

КОМПАКТНІ МНОЖИНИ ГІПЕРКОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Анотація. У роботі означено компактну множину гіперкомплексних чисел. Мета цієї роботи - дослідити умови компактності множини гіперкомплексних чисел.

Ключові слова: Гіперкомплексні числа, нормована алгебра, компактна множина.

Множина $\{xe_0 + ye_1 + ze_2 | x, y, z \in R\}$, яку позначимо V_3 - алгебра гіперкомплексних чисел, а її елементи $v = xe_0 + ye_1 + ze_2$ - гіперкомплексні числа.

Множина точок W нормованої алгебри V_3 називається компактною, якщо з кожної послідовності (v_n) гіперкомплексних чисел, що належать цій множині, має границю точку цієї множини, тобто для будь-якої збіжної послідовності (v_n) гіперкомплексних чисел $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n \in W$.

Теорема 1. Множина гіперкомплексних чисел K є компактною тоді і тільки тоді коли обмежена і замкнена.

Доведення. Необхідність. Нехай множина W гіперкомплексних чисел компактна, тобто така, що з кожної послідовності (v_n) точок множини W можна виділити збіжну послідовність (v_{n_k}) , границя якої належить W . Звідси випливає, що W замкнена.

Припустимо, що існує компактна множина W гіперкомплексних чисел, яка не є обмеженою. Це означає, що для будь-якого $M > 0$ існує гіперкомплексне число v' таке, що $\|v'\| > M$. Покладемо $M = 1, 2, \dots, n, \dots$. Тоді для $M = 1$ існує гіперкомплексне число $v_1 \in W$ таке, що $\|v_1\| > 1$, для $M = 2$ існує гіперкомплексне число $v_2 \in W$ таке, що $\|v_2\| > 2$. І для кожного n існує гіперкомплексне число $v_n \in W$ таке, що $\|v_n\| > n$. Таким чином побудована послідовність гіперкомплексних чисел (v_n) елементи якої належать W , але вона необмежена, причому кожна послідовність цієї послідовності необмежена. Отже, у множині W існує послідовність гіперкомплексних чисел, з якої неможливо виділити збіжну послідовність. Це суперечить тому, що множина W компактна.

Достатність. Нехай множина W гіперкомплексних чисел обмежена і замкнена. Доведемо, що вона компактна.

Нехай маємо довільну, але фіксовану, послідовність (v_n) гіперкомплексних чисел з множини W . Оскільки ця послідовність обмежена, то з неї можна виділити збіжну послідовність (v_{n_k}) , причому в силу замкненості множини W $\lim_{n \rightarrow \infty} v_{n_k} \in W$.

Отже, з кожної послідовності (v_n) гіперкомплексних чисел з множини W можна виділити збіжну послідовність, яка збігається до гіперкомплексного числа з множини W . А це і означає, що W компактна. ■

Теорема 2. (теорема Кантора). Якщо послідовність (K_n) непорожніх компактних множин гіперкомплексних чисел є спадною і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} K_n = 0, \text{ де } \text{diam} K_n = \sup_{v', v'' \in K_n} \|v' - v''\|,$$

то перерізом цих компактних множин є одноелементна множина, тобто існує єдине гіперкомплексне число v_0 таке, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{v_0\}$.

Доведення. Оскільки кожна компактна множина гіперкомплексних чисел є замкненою, то послідовність (K_n) є спадною послідовністю не порожніх замкнених підмножин замкненої множини K_1 , а отже за теоремою 1 $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$. Припустимо, що існує послідовність (K_n) непорожніх компактних множин, яка задовольняє умови теореми, а їх переріз є множина з числом елементів, більшим одного, тобто існують принаймні два різних гіперкомплексних числа v_1, v_2 , що належать множині $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Зрозуміло, що ці гіперкомплексні числа належать множині K_n , а отже для кожного n

$$\text{diam} K_n = \sup_{v', v'' \in K_n} \|v' - v''\| \geq \|v_1 - v_2\| > 0.$$

Останнє суперечить тому, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam} K_n = 0$.

Одержане протиріччя доводить, що перетин всіх членів послідовності (K_n) , яка задовольняє умови теореми, є одноелементна множина (існує лише одне гіперкомплексне число, яке належить всім членам цієї послідовності). ■

Список використаних джерел

1. Беллман Р. Введение в теорию матриц. Пер. с англ. / Р. Беллман. – М: Наука, 1969. – 334 с.
2. Вотякова Л. А. Про один метод побудови алгебри гіперкомплексних чисел. // Десята міжнародна конференція ім. Академіка М. Кравчука. Матеріали конференції. – К. – 2004. – 334 с.
3. Хорн Р. Матричный анализ: Пер. с англ. / Р. Хорн, У. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 665 с.

COMPACT MULTIPLES OF HYPERTECOMPLE NUMBERS

Abstract. In this paper a compact set of hypercomplex numbers is indicated. The purpose of this paper is to study the conditions of compactness of the set of hypercomplex numbers.

Keywords: hypercomplex numbers, normalized algebra, compact plural.

Віта Руда

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЙ, ВИЗНАЧЕНИХ НА МАТРИЧНІЙ АЛГЕБРИ M_3^{ch}

Анотація. У статті розглядається питання існування і властивостей границі функцій, визначених матричній алгебрі M_3^{ch} .

Ключові слова: відображення, границя функції, матрична алгебра.

Вступ. Поняття границі функції є одним з найважливіших понять диференціального числення. Зауважимо, що це поняття є дуже тонким і разом з тим дуже суттєвим і продуктивним поняттям математичного аналізу.

Метою нашої статті є означити і дослідити відображення матричної алгебри M_3^{ch} в себе.

Виклад основного матеріалу: Нехай маємо повну матричну алгебру M_3 всіх квадратних матриць 3-го порядку з дійсними елементами. Розглянемо підмножину матриць M_3 квадратних матриць 3-го порядку з однаковими сумами по рядках.