєної аркушами паперу з дивними значками, тепер наповненими змістом. Це були лекції з вищої математики професора М. Остроградського. Соня згадувала: «Я годинами простоювала біля цієї таємничої стіни, намагаючись розібрати хоча б окремі фрази … Саме поняття про границю здалося мені давно відомим».

Відкриття Г. Вороного не старіють

Унікальним явищем у сучасній математиці, де будь-які відкриття вже через 2–3 роки вважаються застарілими, є те, що з 12 наукових праць, опублікованих за життя українського математика Г. Вороного (1868-1908), вісім успішно використовують сучасні вчені країн Європи, США, Канади, Японії, Китаю, Австралії, Південної Кореї та ін. Результати досліджень Вороного про розчленування простору на окремі клітини (клітини Вороного, мозаїка Вороного, розбиття Вороного) нині використовують у медицині, астрономії, астрофізиці, мікробіології, фізичній хімії тощо. Діаграми Вороного, починаючи з сімдесятих років минулого століття, застосовують у комп'ютерній графіці, для побудови географічних інформаційних систем, створення штучного інтелекту, аналізу мережі тощо.

Г. Вороний

Як же це вийшло?

З німецьким математиком В. Літцманом (1880-1959) у дитинстві стався такий випадок. Дванадцятирічний хлопчик звернув увагу на напис, надряпаний на стіні плавального басейну міста Веймар: «Рівність $a = b + c$ записуємо в двох варіантах: $5a = 5b + 5c$ і $4b + 4c = 4a$. Додаючи праві і ліві частини рівностей, маємо: $4b + 4c - 4a = 5b + 5c - 5a$, винесемо «цифри» за дужки: $4 (b + c - a) = 5 (b + c - a)$, скоротимо і, отримаємо $4 = 5$».

Цей софізм Літцман переписав і зберіг для нащадків.

Звіримо висновки

Один з організаторів Київського фізико-математичного товариства (1899) професор В. П. Єрмаков володів особливим способом читання математичних книг. Він читав першу сторінку нової книги, щоб дізнатись, яке завдання ставить перед собою автор, потім останню сторінку, щоб дізнатися, до якого результату він приходить, і, закривши книгу, самостійно знаходив результат. Не раз спосіб розв’язування, знайдений В. Єрмаковим, виявлявся відмінним від того, яким користувався автор книги, а наука збагачувалась новими методами.

Перемогла математика

Головною у житті студента математичного факультету Харківського університету В. Стєклова (1882) була наука, а музика і спів заповнювали паузи між тривалими заняттями математикою. Друзі настійно радили йому вступати до консерваторії, пророкували славу оперного співака. І в нього навіть з’явилася думка спробувати себе на сцені. Та нестримний потяг до математики переміг Стєклова-співака. В. Стєклов став академіком, створив свою математичну школу, з якої вийшло багато відомих математиків.

Прототип драматурга – математик

Професор-математик і письменник В. Льовшин у 1920-х роках був студійцем Московського камерного театру і часто зустрічався з письменником М. Булгаковим. Затятий курець Льовшин став прототипом драматурга Василя Артуровича Димогацького у п'єсі Булгакова «Багряний острів».

«Чудо»-учень став академіком

У 1923 році організатор і керівник Київської алгебраїчної школи Д. Граве попросив академіка М. Крилова поспілкуватися з чотирнадцятилітнім здібним підлітком Миколою Боголюбовим, який після закінчення семирічної школи самостійно вивчав фізику і математику. З поваги до колеги академік зустрівся з «диво»-учнем і запропонував йому розв'язати за три дні кілька задач, складених ним самим.

Боголюбов, використавши методи математичного аналізу, до вказаного терміну легко справився із завданням. У 1924 році юнак написав свою першу наукову працю. Шістнадцятирічного юнака без диплома про вищу освіту зарахували в аспірантуру. А вже в 1927 році праці з проблем варіаційного числення, написані ним у співавторстві зі своїм керівником М. Криловим, Болонська академія наук відзначила премією.

У 20 років загальні збори АН України присвоїли М. Боголюбову науковий ступінь доктора математичнх наук, а в 1948 році – обрали академіком.

«Шотландські математики» у Львові

З початку 1920-х років до окупації Львова нацистами в червні 1941 року відомі львівські математики С. Банах, С. Улам, Серпінський, Дж. Нейман, С. Мазур, Г.Штайнхауз та ін. часто зустрічалися і проводили наукові засідання в Шотландському кафе (кав'ярня в центрі міста дала назву «шотландській математичній школі», більш відомій як львівська математична школа). Якось в 1935 році одне з засідань тривало без перерви 17 годин і завершилося доведенням важливої теореми. Однак воно не збереглось, бо записи, зроблені хімічним олівцем на мармуровому столику кав'ярні, витерла прибиральниця. Тоді дружина С. Банаха купила товстий зошит, щоб до нього записувати задачі та можливі відповіді на них.

С. Банах

У «Шотландській книзі» у травні 1941 року нараховувалось 193 розв'язаних і нерозв'язаних проблем математики (разом з обіцянками винагороди за їх розв'язок – від чашки кави до живого гусака).

У 1958 році збережена в роки Другої світової війни сином С. Банаха «Шотландська книга» була надрукована в англійському перекладі. Представлена на Міжнародному математичному конгресі (Единбург, Великобританія), вона викликала захоплення присутніх на ньому найвідоміших математиків світу.

У 1973 році шведський математик П. Енфло розв'язав задачу, складену С. Мазуром в 1936 році, і отримав обіцяного гусака з рук самого автора.

Тріумфальна подорож української пісні

Український математик М. А. Чайковський (1887-1970) ще учнем гімназії захоплювався не лише математикою. У неповних десять років він писав різні театральні п'єси для домашнього театру. На початку XX століття, навчаючись у двох останніх класах Бережанської гімназії на Тернопіллі, став диригентом учнівського хору. Відтоді любов до музики та рідної пісні ніколи не покидала

М. Чайковського. У 1919 році вже відомим математиком у складі Української республіканської капели під керівництвом відомого українського композитора і диригента О. Кошиця побував в Австрії, Швейцарії, Франції, Бельгії, Англії, Німеччині… Про цю подорож М. Чайковський майже через 50 років написав: «Це був воістину тріумфальний рейд української пісні по світу…»

Математична термінологія – українською!

У 1924 році в Берліні М. Чайковський надрукував «Систематичний словник української математичної термінології». У 1933 році математик був репресований. Повернувшись лише через 21 рік в Україну, вчений знову став займатися проблемами шкільної математики, удосконаленням української математичної термінології. Українські автори та редактори і досі користуються, написаним Миколою Чайковським (у співавторстві) у 1960 році «Російсько-українським математичним словником».

«Євгеній Онєгін» під лупою математика

23 січня 1913 року академік А. А. Марков виступив у Петербурзькій академії наук з доповіддю «Приклад статистичного дослідження тексту «Євгенія Онєгіна», яке ілюструє зв'язок випробувань в ланцюг».

Розглядаючи послідовність з 20000 літер роману у віршах О. С. Пушкіна, Марков шукав ймовірність того, що випадково взята літера російського тексту буде позначати голосний звук. Проведені дослідження показали, що ймовірність появи голосного після голосного дорівнює: $\alpha = 0{,}128$, а голосного після приголосного – $\beta = 0{,}663$.

Введені Марковим в теорію ймовірностей послідовності залежних випадкових величин, пізніше були названі ланцюгами Маркова. З теорії марковських ланцюгів виникла загальна теорія випадкових процесів, яка нині є одним з основних математичних засобів вивчення явищ реального світу, наприклад, вивчення лавинних процесів.

«Четвертий вимір» Миколи Гулака

Відомий учений Микола Гулак (1821-1899) у праці «Нарис геометрії в чотирьох вимірах» (1877) розвинув ще не визнані на той час аксіоми «уявної» геометрії Лобачевського, вперше в Російській імперії дослідив питання багатовимірної геометрії. Він був переконаний, що «якби спершу не з'явився Лобачевський і не довів можливість побудувати нову геометрію, незалежну від аксіоми Евкліда, то чи міг би тоді Ріман додуматися до своєї прекрасної теорії простору?»

М. Гулак

За роман «Четвертий вимір», присвячений другу і соратнику великого Кобзаря Миколі Гулаку, який після ув'язнення за свою діяльність у Кирило–Мефодіївському товаристві не мав права повернутися в рідну Україну відомому математику, філософу, перекладачу-поліглоту (володів майже двадцятьма мовами), письменник Р. Іваничук у 1984 році був удостоєний Національної премії імені Т. Шевченка.

Талановиті і відомі

Дж. Буля вважають батьком математичного аналізу і логіки. Його дружина Мері Еверест була племінницею Д. Евереста – генерал-інспектора Індії, який в 1841 році завершив роботи зі створення тріангуляційної* системи цієї країни, автора відомої праці «Звіт про вимірювання двох дуг індійського меридіана». На честь його заслуг гору Джомолунгма в Гімалаях часто називають Еверестом. За ці дослідження Д. Еверест був обраний членом Лондонського королівського товариства та удостоєний рицарського звання (1861).

М. Еверест розуміла наукові ідеї Дж. Буля і заохочувала його на продовження досліджень. Вже після його смерті вона написала кілька праць, а в книзі «Філософія та розваги алгебри» пропагувала його математичні ідеї.

*Тріангуляція (від лат. *triangulum* – трикутник) – один з методів створення опорної геодезичної системи.

Видатний математик і альпініст

У 1970 році на одній з лекцій, щоб витерти верхню частину дошки, вісімдесятирічний учений-математик Б. М Делоне почав підстрибувати, після чого звернувся до студентів: «А ви знаєте, що я не тільки видатний математик, а й видатний альпініст. От ви, напевно, навіть стійку на руках не вмієте робити». І тут же на столі кафедри зробив стійку.

Б. М. Делоне ще в 1935 році був удостоєний почесного звання «Майстер альпінізму». Він побив усі рекорди спортивного довголіття в альпінізмі. 6 липня 1975 року 86-річний Делоне провів ніч на висоті 4200 м на льодовику гори Хан-Тенгрі (7000 м). Учений удостоєний рідкісної відзнаки: одна з вершин гірського Алтаю носить ім’я Делоне.

Відкриття Є. Слуцького актуальні і сьогодні

Наприкінці XIX століття англійський економіст Р. Гіффен (1837-1910) із здивуванням помітив: чим дорожчий хліб, тим більше його купують. Надрукована в 1915 році в італійському економічному журналі стаття Є. Слуцького «До теорії збалансованого бюджету споживача», в якій подано пояснення парадоксу Гіффена, є яскравим прикладом праць, оригінальність і важливість яких визнано лише після отримання іншими вченими через роки аналогічних результатів.

У статті було вперше математично обґрунтовано принцип рівноваги попиту споживача, доведено, що підвищення цін на товари призводить до зниження купівельної спроможності населення, однак не може зменшити попит покупця (в межах бюджету) на життєво необхідний товар, як би не збільшувалася його ціна. Зменшиться попит на інші, дорожчі продукти (м’ясо, молоко, цукерки тощо), а замість них споживач купуватиме порівняно дешевий продукт, тобто … хліб. У цьому полягає суть актуального і сьогодні рівняння Слуцького, дослідження властивостей якого базуються на ймовірнісних методах.

Майже через 20 років ці викладки українського математика, економіста, одного з фундаторів математичної статистики в Україні Є. Слуцького (1880-1948) лягли в основу теорії попиту й споживання англійських економістів Р. Алена, Дж. Хікса та ін.

Є. Слуцький

М. Кравчук

Співавтор першого в світі комп’ютера

У вересні 1937 року американський фізик і математик Дж. Атанасов надіслав листа академіку Кравчуку: «…Я знайшов Вашу серію публікацій, дуже корисну для моєї роботи. Хотів би отримати копії будь-яких Ваших публікацій...»

Не одержавши відповіді на свого листа, американський учений зробив переклад відомих йому робіт Кравчука для цитування в своїх працях.

Через кілька років Атанасов розробив (але не запатентував!) перший в світі електронний цифровий комп’ютер, використавши для пришвидшення обчислень та розв’язання математичних рівнянь метод Кравчука.

Я відчував себе людиною!

21 лютого 1938 року звинуваченого в націоналізмі та шпигунстві «ворога народу» академіка М. Кравчука, заарештували й заслали на Колиму (Росія). Перших три тижні ув’язнення вчений працював на будівництві місцевої залізниці, дійшовши висновку, що будувати її у вічній мерзоті недоцільно. «Ворог народу і тут хоче нашкодити», – вважало табірне начальство і відправило Кравчука працювати в шахту.

В’язні-співкамерники запитували академіка: «Хто тебе гнав у шию! «Потягнув» би наукове обґрунтування хоча б півроку. Куди так поспішав?»

Учений відповів: «Мені створили людські умови: тепло, чисте приміщення, тиша, нормальна їжа. Я відчував себе людиною! Я не міг інакше...»

Праці академіка Кравчука «живі» в XXI столітті

На початку XXI століття з’явилися несподівані, на перший погляд, застосування наукових досягнень Кравчука в прикладній математиці та комп’ютерних науках. Так, марокканські фахівці через 80 років у своїй статті «Виділення ознак моментами Кравчука з метою нейронного розпізнавання арабських рукописних слів» використали працю М. Кравчука 1929 року. Група французьких, американських та німецьких учених у своїх дослідженнях довела, зокрема, ефективність застосування зважених 3-вимірних моментів Кравчука як засобу аналізу даних для розпізнавання характеру пухлин.

Герой- розвідник і математик

Радянський розвідник в роки Другої світової війни (1939-1945) Є. Березняк, герой однойменного радянського фільму «Майор Вихор», існував насправді. Після війни Є. Березняк став відомим українським математиком-методистом. За 65 років педагогічної та творчої діяльності він видав шість монографій, написав більше ста наукових публікацій.

Книги Є. Березняка «Я – «Голос», «Пароль – «Dumspiro», «Операція «Голос» видані кількома мовами тиражем біля 2 мільйонів примірників. Подвиг розвідників групи «Голос» (керівник Є. Березняк) по врятуванню від знищення древньої столиці Польщі – міста Кракова – відтворено в польських художніх кінофільмах «Майор Вихор», «Зберегти місто» та в документальних фільмах «Тепер їх можна назвати» (СРСР), «Операція «Голос» (Польща), «Майор Вихор. Правдива історія».

Загадкове правило да Вінчі

Леонардо да Вінчі вивів правило, згідно з яким квадрат діаметра стовбура дерева дорівнює сумі квадратів діаметрів гілок, узятих на загальній фіксованій висоті.

Пізніші дослідження підтвердили його, однак степінь у формулі необов'язково дорівнює 2, а лежить в межах від 1,8 до 2,3. Традиційно вважалося, що ця закономірність пояснюється тим, що у дерева з такою структурою оптимальний механізм постачання гілок поживними речовинами. Однак в 2010 році американський фізик Крістоф Еллой знайшов більш простe механічне пояснення феномену:

якщо розглядати дерево як фрактал, то закон Леонардо мінімізує ймовірність зламу гілок під впливом вітру.

Чи знаєте ви, що…

- Першу математичну енциклопедію, написану на 44 глиняних табличках, склали вавилоняни за 2 тисячі років до нашої ери. Вона містила таблицю множення, таблицю обернених чисел, таблиці для обчислення об'ємів і площ, квадратів і кубів чисел.
- Найдавніша математична праця була знайдена в Свазіленді – кістка бабуїна з вибитими рисками, які, ймовірно, були результатом якогось обчислення. Вік кістки - 37 тисяч років. У Франції знайшли ще більш складну «математичну працю» – вовчу кістку, вік якої близько 30 тисяч років, з вибитими на ній рисками, згрупованими по п'ять штук.
- На знаменитій кістці з Ішанго (Конго) вибиті групи простих чисел. Вважається, що вік кістки 18-20 тисяч років.
- Винахід двійкового числення приписують імператору Китаю Фо Гі (4 тис. р. до н. е.).
- Єгиптяни ще за 2 тисячі років до нашої ери для побудови прямого кута використовували мотузку, розділену вузлами на 12 частин (3; 4; 5 – єгипетський трикутник). Мабуть, тому землеміри називалися гарпедонаптами (з грецької – натягувачі мотузки).
- Основні математичні пам'ятки Стародавнього Єгипту – папірус Ахмеса (1650 р. до н. е.) і Московський папірус (1900 р. до н. е.) – містять відповідно 84 і 25 задач практичного характеру, до яких не даються загальні правила розв'язання.
- Піраміди Стародавнього Єгипту побудовані з 2 300000 кам'яних брил у формі прямокутного паралелепіпеда. Вага кожної з них приблизно 2,5 т, а об'єм –1 куб. м. Ці брили перевозили по річці Ніл, але їх прив'язували під човном, бо з човна брила могла б упасти. До того ж, занурена у воду, вона була легшою на вагу води, яку витісняла, тобто в Єгипті закон Архімеда застосовували задовго до його відкриття самим Архімедом.
- Термін «гіпербола» (грецьке *hiperbole* – перевищення,

надлишок) ввів Аполлоній Пергський (III ст. до н.е.).

- Термін «асимптота» (грецьке *asimptotus* – такий, що не збігається) приписують старогрецькому математику Аполлонію Пергському (III ст. до н.е.). Вчення про асимптоти алгебраїчних кривих розвинув Л. Ейлер (1748). Сучасний спосіб відшукання асимптот показав О. Коші (1826).
- Старогрецький філософ Платон (429-348 рр. до н.е.) вважав, що математику повинен знати кожний філософ. При вході в його Академію було написано: «Хто не знає геометрії – нехай сюди не входить».
- Математику в число предметів викладання ще в першій половині IV ст. до н. е. ввів давньогрецький філософ Платон.
- Платон і Арістотель вживали слово «метод» як назву сукупності математичних процедур, операцій, необхідних для одержання результату.
- Перші тригонометричні таблиці хорд (до нас не дійшли) склав старогрецький астроном і математик Гіпарх (II ст. до н. е.). Птолемей (II ст. н. е.) уточнив таблиці Гіпарха і склав таблицю хорд, відповідних дугам від 0 до 180°.
- Термін «точка» походить від латинського дієслова *punctum* – ткнути, доторкаюсь. Звідси походить і медичний термін «пункція» – прокол.
- Термін «лінія» походить від латинського *linum* – льон, лляна нитка, шнур, мотузка. Від цього кореня походить слово «лінолеум», яке спочатку означало промаслене лляне полотно. Спочатку під лініями розуміли тільки прямі (звідси походить назва приладу для креслення прямих – «лінійка»). Пізніше словом «лінія» почали називати і криві, взагалі те, що має тільки довжину (Евклід).
- Римський поет Овідій (I ст. до н. е.) у поемі «Метаморфози» розповів легенду про винахід циркуля: якось після вдалої риболовлі рибалки зварили юшку, і один з них, з'єднавши дві кістки великої рибини, намалював на піску найпрекраснішу з ліній.
- Давньогрецький математик і винахідник Герон (імовірно I ст.) заклав основи автоматики. Люди дивувалися дивам: двері храму

самі відкривалися, коли над жертовником запалювався вогонь. Він придумав автомат для продажу «святої» води. Сконструював кулю, що обертається силою струменя пари. Висунув ідею парових машин.

- Давньогрецький філософ Евдем Родоський біля 335 р. до н. е. написав першу історію математики.
- Старогрецький вчений Архіт Тарентський (428 – 347 рр. до н. е.) означав нескінченно велику і нескінченну малу величини майже так, як і нині. Термін «нескінчений» у математиці застосував німецький художник А. Дюрер (1525). Знак нескінченності ∞, введений Дж. Валлісом (1655), став загальноприйнятим у XVIII ст. Зазначимо, що стародавні римляни позначали цим знаком число 1000.
- Розповідають, що Архімед так захоплювався наукою, що доводилося силою відривати його від роботи, щоб він поїв або помився.
- Платон увів терміни «аналіз і «синтез».
- Старогрецький геометр Діностраат (IV ст. до н. е.) за допомогою методів Евдокса, по суті, застосовуючи елементи теорії границь, подав словесно твердження: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1$.
- Ератосфен у 240 р. до н. е. вперше визначив довжину кола меридіана Землі (39375 км, за сучасними даними 40080 км).
- Про велику популярність Піфагора ще за життя свідчать монети з його зображенням, випущені в 430-420 рр. до н. е. У 306 р. до н. е. йому, як найрозумнішому з греків, поставили пам’ятник в римському форумі.
- Острів Самос в Егейському морі, на якому народився Піфагор, перейменовано в Піфагорейон.
- На персні Піфагора був викарбовано девіз: «Тимчасова невдача краща за тимчасову удачу».
- Вислів «що треба довести» вперше зустрічається в «Началах» Евкліда. Ним закінчуються доведення кожного твердження.
- Давньогрецький філософ Прокл Діадох (Vст.) вважав піраміду Хеопса «свого роду кам’яним підручником астрономії і

геометрії та знань, які пов’язані з розливами Нілу».

- Невідоме число стародавні арабські вчені позначали словом «шей», тобто «ніщо», «щось». Потім замість слова стали писати його першу літеру «ш». Це позначення в арабів запозичили іспанці, тільки замість «ш» вони писали «х», а називали «ш». Від іспанців цей знак потрапив до французів. Аж у XVII ст. «х» став називатись «ікс».

- Найбільш точний календар створив знаменитий філософ, астроном, математик і поет Омар Хайям. Він запропонував цикл у 33 роки, в якому 7 разів високосний рік вважається четвертим, а восьмий раз високосний п’ятий рік. Отже, це 8 зайвих діб на 33 роки. Вчений вважав істинною кількістю днів у році $365\frac{8}{33}$.

- Найдавніший літературний твір, у якому згадуються звичайні дроби, – поема давньогрецького поета Гомера (VIII або VII ст. до н. е.) «Іліада»: «Ночі дві частини пройшли, і третя зосталась частина».

- У праці індійського математика Шрідхара «Суть обчислення» (XI ст.) повно сформульовані властивості нуля.

- Термін «алгоритм»(латинське *algorithmus*) виник у XII ст. Вважають, що «алгоритм» – перекручене прізвище ал-Хорезмі. Дехто пов’язує його з арабським al-horethm (корінь) або з грецьким *ariphmos*– число.

- Завдяки працям Г. Лейбніца з диференціального числення (1684) словом «алгоритм» почали називати точні вказівки виконання в певному порядку операцій для розв’язування задач певного типу.

- Сучасне поняття алгоритма встановилось у середині тридцятих років XX ст. Прикладом відомих алгоритмів можуть бути алгоритми множення «в стовпчик», добування квадратного кореня, обчислення похідної функції тощо.

- Англійський філософ Р. Бекон (XIII ст.) називав математику «божественною», «дверима і ключем до науки», вважав, що тільки вона «може очистити розум і зробити учня здатним до сприйняття знань».

- У рукописному трактаті Н. Шюке «Наука про число» (1484, надруковано тільки в 1848 р.) зустрічаються слова «більйон», трильйон», квадрильйон» для 10^{12}, 10^{18}, 10^{24}.

- Французький математик Н. Орем вперше запропонував схему поділу октави на 12 рівних тонів (рівномірно темперована музична шкала).

- Термін «стереометрія» (від грецьких *stereos* – просторовий, *metreo* – вимірюю, буквально – вимірювання об'єму) зустрічається вже в Арістотеля (384 - 322 рр. до н. е.).

- Термін «планіметрія» (латинське *planum*– плоска поверхня і грецьке *metreo* – вимірюю, міряю, дослівно – вимірюю плоску поверхню) утворився в часи Середньовіччя на зразок давньогрецького терміну «стереометрія».

- А. Дюрер (1471-1528) був першим художником Німеччини, який вивчав математику і механіку. Він заклав основи ортогонального проектування, розробив теорію орнаменту.

- Одна з перших надрукованих праць з історії математики в Західній Європі належить німецькому математику і астроному, доктору мистецтв і медицини Г. Таннстеттеру.

- Німецький математик Й. Вернер (1468-1528) першим у Європі використав формулу, що виражає добуток синусів, у вигляді різниці косинусів.

- Італійський математик Н. Тарталья (1500-1537) у своїх працях давав велику кількість вправ і задач, причому розміщував їх так, щоб читачеві легко було опанувати предмет.

- Метод математичної індукції пов'язують з ім'ям італійського математика Ф. Мавроліко (1575), який, як і Евклід, обмежувався розглядом випадків $n = 1, 2, 3, 4$ і вказівкою «і т. д. до нескінченності». Метод математичної індукції в сучасному розумінні введено Б. Паскалем.

- У праці німецького математика Й. Фаульгабера

«Арифметичні чудеса» (1622) вперше подано формулу $cos^2 \alpha + cos^2 \beta + cos^2 \gamma = 1$, де α, β, γ – кути, утворені деякою площиною з трьома перпендикулярними координатними площинами.

- Англійський математик Т. Гарріот склав опис фауни і флори, карту Північної Америки (1586), а також карту Місяця.

- Французький математик Ф. Дебон (1601-1652) перший сформулював твердження про те, що рівняння $ax + by = c$ є рівнянням прямої лінії.

- Італійський геометр XVII ст. Г. Гранді створив плоскі пелюсткові криві, які милують око правильними і плавними лініями, схожими на квіти.

- Французький математик і астроном А. Клеро ввів поняття афінного перетворення (1733), криволінійні інтеграли (1743).

- Уперше використав для позначення границі слово «limes» І. Ньютон.

- Сучасне позначення границі lim вперше ввів у 1786 році швейцарський математик С. Люільє.

- У XIX ст. угорські математики батько і син Ф. і Я. Бойаї першими почали вказувати границю, до якої прямує аргумент. Позначення у 1841 році ввів Вейєрштрасс.

- У 1740 році французький інженер Фрезьє вперше виклав елементи нарисної геометрії.

- Ж. Лагранж в 19 років став професором геометрії, в 23 роки його обрали членом Берлінської академії наук, а в 30 років він став її президентом (1766). Ім’я Ж. Лагранжа внесено до списку 72 найвидатніших учених Франції, розміщеного на першому поверсі Ейфелевої вежі. Наполеон Бонапарт називав ученого «Хеопсовою пірамідою математичних наук».

- У 1766 році Е. Безу дав загальні методи розв’язування систем рівнянь будь-яких степенів, розробив метод послідовного виключення невідомих з систем рівнянь вищих степенів.

● З часу відкриття логарифмів (1594) було складено 500 різноманітних логарифмічних таблиць з різною кількістю знаків. Нідерландський математик-обчислювач І. Вольфрам створив найбільш точні таблиці натуральних логарифмів чисел від 1 до 10000 з 48 десятковими знаками (1778), англійські математики і астрономи А. Шарп – 61-значні таблиці, Паркхерст – 102-значні, Дж. Адамс – 260-значні логарифми.

● Наполеон, навчаючись в Паризькій військовій школі, виявив винятковi математичні здібності. Ставши імператором, він відчував у математиці красу і знаходив час займатися нею для власного задоволення. Наполеон Бонапарт склав кілька геометричних задач, одна з яких носить його ім’я.

● Швейцарський математик І. Бюргі склав і на початку XVII ст. видав таблиці степенів чисел $10 \cdot 1{,}0001^n$, де *n = 10, 20, 30, ..., 2303700220,* виконавши без обчислювальних приладів понад 230 мільйонів послідовних множень на 1,0001.

● Англійський математик Г. Брігс майже за 7 років (1617-1624) обчислив 30000 логарифмів з 14 десятковими знаками.

● Англійський математик Дж. Валліс (1616-1703) якось однієї безсонної ночі в умі обчислив 27 цифр квадратного кореня з 53-цифрового числа, а вранці записав їх.

● Термін «мільйон» італійського походження і зустрічається вже в першій італійській друкованій арифметиці (1478), ще раніше в нематематичній книзі мандрівника Марко Поло (помер у 1324 р.), а у формі «мілліо» – вже в рукописі 1250 року. У рукописі французького математика Н. Шюке (XV ст.), надрукованому у 1880 році, вперше з’являються терміни «більйон» -10^{12}, «трильйон» -10^{18}.

● Француз А. Муавр, який змушений був залишити батьківщину, аби не зрадити своїх релігійних переконань, і майже все своє життя прожив у Лондоні, ще наприкінці XVII ст. був обраний членом Лондонського королівського товариства і лише у 1754 році – іноземним (!) членом Паризької академії наук.

● Видатний англійський учений І. Ньютон так цінував математичну обдарованість А. Муавра, що всякого, хто звертався до нього в питаннях, які стосувалися математики, відсилав до цього вченого.

- Б. Паскаль у чотири роки вмів читати і писати, виконував усно складні обчислення. Перша наукова праця шістнадцятирічного Паскаля «Досвід про конічні перерізи» складалася лише з 53 рядків, але містила основну теорему проективної геометрії і деякі наслідки з неї. У 18 років він сконструював першу обчислювальну машину.

- Правило знаходження максимумів і мінімумів ввів П. Ферма (1638).

- Рукописи шотландського математика Дж. Грегорі свідчать, що він ще у 1672 році вивів загальну формулу розкладу функцій у степеневий ряд, яку нині називають рядом Тейлора. Однак англійський математик Б. Тейлор вивів цю формулу через 40 років, а надрукував у 1718 році.

- Французький математик Ф. Бессі (XVIIст.) вперше дав загальний метод побудови магічних квадратів і виконав велику роботу по складанню всіх 830 магічних квадратів на 4^2 кліток.

- У 1688 році Дж. Грегорі встановив формулу чисельного інтегрування. Її нині називають «формулою Сімпсона», хоч англійський математик Т. Сімпсон опублікував її на 80 років пізніше (1743).

- Правило знаходження границі дробу, чисельник і знаменник якого прямують до нуля (розкриття невизначеностей виду $\frac{0}{0}$), яке вивів Й. Бернуллі (1667-1748), називають правилом Лопіталя.

- Зібрання творів Л. Ейлера становить 75 великих томів, у які ввійшло понад 886 досліджень найважчих питань математичної науки. Якщо щодня по десять годин переписувати ці наукові праці, то не вистачить 76 років, щоб закінчити роботу.

- Л. Ейлер, навчаючи своїх онуків добувати квадратні корені, намагався пропонувати їм для вправ лише числа, які є точними квадратами. Якось за одну ніч, почавши добувати такі корені в умі, Ейлер обчислив 6 послідовних степенів всіх чисел від 2 до 20. Через кілька днів він їх усі продиктував.

- Л. Ейлер знав напам’ять поему «Енеїда» давньоримського поета Вергілія, цитував перший і останній вірші на кожній сторінці того видання, яке він читав ще в молодості.

- Швейцарський математик Д. Бернуллі (1700-1782) визначив число *e* як границю $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$.

- Французький казкар XVII ст. Шарль Перро («Червона Шапочка», «Кіт у чоботях», «Попелюшка») був відомим поетом, фізиком, академіком. Він також написав казку «Кохання циркуля і лінійки».

- Німецький математик А. Кестнер (1719-1800) писав гострі і дотепні епіграми, які багато разів перевидавалися.

- Науковий термін «статистика» (латинське *status* – стан) виник в Англії в розумінні «політичний стан» (1770). Однак англійський драматург В. Шекспір використовував це слово у «Гамлеті» ще в 1602 році. З часом зміст терміну змінювався. У XVIII ст. вираз «статистичні дані» означав довідки про населення, виробництво, політичну ситуацію, і тому науку називали «політична арифметика». Основи новітньої статистики заклав бельгійський астроном і статистик А. Кетлє.

- Щоб прочитати праці творця неевклідової «уявної» геометрії М. Лобачевського, К. Гаусс у 62 роки почав вивчати російську мову і через два роки її вивчив.

- Французький математик і астроном А. Клеро (173-1765) в 12 років написав твір, в якому досліджував алгебраїчні криві четвертого порядку. Секретар Паризької АН Фонтенель, прискіпливо проекзаменувавши Клеро, видав йому документ, що цей твір повністю його власний. Його молодший брат (1716-1732), так само як і А. Клеро, дуже рано виявив математичну обдарованість. У 14 років він написав дослідження з деяких питань геометрії, яке було схвалене Паризькою АН і надруковане в її виданні.

- Німецький математик Г. Клюгель у «Математичному словнику» (1803) вперше ввів термін «тригонометричні функції».

- Французька жінка-математик С. Жермен за розробку теорії згинання пластин одержала премію Паризької АН (1811). Це була перша премія, яку Паризька академія вручила жінці.

- Термін факторіал (англ. *factorial*, від *factor* – множник; від латинського *factor* – той, що робить, виробляє) ввів французький вчений Л. Арбогаст (1800), а позначення n! – німецький математик Х. Крамп (1808). Лише в 1916 році Рада Лондонського математичного товариства рекомендувала прийняти позначення n! (були пропозиції читати його: «n-захоплення»).

- Німецький математик Г. Грасман як мовознавець склав словник санскриту до Рігведи («веда гімнів») –одного з найдревніших релігійних текстів. За вдалий переклад цього першого відомого пам’ятника індійської літератури (бл. 1700-1100 рр. до н. е) вченого обрали членом Американського східного товариства (1876).

- Російський математик П. Чебишов 28 серпня 1878 року в Парижі виголосив доповідь «Про розкроювання одягу», в якій розглянув складне, одне з найважчих питань диференціальної геометрії – математичну теорію раціонального розкроювання матеріалів.

- У бібліотеці О. Пушкіна було дві праці з теорії ймовірностей, зокрема, знаменитий твір французького математика і механіка Ж. Лапласа «Досвід філософії теорії ймовірностей».

- Видатний російський письменник Л. Толстой, який умів знайти навіть у математиці можливості літературного самовираження, в романі «Війна і мир» увів поняття диференціала історії. «Тільки допустивши нескінченно – малу одиницю для спостереження – диференціал історії, тобто однорідні потяги людей, і досягнувши мистецтва інтегрувати (брати суми цих нескінченно - малих), ми можемо сподіватися на осягнення законів історії ». (Т. 3, р. 3)

- У 1822 році німецький математик К. В. Фейєрбах (1800-1834) довів теорему про коло дев’яти точок, нині відому як теорема

Фейєрбаха: «Коло, проведене через основи висот трикутника, проходить через середини сторін його і торкається до вписаного і зовні описаних кіл цього трикутника».

- Термін «монотонність» (від грецьких *monos* – один, *tonos* – натягування, напруження, дослівно – однотонний, одноманітний) ввів у 1881 році німецький математик К. Непман, який застосовував його спочатку до монотонних послідовностей чисел.

- Англійський математик Дж. Венн у книзі «Символьна логіка» (1881) дав геометричну інтерпретацію основних логічних операцій як дій над множинами (діаграми Венна).

- У своєму щоденнику український математик Г. Вороний (1868-1908) писав: «Математика для мене – життя, все». На інших сторінках читаємо: «Я не поет і не знаю того натхнення, яке описують поети. Але я знаю хвилини, … моменти, коли розум повністю охоплює ідею, яка раніше, як м'ячик, вислизала…».

- В останні дні життя смертельно хворий Г. Вороний писав працю «Про останню теорему Ферма».

- Найбільше число, що має назву, – це мільйон у сотому степені (одиниця з 600 нулями). Це число називається центильйон.

- Предметом вивчення Є. Слуцького була і проблема впливу сонячної активності на врожаї сільськогосподарських культур. Учений дослідив відомості про полярні сяйва в помірних широтах за період від 5000 р. до н. е. до 1600 року і встановив, що періодичність їх утворює арифметичну прогресію з різницею 11,103 роки. Якщо її екстраполювати на період після 1600 року, то вона теж буде моделювати періодичність сонячної активності. Для обґрунтування гіпотези істинної періодичності сонячної активності Є. Слуцький вивчав закономірності різних приростів деревини 12 секвой за 2000 років (від 272 р. до н. е. до 1914 року).

- Американський любитель математики Е. Луміс зібрав і опублікував у 1968 році 367 різних доведень теореми Піфагора, одне з яких запропонував двадцятий президент США Дж. А. Гарфілд.

- Найбільш плідний період в математиці англійського математика Г. Харді (1877-1947) почався в 34 роки, коли він став співпрацювати з англійським математиком Дж. Літтвудом. Один тогочасний математик сказав: «Є всього три дійсно великих англійських математики: Харді, Літтвуд та Харді-Літтвуд».

- У 1955 році в Греції на відзнаку 2500-річчя Піфагорової школи-академії було випущено поштову марку, що наочно відтворювала доведення знаменитої теореми Піфагора.

- Англійський математик Дж. Тейлор (1886-1975) був сином художника, онуком математика-логіка Дж. Буля і племінником письменниці Е. Л. Войнич («Овід»). Сам Дж. Тейлор розпочав свій трудовий шлях метеорологом арктичної експедиції.

- У повісті Л. Толстого «Юність» М. Іртеньєв на вступних іспитах до університету згадує біном Ньютона. Герой роману М. Булгакова «Майстер і Маргарита» Коров'єв вигукує знаменитий вислів: «Подумаєш, біном Ньютона!»

- Значний вплив на італійську художню літературу мав Галілео Галілей, якого вважають «батьком італійської наукової прози».

- Г. Лейбніц перший порушив вікову традицію писати наукові праці лише латинською мовою, заклавши основи німецької літературної мови.

- С. Ковалевська мала літературний талант, відзначений відомими тогочасними письменниками. В. Буняковський друкував у літературних журналах свої переклади віршів Байрона і поеми «Паломництво Чайльд Гарольда».

- Англійський математик Ч. Доджсон (псевдонім Льюїс Керролл) написав свою знамениту повість-казку «Пригоди Аліси в країні чудес».

- Завдяки своїй книзі «Закони віршування» і майстерній поемі «Розалінда» (написана з «математичною точністю» – кожний з чотирьохсот рядків поеми римується з словом «Розалінда») англійський математик Дж. Сильвестр увійшов в історію американської літератури.

- З великим успіхом на сценах німецьких театрів йшли п'єси фундатора топологі Ф. Хаусдорфа (літературний псевдонім П. Монтре).

- А. Ейнштейн стверджував, що на відкриття теорії відносності його «наштовхнули Моцарт і Достоєвський».

- Нобелівський комітет у 1950 році нагородив англійського математика і філософа Б. Рассела премією з літератури як майстра англійської прози.

- Російський математик О. Вентцель (літературний псевдонім І. Грекова) у 55 років стала членом Спілки письменників Росії, після виходу з друку її першої повісті «За прохідною» (1962).

- Математик, автор відомого у XX ст. «Збірника задач для вступників до вузів» М. Сканаві чудово володів пером, писав вірші та п'єси (одна з них навіть завоювала приз на Всесоюзному конкурсі). Був тренером однієї з перших команд КВК Москви.

- Російський письменник Л. Толстой вважав, що людину можна оцінювати дробом, знаменник якого становить те хороше, що вона думає про себе сама, а чисельник – те хороше, що думають про людину інші. Про людей із завищеною самооцінкою він говорив: «У цієї людини дуже великий знаменник».

- Коли у видатного вченого А. Енштейна питали, скільки годин триває його робочий день, він сприймав це як жарт. «Робочий день ученого не має ні початку, ні кінця», – відповідав він.

- У кінці 30-х років XX ст. викладач вищої математики одного з московських інститутів О. Волков став вивчати англійську мову. Щоб попрактикуватися, він почав перекладати видану в кінці XIX ст. англійською мовою казку американського письменника Ф. Баума «Мудрець із країни Оз». Волкову дуже сподобалася казка, і він став переказувати незвичайну і цікаву історію своїм двом синам, а ті із задоволенням слухали і щовечора чекали продовження. Бачачи, що дітям подобається, Волков почав фантазувати і придумувати щось від себе... У результаті була написана абсолютно самостійна казка «Чарівник смарагдового міста», досить далека за змістом від оригіналу Ф. Баума.

- Український математик М. Чайковський (1887-1970) у жовтні 1918 року був запрошений зі Львова викладати в новоствореному Кам'янець-Подільському університеті. У своїх спогадах він написав: «Я можу з великою гордістю сказати, що був другим, хто викладав вищу математику українською мовою: першим був Михайло Пилипович Кравчук у Києві…»

- Під головуванням М. Кравчука в другій половині 1920-х років підкомісія математичної секції природничого відділу Інституту української наукової мови Академії наук створила тритомний математичний словник.

- У 1938 році видатного українського математика. академіка М. Кравчука заарештували як «ворога народу». Його учні, тоді вже відомі математики Ю Соколов, В. Зморович, О. Смогоржевський, наражаючись на небезпеку самим бути репресованими, стали на захист Учителя (написали лист-заяву, в якій відзначали «величезну значущість М. Кравчука в науці та педагогіці» і заперечували висунуті проти нього звинувачення).

- Американський математик Д. Данциг, будучи аспірантом університету, якось спізнився на лекцію і сприйняв написані на дошці рівняння за домашнє завдання. Воно здалося йому дуже складним, але через кілька днів він його виконав. Виявилося, що він вирішив дві «нерозв'язані» проблеми в статистиці, над якими працювало багато вчених.

- Французький вчений-фізик А-М. Ампер у своїй праці «Досвід про філософію наук…» (1834) дав кваліфікацію наук і запропонував деякі терміни для неіснуючих на той час наук. Передбачувану ним науку про загальні закономірності процесів управління суспільством він назвав «кібернетикою». Однак ще давньогрецький філософ Платон в одних випадках називав кібернетикою мистецтво керування кораблем, в інших – мистецтво правити людьми.

- У 1948 році американський учений Н. Вінер повернув із забуття термін «кібернетика», назвавши ним науку про загальні принципи управління в різних системах: технічних, біологічних, соціальних тощо.

- Засновник Інституту кібернетики АН УРСР, піонер комп'ютерної техніки В. М. Глушков (1923-1982) вважав, що кібернетика – це наука про загальні закони одержання, зберігання, передавання й перетворення інформації у складних системах управління.

- У 1950 році відомий англійський економіст Р. Аллен відзначив значний вплив праць українського математика й економіста Є. Слуцького на розвиток теорії поведінки споживачів і аналізу часових рядів.

- У 1979 році за мотивами повісті російського фантаста Є. Велтістова «Електронік – хлопчик з валізи» було знято художній фільм «Пригоди Електроніка», у першій серії якого хлопчик-андроїд Електронік, копія школяра Сергія Сироєжкіна, на уроці математики вразив клас і вчителя математики Таратара твердженням, що може довести теорему Піфагора двадцятьма способами, і наводить деякі з них.

- Лабораторні дослідження показали, що бджоли вміють вибирати оптимальний маршрут. Після локалізації розміщених в різних місцях квіток бджола здійснює обліт і повертається назад таким чином, що підсумковий шлях виявляється найліпшим, тобто ці комахи ефективно справляються з класичним «завданням комівояжера» з інформатики, на вирішення якого сучасні комп'ютери, в залежності від кількості точок, можуть витрачати не один день.

- У лютому 1992 року відбувся розіграш лотереї Вірджинії (США) «6 із 44», джек-пот якої становив 27 мільйонів доларів. Число всіх можливих комбінацій у такому виді лотереї було трохи більше 7 мільйонів, а кожен квиток коштував 1 долар. Підприємливі люди з Австралії створили фонд, зібравши по 3000 доларів від 2500 чоловік, купили потрібне число бланків і вручну заповнили їх різними комбінаціями цифр, отримавши після виплати податків потрійний прибуток.

- 2002 року ім'я українського математика М. Кравчука внесено ЮНЕСКО до переліку найвидатніших людей світу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Александрова Н. В. История математических определений, понятий, обозначений: Словарь-справочник / Н.В. Александрова. – СПб.: ЛКИ, 2008. – 248 с.

2. Алексеева М. И математике это не чуждо. [Электронный ресурс] /Учительская газета. 2012. – № 7 (14 февраля). – Режим доступа: www. ug.ru/archive/44497 /

3. Бевз В. Г. Історія математики / В. Г. Бевз. –Х.: Основа, 2006. – 144 с.

4. Бевз В. Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів / В. Г. Бевз. – К.: НПУ ім. Драгоманова, 2005. – 360 с.

5. Бевз В. Г. Практикум з історії математики: Посіб. для студ. фіз.-мат. ф-тів пед. ун-тів / В. Г. Бевз; Нац. пед. ун-т ім. М. Драгоманова. – К., 2004. – 311 с.

6. Бевз В. Г. Ціннісні орієнтації та їх формування в учнів у процесі навчання математики / В. Г. Бевз. // Математика в рідній школі. – 2014. – № 1 (148). – С. 2 – 7.

7. Бевз Г. П. Геометрія: Підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл.: профіл. рівень / Г. П. Бевз, В .Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, В. М. Владіміров. – К.: Генеза, 2010. – 232 с.

8. Болгарский Б. В. Очерки по истории математики/ Б. В. Болгарский / Минск, Вышейш шк., 1979. – 368 с.

9. Берёзкина Э. И. Математика древнего Китая /Э. И. Березкина. – М.: Наука, 1980. – 312 с. 6.

10. Бородін О. І. Біографічний словник діячів у галузі математики / О. І. Бородін, А. С. Бугай. – К.: Рад. шк., 1973. – 552 с.

11. Боголюбов А.Н. Математики. Механики. Биографический справочник. Отв. ред. И. Гихман. /А.Н. Боголюбов. – К.: Наук. думка, 1983. – 638 с.

12. Бугай А. С. Короткий тлумачний математичний словник / А. С. Бугай. –К.: Рад. школа, 1964. – 428 с.

13. Вірченко Н. О. Математика в афоризмах, цитатах і висловлюваннях / Н. О. Вірченко – К.: Вища школа, 1974. – 272 с.

14. Воєвода А. Л. Математика та література: матеріали до інтегрованих уроків і заходів / А. Л. Воєвода. – К.: Редакції газет природничо-математичного циклу, 2013. – 104 с. – (Бібліотека «Шкільного світу»).

15. Воєвода А.Л. Зацікавити математикою / А. Л. Воєвода. – К.: Редакції газет природничо-математичного циклу, 2012. – 110 с. – (Бібліотека «Шкільного світу»).

16. Воєвода А. Л. Формування в майбутніх учителів творчого підходу до підготовки уроків математики / А. Л. Воєвода. / Наукові записки. – Серія: Педагогічні науки. – В.133 – Кіровоград: РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2015.

17. Глейзер Г. И. История математики в школе. 7-8 кл. Пособ. Для учит. / Г. И. Глейзер. – М.: Просвещение, 1982.– 240с.

18. Качановський І. Українське коріння комп'ютерної революції // Голос України. – № 1805. – 2006. –18 травня.

19. Іваничук Р. І. Четвертий вимір /Р. І. Іваничук. – Х.: Фоліо, 2007. – 447 с.

20. Клюйков С. Ф. Числа і пізнання світу / С.Ф. Клюйков. – Маріуполь: Поліграфічний центр газети «Інформ Меню», 1997. – 112 с.

21. Кожабаев К. Г. О воспитательной направленности обучения математике в школе : кн. для учителя / К. Г. Кожабаев. – М.: Просвещение, 1988. – 80 с.

22. Конфорович А. Г. Визначні математичні задачі / А. Г. Конфорович. – К.: Рад. школа, 1981 – 189с.

23. Конфорович А. Г. Добрий день, Архімеде! / А. Г. Конфорович – К.: Молодь, 1988.– 152 с.

24. Кордемський Б. А. Математичні заманинки/ Б. А. Кордемський. –Тернопіль.:Богдан, 2016. – 568 с.

25. Кордемский Б. А. Увлечь школьников математикой: Материал для классных и внеклассных занятий / Б. А. Кордемский. – М.: Просвещение, 1981. – 110 с.

26. Компетентнісно орієнтована методика навчання математики в основній школі: Метод. посібник / О. І. Глобін, М. І. Бурда, Д. В. Васильєва, В. В. Волошена, О. П. Вашуленко, Н. Д. Мацько, Т. М. Хмара. – К.: Педагогічна думка, 2015. – 245 с.

Режим доступу: https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjLmfW29aj1AhUnM-wKHTjRANkQFnoECAYQAQ&url=https%3A%2F%2Fundip.org.ua%2fLibrary%2f Kompetentnisno-oriientovana-metodyka-navchannia-matematiki-v-osnovniy-shkoli-metodychnyy-posibnyk%2F&usg=AOvVaw2tiWJX-UZwfmhNeyiZzIpj

27. Лісовець С. М. Про маловідомі математичні таблиці Якова Пилипа Кулика / С. М. Лісовець. // Питання історії науки і техніки – № 3 (23), 2012. – С. 6 – 10.

28. Лоповок Л.М. Виховна робота на уроках геометрії в 6-8 класах /Л. М. Лоповок. – К.; Рад. шк., 1985. – 112 с.

29. Методика навчання геометрії в школі. Практикум / О. І. Матяш, А. Л. Воєвода, Л. Ф. Михайленко, Л. Й. Наконечна, О. Л. Коношевський. Вінниця: ТВОРИ, 2020. 532 с.

30. Олехник С. Н. Старинные занимательные задачи / С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко, М. К. Потапов. – М.: Наука, 1988. – 160 с.

31. Ольжич Олег. Незнаному воякові. Заповідане живим / Олег Ольжич. – К: Фундація ім.Ольжича, 1994. – 432с.

32. Орбелиани Сулхан-Саба. Мудрость вымысла. Пер. Е. Гогоберидзе / Сулхан-Саба Орбелиани. – Тбилиси: Заря Востока, 1959. – 248 с. – [Електронний ресурс]. Режим доступу: lukianpovorotov.narod.ru/ Orbeliani_ Mudrost_vymysla.htm

33. Паундстоун У. Как сдвинуть гору Фудзи? Подходы ведущих мировых компаний к поиску талантов. Пер. с англ. / У. Паудстон. М.: Альпина Бизнес Букс, 2004. – 159 с.– [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://filegiver.com/free-download/u-paundstoun-kak-sdvinut-goru-fudzi.pdf

34. Перельман Я. І. Живая математика /Я. І. Перельман. – К. : КМ-Букс, 2019 . – 240 с.

35. Прус А. В. Збірник задач з методики навчання математики / А. В. Прус, В. О. Швець. – Житомир: «Рута», 2011. – 388с.

36. Сита Г. М. Діаграми Вороного / Г.М.Сита. // Математика в сучасній школі. – 2013. – № 7-8. – С. 53 – 56.

37. Сорока М. О. Колимська теорема Кравчука/ М. О. Сорока. – К: Молодь, 1991.– 240 с.

38. Федоренко І. К. Є. Слуцький – славетна постать вітчизняної науки // Є. Слуцький. Визнання. Творча спадщина з погляду сучасності // За ред. В. Д. Базилевича. – К.: Знання, 2007. – С. 3 – 13.

39. Хмара Т. М. Навчання учнів математичної мови / Т. М. Хмара.- К.: Рад. шк., 1985. – 95с.

40. Чайковський М. А. Талант диригента: До 90-річчя від дня народження О. Кошиця //Літературна Україна. 1966. 14 вересня.

41. Черватюк О. Г. Елементи цікавої математики /О. Г. Черватюк, Г. Д. Шиманська. – К.: Рад. шк., 1968. – 202 с.

42. Черкасов Р. С. Методика преподавания математики в средней школе / Черкасов Р. С., Столяр А. А. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.

43. Штейн А. П. Непридуманное / А. П. Штейн. – М.: Современник, 1985. – 415 с.

44. Шляхами математики: Хрестоматія для учнів 5-9 кл. / Упоряд. Т. Хмара. – К.: Пед. преса, 1999.– 195 с. – (Б-ка вчителя та учня).- Дод. до журн. «Математика в школі».

45. Энциклопедия «Исчезнувшие цивилизации». Затерянный мир майя (Пер. с англ. Н. Усовой) – М.: ТЕРРА, 1997. – 168 с.

А.Л. ВОЄВОДА

ЦІКАВА МАТЕМАТИКА НА УРОКАХ ТА В ПОЗАУРОЧНИЙ ЧАС

Підписано до друку 15.11.2021
Формат 60х84/16. Папір офсетний. Друк цифровий
Друк. Арк. 11,5. Наклад 125 прим. Зам. №8085

Віддрукрвано з оригіналу замовника

Видавеццью ТОВ «ТВОРИ»
Свідоцтво про вненсення субєкта виланичої справи до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
Серія ДК № 6188 від 18.05.2018 р.