

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет математики, фізики і комп'ютерних наук

Кафедра математики та інформатики

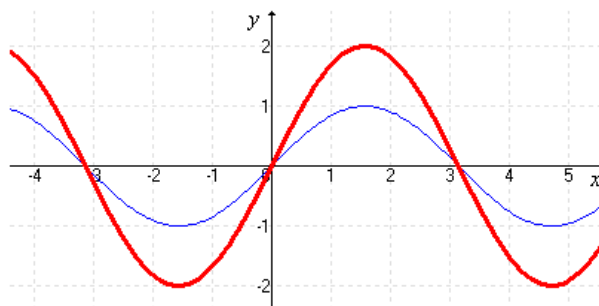
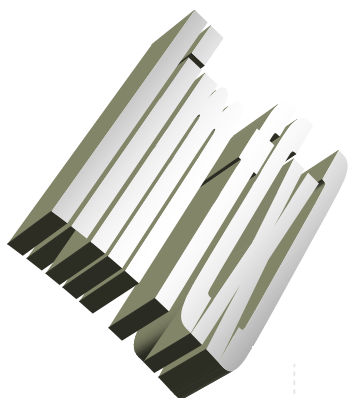
РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА

з математичного аналізу

I семестр

**Вступ до математичного аналізу. Диференціальне
та інтегральне числення функції однієї змінної**

для студентів предметної спеціальності
А4.09 Середня освіта (Інформатика)



Вінниця 2025

Затверджено рішенням кафедри математики та інформатики ВДПУ імені Михайла Коцюбинського, протокол №1 від 18 серпня 2025 року. **Рекомендовано** до публікації рішенням Вченої ради факультету математики, фізики і комп'ютерних наук (протокол № 1 від 27 серпня 2025 року).

Автор-укладач: доктор фізико-математичних наук,
професор **Бак С. М.**

Рецензенти: доктор педагогічних наук,
професор **Ковтонюк М. М.**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Тимошенко О. З.**

Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. I семестр. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної (для студентів предметної спеціальності А4.09 Середня освіта (Інформатика)) [Електронне видання]. Вінниця, 2025. 51 с.

Індивідуальний робочий зошит студента

Дисципліна: математичний аналіз.

Розділи: Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної. Інтегральне числення функції однієї змінної.

Передмова

Робочий зошит з математичного аналізу призначений для використання студентами предметної спеціальності А4.09 Середня освіта (інформатика) при вивченні розділів «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функції однієї змінної», «Інтегральне числення функції однієї змінної».

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних тем, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю.

Робочий зошит складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання.

Після кожного розділу подано зразок контрольної роботи. Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

1. Робочий план студента

Робочий план студента складений на основі навчальної програми з математичного аналізу, затвердженої Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Таблиця 1. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	денна форма					
	усього	зокрема				
		ЛК	ПЗ	ЛЗ	ІЗ	СР
1	2	3	4	5	6	7
1-й семестр						
Розділ 1. Вступ до математичного аналізу						
Тема 1. Математичний аналіз як розділ математики. Множина дійсних чисел	7	2	0	0	0	5
Тема 2. Функції та їх класифікація	9	2	2	0	0	5
Тема 3. Збіжні послідовності	9	2	2	0	0	5
Тема 4. Границя і неперервність функції в точці	11	2	4	0	0	5
Разом за розділом 1	36	8	8	0	0	20
Розділ 2. Диференціальне числення функції однієї змінної						
Тема 1. Похідна та диференціал	8	2	1	0	0	5
Тема 2. Похідні та диференціали вищих порядків	8	2	1	0	0	5
Тема 3. Застосування похідної при знаходженні границь функцій у точці	7	1	1	0	0	5
Тема 4. Формула Тейлора та її застосування	7	1	1	0	0	5
Тема 5. Дослідження функцій на монотонність, екстремум та опуклість	8	1	2	0	0	5
Тема 6. Повне дослідження функції і побудова графіка функції	8	1	2	0	0	5
Разом за розділом 2	46	8	8	0	0	30
Розділ 3. Інтегральне числення функції однієї змінної						
Тема 1. Первісна та невизначений інтеграл	9	2	2	0	0	5
Тема 2. Інтегрування раціональних дробів	9	2	2	0	0	5
Тема 3. Інтегрування деяких ірраціональних функцій	10	2	2	0	0	6
Тема 4. Інтегрування деяких трансцендентних функцій	10	2	2	0	0	6

Тема 5. Визначений інтеграл. Інтеграл зі змінною верхньою межею. Формула Ньютона-Лейбніца	10	2	2	0	0	6
Тема 6. Основні методи обчислення визначеного інтеграла	9	2	1	0	0	6
Тема 7. Застосування визначених інтегралів	11	2	3	0	0	6
Разом за розділом 3	68	14	14	0	0	40
Усього годин за 1-й семестр	150	30	30	0	0	90

Розподіл балів (за видами діяльності)

№	Вид діяльності	Коефіцієнт вартості (бали)	Кількість робіт	Результат (бали)
1.	Домашні завдання	10	1	10
2.	Конспект	10	1	10
3.	Контрольна робота	20	2	40
4.	Колоквіум/тест	20	1	20
Всього за семестр:				80
Залік				20
Підсумковий рейтинговий бал				100

Шкала оцінювання: сто балова, ECTS, розширена

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за розширеною шкалою
		<i>Для екзамену, заліку, курсової роботи, практики</i>
90-100	A	ВІДМІННО
80-89	B	ДУЖЕ ДОБРЕ
75-79	C	ДОБРЕ
60-74	D	ЗАДОВІЛЬНО
50-59	E	ДОСТАТНЬО
35-49	FX	НЕЗАДОВІЛЬНО З МОЖЛИВІСТЮ ПОВТОРНОГО СКЛАДАННЯ
1-34	F	НЕПРИЙНЯТНО З ОBOB'ЯЗКОВИМ ПОВТОРНИМ ВИВЧЕННЯМ ДИСЦИПЛІНИ

Практичне заняття № 1

Тема: Функції дійсної змінної

1. Знайти область визначення функції $f(x)$, якщо:

1.1. $f(x) = \frac{x}{x+1}$;

1.2. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 6x + 8}$;

1.3. $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^3 - 4x}$;

1.4. $f(x) = \frac{1}{x + |x|}$;

1.5. $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$;

1.6. $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{1-3x+2x^2}}$;

1.11.

$f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2} + \sqrt{x^2(x-1)^2}$ ($x \in \mathbb{R}$);

1.7.

$f(x) = \log_2(4-x) - \log_2(x+7)$;

1.8. $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}}$;

1.9. $f(x) = \arcsin x + \sqrt{\frac{2}{4x-1}}$;

1.10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - 2|x-1|}}$;

5) $[-2; 1]$; 6) $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup [3; +\infty)$; 7)

8) $(-1; 1) \cup (1; 4]$; 9) $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$; 10) $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$; 11) $[3; +\infty)$.

Відповідь: 1) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; 2)

$\mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$; 3) $\mathbb{R} \setminus \{0; \pm 2\}$; 4)

$(0; +\infty)$;

2. Знайти множину значень функції $f(x)$, якщо:

2.1. $f(x) = 2x - 5, x \in [-2; 2]$;

2.2. $f(x) = |x-1|, x \in [0; 5]$;

2.3. $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$;

2.4. $f(x) = \log_3(1-2\cos x)$;

2.5. $f(x) = \sin x + |\sin x|$;

2.6. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$;

2.7. $f(x) = 2^{|\cos x|}$;

2.8. $f(x) = \frac{2}{3 - \sin x}$;

2.9. $f(x) = x^2 - x^4, x \in [-1; 4]$;

2.10. $f(x) = ax + \frac{b}{x}, ab > 0$.

Відповідь: 1) $[-9; -2]$; 2) $[0; 4]$; 3) $\left[0; \frac{3}{2}\right]$; 4) $(-\infty; 1]$; 6) $[-1; 1]$;

7) $[1; 2]$; 8) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 9) $\left[-240; \frac{1}{4}\right]$; 10) $(-\infty; -2\sqrt{ab}] \cup [2\sqrt{ab}; +\infty)$.

3. Знайти композиції $f \circ g$ і $g \circ f$, та вказати їх області визначення для заданих функцій:

3.1. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

3.2. $f(x) = g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

3.3. $f(x) = 10^x$, $g(x) = \lg x$.

3.4. $f(x) = x^5$, $g(x) = x + 5$.

3.5. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; +\infty), \\ 0, & x \in (-\infty; 0), \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; +\infty), \\ x^2, & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$

3.6. $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = \sin x$.

4. Перевірити на парність і непарність функції:

4.1. $y = \sin(\cos x)$;

4.2. $y = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$;

4.3. $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$;

4.4. $y = \log_2(x + \sqrt{1+x^2})$;

4.5. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$;

4.6. $y = \log_2 \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$;

4.7. $y = |x-1| + |x+1| - 2|x|$;

4.8. $y = \arccos(\cos x)$;

4.9. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

4.10. $y = \frac{|\sin x|}{1 - \cos x}$.

5. Дослідити на обмеженість функції:

5.1. $y = x^2 + 3x + 5$, $x \in [1; 3]$;

5.2. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$;

5.3. $y = \frac{|x+1|}{x^2+1}$;

5.4. $y = x^4 - 2x^2 + 3$;

5.5.

$y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$;

5.6. $y = |x| - |x+1|$;

5.7. $y = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{x^2-1}$;

5.8. $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$;

5.9. $y = x - [x]$;

5.10. $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1}$;

5.11. $y = 0,3^{x^2-1}$;

5.12. $y = \frac{1}{\lg(2+x^4)}$;

5.13. $y = 2^{-\sqrt{x}}$;

5.14. $y = \sin^3 3x - 4\sin 17x$.

Відповідь: 1) обмежена; 2) обмежена знизу, необмежена зверху; 3) обмежена; 4) обмежена знизу, необмежена зверху; 5) обмежена знизу, необмежена зверху; 6) обмежена; 7) обмежена; 8) обмежена; 9) обмежена; 10) обмежена; 13) обмежена; 14) обмежена.

6. Знайти проміжки монотонності функцій:

$$6.1. y = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}};$$

$$6.2. y = 3^{|x|};$$

$$6.3. y = 2x^2 + x + 4;$$

$$6.4. y = x + \frac{1}{x};$$

$$6.5. y = |2x - 1|;$$

$$6.6. y = \frac{x-3}{2x+1};$$

$$6.7. y = \sqrt{x+2} - 1;$$

$$6.8. y = \sin x - 3\cos x;$$

$$6.9. y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x;$$

$$6.10. y = \log_2 ||x| - 1|.$$

Відповідь: 1) зростає на $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$; 2) зростає на $[0; +\infty)$; спадає на $(-\infty; 0)$; 4) зростає на $(-\infty; -1]$ і $[1; +\infty)$; спадає на $[-1; 0]$ і $(0; 1]$; 5) спадає на $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$; зростає на $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 6) зростає на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ і на $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 7) зростає на $[-2; +\infty)$; 8) зростає на $\left[\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$; 9) функція стала на $\left(\frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{2}(k+1)\right), k \in \mathbb{Z}$; 10) спадає на $(-\infty; -1)$ і $(0; 1)$; зростає на $(-1; 0)$ і $(1; +\infty)$.

7. Довести, що якщо функція $f(x) = \sin x + \cos bx$ періодична, то число b є раціональним числом.

Доведення. 1) $D(f) = \mathbb{R}$;

2) Нехай $T \neq 0$ – період функції $f(x)$. Тоді для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ правильна рівність

$$\sin(x+T) + \cos b(x+T) = \sin x + \cos bx.$$

Покладемо тут $x = 0$ та $x = -T$, отримаємо дві рівності:

$$\sin T + \cos bT = 1,$$

$$-\sin T + \cos bT = 1.$$

Додавши та віднявши їх, матимемо

$$\begin{cases} 2\cos bT = 2, \\ 2\sin T = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bT = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ T = \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow b = \frac{2m}{k} \in \mathbb{Q}.$$

Отже, b – раціональне число. ■

8. Довести, що якщо функція $f(x)$ періодична з періодом $T \neq 0$, то функція $f(ax+b)$, $a > 0$ є періодичною з періодом $\frac{T}{a}$.

Доведення. 1) Покажемо, що число $T_1 = \frac{T}{a}$ є періодом функції

$$f(ax+b): \quad f\left(a\left(x + \frac{T}{a}\right) + b\right) = f((ax+b) + T) = f(ax+b).$$

2) Покажемо, що $\frac{T}{a}$ – найменший додатний період. Припустимо, що існує додатне число T_1 , яке є також періодом функції $f(ax+b)$:

$$f(a(x+T_1)+b) = f(ax+b).$$

Візьмемо довільну точку $x_1 \in D(f)$ і покладемо $x_1 = \frac{x-b}{a}$ ($x = ax_1 + b$). Обчислимо значення функції в точці x :

$$\begin{aligned} f(ax_1 + b) &= f\left(a \cdot \frac{x-b}{a} + b\right) = f(a(x_1 + T_1) + b) = \\ &= f((ax_1 + b) + aT_1) = f(x + aT_1). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що період $T \leq aT_1 \Rightarrow \frac{T}{a} \leq T_1$.

Отже, $\frac{T}{a}$ – найменший додатний період функції $f(ax+b)$. ■

Знайти найменший період функції:

8.1. $y = \sin 2x$;

8.2. $y = \operatorname{tg} 3x$;

8.3. $y = 3\cos \frac{x}{2}$;

8.4. $y = 5\sin \pi x$;

8.5. $y = \operatorname{ctg} \frac{3x}{2}$;

8.6. $y = \sin \frac{\pi x}{4}$;

8.7. $y = \operatorname{ctg} 4x$;

8.8. $y = \cos \frac{x}{3}$;

8.9. $y = 10\operatorname{tg} 15x$.

Відповідь: 1) π ; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) 4π ; 4) 2; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) 8; 7) $\frac{\pi}{4}$; 8) 6π ; 9) $\frac{\pi}{15}$.

9. Переконатись, що кожна з заданих функцій періодична і знайти її період:

$$9.1. y = \sin \frac{x}{2} + \operatorname{tg} x;$$

$$9.2. y = \sin \frac{2x+1}{2};$$

$$9.3. y = \sqrt{\sin 3x};$$

$$9.4. y = 1 + \sqrt{\log_2 \cos x};$$

$$9.5. y = 2^{\sin x};$$

$$9.6. y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x);$$

$$9.7. y = \arcsin(\sin x);$$

$$9.8. y = \sqrt{|\sin x|}.$$

Знаходження періоду функції.

1. Функції $y = \cos ax + \cos bx$, $y = \sin ax + \cos bx$, $y = \frac{\cos ax}{\sin bx}$,

$y = \operatorname{tg} ax + \operatorname{ctg} bx$ періодичні, якщо число $\frac{a}{b}$ є раціональним числом, і

неперіодичні, якщо $\frac{a}{b}$ – ірраціональне число.

2. Період функції

$$y = c_1 \sin n_1 x + \dots + c_k \sin n_k x + d_1 \cos m_1 x + \dots + d_l \cos m_l x,$$

де сума ніяких двох або більше членів ряду тотожно не дорівнює нулю, $c_i, d_j \in \mathbb{R}$, $n_i, m_j \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, l}$, знаходимо за формулою:

$$T = \frac{2\pi}{\operatorname{HCD}(n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_l)}. \quad (1)$$

3. Аналогічно, період функції

$$y = c_1 \operatorname{tg} n_1 x + \dots + c_k \operatorname{tg} n_k x + d_1 \operatorname{ctg} m_1 x + \dots + d_l \operatorname{ctg} m_l x,$$

Знаходимо за формулою

$$T = \frac{\pi}{\operatorname{HCD}(n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_l)}. \quad (2)$$

4. Якщо $n_i = \frac{s_i}{r_i}$, $m_j = \frac{p_j}{q_j}$, де s_i, r_i, p_j, q_j – натуральні числа, то період

функції $y = c_1 \sin n_1 x + \dots + c_k \sin n_k x + d_1 \cos m_1 x + \dots + d_l \cos m_l x,$

становить

$$T = 2\pi \frac{\operatorname{HCK}(r_1, \dots, r_k, q_1, \dots, q_l)}{\operatorname{HCD}(s_1, \dots, s_k, p_1, \dots, p_l)}. \quad (3)$$

5. А період функції $y = c_1 \operatorname{tg} n_1 x + \dots + c_k \operatorname{tg} n_k x + d_1 \operatorname{ctg} m_1 x + \dots + d_l \operatorname{ctg} m_l x$, знаходимо за формулою

$$T = \pi \frac{HCK(r_1, \dots, r_k, q_1, \dots, q_l)}{HCD(s_1, \dots, s_k, p_1, \dots, p_l)}. \quad (4)$$

✎10. Знайти період функції $y = \sin \frac{2}{3} x + \cos \frac{4}{9} x + \cos \frac{8}{27} x$.

Розв'язання. Для вищезгаданої формули (3) маємо: $n_1 = \frac{2}{3}$,

$m_1 = \frac{4}{9}$, $m_2 = \frac{8}{27}$, тоді $s_1 = 2$, $r_1 = 3$, $p_1 = 4$, $p_2 = 8$, $q_1 = 9$, $q_2 = 27$.

Отже, $T = \frac{HCK(3, 9, 27)}{HCD(2, 4, 8)} \cdot 2\pi = \frac{27}{2} \cdot 2\pi = 27\pi$.

Відповідь: 27π .

✎11. Знайти період функції $y = \sin 2x + 3\sin(3x - 2) - 0,5\cos\left(\frac{4}{5}x + 1\right)$.

Розв'язання. Використовуючи раніше згадувану формулу $T = \frac{2\pi}{\omega}$, маємо:

функція $\sin 2x$ має період $\frac{2\pi}{2} = \pi$;

$\sin(3x - 2)$ має період $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$;

$-0,5\cos\left(\frac{4}{5}x + 1\right)$ має період $\frac{2\pi}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{2}\pi$.

Основним періодом даної функції $y \in$ НСК періодів $\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{2}\pi$. Для

знаходження НСК зведемо коефіцієнти $1, \frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ при π до спільного

знаменника: $\frac{6}{6}\pi, \frac{4}{6}\pi, \frac{15}{6}\pi$, або $6 \cdot \frac{\pi}{6}, 4 \cdot \frac{\pi}{6}, 15 \cdot \frac{\pi}{6}$.

$НСК(6, 4, 15) = 60$.

Отже, основний період даної функції y рівний: $T_0 = 60 \cdot \frac{\pi}{6} = 10\pi$.

Відповідь: 10π .

12. Знайти найменший період функції:

12.1. $y = 3\sin 4x + 6\sin x + \sin(x - \pi) + 5\sin(x + \pi)$;

12.2. $y = \sin 2x + \operatorname{tg} \frac{x}{2}$;

12.11. $y = \cos \frac{x}{3} + \sin \frac{2}{5}x$;

12.3. $y = \cos \frac{x}{3} + \operatorname{tg} \frac{x}{5}$;

12.12. $y = \sin x - |\sin x|$;

12.13. $y = \sin^4 x$;

12.4. $y = \sin \frac{3x}{4} + 5\cos \frac{2x}{3}$;

12.14.

$y = \sin 3x - \sin x \cos x + \cos 4x$;

12.5. $y = \sin x + \cos x$;

12.15. $y = \cos 5x \cos 3x$;

12.6. $y = 2\operatorname{ctg} 3x - 4\operatorname{tg} 2x$;

12.16. $y = \operatorname{tg} \frac{3x}{4} + \operatorname{ctg} \frac{2x}{3}$;

12.7. $y = \sin 2x - \cos 5x$;

12.17.

12.8. $y = \cos^2 x$;

$y = \cos \frac{\pi x}{3} + \cos \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{5}$.

12.9. $y = |\sin x|$;

12.10. $y = \sin \frac{x}{2} + \cos 2x$;

Відповідь: 1) $\frac{\pi}{2}$. 2) 2π . 3) 30π . 4) 24π . 5) $\frac{\pi}{2}$. 6) π ; 7) π ; 8) π ; 9) π ;

10) 4π ; 11) 30π ; 12) 2π ; 13) π ; 14) 2π ; 15) π ; 16) 12π ; 17) 120 .

13. На області визначення функції знайти функцію, обернену до заданої:

13.1. $y = \frac{x-1}{x+2}$;

13.2. $y = 4^{x+1} - 1$;

13.3. $y = \log_2(x-1)$;

Відповідь: 1) $y = \frac{2x+1}{1-x}$; 2) $y = \log_4(x+1) - 1$; 3) $y = 2^x + 1$;

14. Використовуючи правила побудови графіків функцій $y = f(-x)$, $y = f(x+a)$, $y = f(x)+b$, побудуйте графіки функцій:

14.1 $y = \frac{1}{x+2}$;

14.5 $y = \sqrt{5-x} + 3$;

14.2 $y = \sqrt{3-x}$;

14.6 $y = -\frac{x+2}{x+5}$;

14.3 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4)$;

14.7 $y = 1 - \arcsin(-x)$;

$$14.4 \ y = x^2 + 4x + 6;$$

$$14.8 \ y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2.$$

15. Використовуючи правила побудови графіків функцій $y = f(kx)$, $y = kf(x)$, побудуйте графіки функцій:

$$15.1 \ y = \sqrt[5]{4x};$$

$$15.5 \ y = \sqrt[3]{4 + 3x};$$

$$15.2 \ y = \cos 2x;$$

$$15.6 \ y = 2 - \frac{1}{\pi} \arccos x;$$

$$15.3 \ y = 3 \log_3 x;$$

$$15.7 \ y = -\frac{1}{3} 5^x;$$

$$15.4 \ y = \cos \frac{x}{3};$$

$$15.8 \ y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

16. Використовуючи правила побудови графіків функцій $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, побудуйте графіки функцій:

$$16.1 \ y = \log_4 |x|;$$

$$16.5 \ y = \frac{1}{1 - 3|x|};$$

$$16.2 \ y = \sin\left|x - \frac{\pi}{4}\right|;$$

$$16.6 \ y = \frac{|x| - 2}{|x| + 3};$$

$$16.3 \ y = \left|\frac{4 - x}{5 - 2x}\right|;$$

$$16.7 \ y = x^2 - 4|x| + 7$$

$$16.4 \ y = |\operatorname{tg} 2x + 1|;$$

$$16.8 \ y = |x^2 - 6|x| + 8|.$$

Практичне заняття № 2

Тема: Числові послідовності. Границя числової послідовності

1. Знайти перші шість членів послідовності (x_n) , заданої формулою загального члена:

$$1.1. \ x_n = 3;$$

$$1.5. \ x_n = n \sin \frac{n\pi}{2} + n^2 \cos \frac{n\pi}{2};$$

$$1.2. \ x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n};$$

$$1.6. \ x_n = n^{(-1)^n};$$

$$1.3. \ x_n = (-1)^n + (-1)^{n+1};$$

$$1.7. \ x_n = \frac{n!}{n^n + 1};$$

$$1.4. \ x_n = \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$1.8. x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n};$$

$$1.9. x_n = \left[\sqrt{n^2 + n} \right];$$

2. Знайти перші n 'ять членів послідовності, заданої рекурентно:

$$2.1. x_1 = 1, x_{n+1} = 2x_n;$$

$$2.2. x_1 = 1, x_{n+1} = 3x_n - 2;$$

$$2.3. x_1 = 3, x_{n+1} = x_n - n;$$

$$2.4. x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{n};$$

$$2.5. x_1 = x_2 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n;$$

$$2.6. x_1 = -1, x_2 = 0, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n;$$

$$1.10. x_n = \sum_{k=1}^n k.$$

2.7.

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = x_{n+1} \cdot x_n;$$

$$2.8. x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{x_n};$$

2.9.

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2};$$

2.10.

$$x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right).$$

3. Дослідити на монотонність послідовності:

$$3.1. x_n = \frac{n+2}{0,5n-5};$$

$$3.5. x_n = \frac{n^3}{n^2 - 2n + 3};$$

$$3.2. x_n = \frac{3n+4}{n+2};$$

$$3.6. x_n = \frac{n^2}{n^3 + 32};$$

$$3.3. x_n = \frac{6^{n+1}}{n!};$$

$$3.7. x_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n};$$

$$3.4. x_n = \frac{n^3}{2^n};$$

$$3.8. x_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n.$$

Відповідь: 1) спадає для $n \geq 11$; 2) зростає; 3) спадає для $n > 5$; 4) спадає.

4. Довести, що послідовність (x_n) обмежена:

$$4.1. x_n = \frac{2-n}{\sqrt{n^2+3}};$$

$$4.3. x_n = \frac{n^2+3}{n^2+4n+5};$$

$$4.2. x_n = \frac{3n+(-1)^n}{9n-1};$$

$$4.4. x_n = \frac{3^n}{4^n+1};$$

$$4.5. \quad x_n = \underbrace{\sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{4}}}}_{n \text{ коренів}}$$

(Вказівка. Використайте метод математичної індукції);

$$4.6. \quad x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 2}{2};$$

$$4.7. \quad x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{x_n}.$$

5. Послідовність (x_n) задана формулою загального члена. Для заданого числа ε вказати такий номер n_0 , що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon}$$

$$5.1. \quad x_n = \frac{n+1}{n}, \quad a = 1, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}; \quad 0,1; \quad 0,001;$$

$$5.2. \quad x_n = \frac{2n}{n^3 + 1}, \quad a = 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}; \quad 0,1; \quad 0,01;$$

$$5.3. \quad x_n = 3 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad a = 3, \quad \varepsilon = 0,05; \quad 0,08; \quad 0,004;$$

$$5.4. \quad x_n = \frac{2n^2 - n + 2}{n^2 + 3n - 1}, \quad a = 2, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}; \quad 0,1; \quad 0,001.$$

$$5.5. \quad x_n = (-1)^n \frac{1}{7^n}, \quad a = 0;$$

$$5.6. \quad x_n = \frac{n+1}{n+2}, \quad a = 1;$$

$$5.7. \quad x_n = 2^n, \quad a = +\infty;$$

$$5.8. \quad x_n = -n^2, \quad a = -\infty;$$

$$5.9. \quad x_n = \frac{3n-2}{2n-4}, \quad a = \frac{3}{2};$$

$$5.10. \quad x_n = \frac{4n-1}{2n+1}, \quad a = 2;$$

6. Довести за означенням, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$:

$$6.1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n} = 3;$$

$$6.4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 2}{n^2 + n + 1} = 3;$$

$$6.2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0;$$

$$6.5. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{(n+1) \cdot 2^n} = 0;$$

$$6.3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - 1}{2n^2 + 3n + 4} = \frac{1}{2};$$

$$6.6. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{3^n}{5n + 3^n} = 1.$$

7. Знайти границю:

$$7.1. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + 7n + 1}{n^2 + 1};$$

$$7.3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+1}{n^2 + n};$$

$$7.2. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n-4};$$

$$7.4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 4}{2n^2 + n + 3};$$

$$7.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)};$$

$$7.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^2;$$

$$7.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4}{n + 5n^2 + 8}.$$

$$7.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^{n-1}};$$

$$7.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{2n+3} - \frac{2+3n^2}{2n^2-7} \right);$$

$$7.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2};$$

$$7.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n^2+1)^2 - (n^2-1)^2};$$

$$7.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1}.$$

$$7.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3-1}{5n^3-1} - \frac{2-n}{5n+3} \right);$$

$$7.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^2 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}.$$

Відповідь: 1) -2; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 1; 6) $\frac{4}{9}$; 7) 1; 8) ∞ ; 9) ∞ ;

10) 4950.

8. Знайти границю:

$$8.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+3}};$$

$$8.3. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n} - \sqrt{2n});$$

$$8.4. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3n^2 + 2n - 1} - \sqrt{3n^2 - 4n + 8});$$

$$8.5. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n});$$

$$8.6. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{n^4 + n^2} - n);$$

$$8.7. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[p]{n^p + (p-1)n^{p-1}} - n);$$

$$8.8. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^3 + n^2});$$

$$8.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{2 + n^2}};$$

$$8.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt{5n^2} + \sqrt[4]{9n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n}) \sqrt{7 - n + n^2}};$$

$$8.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt[3]{3n^3 + 3} + \sqrt[4]{n^5 + 1}}.$$

Відповідь: 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) ∞ ; 4) $\sqrt{3}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 0; 7) $\frac{p-1}{p}$; 8) $\frac{1}{6}$; 9) $\sqrt{3}$;

10) 0.

9. Знайти границю:

$$9.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!};$$

$$9.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!};$$

$$9.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!};$$

$$9.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{((n+1)! + n!) \cdot n};$$

$$9.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{(n+2)! + (n+3)!};$$

$$9.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \cdot n!}{(n+1)!}.$$

Відповідь: 1) 0; 2) 1; 3) 0; 4) 1; 5) 0; 6) 1.

10. Знайти границю:

$$10.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{2^n + 5};$$

$$10.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{n^2 + 2 \cdot 3^n};$$

$$10.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{7n+5} - \frac{5^n+1}{4-3 \cdot 5^n} \right);$$

$$10.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+(-1)^n)^n}{3^n \ln(n+2)};$$

$$10.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg(n^2 + n - 1)}{\lg(n^{10} + n^5 + 1)};$$

$$10.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 5^n + \lg(n+1)}{n^2 - 5^n + \lg(n+1)};$$

$$10.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n + \log_3 n}{\log_3 n + \log_4 n};$$

$$10.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n^{1000} + 1)}{n+2}.$$

Відповідь: 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{16}{21}$; 4) 0; 5) $\frac{1}{5}$; 6) -1; 7) $\frac{\log_2 e + \log_3 e}{\log_3 e + \log_4 e}$; 8) 0.

11. Знайти границю:

$$11.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(n+2)}{n+2};$$

$$11.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sin \frac{\pi(n+1)}{n+2};$$

$$11.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln 2 + \sqrt{n}}{\sqrt{2n+3}} + \frac{\cos n}{n^2} \right);$$

$$11.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1};$$

$$11.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{n} \cos n \right);$$

$$11.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sin n}{2n + \sin n}.$$

Відповідь: 1) 0; 2) 0; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) 0; 5) 0; 6) $\frac{1}{2}$.

12. Знайти границю:

$$12.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{n^2};$$

$$12.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right);$$

$$12.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \dots + \frac{n}{n^3} \right)};$$

$$12.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{1+3+\dots+(2n-1)}}{2n^2+n-1};$$

$$21.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right);$$

$$12.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}};$$

$$12.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \right);$$

$$12.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+4+\dots+2^{n-1}}{2^{n+1}};$$

$$12.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) \right);$$

$$12.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}.$$

Відповідь: 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $-\frac{3}{2}$; 6) -1 ; 7) $\frac{2}{3}$; 8) $\frac{1}{2}$; 9) $\frac{3}{2}$;
10) $\frac{4}{3}$.

13. Знайти границю:

$$13.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right);$$

$$13.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right);$$

$$13.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 18} + \dots + \frac{1}{(7n-3)(7n+4)} \right);$$

$$13.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 16} + \dots + \frac{1}{(7n-5)(7n+2)} \right).$$

Відповідь: 1) 1; 2) $\frac{1}{28}$; 3) $\frac{1}{28}$; 4) $\frac{1}{14}$.

14. Дослідити на збіжність числову послідовність, якщо:

$$14.1. x_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3};$$

$$14.2. x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n;$$

$$14.3. x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n};$$

$$14.4. x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!};$$

$$14.5. x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n};$$

$$14.6. x_n = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \dots + \frac{n}{4^{n-1}};$$

$$14.7. x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{4n};$$

$$14.8. x_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

$$14.9. x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}};$$

$$14.10. x_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}.$$

15. Знайти границю:

$$15.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n-9};$$

$$15.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{3n};$$

$$15.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n};$$

$$15.5. \lim_{n \rightarrow \infty} 8n (\ln(n+3) - \ln(n+1));$$

$$15.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1+n}{n^2+2}\right)^{2n};$$

$$15.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{2n-3}\right)^{3n-4}.$$

Відповідь: 1) e^2 ; 2) e^{-5} ; 3) e^2 ; 4) e^{-12} ; 5) 16; 6) e^{12} .

16. Знайти границю послідовності (x_n) , заданої рекурентно:

16.1. $x_1 = 5, x_{n+1} = \sqrt{5 + x_n}, n \in \mathbb{N};$

16.2. $x_1 = 0, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}, n \in \mathbb{N};$

16.3. $x_1 = 13, x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}, n \in \mathbb{N};$

16.4. $x_1 = \sqrt{a}, x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}, a > 0;$

16.5. $x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{x_n}{3}, n \in \mathbb{N};$

16.6. $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, n \in \mathbb{N};$

16.7. $x_1 = \frac{a}{2}, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2}, n \in \mathbb{N}, a \in [0; 1];$

16.8. $x_1 = 1, x_{n+1} = x_n^2 + a, n \in \mathbb{N}, a \in \left[0; \frac{1}{4}\right];$

16.9. $x_1 = 1, x_{n+1} = 1 - \frac{1}{4x_n}, n \in \mathbb{N};$

16.10. $x_1 = 0, x_{n+1} = \frac{1}{4(1 - x_n)}, n \in \mathbb{N};$

16.11. $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n), n \in \mathbb{N};$

16.12. $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}, n \in \mathbb{N}.$

Практичне заняття № 3

Тема: Границя функції в точці

1. Для заданих функцій $f(x)$ і точки x_0 знайти границю $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ і $\forall \varepsilon > 0$ вказати $\delta > 0$ таке, що

$$\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon:$$

1.1. $f(x) = 3x - 2, x_0 = 1, \varepsilon = 0,1; \varepsilon = 0,01; \varepsilon = 0,001.$

1.2. $f(x) = x^3, x_0 = 2, \varepsilon = 0,1; \varepsilon = 0,01; \varepsilon = 0,001.$

1.3. $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}, x_0 = -1, \varepsilon = 0,1; \varepsilon = 0,01; \varepsilon = 0,001.$

$$1.4. f(x) = \frac{x-1}{2(x+1)}, x_0 = 3, \varepsilon = 0,1; \varepsilon = 0,01; \varepsilon = 0,001.$$

$$1.5. f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x_0 = \infty, \varepsilon = 0,2.$$

$$1.6. f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}, x_0 = \infty, \varepsilon = 0,1.$$

$$1.7. f(x) = 4x - 3, x_0 = 2, \varepsilon = 0,1; \varepsilon = 0,01; \varepsilon = 0,001.$$

$$1.8. f(x) = \sqrt{x+4}, x_0 = 5, \varepsilon = 0,1; \varepsilon = 0,01; \varepsilon = 0,001.$$

$$1.9. f(x) = \frac{x+1}{2x+1}, x_0 = \infty, \varepsilon = 0,1; \varepsilon = 0,01; \varepsilon = 0,001.$$

$$1.10. f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x_0 = +\infty, \varepsilon = 0,1; \varepsilon = 0,01; \varepsilon = 0,001.$$

✎2. Довести (знайти $\delta(\varepsilon)$):

$$2.1. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{6x^5 - 5x + 1}{x - \frac{1}{3}} = -1.$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - \frac{1}{2}} = -5.$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3} = 9.$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} = 2.$$

✎3. Довести, що не існують границі функцій $f(x) = \sin x$ і $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$.

✎4. Довести, що не існують границі функцій у точці x_0 :

$$4.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}.$$

$$4.4. f(x) = \operatorname{sign} x^2, x_0 = 0.$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}}.$$

$$4.5. f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ x-2, & x < 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

$$4.3. f(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 0, \\ -2, & x < 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

$$4.6. f(x) = \cos \frac{1}{x}, x_0 = 0.$$

✎5. Перевірити, чи має ліву і праву границі у точці $x = a$ функція:

$$5.1. y = \frac{x}{|x|}, x = 0.$$

$$5.2. y = \operatorname{sgn} x, x = 0.$$

$$5.3. y = [x], x = -1.$$

$$5.4. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases} \quad x = 0; x = \pi.$$

$$5.5. y = (0,5)^{\frac{1}{x}}, \quad x = 0.$$

$$5.6. y = \arctg(\operatorname{tg} x), \quad x = 0; x = \frac{\pi}{2}; x = \pi.$$

$$5.7. y = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad x = 1.$$

$$5.8. y = \frac{4x+3}{64x^2+27}, \quad x = -\frac{3}{4}.$$

$$5.9. f(x) = \begin{cases} 1+x, & x > 0, \\ 1-x, & x \leq 0, \end{cases} \quad x = 0; x = 1.$$

$$5.10. f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ b+x, & x \geq 0, \end{cases} \quad x = 0; x = 1.$$

6. Знайти границю функції:

$$6.1. \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x - 4).$$

$$6.2. \lim_{x \rightarrow 2} (x\sqrt{x+2} - x^2 - x).$$

$$6.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+4}{6-5x}.$$

$$6.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 2}.$$

$$6.5. \lim_{x \rightarrow 2} (3x)^{x^2}.$$

$$6.6. \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2)^{\lg x}.$$

$$6.7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x^3 + 2 \cos x).$$

$$6.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x} - x^3}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} + 2x}.$$

Відповідь: 1) 1; 2) -2; 3) 7; 4) 3; 5) 6^4 ; 6) 1; 7) $\frac{\pi^3}{64} + \sqrt{2}$; 8) $\frac{1}{3}$.

7. Знайти границю функції:

$$7.1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

$$7.2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 8}.$$

$$7.3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}.$$

$$7.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}.$$

$$7.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3}.$$

$$7.6. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 11x - 21}{x^2 - 9x + 14}.$$

$$7.7. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x^2 + 2x)^2 - 14(x^2 + 2x) - 15}{x^4 - 29x^2 + 100}.$$

$$7.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}.$$

$$7.9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x^{11} + 2}{x^{50} + 2x^{30} - 3}.$$

$$7.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)^5 - (1 - 3x^2)^6}{3x^2 - x^3}.$$

$$7.11. \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x - a)}{(x - a)^2}.$$

$$7.12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{101} - 101x + 100}{x^2 - 2x + 1}.$$

Відповідь: 1) 4; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 10; 5) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{17}{5}$; 7) $\frac{64}{105}$; 8) $\frac{m}{n}$;
12) 5050.

✎8. Знайти границю функції:

$$8.1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3}.$$

$$8.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}.$$

$$8.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1}.$$

$$8.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}.$$

$$8.5. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}.$$

$$8.6. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}.$$

$$8.7. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}. \text{ (Заміна } x = z^{15}).$$

$$8.8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4}.$$

Відповідь: 1) $\frac{1}{2}$; 2) -3 ; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 5) -2 ; 6) $-\frac{1}{2}$; 7) $\frac{5}{3}$; 8) $\frac{1}{16}$.

✎9. Знайти границю функції:

$$9.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{1 - x - x^2}.$$

$$9.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4 + \sin x}{x - 2}.$$

$$9.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)(1+2x) \cdot \dots \cdot (1+10x)}{x^{10} + 1}.$$

$$9.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

$$9.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^{15} (3x-1)^{31}}{(x^2 + 13x + 4)^{23}}.$$

$$9.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt[3]{8x^3 + x}}{\sqrt{x^2 + 5}}.$$

$$9.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+5)^5 + (x+6)^5 + (x+7)^5}{x^5 + 5^5}.$$

$$9.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4}.$$

$$9.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^{20}(2x+3)^{15}}{(3x+17)^{35}}.$$

$$9.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{20} - \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{20}}{x^{20}}.$$

Відповідь: 1) -2 ; 2) 2 ; 3) $10!$; 4) 1 ; 5) $2^{15} \cdot 3^{31}$; 7) 3 ; 8) $\frac{49}{16}$; 9) $\frac{2^{15}}{3^{35}}$; 10) 2^{20} .

✎10. Знайти границю функції:

$$10.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x + 2}\right).$$

$$10.2. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\right).$$

$$10.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 4x} - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 4}\right).$$

$$10.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2}}} - \sqrt{x^2}\right).$$

$$10.5. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right), m, n \in \mathbb{N}. \text{ (Заміна } x-1=y.)$$

$$10.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} - \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}\right).$$

✎11. Знайти границю функції:

$$11.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

$$11.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{\sin 2x}.$$

$$11.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

$$11.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\arcsin 3x}.$$

$$11.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}.$$

$$11.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x - \sin 2x}.$$

$$11.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}.$$

$$11.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt[4]{x+1} - 1}.$$

$$11.9. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}.$$

11.10.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sin(x-2)}{x^2 - 4} + 2^{\frac{1}{(x-2)^2}} \right).$$

$$11.11. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{1 - 4 \sin^2 x}.$$

$$11.12. \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 8 \cos^3 x}.$$

$$11.13. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - \sqrt[3]{\sin 3x}}{\sqrt{\operatorname{tg} \frac{3x}{2}} - 1}.$$

$$11.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} - \sqrt{\operatorname{tg} 1}}{\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin 1}}.$$

Відповідь: 1) 3; 2) 2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) 0; 6) 0; 7) $\frac{9}{4}$; 8) 16; 9) $\frac{1}{3}$; 10) $+\infty$;

12. Знайти границю функції:

$$12.1. \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}.$$

$$12.2. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}.$$

$$12.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 1}{2^x - 1}.$$

$$12.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x).$$

$$12.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\operatorname{tg} 3x} - 1}{\sin 3x}.$$

$$12.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{2x}.$$

$$12.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - \sqrt{1+x}}{x}.$$

$$12.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x+x^2) + \ln(1-3x+x^2)}{x^2}.$$

$$12.15. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}.$$

$$12.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}.$$

$$12.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}.$$

$$12.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1+\sin x^2} - 1}.$$

$$12.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2+2x)}{\arcsin 2x}.$$

$$12.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 5x}.$$

$$12.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + 4x \right)}{x}.$$

$$12.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1+\sin x^2} - 1}.$$

13. Знайти границю функції:

$$13.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \right)^{x^2}.$$

$$13.2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{1+x} - x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$13.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 3x^4 \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

$$13.4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$13.5. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$13.6. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$13.7. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 6x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

$$13.8. \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+x))^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$13.9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xe^x + 1}{x\pi^x + 1} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$13.10. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{arctg}^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x^2}}.$$

Відповідь: 1) e^8 ; 2) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 3) e^3 ; 4) e ; 5) $\sqrt{e}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 7) e^{-18} ; 8) $e^{\frac{1}{e}}$; 9) $\frac{e}{\pi}$; 10) $\sqrt{e}$.

Практичне заняття № 4

Тема: Функції, неперервні в точці, їх властивості. Точки розриву, їх класифікація

З1. Виходячи з означення ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$), довести неперервність функцій:

$$1.1. y = 3x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}.$$

$$1.3. y = \cos(ax + b), x \in \mathbb{R}.$$

$$1.2. y = \frac{x^3 + x - 1}{2x^2 + 3x - 5}, x \in (2; 3).$$

$$1.4. y = \frac{x^2 \cos x}{1 + \sin^2 x}, x \in \mathbb{R}.$$

З2. Виходячи з означення неперервності функції в термінах „ $\varepsilon - \delta$ ”, довести неперервність функцій:

$$2.1. y = \frac{x+3}{2-3x}, x_0 = \frac{1}{2}.$$

$$2.3. y = \operatorname{tg} x, x_0 \in D(y).$$

$$2.2. y = \sqrt{x}, x_0 \in D(y).$$

$$2.4. y = \frac{1}{x^2}, x_0 \in D(y).$$

З3. Виходячи з означення неперервності функції ($\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$), довести неперервність функцій:

$$3.1. y = x^2 + 3x + 1, x_0 \in \mathbb{R}.$$

$$3.3. y = \arcsin x, x_0 \in (-1; 1).$$

$$3.2. y = 2^x, x_0 \in \mathbb{R}.$$

3.4. $y = \sqrt[3]{x}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

4. Знайти односторонні границі функцій:

4.1. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2, \\ -2x+1, & x > 2, \end{cases} x_0 = 2.$

4.2. $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$, $x_0 = 0.$

4.3. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{|x - 1|}$, $x_0 = 1.$

4.4. $f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$, $x_0 = 0.$

4.5. $f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$, $x_0 = 0.$

4.6. $f(x) = x + \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{2-x}}}$, $x_0 = 2.$

4.7. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ -2x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases} x_0 = 0, x_0 = 1.$

4.8. $f(x) = \frac{\cos x}{3 - 2^{\frac{1}{\sin x}}}$, $x_0 = 0.$

5. Дослідити на неперервність композиції $f \circ g$ і $g \circ f$:

5.1. $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = 1 + x^2.$

5.2. $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $g(x) = x(1 - x^2).$

5.3. $f(x) = \operatorname{sgn}(x - 1)$, $g(x) = \operatorname{sgn}(x + 1).$

6. Знайти множину точок неперервності функцій:

6.1. $f(x) = x^2 - 2x - 3.$

6.4. $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}.$

6.2. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^3 - 3x^2 - 3x + 2}.$

6.5. $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x.$

6.3. $f(x) = \sqrt{9 - 4x^2}.$

6.6. $f(x) = \sqrt{\sin^3 x}.$

$$6.7. f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

$$6.8. f(x) = x^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}.$$

✎7. Виходячи з неперервності показникової функції, довести неперервність функцій:

$$7.1. y = \operatorname{ch} x.$$

$$7.3. y = \operatorname{cth} x.$$

$$7.2. y = \operatorname{th} x.$$

$$7.4. y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

✎8. Виходячи з неперервності тригонометричних функцій, довести неперервність обернених тригонометричних функцій:

$$8.1. y = \arcsin x.$$

$$8.3. y = \arctg x.$$

$$8.2. y = \arccos x.$$

$$8.4. y = \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x.$$

✎9. Довести, що якщо $f(x)$ – неперервна функція, то неперервними будуть:

$$9.1. y = |f(x)|.$$

$$9.2. y = f(|x|).$$

✎10. Знайти значення a , при якому функція $f(x)$ буде неперервною:

$$10.1. f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n - 1}{x}, & x \neq 0, n \in \mathbb{N}, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

$$10.2. f(x) = \begin{cases} x \operatorname{ctg} 2x, & x \neq 0, |x| < \frac{\pi}{2}, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

$$10.3. f(x) = \begin{cases} (\pi + 2x) \operatorname{tg} x, & x \neq -\frac{\pi}{2}, -\pi < x < \frac{\pi}{2}, \\ a, & x = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$10.4. f(x) = \begin{cases} \frac{c^x - 1}{x}, & x \neq 0, c > 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

$$10.5. f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

$$10.6. f(x) = \begin{cases} x \ln x^2, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

$$10.7. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ a(x-1), & x > 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

11. Дослідити функцію на неперервність, встановити характер точок розриву і побудувати графік:

$$11.1. y = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 0, \\ x - 1, & x > 0. \end{cases}$$

$$11.2. y = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x < 0, \\ 5x - x^2, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$11.3. y = \begin{cases} 1 - x^3, & x < 0, \\ (x-1)^3, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4 - x, & x > 2. \end{cases}$$

$$11.4. y = \begin{cases} 2^x, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$11.5. y = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ 1, & x = \frac{\pi}{4}, \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16}, & \frac{\pi}{4} < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$11.6. y = \begin{cases} -x, & x \leq -1, \\ \frac{2}{x-1}, & x > -1. \end{cases}$$

$$11.7. y = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x < 0, \\ (x+1)^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1 - x, & x > 2. \end{cases}$$

$$11.8. y = x - E(x).$$

$$11.9. y = \frac{1}{x - E(x)}.$$

$$11.10. y = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{x^2 - x}.$$

12. Знайти точки розриву функції, встановити їх рід, довизначити функцію в точках усувного розриву, знайти стрибки в точках розриву I роду:

$$12.1. y = \frac{x}{x^2 + x - 6}.$$

$$12.2. y = \frac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x}.$$

$$12.3. y = \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}.$$

$$12.4. y = \frac{x}{\cos x}.$$

$$12.5. y = \frac{\arcsin x}{\sin 2x}.$$

$$12.6. y = \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{x^3 - x^2}.$$

$$12.7. y = \frac{2}{1 - 2^x}.$$

$$12.8. y = \lg(x^2 + 3x).$$

$$12.9. y = \frac{1}{\ln|x-1|}.$$

$$12.10. y = \operatorname{sgn}(x^2 - 2x - 3).$$

$$12.11. y = \operatorname{sgn}(\cos x).$$

$$12.12. y = \arcsin \frac{1}{x}.$$

$$12.13. y = (-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}.$$

$$12.14. y = \operatorname{arccctg} \frac{1}{x^2}.$$

$$12.15. y = \frac{3^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}}.$$

✎13. Дослідити на неперервність і побудувати графік функції $f(x)$:

$$13.1. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^n}.$$

$$13.2. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}.$$

$$13.3. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n x.$$

$$13.4. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + xe^{nx}}.$$

$$13.5. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg}(n \operatorname{ctg} x).$$

$$13.6. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + x^{2n}}.$$

📖 Практичне заняття № 5

Тема: Означення похідної. Таблиця похідних. Правила диференціювання

✎1. Користуючись означенням похідної, обчислити похідні таких функцій:

а) $y = 3x^2 - 4x$. б) $y = \frac{1}{x}$. в) $y = \sqrt{x}$. г) $y = \cos 3x$.

д) $y = \frac{1}{x^2 + 2}$.

✎2. Дослідити на диференційовність функції:

а) $f(x) = |x|$. б) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases} \quad \text{г) } f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1. \end{cases}$$

3. Користуючись загальними правилами диференціювання, знайти похідні від таких функцій:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = x\sqrt{x}. & \text{б) } y = \sqrt[3]{4x\sqrt{5x}}. \\ \text{в) } \varphi(t) = \frac{\sqrt{t} \cdot \sqrt[3]{t}}{2t^2 \cdot \sqrt{t^3}}. & \text{г) } y = \frac{2}{3}x^3 - 6x^2 + 7x - 8. \\ \text{д) } y = \operatorname{arctg} x + x + \operatorname{arcctg} x. & \text{е) } y = \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}. \\ \text{є) } y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}. & \text{ж) } y = (3x^2 - 7x + 2)(1 - 2x - 6x^3). \\ \text{з) } y = 2x \cos x. & \text{и) } y = \log_2 x \cdot \ln x \cdot \log_3 x. \\ \text{і) } y = x^2 \operatorname{arctg} x. & \text{ї) } y = \frac{2x^2 - 5}{x + 5}. \\ \text{й) } y = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}. \end{array}$$

4. Користуючись загальними правилами диференціювання, знайти похідні від таких функцій:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } f(x) = 2x \cos x. & \text{б) } f(x) = e^x (x^2 - 4x + 10). \\ \text{в) } f(x) = x^2 \operatorname{ctg} x & \text{в) } f(x) = x^2 \cos x \\ \text{г) } f(x) = x^8 \operatorname{ctg} x. & \text{д) } f(x) = \sqrt[3]{x} \log_3 x. \\ \text{е) } f(x) = 12x^2 \cdot \sqrt[3]{x^7} \cdot \ln x. & \text{є) } f(x) = x^7 \cdot \operatorname{ctg} x \cdot 2^x. \\ \text{ж) } f(x) = (x-1)(x^2+5) \sin x. & \text{з) } f(x) = x^3 \sin x \cdot \ln x. \\ \text{и) } y = \frac{1-x^3}{1-x^5}. & \text{і) } y = \frac{2}{(1-x^2)(1+x^4)}. \\ \text{ї) } y = \frac{8-3\sqrt{x^3}+2x}{1+6x\sqrt{x}-3x^2}. & \text{й) } y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\arcsin x}. \end{array}$$

5. Обчислити значення похідної в заданій точці:

$$\text{а) } y = \frac{5-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}, x_0 = 1. \quad \text{б) } y = \frac{2^x}{\sin x}, x_0 = 5.$$

$$\text{в)} y = \frac{\sqrt[3]{x^5}}{\operatorname{tg} x}, x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{г)} y = \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x^2}}, x_0 = 7.$$

$$\text{д)} y = \frac{\log_4 x}{x^2}, x_0 = 4.$$

$$\text{е)} y = \frac{6x^5}{\log_2 x}, x_0 = 2.$$

$$\text{є)} y = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}, x_0 = 2.$$

$$\text{ж)} y = \frac{x}{\arcsin x}, x_0 = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{з)} y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}, x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

✎ 6. Знайти похідні функцій:

$$\text{а)} y = (x^3 - 2x^2 + 5)^8.$$

$$\text{б)} y = \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x} \right)^{20}.$$

$$\text{в)} y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

$$\text{г)} y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$\text{д)} y = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1}}.$$

$$\text{е)} y = 3^{\arctg(x+\pi)}.$$

$$\text{є)} y = \sin \cos^2 x \cdot \cos \sin^2 x.$$

$$\text{ж)} y = \cos(3 \arccos x).$$

✎ 7. Знайти похідні функцій (логарифмічне диференціювання):

$$\text{а)} y = (x^2 + 1)^{2x}.$$

$$\text{б)} y = x^{\frac{x}{\ln^2 x}}.$$

$$\text{в)} y = a^{a^a} + a^{a^x} + a^{x^a} + x^{a^a} + a^{x^x} + x^{x^x}. \quad \text{г)} y = (\arcsin^2 x)^{\arctg x}.$$

$$\text{д)} y = (chx)^{e^x}.$$

$$\text{е)} y = \sqrt[3]{\arctg \sqrt[5]{\cos \ln^3 x}}.$$

✎ 8. Знайти похідну функції, заданої параметрично:

$$\text{а)} x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}, y = \sqrt{1 - \sqrt{t}}, t_0 = \frac{1}{64}; M_0(1; 1).$$

$$\text{б)} x = \sin^2 t, y = \cos^2 t, t_0 = \frac{\pi}{4}; M_0\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right).$$

$$\text{в)} x = a \cdot ch t, y = b \cdot sh t, t_0 = \ln 2; M_0(a \cdot ch 1; b \cdot sh 1).$$

$$\text{г)} x = \ln \sin \frac{t}{2}, y = \ln \sin t, 0 < t < \pi.$$

$$\text{д)} x = t \cdot \ln t, y = \frac{\ln t}{t}, t_0 = 1.$$

$$\text{е)} x = a(sh t - t), y = a(ch t - 1), t_0 = 0.$$

є) $x = t^3 - 3\pi$, $y = t^3 - 6 \operatorname{arctg} t$, $t_0 = 1$.

Практичне заняття № 6

Тема: Геометричний і механічний зміст похідної. Формула Тейлора. Застосування похідної при знаходженні границь функцій у точці

1. Написати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції:

а) $y = 2 - 4x - 3x^2$, $x_0 = -2$.

б) $y = 2 \cos \frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$.

в) $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $x_0 = 2$.

г) $y = xe^{-x}$, $x_0 = 0$.

д) $y = 2 \cos \frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$.

е) $y = x^2 e^{-x}$, $x_0 = 1$.

є) $y = \sqrt{2x - 1}$, $x_0 = 5$.

ж) $y = 2x^3 - 3x$, $x_0 = 1$.

з) $y = \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

и) $y = \frac{3x - 4}{\sqrt[3]{x + 4}}$, $x_0 = 1$.

і) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ в точках перетину з віссю Ox .

ї) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

2. Знайти абсцису точки, в якій дотична до графіка функції $y = 5x^5 - 3x^3 + x + 1$ паралельна прямій $y = x$.

3. Знайти кути, під якими перетинаються лінії:

а) $x + y - 4 = 0$ і $2y = 8 - x^2$.

б) $x^2 + 4y^2 = 4$ і $4y = 4 - 5x^2$.

в) $y = \sin x$ і $y = \cos x$.

г) $y = x^2$ і $x = y^2$.

д) $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$ і $x = 1$.

е) $y = e^{x/2}$ і $x = 2$.

є) $x^2 + y^2 = 5$ і $y^2 = 4x$.

ж) $y^2 = 2x^3$ і $64x - 48y - 11 = 0$.

4. Точка здійснює гармонічні коливання за законом $x = 15 \sin 3t$. Знайти миттєву швидкість точки в момент часу t_0 .

5. Кількість радіоактивної речовини в момент часу t виражається

формулою $m = M \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, де T – так званий період піврозпаду, а M –

початкова кількість речовини (в момент часу $t=0$). Знайти миттєву швидкість розпаду речовини в момент часу t_0 .

❧6. Довжина вертикально поставленої драбини рівна 5 м. Нижній кінець драбини починає відсуватися від стіни зі сталою швидкістю 2 м/с. З якою швидкістю опускається в момент часу t верхній кінець драбини? Чому дорівнює його прискорення в цей момент часу?

❧7. Резервуар, що має форму півкулі, заповнюється водою. Вважаючи, що радіус кулі рівний R_0 , а швидкість його заповнення v_0 , визначити швидкість підняття рівня води в резервуарі.

Розклад основних елементарних функцій за формулою Тейлора.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n), \quad |x| < 1$$

❧8. Розкласти $f(x)$ в околі точки x_0 по формулі Тейлора до n -го порядку включно:

а) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$; $n = 3$.

б) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$, $x_0 = 1$; $n = 4$.

$$\text{в)} f(x) = x^3 \ln x, x_0 = 1; n = 4.$$

$$\text{г)} f(x) = \frac{x}{x-1}, x_0 = 2; n = 3.$$

$$\text{д)} f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}, x_0 = 1; n = 4.$$

$$\text{е)} f(x) = (\sin x)^{\sin x}, x_0 = 1; n = 2.$$

$$\text{є)} f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x, x_0 = 1; n = 2.$$

$$\text{ж)} f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = -1; n = 5.$$

9. Функцію $f(x)$ подати у вигляді формули Маклорена з залишковим членом $o(x^n)$, якщо:

$$\text{а)} f(x) = (x+5)e^{2x}.$$

$$\text{б)} f(x) = \ln \frac{3+x}{2-x}.$$

$$\text{в)} f(x) = e^x \ln(1+x), n = 4.$$

$$\text{г)} f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 + x - 12}.$$

$$\text{д)} f(x) = \ln \frac{1+2x}{1-x}.$$

$$\text{е)} f(x) = (1+x^2) \ln \sqrt{1+x}.$$

$$\text{є)} f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{9-6x+x^2}}.$$

$$\text{ж)} f(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x+4}.$$

10. За допомогою формули Тейлора наближено обчислити значення з точністю до ε :

$$\text{а)} \sqrt[5]{250}, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$\text{б)} \sin 18^\circ, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$\text{в)} \operatorname{arctg} 0,8, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$\text{г)} \arcsin 0,45, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$\text{д)} (1,1)^{1,2}, \varepsilon = 10^{-5}.$$

$$\text{е)} \ln(1,1), \varepsilon = 10^{-4}.$$

11. Знайти границю за допомогою формули Тейлора:

$$\text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2 \operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}.$$

$$\text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{2}}{\ln \frac{1+x}{1-x} - 2x}.$$

$$\text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt[5]{1 - \frac{x^2}{2}}}{\operatorname{ch}(\sin x) - e^{\frac{x^2}{2}}}.$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - x + \frac{x^3}{6}}{x - \operatorname{th} x}.$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

$$\text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

$$\text{є)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

$$\text{ж)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos x + \arcsin x - 3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}. \quad \text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - x \operatorname{ctg} x}{x \sin x}.$$

12. Знайти границю функції, використовуючи, де це можливо, правила Лопітала:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}.$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}.$$

$$в) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x} + 1}{\sqrt{2+x} + x}.$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}.$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{\ln \cos(2x^2 - x)}.$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}.$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}.$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}.$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

$$\text{и) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$\text{ї) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^2}{\sin^6 2x}.$$

Практичне заняття № 7

Тема: Повне дослідження функції і побудова її графіка

1. Знайти проміжки монотонності та екстремуми функції $f(x)$ на області визначення:

$$a) f(x) = x^3 + 3x^2.$$

$$е) f(x) = (x+2)^2(x-3)^3.$$

$$б) f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5.$$

$$е) f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}.$$

$$в) f(x) = x^4(1-x)^3.$$

$$ж) f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}.$$

$$г) f(x) = (x^3 - 10)(x+5)^2.$$

$$д) f(x) = x^2(x-12)^2.$$

$$3) f(x) = \frac{10}{8x^2 - 24x + 23}.$$

$$и) f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}.$$

$$i) f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$ii) f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

к)

$$f(x) = (x-2) \cos \pi x - \frac{1}{\pi} \sin \pi x.$$

$$л) f(x) = (x+1) \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4} x^2 - x.$$

$$м) f(x) = (x-1)e^{3x}.$$

$$н) f(x) = (3-x^2)e^x.$$

$$о) f(x) = x^3 e^{-4x}.$$

$$п) f(x) = x^4 e^{-x^2}.$$

2. Довести тотожності:

$$а) \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos^2 2x.$$

$$б) \cos^4 x - \frac{1}{8} \cos 4x = 2 \cos^2 x - \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{5}{8}.$$

$$в) \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$г) \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \leq 0.$$

$$д) \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi - 2 \operatorname{arctg} x, & x \geq 1, \\ 2 \operatorname{arctg} x, & -1 \leq x \leq 1, \\ -\pi - 2 \operatorname{arctg} x, & x \leq -1. \end{cases}$$

$$е) \arcsin x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\arccos \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

3. Довести нерівності:

$$а) e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad x > 0.$$

$$с) f(x) = x + \sqrt{3-x}.$$

$$т) f(x) = \sqrt{x} \ln x.$$

$$у) f(x) = \frac{1}{\ln(x^4 + 4x^3 + 30)}.$$

ф)

$$f(x) = x^2 - 4x - 1 - \ln(x^2 - 4x + 4).$$

$$ц) f(x) = \ln(x^2 - 1) - 2 \operatorname{arctg} x.$$

$$ч) f(x) = x + \sqrt{3-x}.$$

$$ш) f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x}.$$

$$щ) f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2 (x-4)^2}.$$

$$ю) f(x) = \sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}.$$

$$б) x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \quad x > 0.$$

$$\begin{array}{ll}
 \text{в)} \quad x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad x > 0, & \text{г)} \quad \operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \\
 \text{д)} \quad \sin x + \operatorname{tg} x > 2x, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), & \text{е)} \quad \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} > \frac{x}{y}, \quad 0 < y < x < \frac{\pi}{2}, \\
 \text{е)} \quad \frac{\cos y}{2 + \sin y} < \frac{\cos x}{2 + \sin x}, \quad 0 < x < y < \frac{\pi}{2}, & \\
 \text{ж)} \quad 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}, \quad x > 0, & \\
 \text{з)} \quad \ln(1+x) > \frac{x}{1+x}, \quad x > 0, & \text{и)} \quad \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}, \quad x, y \geq 0, \\
 \text{і)} \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, & \text{ї)} \quad \operatorname{arctg} x \leq x, \quad x \geq 0.
 \end{array}$$

4. Знайти найбільше і найменше значення функції на заданому проміжку:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а)} \quad y = x^3 + 3x^2 - 72x + 90, \quad [-5; 5]. & \text{ж)} \quad y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}, \quad [0; 1]. \\
 \text{б)} \quad y = x^3 - 6x^2 + 9, \quad [-1; 2]. & \text{з)} \quad y = 4\sin 2x - 2\sin 4x, \quad [0; \pi]. \\
 \text{в)} \quad y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \quad [-1; 2]. & \text{и)} \quad y = \sin 2x - x, \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \\
 \text{г)} \quad y = x + \sqrt{x}, \quad [0; 4]. & \text{і)} \quad y = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x, \quad [\pi; 2\pi]. \\
 \text{д)} \quad y = 1 - 3x^2 - x^3, \quad [-1; 1]. & \text{ї)} \quad y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}, \quad [0; 1]. \\
 \text{е)} \quad y = x^3 - 2x|x-2|, \quad [0; 3]. & \\
 \text{е)} \quad y = x + \frac{4}{(x-2)^2}, \quad [0; 5]. & \\
 \text{к)} \quad y = 2\ln^3 x - 9\ln^2 x + 12\ln x, \quad \left[e^{\frac{3}{4}}; e^3\right]. & \\
 \text{л)} \quad y = |x^2 + 2x - 3| + 1,5\ln x, \quad [0,5; 4]. &
 \end{array}$$

5. Знайти інтервали опуклості і точки перегину функції:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а)} \quad y = 2x^4 - 3x^2 + x - 1. & \text{е)} \quad y = \frac{1}{1-x^2}. \\
 \text{б)} \quad y = x^5 - 10x^2 + 3x. & \text{е)} \quad y = \frac{x^3}{12+x^2}. \\
 \text{в)} \quad y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5. & \text{ж)} \quad y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}. \\
 \text{г)} \quad y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50. & \\
 \text{д)} \quad y = (x+2)^6 + 2x + 2. &
 \end{array}$$

$$3) y = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}, a > 0.$$

$$и) y = \sqrt[3]{x+3}.$$

$$і) y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}.$$

$$ї) y = \ln(1 + x^2).$$

$$ж) y = x \operatorname{arctg} x.$$

$$3) y = (x+1)^4 + e^x.$$

$$й) y = x^4(12 \ln x - 7).$$

$$к) y = x^4(12 \ln x - 7).$$

$$л) y = e^{\operatorname{arctg} x}.$$

✎6. Довести нерівності:

$$а) \frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^n, x > 0, y > 0, n \in \mathbb{N}.$$

$$б) \frac{e^x + e^y}{2} \geq e^{\frac{x+y}{2}}.$$

$$в) x \ln x + y \ln y \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, x > 0, y > 0.$$

$$г) \sqrt{\sin x \sin y} \leq \sin \frac{x+y}{2}, x, y \in (0; \pi).$$

$$д) e^{\frac{x+y}{2}} + 2 \leq \sqrt{(e^x + 2)(e^y + 2)}.$$

$$е) \frac{2(x+y)}{2-(x+y)} \geq \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y}, x > 1, y > 1.$$

$$є) \cos \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \geq \frac{1}{2} (\cos x^2 + \cos y^2), x, y \in \left[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right].$$

✎7. Знайти асимптоти кривих:

$$а) y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}.$$

$$б) y = xe^x.$$

$$в) y = x + \frac{\sin x}{x}.$$

$$г) y = x \operatorname{arctg} x.$$

$$д) y = \ln(4 - x^2).$$

$$е) y = \frac{\sqrt{4x^4 + 1}}{|x|}.$$

$$є) y = 3\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}.$$

$$ж) y = \frac{2x^2 - 9}{x + 2}.$$

$$з) y = \frac{x^5}{x^4 - 1}.$$

$$и) y = xe^{-x}.$$

$$і) y = x \operatorname{arcsctg} x.$$

$$ї) y = x + \frac{\ln x}{x}.$$

✎8. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$а) y = x^3 - 3x^2 + 4.$$

$$\text{б)} y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2.$$

$$\text{в)} y = 3x^2 - x^3.$$

$$\text{г)} y = \frac{x^3}{4(2-x)^2}.$$

$$\text{д)} y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

$$\text{е)} y = \frac{x^4}{x^3-1}.$$

$$\text{є)} y = \frac{x}{x^2-1}.$$

$$\text{ж)} y = \frac{x^3 + x + 2}{x}.$$

$$\text{з)} y = x^3 \sqrt{(x+1)^2}.$$

$$\text{и)} y = x \sqrt{4-x^2}.$$

$$\text{ї)} y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}.$$

$$\text{й)} y = x e^{-x}.$$

$$\text{к)} y = x + e^{-x}.$$

$$\text{л)} y = \frac{e^x}{1+x}.$$

$$\text{м)} y = \ln \frac{x}{x-1}.$$

$$\text{н)} y = \ln(4-x^2).$$

$$\text{о)} y = x^2 e^{-x}.$$

$$\text{п)} y = x - \ln(x+1).$$

$$\text{р)} y = x + \frac{\ln x}{x}.$$

📖 Практичне заняття № 8

§ Контрольна робота № 1 (зразок)

1. Обчислити границі числових послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} \right); \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n+1}.$$

2. Обчислити границю функції:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{x + \arcsin x^3}.$$

3. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції в точці x_0 : $y = 2 \cos \frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$.

4. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

$$y = \frac{x}{x^2-1}.$$

Практичне заняття № 9

Тема: Первісна та невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування

✎1. Перевірити, чи функція F є первісною для функції f на проміжку X :

а) $F(x) = x^3 + x^2 + 3x + 4$, $f(x) = 3x^2 + 2x + 3$, $X = \mathbb{R}$;

б) $F(x) = -\frac{1}{x^2} + 5$, $f(x) = \frac{2}{x^3}$, $X_1 = (2; 5)$, $X_2 = (-1; 1)$;

в) $F(x) = \frac{1}{8} \arcsin^8 x$, $f(x) = \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}$, $X = (-1; 1)$;

г) $F(x) = \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} + 3$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}}$, $X = \mathbb{R}$;

✎2. Обчислити інтеграли:

а) $\int x(x+3)(x-2)dx$; б) $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}\sqrt{x}} dx$;

в) $\int \left(\frac{8}{x^3} + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x} \right) dx$; г) $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x}} dx$;

д) $\int 2^x \cdot 3^x \cdot e^x dx$; е) $\int \frac{2^x + 3^x}{6^x} dx$.

✎3. Обчислити інтеграли $\left(\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \right)$:

а) $\int (4x-3)^7 dx$; б) $\int \cos(ax+b)dx$, $a \neq 0$;

в) $\int \frac{dx}{(2x+5)^4}$; г) $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)dx$;

д) $\int \sqrt{ax+bdx}$; е) $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)}$, $a \neq 0$.

✎4. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{(2x+7)dx}{x^2+7x+8}$; б) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$;

в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x}$; г) $\int \frac{(tg^2 x - 2tg x + 1)dx}{\cos^2 x}$;

$$д) \int \frac{x dx}{(1-x^2)^2};$$

$$е) \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{2x} + 2}}.$$

5. Обчислити інтеграли:

$$а) \int x \cdot 2^x dx;$$

$$б) \int x^5 \ln x dx;$$

$$в) \int x^2 \cos x dx;$$

$$г) \int (ax^2 + bx + c) \sin 2x dx.$$

Практичне заняття № 10

Тема: Інтегрування раціональних функцій

1. Обчислити інтеграли:

$$а) \int \frac{x-4}{x^2-5x+6} dx;$$

$$б) \int \frac{x^3-7x+18}{x^2-3x+2} dx;$$

$$в) \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx;$$

$$г) \int \frac{3x-1}{x^3-x^2-2x} dx;$$

$$д) \int \frac{2x^2+3x+8}{(x+1)(2x+3)(3x+4)} dx;$$

$$е) \int \frac{x^7-5x^5+7x^4+4}{x^5-5x^3+4x} dx.$$

2. Обчислити інтеграли:

$$а) \int \frac{x^4}{(x+1)^2(x-2)} dx;$$

$$б) \int \frac{x^5+x}{(x+2)^2(x+3)^2} dx;$$

$$в) \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3};$$

$$г) \int \frac{2x^4+3x^2+x-1}{x^3-3x^2} dx.$$

3. Обчислити інтеграли:

$$а) \int \frac{dx}{x^2+4x+9};$$

$$б) \int \frac{2x+3}{x^2+8x+20} dx;$$

$$в) \int \frac{(x+1)dx}{(x^2-6x+5)(x^2+6x+10)}; \quad г) \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx;$$

$$д) \int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4} dx;$$

$$е) \int \frac{3x+5}{x(x^2+1)^2} dx;$$

$$е) \int \frac{3x^4-4}{x^2(x^2+2)^3} dx;$$

$$ж) \int \frac{x(2x^2+2x-1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx.$$

4. Обчислити інтеграли методом Остроградського:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \int \frac{x^4 + x^3 + x + 4}{(x^3 + 1)^2} dx; & \text{б) } \int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx; \\ \text{в) } \int \frac{x}{(x-1)^2 (x+1)^3} dx; & \text{г) } \int \frac{2x+1}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx; \quad \text{д) } \int \frac{(4x^2 - 8x) dx}{(x-1)^2 (x^2 + 1)^2}. \end{array}$$

Практичне заняття № 11

Тема: Інтегрування деяких ірраціональних функцій

 1. Обчислити інтеграли $(\int R(x, x^{r_1}, \dots, x^{r_k}) dx)$:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x^2}}; & \text{б) } \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3 + 1}}; \\ \text{в) } \int \frac{x dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}; & \text{г) } \int \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{5}{4}}\right) dx}{x^{\frac{1}{2}+1}}. \end{array}$$

 2. Обчислити інтеграли

$$\begin{array}{l} \left(\int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\right) dx; \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx \right); \\ \text{а) } \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x}; \quad \text{б) } \int \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} dx; \\ \text{в) } \int \frac{x \sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} dx; \quad \text{г) } \int \frac{dx}{x \left(2 + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right)}; \\ \text{д) } \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3 (x+2)^5}}; \quad \text{е) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2 (x-1)^4}}. \end{array}$$

 3. Обчислити інтеграли за допомогою підстановок Ейлера:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}; & \text{б) } \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx; \\ \text{в) } \int \frac{x-1}{(x^2 + 2x)^{\frac{3}{2}}} dx; & \text{г) } \int \frac{x dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}; \end{array}$$

$$\text{д) } \int \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{(x+1)^2} dx, \quad x > -1; \quad \text{е) } \int \frac{dx}{\left(1 + \sqrt{x^2 + x}\right)^2}.$$

4. Обчислити інтеграли (частинні випадки квадратичних ірраціональностей):

$$\text{а) } \int \frac{x^{10} dx}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 7}};$$

$$\text{в) } \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 2}};$$

$$\text{г) } \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2 - 2x + 1}};$$

$$\text{д) } \int \frac{x^3 dx}{(x+1)\sqrt{1 + 2x - x^2}};$$

$$\text{е) } \int \frac{x^2 dx}{(4 - 2x + x^2)\sqrt{2 + 2x - x^2}}.$$

5. Обчислити інтеграли $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ за допомогою підстановок Чебишева:

$$\text{а) } \int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^3 dx;$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt{x} dx}{(1 + \sqrt[3]{x})^2};$$

$$\text{в) } \int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1 + 3\sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 + 2x^2}};$$

$$\text{д) } \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}};$$

$$\text{е) } \int x\sqrt{1 + x^4} dx;$$

$$\text{є) } \int \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} dx;$$

$$\text{ж) } \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}{x} dx.$$

Практичне заняття № 12

Тема: Інтегрування деяких трансцендентних функцій

1. Обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int \sin 2x \sin 3x dx;$$

$$\text{б) } \int \sin 7x \sin 15x dx;$$

$$\text{в) } \int \sin 3x \cos 8x dx;$$

$$\text{г) } \int \cos 4x \cos 9x dx;$$

$$\text{д) } \int \sin x \sin 2x \sin 3x dx;$$

$$\text{е) } \int \cos x \cos 3x \cos 5x dx.$$

2. Обчислити інтеграли, використовуючи універсальну підстановку $\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \right)$:

а) $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x};$

б) $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5};$

в) $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx;$

г) $\int \frac{(1 + \sin x) dx}{\sin x (1 + \cos x)}.$

3. Обчислити інтеграли, використовуючи тригонометричні підстановки:

а) $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x};$

б) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x};$

в) $\int \sin^7 2x \cos^5 2x dx;$

г) $\int \frac{\sin 3x dx}{\cos x};$

д) $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^3 x};$

е) $\int \frac{dx}{\cos^3 x};$

є) $\int \frac{\sin^2 x \cos x dx}{\sin^4 x - 1};$

ж) $\int \frac{(\cos^5 x + 2 \cos^3 x) dx}{\sin^4 x + \sin^2 x}.$

4. Обчислити інтеграли, використовуючи тригонометричні підстановки:

а) $\int \frac{\cos^2 x \sin^2 x dx}{\sin^8 x + \cos^8 x};$

б) $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x};$

в) $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x};$

г) $\int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^2 x};$

д) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x};$

е) $\int \operatorname{ctg}^6 x dx;$

є) $\int \frac{(2 \operatorname{tg} x + 3) dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x};$

ж) $\int \frac{(3 \cos x - 8 \sin x) dx}{7 \cos x + 4 \sin x};$

з) $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x};$

и) $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$

5. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{x e^x dx}{(x+1)^2};$

б) $\int x e^{\sqrt{x}} dx;$

в) $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x dx;$

г) $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x dx}{\operatorname{sh}^4 x}.$

Практичне заняття № 13

Тема: Означення та основні властивості визначеного інтеграла.

Формула Ньютона-Лейбніца

З1. Обчислити визначені інтеграли як границі інтегральних сум Рімана, розбивши відрізок інтегрування на n рівних частин:

а) $\int_0^1 e^x dx$; б) $\int_0^2 x^2 dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$.

З2. Користуючись геометричним змістом інтегралу обчислити:

а) $\int_1^2 \sqrt{2x - x^2} dx$; б) $\int_0^2 \sqrt{4x - x^2} dx$;
в) $\int_{-1}^5 \sqrt{5 + 4x - x^2} dx$; г) $\int_{-1}^2 ||x| - 1| dx$.

З3. Довести, що кожний з інтегралів дорівнює нулю:

а) $\int_{-3}^3 x\sqrt{9 - x^2} dx$; б) $\int_{-10}^{10} \lg(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$;
в) $\int_{-2}^2 (|x - 1| + |x + 1| - 2|x|) dx$; г) $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx$.

З4. Оцінити інтеграли:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}}$;
в) $\int_0^1 \frac{x^9 dx}{\sqrt{1 + x}}$; г) $\int_{100}^{200} \frac{x^3 dx}{x^4 + x + 1}$.

З5. Обчислити інтеграли, користуючись формулою Ньютона-Лейбніца:

а) $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx$; б) $\int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx$;
в) $\int_1^2 \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2} dx$; г) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^7 - 2x^5 + 3x^3 - x + 1}{\cos^2 x} dx$.

✎6. Обчислити інтеграли, користуючись правилом заміни змінної:

а) $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}};$

б) $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}};$

в) $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}};$

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}.$

✎7. Обчислити інтеграли, користуючись формулою інтегрування частинами:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{arctg} x dx;$

б) $\int_1^2 x^3 \ln x dx;$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin x dx;$

г) $\int_0^1 e^x \cos x dx.$

📖 Практичне заняття № 14

Тема: Застосування визначеного інтеграла

✎1. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій:

а) $y = x^3, x = 1, x = 3;$

б) $y = x^2 + 4x, y = x + 4;$

в) $y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = 3x;$

г) $y = x^2 + 1, y = \frac{1}{2}x^2 + 1, x = 1, x = 2;$

д) $y = -x^2 - 4x, y = 1, x = -3, x = -1;$ е) $xy = 4, x + y - 5 = 0.$

✎2. Знайти довжину кривої:

а) $y = 2x^{\frac{3}{2}}, 0 \leq x \leq 2\sqrt{3};$

б) $y = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}, 0 \leq x \leq 9;$

в) $y = x^2 - 2x + 2, -1 \leq x \leq 1;$

г) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, 1 \leq x \leq 2.$

✎3. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими, навколо осі l :

а) $y = 2x - x^2, y \geq 0, l: Ox; l: Oy;$

б) $y = x^2 + 1, x = 0, x = 1, y = 0;$

в) $y = 2x, y = x + 3, x = 0, x = -1;$

г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad l: Ox; \quad l: Oy;$

д) $x^2 + (y-b)^2 = a^2, \quad l: Ox.$

4. Знайти статичні моменти M_x та M_y однорідної кривої:

а) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0;$

б) $y^2 = 2x, \quad 0 \leq x \leq 2;$

в) $x = a \sin^3 t, \quad y = b \cos^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$

г) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$

д) $\rho = 2a \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$

е) $\rho = ae^\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

5. Знайти координати центра мас однорідної кривої:

а) $x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad |\varphi| \leq \alpha \leq \pi;$

б) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0;$

в) $y = ach\left(\frac{x}{a}\right), \quad |x| \leq b;$

г) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y, \quad 1 \leq y \leq 2;$

д) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$

6. Знайти статичні моменти M_x та M_y однорідної фігури, обмеженої кривими:

а) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad a > 0, \quad b > 0;$

б) $y = \cos x, \quad |x| \leq \frac{\pi}{2}, \quad y = 0;$

в) $y = x^2, \quad y = \sqrt{x};$

г) $x = \frac{2}{1+x^2}, \quad y = x^2, \quad x = 0, \quad x \geq 0;$

д) $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$

е) $\rho = a(1 + \cos \varphi), \quad |\varphi| \leq \pi;$

є) $\rho = a\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$

7. Знайти координати центра мас однорідної фігури, обмеженої кривими:

а) $y = h \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), y = 0, h > 0, a > 0;$

б) $y^2 = \frac{x^3}{a}, x = a, y = 0, a > 0, y \geq 0;$

в) $y = a \cdot \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} \right), y = 0, |x| = b, a > 0;$

г) $y = \frac{2}{\pi} x, y = \sin x, y = 0;$

д) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi;$

Практичне заняття № 15

Контрольна робота № 2 (зразок)

1. Обчислити інтеграл від дробово-раціональної функції:

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 8x + 20} dx.$$

2. Обчислити інтеграл від тригонометричної функції:

$$\int \sin^7 2x \cos^5 2x dx.$$

3. Обчислити інтеграл, користуючись формулою інтегрування частинами:

$$\int_1^2 x^3 \ln x dx.$$

4. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими: $y = 2 - x^2, y = x.$

Список рекомендованої літератури

Основна

1. Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. I семестр. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної (для студентів предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика)). Вінниця, 2023. 72 с.
2. Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. II семестр. Інтегральне числення функції однієї змінної. Числові та функціональні ряди (для студентів предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика)). Вінниця, 2024. 25 с.
3. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу. Вступ в аналіз. Диференціальне числення функції однієї змінної. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: «Едельвейс і К», 2008. 299 с.
4. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу. Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер», 2013. 289 с.

Додаткова

1. Безклубенко, І. С., Баліна О. І. Математичний аналіз: підручник: у 2 ч. Ч. 1. Київ: КНУБА, 2024. 224 с.
2. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.І. Математичний аналіз: Підручник. Київ: Знання, 2008. 421 с.
3. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Київ: Вища школа, 1994. Ч. 1. 423 с.
4. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Київ: Вища школа, 1995. Ч. 2. 509 с.
5. Щерба А. І., Нестеренко А. М., Мірошкіна І. В., Щерба В. О. Математичний аналіз: навч. посіб. [Електронний ресурс]. Черкаси: ЧДТУ, 2023. 513 с.

Навчальне видання

Бак Сергій Миколайович

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
І семестр

Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне
числення функції однієї змінної

для студентів предметної спеціальності
А4.09 Середня освіта (Інформатика)

Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times.
Ум. друк. арк. 2,1