Міністерство освіти і науки України
Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Львівський національний університет імені Івана Франка

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

Бак Сергій Миколайович

УДК 517.97

ДИСЕРТАЦІЯ

ДИСКРЕТНІ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНІ ГАМІЛЬТОНОВІ СИСТЕМИ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

01.01.02 — диференціальні рівняння
111 — математика

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора фізико–математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

____________________ С. М. Бак

Науковий консультант:
Панков Олександр Андрійович,
доктор фізико-математичних наук,
професор

Вінниця — 2020

АНОТАЦІЯ

Бак С. М. *Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці.* — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 "Диференціальні рівняння"(111 Математика). — Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського, Вінниця. — Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, 2020.

Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. У вступі обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету, завдання, предмет, об'єкт та методи дослідження, наведено наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, зв'язок роботи з науковими темами та особистий внесок здобувача, а також вказано, де апробовані та опубліковані основні результати дисертації.

У розділі 1 зроблено огляд літератури з теми дослідження та наведено короткий опис результатів дисертаційної роботи.

Розділ 2 присвячений питанням існування і єдиності розв'язків задачі Коші для зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь, що описують нескінченні системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. У підрозділі 2.1 наводиться формулювання задачі Коші для заданих систем у просторі l^2. У підрозділі 2.2 отримано достатні умови існування та єдиності локального і глобального розв'язків. Для цього використано подання системи в гамільтоновому вигляді. Також тут встановлено умови обмеженості глобального розв'язку. У підрозділі 2.3 окремо досліджено ви-

падок степеневих потенціалів степеня $p > 2$, які не задовольняють одержані умови. Тут встановлено умови існування та єдиності глобального розв'язку. Зокрема показано, що якщо початкові дані достатньо малі в l^2-нормі, то глобальний розв'язок існує. У підрозділі 2.4 одержано умови неіснування глобального розв'язку у випадку степеневих потенціалів.

Розділ 3 присвячений періодичним за часовою змінною розв'язкам для нескінченних систем нелінійних осциляторів на двовимірних ґратках. У підрозділі 3.1 наводиться формулювання задачі про періодичні розв'язки та основні припущення. У підрозділі 3.2 наводиться варіаційне формулювання задачі та деякі допоміжні відомості про стаціонарні розв'язки. У підрозділі 3.3 доводиться існування періодичних розв'язків, що задовольняють додатково умову просторової періодичності (просторово-періодичних апроксимацій). У підрозділі 3.4 за допомогою методу періодичних апроксимацій одержано результат про існування несталих періодичних розв'язків для достатньо великих періодів. У підрозділі 3.5 показано, що у випадку степеневої потенціальної функції для побудови періодичних розв'язків можна використати метод умовної мінімізації.

Розділ 4 присвячений питанню існування біжучих хвиль в системах нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Розглядаються біжучі хвилі двох типів: періодичні та відокремлені. Профіль періодичної біжучої хвилі є періодичною функцією з періодом $2k$, а профіль відокремленої хвилі перетворюється в нуль на нескінченності. Підрозділ 4.1 присвячений питанню існування нетривіальних періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах лінійно зв'язаних осциляторів. Залежно від типу біжучої хвилі, розглядаються функціонали J_k та J. Показано, що критичні точки цих функціоналів є розв'язками відповідних задач. За допомогою теореми про гірський перевал і методу періодичних апроксимацій встановлено існування несталих надзвукових періодичних та відокремлених біжучих хвиль. Доведено, що профіль відокремленої біжучої хвилі експоненціально спадає на нескінченності. За допомогою теореми про зачеплення тут також одержано результати про існування періодичних біжучих хвиль з довільною швидкістю $c > 0$, зокрема, дозвукових хвиль. У підрозділі 4.2 одержані аналогічні результати для систем нелінійно зв'язаних осциляторів.

Розділ 5 присвячений питанню існування біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус–Ґордона. У підрозділі 5.1 наводиться формулювання задачі про біжучі хвилі для таких рівнянь. Розглядаються біжучі хвилі трьох типів: періодичні, гомоклінічні та гетероклінічні. Підрозділ 5.2 присвячений питанню існування несталих періодичних біжучих хвиль. Для цього, як і в розділі 4, використано варіаційний метод із використанням теореми про гірський перевал. У підрозділі 5.3 за допомогою періодичних апроксимацій доведено існування несталих гомоклінічних біжучих хвиль. Підрозділ 5.4 присвячений питанню існування гетероклінічних біжучих хвиль. В даному випадку для доведення існування розв'язків також використано варіаційний метод, проте замість згаданих теорем використано принцип концентрованої компактності.

Розділ 6 присвячений питанню існування біжучих хвиль в системах типу Фермі–Пасти–Улама на двовимірній ґратці. У підрозділі 6.1 наводиться формулювання задачі про біжучі хвилі для таких систем. Спочатку розглядаються біжучі хвилі двох типів. У першому випадку похідна профілю є $2k$-періодичною функцією, а в другому — похідна профілю перетворюється в нуль на нескінченності. У підрозділах 6.2 і 6.3 за допомогою варіаційної техніки встановлено існування монотонних і необов'язково монотонних біжучих хвиль. Підрозділ 6.4 присвячений питанню існування біжучих хвиль з аналогічними умовами, які накладаються на сам профіль хвилі, а не на його похідну.

Розділ 7 присвячений питанню існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці. Розглядаються стоячі хвилі двох типів: з періодичною амплітудою (періодичні розв'язки) та амплітудою, яка збігається до нуля (локалізовані розв'язки). Підрозділ 7.1 присвячений питанню існування нетривіальних стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці з кубічною нелінійністю. Встановлено існування нетривіальних періодичних та локалізованих розв'язків. Тут також, як і в попередніх розділах, використано теорему про зачеплення для періодичних розв'язків та метод періодичних апроксимацій для локалізованих розв'язків. Підрозділ 7.2 присвячений питанню існування нетривіальних стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці із насичуваною нелінійністю. Для одержання основних результатів використано метод критичних точок і многовиди Нехарі.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути застосовані в теорії звичайних диференціальних рівнянь та у нелінійній фізиці.

Ключові слова: гамільтонові системи, нелінійні осцилятори, системи типу Фермі-Пасти-Улама, дискретні рівняння типу синус-Ґордона, дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера, двовимірна ґратка, задача Коші, періодичні розв'язки, біжучі хвилі, стоячі хвилі, критичні точки, теорема про гірський перевал, теорема про зачеплення, принцип концентрованої компактності, періодичні апроксимації, многовид Нехарі.

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації:

1. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice. *Journal of mathematical physics, analysis, geometry.* 2018. Vol. 14, № 1. P. 16-26. doi: 10.15407/mag14.01.016

2. Bak S. M. Global well-posedness of the Cauchy problem for system of oscillators on 2D-lattice with power potentials. *Український математичний вісник.* 2019. Т.16, № 4. С. 465-476. Engl. transl.: *Journal of Mathematical*

Sciences. 2020. Vol. 246, № 5 (May). P. 593–601. doi: 10.1007/s10958-020-04765-6

3. Bak S. M. Homoclinic traveling waves in discrete sine–Gordon equation with nonlinear interaction on 2D lattice. *Matematychni Studii.* 2019. Vol. 52, № 2. P. 176-184. doi:10.30970/ms.52.2.176-184

4. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii.* 2018. Vol. 50, № 1. P.75-87. doi: 10.15330/ms.50.1.75-87

5. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis.* 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.

6. Бак С. М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці. *Український математичний журнал.* 2017. Т. 69, № 4. С. 435-444. Engl. transl.: *Ukr. Math. J.* 2017. Vol. 69, № 4. P. 509-520. doi: 10.1007/s11253-017-1378-7

7. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2014. Т. 57, № 3. С. 45-52. Engl. transl.: *J. Math. Sc.* 2016. Vol. 217, № 2 (August). P. 187-197.

8. Бак С. М. Існування періодичних за часом розв'язків системи осциляторів на двовимірній гратці. *Карпатські математичні публікації.* 2012. Т. 4, № 2. С. 175-196.

9. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні

науки : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. Вип. 10. С. 17-23.

10. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв’язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп’ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. Вип. 12. С. 5-12.

11. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці. *Математичні студії.* 2011. Т. 35, № 1. С. 60-65.

12. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. *Математичні студії.* 2012. Т. 37, № 1. С. 76-88.

13. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп’ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2017. Вип. 16. С. 21-29.

14. Бак С. М. Існування та єдиність глобального розв’язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп’ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. Вип. 5. С. 3-9.

15. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні sin-Гордона на двовимірній ґратці. *Математичне та комп’ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський

: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. Вип. 9. С. 5-10.

16. Бак С. М. Про обмеженість глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. Вип. 20. С. 5-12. doi: 10.32626/2308-5878.2019-20.5-12

17. Бак С. М., Баранова О. О., Білик Ю. П. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. Вип. 4. С. 18-24.

18. Бак С. М., Ковтонюк Г. М., Печериця І. В. Стоячі хвилі з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. Вип. 18. С. 5-13. doi: 10.32626/2308-5878.2018-18.5-14

19. Бак С. М., Рум'янцева К. Є. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. Вип. 6. С. 29-36.

20. Бак С. Н., Панков А. А. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках. *Український математичний вісник.* 2010. Т. 7, №2. С. 154-175. Engl. transl.: J. Math. Sci. 2011. Vol. 174, № 4 (April). P. 437–452. doi: 10.1007/s10958-011-0310-1

Список праць здобувача, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Бак С. М. Про періодичні біжучі хвилі для нескінченної системи нелінійних осциляторів. *Дванадцята Міжнар. наук. конфер. ім. акад. М. Кравчука* : матеріали конференції. (Київ, 15–17 травня 2008 р.). Київ, 2008. С. 27.

2. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю. *Український математичний конгрес – 2009* (до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова). Інститут математики НАН України. (Київ, 27-29 серпня 2009 р.). URL: http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/Abstracts/Bak.pdf (дата звернення: 28.07.2020).

3. Бак С. М., Домбровська Д. М. Умови існування біжучих хвиль в системі осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 21–22 квітня 2010 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2010. С. 44-48.

4. Бак С. М. Про біжучі хвилі для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Тринадцята Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука* : матеріали конференції. (Київ, 13–15 травня 2010 р.). Київ, 2010. Т. 1. С. 53.

5. Бак С. М., Баранова О. О. Існування та єдиність локального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміще-

них на двовимірній решітці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 20–21 квітня 2011 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2011. С. 30-34.

6. Бак С. М., Білик Ю. П. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 20–21 квітня 2011 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2011. С. 34-38.

7. Бак С. М. Про періодичні розв'язки системи осциляторів на двовимірній ґратці. *Teoretyczne i praktyczne innowacje naukowe* : матеріали Міжнар. наук. конфер. (Krakow, 29–31 stycznia 2013 r.). Krakow : Wydawca Sp. z o.o. «Diamond traiding tour», 2013. Т. 8. S. 72-74.

8. Бак С. М., Окопна Т. М. Застосування принципу концентрованої компактності в задачі про існування гетероклінічних біжучих хвиль в дискретному рівнянні sin-Гордона на двовимірній ґратці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 17–18 квітня 2013 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2013. С. 10-13.

9. Бак С. М., Кудрич Ю. С. Застосування методу критичних точок в задачі про існування періодичних біжучих хвиль в дискретному рівнянні sin-Гордона на двовимірній ґратці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 16–17 квітня 2014 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2014. С. 12–15.

10. Бак С. М., Магдич В. І. Існування гомоклінічних біжучих хвиль в сис-

темі нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 22–23 квітня 2015 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2015. С. 11–16.

11. Bak S. Existence of the periodic and heteroclinic travelling waves for the discrete sine-Gordon equation on 2d-lattice. *X International V. Skorobohatko Mathematical Conference* : Book of Abstracts. (Drohobych, 2015 August 25–28). Lviv : Lviv Politech., 2015. P. 9.

12. Bak S. M. Existence of heteroclinic travelling waves for the discrete sine-Gordon equation on 2d-lattice with nonlinear interaction. *International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky* : Book of Abstracts. (Lviv, 2016 September 20–24). Lviv, 2016. P. 23.

13. Bak S. M. Existence of the periodic and solitary travelling waves in the systems of oscillators on 2d-lattices. *5th Internat. Confer. for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky* : Book of Abstracts. (Kyiv, 2016 November 09–11). Vinnytsia, 2016. P. 41.

14. Бак С. М. Біжучі хвилі в моделі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації* : тези доповідей VII міжнар. наук. конфер. (Кам'янець-Подільський, 21–22 квітня 2016 р.). Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. С. 11-13.

15. Бак С. М. Про існування відокремлених біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності* : зб. наук. праць за матеріалами Всеукр. науково-практ. конфер. (Вінниця, 18-19

травня 2017 р.). Вінниця : ФОП Рогальська І. О., 2017. С. 42-44.

16. Bak S. M. About heteroclinic travelling waves in discrete sine-Gordon type equation. *Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь* : матеріали Міжнар. наук. конфер. (Київ, 13-14 грудня 2017 р.). Київ : НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2017. С. 24-25.

17. Бак С. М. Гетероклінічні біжучі хвилі в дискретному рівнянні синус-Ґордон з нелінійною взаємодією на двовимірній ґратці. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації* : тези доповідей 8-ї Міжнар. наук. конфер., присвяч. 100-річчю Нац. Акад. наук України та 100-річчю КПНУ ім. І. Огієнка. (Кам'янець-Подільський, 18–20 квітня 2018 р.). Кам'янець-Подільський: КПНУ, 2018. С. 91-92.

18. Бак С. М. Про існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера на двовимірній ґратці. *Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності* : матеріали Міжнар. наук.-метод. конференції (Вінниця, 17-18 травня 2018 р.). Вінниця : ВНТУ, 2018. С. 179-181.

19. Бак С. М., Ковтонюк Г. М., Печериця І. В. Застосування многовиду Нехарі в задачі про існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологій* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 18–19 квітня 2019 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2019. С. 10-15.

20. Бак С., Ковтонюк Г., Печериця І. Про існування стоячих хвиль з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності* : матеріали II Всеукр. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 15-16 травня 2019 р.). Вінниця, 2019. С.

13-16.

21. Бак С. М. Про біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації* : тези доповідей IX міжнар. наук. конфер. (Кам'янець-Подільський, 14–15 травня 2020 р.). Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020. С. 25-26.

22. Бак С. М. Метод умовної мінімізації в задачі про існування періодичних розв'язків в системах осциляторів на двовимірній ґратці. *Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності* : матеріали Міжнар. наук.-метод. конференції (Вінниця, 18–20 травня 2020 р.). Вінниця : ВНТУ, 2020. С. 93-96.

ABSTRACT

Bak S. M. *Discrete infinite-dimensional Hamiltonian systems on a two-dimensional lattice.* — Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The thesis presented for the degree of the Doctor of Sciences in Physics and Mathematics in speciality 01.01.02 "Differential equations"(111 Mathematics). — Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University, Vinnytsia. — Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, 2020.

The thesis consists of an introduction, seven chapters, conclusions, references and the appendix. The introduction consists of the relevance of research topic, purpose, objectives, subject, object and research methods. The introduction substantiates the relevance of research topic. The goal, subject, object and methods of the research are listed there. Scientific novelty, the practical significance of the results, the relation to scientific topic and applicant's contribution are also indicated in the introduction.

Chapter 1 provides a review of the literature on the research topic and a brief description of the results of this thesis.

Chapter 2 is devoted to the existence and uniqueness of solutions of the Cauchy problem for countable systems of ordinary differential equations describing infinite systems of linearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. Section 2.1 provides the formulation of the Cauchy problem for given systems in the space l^2. In Section 2.2, we obtain sufficient conditions for the existence and uniqueness of a local and global solutions. For this, the representation of the system in the Hamiltonian form is used. The conditions for the limited global solution are also set here. In Section 2.3, we study separately the case of

power potentials of degree $p > 2$ that do not satisfy the obtained conditions. The conditions for the existence and uniqueness of a global solution are established here. In particular, it was shown that if the initial data are sufficiently small in the l^2-norm, then a global solution exists. Section 2.4 provides the conditions for the non-existence of a global solution.

Chapter 3 deals with time-periodic solutions for infinite systems of nonlinear oscillators on two-dimensional lattices. Subsection 3.1 gives the formulation of the problem of periodic solutions and basic assumptions. Section 3.2 provides a variational formulation of the problem and some auxiliary information on stationary solutions. In Section 3.3, we prove the existence of periodic solutions that additionally satisfy the condition of spatial periodicity (spatially periodic approximations). In Section 3.4, using the method of periodic approximations, we obtain a result on the existence of non-constant periodic solutions for sufficiently large periods. Section 3.5 shows that in the case of a power potential function, the constrained minimization method can be used to construct periodic solutions.

Chapter 4 is devoted to the question of the existence of traveling waves in systems of nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. Two types of traveling waves are considered: periodic and solitary. The profile of a periodic traveling wave is a periodic function with a period of $2k$, and the profile of a solitary wave vanishes at infinity. Section 4.1 is devoted to the question of the existence of nontrivial periodic and solitary traveling waves in systems of linearly coupled oscillators. Depending on the type of traveling wave, the functionals J_k and J are considered. It is shown that the critical points of these functionals are solutions to the corresponding problems. Using the mountain pass theorem and the method of periodic approximations, the existence of non-constatnt supersonic periodic and solitary traveling waves has been established. It is proved that the profile of a solitary traveling wave decreases exponentially at infinity. Using the linking theorem, we also obtained results on the existence of periodic traveling waves with an arbitrary velocity $c > 0$, in particular, subsonic waves. In Section

4.2, we obtain similar results for systems of nonlinearly coupled oscillators.

Chapter 5 deals with the question of the existence of traveling waves in a discrete sine-Gordon type equations with nonlinear coupling. Section 5.1 gives the formulation of the traveling wave problem for such equations. Three types of traveling waves are considered: periodic, homoclinic and heteroclinic. Section 5.2 is devoted to the existence of non-constatnt periodic traveling waves. For this, as in Chapter 4, the variational method was used using the mountain pass theorem. In Section 5.3, using periodic approximations, the existence of non-constatnt homoclinic traveling waves is proved. Section 5.4 is devoted to the question of the existence of heteroclinic traveling waves. In this case, the variational method is also used to prove the existence of solutions, but instead of the theorems mentioned, the concentration compactness principle is used.

Chapter 6 is devoted to the question of the existence of traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam type systems on a two-dimensional lattice. Section 6.1 provides the formulation of the traveling wave problem for such systems. Two types of traveling waves are considered. In the first case, the profile derivative is a $2k$-periodic function, and in the second, the profile derivative vanishes at infinity. In Sections 6.2 and 6.3, using the variational technique, the existence of monotone and not necessary monotone traveling waves is established. Section 6.4 is devoted to the question of the existence of traveling waves with similar conditions that are imposed on the wave profile itself, and not on its derivative.

Chapter 7 deals with the question of the existence of standing waves in discrete nonlinear Schrödinger type equations on a two-dimensional lattice. Two types of standing waves are considered: with a periodic amplitude (periodic solutions) and an amplitude that converges to zero (localized solutions). Section 7.1 is devoted to the question of the existence of nontrivial standing waves in discrete nonlinear Schrödinger type equations on a two-dimensional lattice with cubic nonlinearity. The existence of nontrivial periodic and localized solutions is established. Here, as in previous chapters, the linking theorem for periodic solutions and the periodic approximation method for localized solutions are used. Section 7.2 is devoted to the question of the existence of nontrivial standing waves in discrete nonlinear Schrödinger type equations on a two-dimensional lattice with saturable nonlinearity. To obtain the main results, the critical points method and Nehari manifolds are used.

The practical significance of the results. The results of the thesis are theoretical in nature and can be applied in the theory of ordinary differential equations and in nonlinear physics.

Key words: Hamiltonian systems, nonlinear oscillators, Fermi-Pasta-Ulam type systems, discrete sine-Gordon type equations, discrete nonlinear Schrödinger type equations, two-dimensional lattice, Cauchy problem, periodic solutions, traveling waves, standing waves, critical points, mountain pass theorem, linking theorem, concentration compactness principle, periodic approximations, Nehari manifold.

Publications list of the applicant:

1. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice. *Journal of mathematical physics, analysis, geometry.* 2018. Vol. 14, No. 1. P. 16-26. doi: 10.15407/mag14.01.016

2. Bak S. M. Global well-posedness of the Cauchy problem for system of oscillators on 2D-lattice with power potentials. *Ukrainian Mathematical Bulletin.* 2019. Vol.16, No. 4. P. 465-476. Engl. transl.: *Journal of Mathematical Sciences.* 2020. Vol. 246, No. 5 (May). P. 593–601. doi: 10.1007/s10958-020-04765-6

3. Bak S. M. Homoclinic traveling waves in discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on 2D lattice. *Matematychni Studii.* 2019. Vol. 52, No. 2. P. 176-184. doi:10.30970/ms.52.2.176-184

4. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii.* 2018. Vol. 50, No. 1. P.75-87. doi: 10.15330/ms.50.1.75-87

5. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis.* 2019. Vol. 22, No. 2. P . 18-34.

6. Bak S. M. Existence of the solitary traveling waves for a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2d-lattice. *Ukr. Mat. Zh.* 2017. Vol. 69, No. 4. P. 435-444. Engl. transl.: *Ukr. Math. J.* 2017. Vol. 69, No. 4. P. 509-520. doi: 10.1007/s11253-017-1378-7

7. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice. *Matematychni Metody ta Fizyko-Mekhanichni Polya.* 2014. Vol. 57, No. 3. P. 45-52. Engl. transl.: *J. Math. Sc.* 2016. Vol. 217, No. 2 (August). P. 187-197.

8. Bak S. M. Existence of the time periodic solutions of system of oscillators on 2D-lattice. *Carpathian Mathematical Publications.* 2012. Vol. 4, No. 2. P. 175-196.

9. Bak S. M. Existence of the subsonic periodic traveling waves in the system of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on 2D-lattice. *Math. and Comp. Modelling.* Ser.: Phys. and Math. Sci. Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi Nat. Ivan Ohiienko Univ., 2014. Vol. 10. P. 17-23.

10. Bak S. M. Existence of the supersonic periodic traveling waves in the system of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on 2D-lattice. *Math. and Comp. Modelling.* Ser.: Phys. and Math. Sci. Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi Nat. Ivan Ohiienko Univ., 2015. Vol. 12. P. 5-12.

11. Bak S. M. Existence of periodic traveling waves in systems of nonlinear oscillators on 2D-lattice. *Matematychni Studii.* 2011. Vol. 35, No. 1. P. 60-65.

12. Bak S. M. Existence of periodic traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D-lattice. *Matematychni Studii.* 2012. Vol. 37, No. 1. P. 76-88.

13. Bak S. M. Existence of standing waves in the discrete nonlinear Schrödinger equation with cubic nonlinearity on 2d-lattice. *Mat. and Comp. Modelling.* Ser.: Phys. and Math. Sci. Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi Nat. Ivan Ohiienko Univ., 2017. Vol. 16. P. 21-29.

14. Bak S. M. The existence and uniqueness of the global solution of the Cauchy problem for an infinite system of nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. *Mat. and Comp. Modelling.* Ser.: Phys. and Math. Sci. Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi Nat. Ivan Ohiienko Univ., 2011. Vol. 5. P. 3-9.

15. Bak S. M. Periodic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation on 2D-lattice. *Mat. and Comp. Modelling.* Ser.: Phys. and Math. Sci. Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi Nat. Ivan Ohiienko Univ., 2013. Vol. 9. P. 5-10.

16. Bak S. M. On the boundedness of the global solution of Cauchy problem for infinite system of nonlinear oscillators on 2d-lattice. *Mat. and Comp. Modelling.* Ser.: Phys. and Math. Sci. Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi Nat. Ivan Ohiienko Univ., 2019. Vol. 20. P. 5-12.

17. Bak S. M., Baranova O. O., Bilyk Yu. P. Well-posedness of the Cauchy problem for an infinite systemof nonlinear oscillators on 2D-lattice. *Mat. and Comp. Modelling.* Ser.: Phys. and Math. Sci. Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi Nat. Ivan Ohiienko Univ., 2010. Vol. 4. P. 18-24.

18. Bak S. M., Kovtonyuk G. M., Pecherytsya I. V. Standing waves with periodic

amplitude in the discrete nonlinear Schrödinger type equation with saturable nonlinearity on 2d-lattice. *Mat. and Comp. Modelling.* Ser.: Phys. and Math. Sci. Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi Nat. Ivan Ohiienko Univ., 2018. Vol. 18. P. 5-13. doi: 10.32626/2308-5878.2018-18.5-14

19. Bak S. M., Rumyantceva K. Ye. Correctness of the Cauchy problem for an infinite system of nonlinear oscillators with cubic potential on a two-dimensional lattice. *Mat. and Comp. Modelling.* Ser.: Phys. and Math. Sci. Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi Nat. Ivan Ohiienko Univ., 2012. Vol. 6. P. 29-36.

20. Bak S. N., Pankov A. A. Traveling waves in systems of oscillators on 2D-lattices. *Ukrainian Mathematical Bulletin.* 2010. Vol. 7, No. 2. P. 154-175. Engl. transl.: J. Math. Sci. 2011. Vol. 174, No. 4 (April). P. 437-452. doi: 10.1007/s10958-011-0310-1

List of conference abstracts:

1. Bak S. M. On periodic traveling waves for an infinite system of nonlinear oscillators. *Twelfth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference* : Conf. Materials. (Kyiv, 2008 May 15-17). Kyiv, 2008. P. 27.

2. Bak S. M. Existence of standing waves for discrete nonlinear Schrödinger type equation with saturable nonlinearity. *Ukrainian Mathematical Congress – 2009* (Dedicated to the 100th Anniversary of M. M. Bogolyubov). Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. (Kyiv, 2009 August 27-29). URL: http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/Abstracts/Bak.pdf.

3. Bak S. M., Dombrovska D. M. Conditions for the existence of traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice. *Actual problems of mathematics, physics and technological education* : Materials of Inter-Univ. Scien. Confer. (Vinnytsia, 2010 April 21-22). Vinnytsia : "Planer", 2010. P. 44-48.

4. Bak S. M. On traveling waves for an infinite system of nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. *Thirteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference* : Conf. Materials. (Kyiv, 2010 May 13-15). Kyiv, 2010. Vol. 1. P. 53.

5. Bak S. M., Baranova O. O. Existence and uniqueness of a local solution of the Cauchy problem for an infinite system of nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. *Actual problems of mathematics, physics and technological education* : Materials of Inter-Univ. Scien. Confer. (Vinnytsia, 2011 April 20-21). Vinnytsia : "Planer", 2011. P. 30-34.

6. Bak S. M., Bilyk Yu. P. Existence and uniqueness of a global solution of the Cauchy problem for an infinite system of nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. *Actual problems of mathematics, physics and technological education* : Materials of Inter-Univ. Scien. Confer. (Vinnytsia, 2011 April 20-21). Vinnytsia : "Planer", 2011. P. 34-38.

7. Bak S. M. On periodic solutions of a system of oscillators on a two-dimensional lattice. *Theoretical and Practical Scientific Innovations* : Materials of Internat. Scien. Confer. (Krakow, 2013 January 29-31). Krakow : Wydawca Sp. z o.o. "Diamond traiding tour", 2013. Vol. 8. P. 72-74.

8. Bak S. M., Okopna T. M. Application of the concentration compactness principle in the problem of the existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation on a two-dimensional lattice. *Actual problems of mathematics, physics and technological education* : Materials of Inter-Univ. Scien. Confer. (Vinnytsia, 2013 April 17-18). Vinnytsia : "Planer", 2013. P. 10-13.

9. Bak S. M., Kudrych Yu. S. Application of the critical point method in the problem of the existence of periodic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation on a two-dimensional lattice. *Actual problems of mathemati-*

cs, physics and technological education : Materials of Inter-Univ. Scien. Confer. (Vinnytsia, 2014 April 16-17). Vinnytsia : ”Planer”, 2014. P. 12-15.

10. Bak S. M., Magdych V. I. Existence of homoclinic traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on a two-dimensional lattice. *Actual problems of mathematics, physics and technological education* : Materials of Inter-Univ. Scien. Confer. (Vinnytsia, 2015 April 22-23). Vinnytsia : ”Planer”, 2015. P. 11-16.

11. Bak S. Existence of the periodic and heteroclinic travelling waves for the discrete sine-Gordon equation on 2d-lattice. *X International V. Skorobohatko Mathematical Conference* : Book of Abstracts. (Drohobych, 2015 August 25-28). Lviv : Lviv Politech., 2015. P. 9.

12. Bak S. M. Existence of heteroclinic travelling waves for the discrete sine-Gordon equation on 2d-lattice with nonlinear interaction. *International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky* : Book of Abstracts. (Lviv, 2016 September 20-24). Lviv, 2016. P. 23.

13. Bak S. M. Existence of the periodic and solitary travelling waves in the systems of oscillators on 2d-lattices. *5th Internat. Confer. for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky* : Book of Abstracts. (Kyiv, 2016 November 09-11). Vinnytsia, 2016. P. 41.

14. Bak S. M. Traveling waves in a model of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. *Modern problems of mathematical modeling, forecasting and optimization* : Materials of VII Internat. Scien. Conf. (Kamianets-Podilskyi, 2016 April 21-22). Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi Nat. Ivan Ohiienko Univ., 2016. P. 11-13.

15. Bak S. M. On the existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. *Mathemati-*

cs and Computer Science in Higher Education: Challenges of the Present : Materials of Ukrain. Scien. Confer. (Vinnytsia, 2017 May 18-19). Vinnytsia : FOP Rogalska I. O., 2017. P. 42-44.

16. Bak S. M. About heteroclinic travelling waves in discrete sine-Gordon type equation. *Asymptotic Methods in the Theory of Differential Equations* : Materials of Intern. Scien. Confer. (Kyiv, 2017 Desember 13-14). Kyiv : Nat. Ped. Dragomanov Univ., 2017. P. 24-25.

17. Bak S. M. Heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a two-dimensional lattice. *Modern problems of mathematical modeling, forecasting and optimization* : Materials of VIII Internat. Scien. Conf. (Kamianets-Podilskyi, 2018 April 18-20). Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi Nat. Ivan Ohiienko Univ., 2018. P. 91-92.

18. Bak S. M. On the existence of standing waves for a discrete nonlinear Schrödinger type equation on a two-dimensional lattice. *Problems of Higher Mathematical Education: Challenges of the Present* : Materials of Internat. Scien. Confer. (Vinnytsia, 2018 May 17-18). Vinnytsia : VNTU, 2018. P. 179-181.

19. Bak S. M., Kovtonyuk G. M., Pecherytsya I. V. Application of the Nehari manifold in the problem of the existence of standing waves in a discrete nonlinear Schrödinger type equation. *Actual problems of mathematics, physics and technology* : Materials of Inter-Univ. Scien. Confer. (Vinnytsia, 2019 April 18-19). Vinnytsia : ”Planer”, 2019. P. 10-15.

20. Bak S., Kovtonyuk G., Pecherytsya I.On the existence of standing waves with periodic amplitude in a discrete nonlinear Schrödinger equation with saturable nonlinearity on a two-dimensional lattice. *Mathematics and Computer Science in Higher Education: Challenges of the Present* : Materials of II Ukr. Scien. Confer. (Vinnytsia, 2019 May 15-16). Vinnytsia, 2019. P. 13-16.

21. Bak S. M. On traveling waves in Fermi-Paste-Ulam type systems on a two-dimensional lattice. *Modern problems of mathematical modeling, forecasting and optimization* : Materials of VIII Internat. Scien. Conf. (Kamianets-Podilskyi, 2020 May 14-15). Kamianets-Podilskyi : Kamianets-Podilskyi Nat. Ivan Ohiienko Univ., 2020. P. 25-26.

22. Bak S. M. The constrained minimization method in the problem of the existence of periodic solutions in systems of oscillators on a two-dimensional lattice. *Problems of Higher Mathematical Education: Challenges of the Present* : Materials of Internat. Scien. Confer. (Vinnytsia, 2020 May 18-20). Vinnytsia : VNTU, 2020. P. 93-96.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$:=$ — дорівнює за означенням.

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел.

$\mathbb{N}_0$ $:= \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел.

$\mathbb{Z}^2$ — множина точок (n, m) з цілими координатами.

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел.

$[x]$ — ціла частина числа x.

$a \ll b$ — число a на багато менше за число b.

$a \gg b$ — число a на багато більше за число b.

i $:= \sqrt{-1}$ — уявна одиниця.

$\|\cdot\|_X$ — норма в просторі X.

$(\cdot,\cdot)_X$ — скалярний добуток в просторі X.

X^* — спряжений простір до X.

$X \oplus Y$ — пряма сума просторів X та Y.

$\dot{q}(t)$ $:= \frac{dq(t)}{dt}$.

$\ddot{q}(t)$ $:= \frac{d^2q(t)}{dt}$.

$(\Delta q)_n$ $:= q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n$ — дискретний оператор Лапласа.

$(\Delta q)_{n,m}$ $:= q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}$ — двовимірний дискретний оператор Лапласа.

$\hat{u}(\xi)$ $:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} u(s) ds$ — перетворення Фур'є функції $u(s)$.

$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n := \lim\limits_{n\to\infty} \left(\inf\limits_{m\geq n} x_m \right)$ — нижня границя послідовності $\{x_n\}$.

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Дисертаційна робота присвячена вивченню дискретних нескінченновимірних гамільтонових систем, які широко використовуються в нелінійній фізиці для моделювання складних оптичних і квантових явищ. До таких систем належать нескінченні системи нелінійних осциляторів, дискретні рівняння типу синус-Ґордона, системи типу Фермі-Пасти-Улама, дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера.

Такі моделі з фізичної точки зору досліджували О. Браун, Ю. Ківшар, Д. Хеннінг (D. Henning), Г. Ціроніс (Tsironis G.), Ж. Тамга (J. Tamga), М. Ремуссене (M. Remoissenet), Ж. Пуже (J. Pouget), Ф. Флах (F. Flach), К. Кладко (K. Kladko), С. Такено (S. Takeno), І. Батт (I. Butt), Дж. Ваттіс (J. Wattis), Ю. Доі (Yu. Doi), А. Накатані (A. Nakatani), Я. Френкель, Т. Конторова, Ф. Франк (F. Frank), Дж. ван дер Мерве (J. van der Merwe), А. Бішоп (A. Bishop), Д. Кемпбелл (D. Campbell), С. Дмітрієв, Б. Маломед, І. Люксютов, М. Палій, М. Пейрар (M. Peyrard), Л. Тенг (L. Tang), А. Сегюр (A. Seeger), А. Золотарюк, Р. Гріффітс (R. Griffiths), Дж. Рьодер (J. Röder), І. Зеленська та ін.

Варто зазначити, що скінченні системи зв'язаних осциляторів широко використовують для моделювання різноманітних процесів в хімії (хімічні осцилятори) та біології (біологічні осцилятори), при дослідженні нейронних мереж тощо. Тут широко використовується теорія зв'язаних фазових осциляторів, основою якої стала побудована у 1975 році японським фізиком Й. Курамото (Y. Kuramoto) модель фазових осциляторів (зараз відома як модель Курамото). Значний внесок у розробку цієї теорії зробили Е. Отт

(E. Ott), С. Ватанабе (S. Watanabe), Т. Антонсен (T. Antonsen), С. Строгац (S. Strogatz), Х. Хонг (H. Hong), А. Пiковський, Ю. Майстренко, Р. Борисюк, О. Бурилко та iн.

Особливу роль в динамiцi подiбних систем вiдiграють перiодичнi розв'язки, якi в фiзицi називаються бризерами. Питання про iснування бризерiв тiєї чи iншої частоти є однiєю iз актуальних проблем нелiнiйної фiзики. С. Обрi (S. Aubry) та Р. Маккей (R. MacKay) за допомогою методiв теорiї збурень одержали результати для однорiдних ланцюгiв лiнiйно зв'язаних нелiнiйних осциляторiв зi слабким зв'язком (на одновимiрнiй ґратцi). С. Бак та О. Панков за допомогою варiацiйного методу дослiдили питання iснування нетривiальних перiодичних розв'язкiв для ланцюгiв лiнiйно зв'язаних нелiнiйних осциляторiв. О. Панков подiбним чином також довiв iснування перiодичних розв'язкiв для системи Фермi-Пасти-Улама на одновимiрнiй ґратцi. П. Срiкантом (P. Srikanth) встановлено iснування перiодичних розв'язкiв у скiнченнiй системi типу Фермi-Пасти-Улама на двовимiрнiй ґратцi.

Iншим важливим класом розв'язкiв є бiжучi хвилi. Бiжучi хвилi для параболiчних рiвнянь в частинних похiдних досить детально дослiджено такими математиками як Дж. Смоллер (J. Smoller), А. Вольперт (A. Volpert) та В. Вольперт (V. Volpert). Дж. Йосс (G. Iooss) та К. Кiршгаснер (K. Kirschgässner) за допомогою методiв теорiї бiфуркацiй дослiдили питання iснування бiжучих хвиль в ланцюгах лiнiйно зв'язаних нелiнiйних осциляторiв зi слабким зв'язком. С. Баком за допомогою варiацiйного пiдходу одержано умови iснування нетривiальних перiодичних i вiдокремлених бiжучих хвиль в ланцюгах лiнiйно зв'язаних нелiнiйних осциляторiв. П. Макiта (P. Makita), Ж. Лiу (Z. Liu), Ш. Гуо (S. Guo) та З. Жанг (Z. Zhang) в аналогiчний спосiб встановили iснування перiодичних i гомоклiнiчних (вiдокремлених) бiжучих хвиль для нелiнiйно зв'язаних ланцюгiв нелiнiйних частинок. К. Крейнер (C. Kreiner) та Й. Зiммер (J. Zimmer) за допомогою варiацiйного пiдходу дослiдили питання iснування перiодичних, гомоклiнiчних i гетероклiнічних біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус-Ґордона з лінійним і нелінійним зв'язком сусідів на одновимірній ґратці. Б. Буффоні (B. Buffoni), Г. Шветлік (H. Schwetlick) та Й. Зіммер (J. Zimmer) встановили існування гетероклінічних біжучих хвиль для цієї моделі з більш загальною нелінійністю. Питання існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама на одновимірній ґратці досліджували Ж. Фрізеке (G. Friesecke), Дж. Ваттіс (J. Wattis), Д. Сметс (D. Smets), М. Віллем (M. Willem), О. Панков, К. Пфлюгер (K. Pflüger), Б. Руф (B. Ruf), П. Срікант (P. Srikanth), Г. Аріолі (G. Arioli), Дж. Чабровскі (J. Chabrowski), Ф. Газзола (F. Gazzola), А. Шулькін (A. Szulkin), С. Терраціні (S. Terracini) та ін. М. Германн (M. Hermann) та Й. Радемахер (J. Rademacher) за допомогою варіаційного підходу встановили існування гетероклінічних біжучих хвиль.

Зазначимо, що подібні системи на двовимірній ґратці вивчались переважно з фізичної точки зору, а математичних праць є небагато. Зокрема, Ж. Фрізеке (G. Friesecke) та К. Маттісом (K. Matthies) досліджено питання існування відокремлених біжучих хвиль в системі лінійно зв'язаних частинок на двовимірній ґратці, кожна з яких взаємодіє як з чотирма найближчими сусідами (по вертикалі і по горизонталі), так і з чотирма діагональними сусідами без зовнішнього потенціалу. А М. Фецканом (M. Fečkan) та В. Ротосом (V. Rothos) встановлено існування періодичних біжучих хвиль в системі лінійно зв'язаних частинок, які взаємодіють тільки з чотирма своїми найближчими сусідами (як у цій дисертації) з припущенням, що нелінійність непарна і 2π-періодична. Л. Жанг (L. Zhang) та Ш. Гуо (S. Guo) за допомогою методів теорії біфуркацій вивчали 2π-періодичні хвилі в таких системах.

Дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера на одновимірній ґратці досліджено в значній мірі такими математиками як А. Бішоп (A. Bishop), П. Кеврекідіс (P. Kevrekidis), К. Расмуссен (K. Rasmussen), О. Панков, М. Вейнштейн (M. Weinstein), В. Ротос (V. Rothos), С. Бак, Р. Ередеро, Д. Леві, П. Вінтерніц, П. Пачіані (P. Pacciani), В. Конотоп (V. Konotop), Дж. Мензала (G. Menzala), М. Ченг (M. Cheng) та ін. Важливим класом розв'язків таких рівнянь є стоячі хвилі. За допомогою варіаційного методу в працях М. Ченга (M. Cheng), О. Панкова, В. Ротоса, С. Бака досліджувалося питання існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера з різними видами нелінійностей. Р. Ередеро, Д. Леві та П. Вінтерніц описали алгебри Лі точкових симетрій для подібних рівнянь. Питання коректності задачі Коші для таких рівнянь досліджували П. Пачіані (P. Pacciani), В. Конотоп (V. Konotop), Дж. Мензала (G. Menzala) та О. Панков. Зауважимо, що для ланцюгів осциляторів і систем Фермі-Пасти-Улама є лише декілька праць О. Панкова та С. Бака, в яких встановлено умови існування і єдиності розв'язків задачі Коші. Що ж стосується дослідження двовимірних дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера, то такі рівняння також вивчалися переважно з фізичної точки зору (Ф. Флах, К. Кладко, Р. Маккей), а питання дослідження умов існування стоячих хвиль в математичних працях не розглядалося.

Таким чином, рівняння нескінченних систем нелінійних осциляторів, дискретні рівняння типу синус-Ґордона, системи типу Фермі-Пасти-Улама, а також дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера на двовимірній ґратці є недостатньо дослідженими з математичної точки зору і тому потребують вивчення, зокрема, питання існування та єдиності розв'язків задачі Коші, існування періодичних розв'язків, існування біжучих і стоячих хвиль в таких системах.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в рамках науково-дослідних тем, що є складовою частиною досліджень передбачених планами наукової роботи кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського:

- "Коректність задачі Коші для систем осциляторів на двовимірних ґратках"(державний реєстраційний номер 0119U102948);

- "Варіаційний метод дослідження одного класу гамільтонових систем" (державний реєстраційний номер 0119U102956);

- "Проблеми математики та інформатики у педагогічному університеті: теорія і практика"(державний реєстраційний номер 0120U101032).

Мета і завдання дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є дослідження умов існування та властивостей розв'язків дискретних нескінченновимірних гамільтонових систем широких класів. *Завданнями* дисертаційної роботи є:

1) встановити умови існування та єдиності локальних і глобальних розв'язків задачі Коші для рівнянь, що описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці;

2) дослідити існування періодичних за часовою змінною розв'язків в системах лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці та методи їх побудови;

3) дослідити існування біжучих хвиль в системах лінійно і нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці;

4) дослідити існування біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус-Ґордона на двовимірній ґратці;

5) дослідити існування біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці;

6) дослідити існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера з кубічною та насичуваною нелінійностями на двовимірній ґратці.

Об'єктом дисертаційного дослідження є дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи.

Предметом дисертаційного дослідження є: умови існування і єдиності розв'язків задачі Коші та умови існування періодичних розв'язків для нескінченних систем лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці; умови існування біжучих хвиль в системах осциляторів, дискретних рівнянннях типу синус-Ґордона і системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці; умови існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці.

Методи дослідження. В даній роботі для виконання поставлених завдань було використано методи функціонального аналізу, варіаційний метод, метод умовної мінімізації, метод періодичних апроксимацій, методи аналізу Фур'є.

Наукова новизна одержаних результатів. Всі результати, сформульовані і доведені в дисертації, є новими та строго обґрунтованими. У дисертаційній роботі одержано такі нові результати:

1. Встановлено умови існування та єдиності локальних і глобальних розв'язків задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Знайдено умови обмеженості глобального розв'язку. Одержані результати є поширенням відомих результатів для систем осциляторів на одновимірних ґратках на випадок двовимірних ґраток для ширших класів потенціалів. Дана задача на двовимірній ґратці досі не розглядалася.

2. Знайдено умови існування періодичних за часовою змінною розв'язків у нескінченній системі лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Встановлено способи побудови таких розв'язків. Раніше питання про існування періодичних розв'язків для подібних систем розглядалися тільки у випадку одновимірної ґратки.

3. Встановлено умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах лінійно та нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Досліджено існування надзвукових і дозвукових біжучих хвиль. Одержані результати значно розширюють відомі результати для подібних систем, які стосуються існування лише періодичних біжу-

чих хвиль в системах з лінійним зв'язком у випадку вужчого класу потенціалів.

4. Доведено існування періодичних, гомоклінічних і гетероклінічних біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус-Ґордона на двовимірній ґратці з нелінійним зв'язком. Одержані результати поширюють відомі результати для подібних рівнянь, заданих на двовимірній ґратці з лінійним зв'язком.

5. Встановлено умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. Доведено існування монотонних біжучих хвиль. Біжучі хвилі в системах такого типу на двовимірній ґратці досі не вивчалися.

6. Знайдено умови існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера з різного типу нелінійностями на двовимірній ґратці. Для подібних рівнянь відомі лише результати, які стосуються таких хвиль, досліджених з фізичної точки зору.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають теоретичний характер і можуть бути застосовані в теорії звичайних диференціальних рівнянь та у нелінійній фізиці.

Особистий внесок здобувача. Результати дисертації одержано автором самостійно. У статті [14] авторові належить формулювання і доведення теорем 1 і 2, у [15] — формулювання і доведення теорем 1.1, 4.2, 5.2, 5.3, 6.4, 6.5, 6.7 і наслідків з них, у [155] — формулювання і доведення теорем 3 і 4, у [156] — формулювання і доведення теорем 1 і 2, у [157] — формулювання і доведення теореми 1, а у статті [158] — формулювання і доведення теорем 4.1, 4.3, 4.4 і наслідку 1.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень, які включено до дисертації, апробовано на:

- Львівському міському семінарі з диференціальних рівнянь (керівники: проф. Бокало М. М., проф. Каленюк П. І.) (Львів, 2019–2020 рр.);

- науковому семінарі кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (керівники: проф. Трохименко В. С., проф. Ковтонюк М. М.) (Вінниця, 2008–2020 рр.);

- науковому семінарі кафедри математичного аналізу і диференціальних рівнянь Донецького національного університету імені Василя Стуса (керівник — доц. Буряченко К. О.) (Вінниця, 2015–2016 рр.);

- Дванадцятій Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 2008 р.);

- Міжвузівській науково-практичній конференції "Актуальні проблеми математики, фізики і технологій"(Вінниця, 2008–2019 рр.);

- Українському математичному конгресі (до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова) (Київ, 2009 р.);

- Тринадцятій Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (Київ, 2010 р.);

- Міжнародній науковій конференції "Teoretyczne i praktyczne innowacje naukowe"(Краків, 2013 р.);

- X Міжнародній математичній конференції імені В. Я. Скоробагатька (Дрогобич, 2015 р.);

- Міжнародній конференції з диференціальних рівнянь, присвяченій 110-й річниці Я. Б. Лопатинського (Львів, 2016 р.);

- 5-й Міжнародній конференції молодих учених з диференціальних рівнянь, присвяченій Я. Б. Лопатинському (Київ, 2016 р.);

- VII Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації"(Кам'янець-Подільський, 2016 р.);

- Всеукраїнській науково-практичній конференції "Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності"(Вінниця, 2017 р.);

- Міжнародній науковій конференції "Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь"(Київ, 2017 р.);

- Міжнародній науково-методичній конференції "Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності"(Вінниця, 2018 р.; 2020 р.);

- VIII Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації присвяченій 100-річчю Національної Академії наук України та 100-річчю КПНУ ім. І. Огієнка (Кам'янець-Подільський, 2018 р.);

- II Всеукраїнській науково-практичній конференції "Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності"(Вінниця, 2019 р.);

- IX Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації"(Кам'янець-Подільський, 2020 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 20 статтях [11–15, 144–158] у фахових наукових журналах та збірниках наукових праць і додатково висвітлено у 22 тезах доповідей і матеріалах конференцій [16–19, 159–176]. Серед публікацій 8 статей у вітчизняних і закордонних журналах, які входять до наукометричної бази Scopus, 2 — Web of Science.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, семи розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Список використаних джерел складає 220 найменувань. Повний обсяг дисертації становить 336 сторінок, з них 270 сторінок основного тексту.

Автор висловлює щиру вдячність науковому консультанту доктору фізико-математичних наук, професору Панкову Олександру Андрійовичу за постійну увагу і допомогу в роботі.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ

1.1. Огляд літератури за тематикою дисертації

1.1.1. Про деякі хвильові рівняння: історичні передумови

Універсальні моделі, які здатні описати велику різноманітність фізичних явищ, зустрічаються досить рідко. Такі моделі користуються особливою увагою, оскільки вони дозволяють давати найбільш прості описи фізичних явищ. Найпростішим прикладом такої моделі є модель маятника. Тверді тіла як правило описуються складними моделями з великим числом ступенів свободи і, отже, достатньо складними рівняннями. Однак у наш час відносно проста модель, зараз відома як модель Френкеля–Конторової, стала одним із фундаментальних інструментів низькорозмірної нелінійної фізики (див. [23, 24, 181]). Ця модель описує ланцюг класичних частинок, зв'язаних зі своїми сусідами, який взаємодіє із зовнішнім періодичним потенціалом (потенціальна енергія підкладки).

Класична модель Френкеля–Конторової (ФК) була запропонована російськими фізиками Я. Френкелем та Т. Конторовою у 1938 році для опису структури і динаміки кристалічної ґратки (див. [216]).

На рис. 1.1 зроблено схематичне представлення моделі Френкеля–Конторової — ланцюг частинок, зв'язаних гармонічними пружинами з коефіцієнтом жорсткості g, який взаємодіє із зовнішнім періодичним потенціалом періоду a_s, причому a_0 — рівноважний крок.

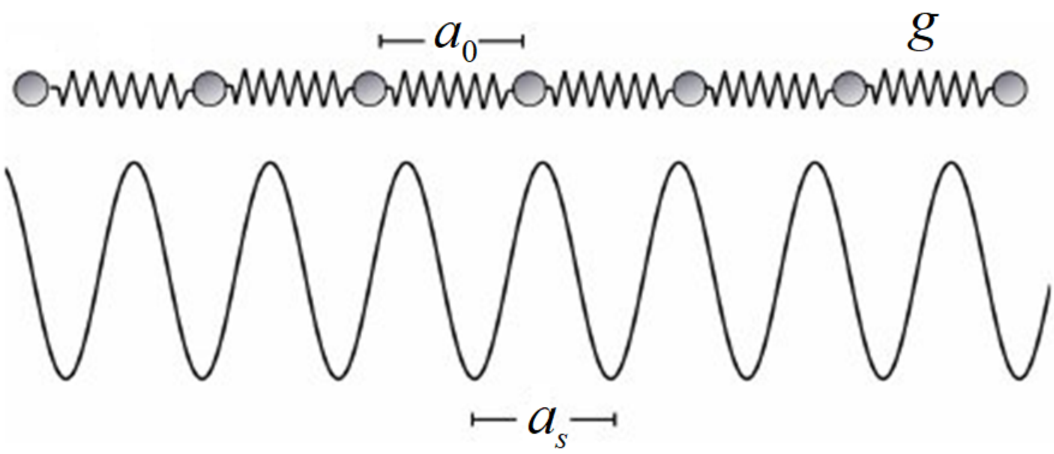

Рис. 1.1. Модель ФК

У безрозмірних координатах (степені всіх фізичних величин дорівнюють нулю) із зовнішнім потенціалом вигляду $U(r) = 1 - \cos r$ ця модель описується рівняннями:

$$\ddot{x}_n - g(\Delta x)_n + \sin x_n = 0,\ n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

де $x_n = x_n(t)$ — координата n-ої частинки в момент часу t, $(\Delta x)_n = x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n$ — одновимірний дискретний оператор Лапласа.

Рівняння (1.1) є дискретним варіантом так званого рівняння синус-Ґордона. Тобто у континуальному наближенні (коли дискретну змінну представляють як неперервну) модель Френкеля–Конторової зводиться до точно інтегровного рівняння синус–Ґордона:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin\phi = 0. \tag{1.2}$$

Рівняння (1.2) належить до нелінійних гіперболічних рівнянь з частинними похідними. Таку назву це рівняння отримало завдяки подібності з відомим рівнянням Клейна–Ґордона:

$$u_{tt} - u_{xx} + f(u) = 0. \tag{1.3}$$

Вперше рівняння (1.2) було розглянуто в диференціальній геометрії ще в XIX столітті в зв'язку з вивченням псевдосфер, які належать до поверхонь зі сталою від'ємною кривиною. Пізніше з'ясувалося, що рівняння синус–Ґордона має досить універсальний характер та описує низку фізичних явищ (поширення імпульсів в дворівневих резонансних середовищах, поведінка блохівських стінок у феромагнітних кристалах, рух дислокацій та ін.). Крім того, у 70-х роках минулого століття у нього виявили солітонні розв'язки, що знову привернуло увагу до цього рівняння. Зауважимо, що в статті [201] запропонована чисельна різницева схема для рівняння (1.3).

Як відомо, одним із найпоширеніших явищ у природі та техніці є коливання, які є часто причиною як аварій і катастроф, так і основою цілих галузей науки і техніки (див. [184, с. 8]). Процес передачі збурень середовища (зокрема, коливального процесу) від однієї точки до іншої прийнято називати хвилею. Слово «хвиля» виникло давно і означало почергову появу «горбів» і «западин», які «бігли» по поверхні моря. Природа механізму поширення хвилі може бути різною. У простому випадку зв'язки між ділянками в середовищі можуть бути обумовлені силами пружності, які виникають через деформації в середовищі. До таких хвиль належать хвилі, які виникають як у твердих пружних середовищах, так і в рідинах або газах. Добре відомий приклад хвиль, які виникають через пружність повітря — звукові хвилі.

Серед хвиль іншої природи особливе місце займають електромагнітні хвилі, передача збурень у яких відбувається через коливання електричного і магнітного полів. До них відносяться радіохвилі, застосування яких у техніці загальновідомо. До електромагнітних явищ, тільки в іншому частотному діапазоні, відноситься також і світло.

Дуже важливим і цікавим типом хвиль є хвилі на поверхні води, які здавна привертали до себе увагу дослідників. Так у 1834 році шотландський інженер і дослідник Дж. Скотт Рассел (J. Scott Russell), вивчаючи пропускну здатність каналів Юніон та Форз-Клайд, вперше відкрив відокремлену хвилю. Він спостерігав за рухом баржі, яку швидко тягла по вузькому каналу пара коней, коли баржа несподівано зупинилася. Однак приведена баржею в рух маса води не зупинилася, а піднялася біля її носу, а потім від нього відірвалася і з великою швидкістю продовжила свій рух. Рассел помітив, що вода рухається у вигляді великого одиночного підвищення, не змінюючи свою форму і не зменшуючи свою швидкість. Проскакавши на коні вздовж каналу близько двох миль, він помітив, що висота хвилі поступово зменшувалась і з часом вона зникла. [202, 215]

Пізніше Рассел назвав відкриту ним хвилю «великою відокремленою хвилею». Він описав різні методи, за допомогою яких можна викликати такі хвилі, знайшов залежність швидкості C цієї хвилі від глибини каналу h і висоти хвилі a:

$$C = \sqrt{g(a+h)},$$

де g — прискорення вільного падіння, причому $a < h$, дав свою класифікацію цих хвиль, виявив, що можливий розпад однієї великої хвилі на декілька хвиль. Опубліковані ним у 1844 році результати досліджень (див. [111]) були досить холодно сприйняті сучасниками. Зокрема, відомі науковці Дж. Ейрі (G. Airy) та Дж. Стокс (G. Stokes) критично поставились до висновків Рассела. Після цього про відкриті Расселом відокремлені хвилі довгий час не згадували.

Через тридцять років британський фізик Дж. Стрет (J. Strutt) (лорд Релей) і французький механік Ж. Буссінеск (J. Boussinesq) незалежно один від одного вивели аналітичну формулу для підвищення вільної поверхні на воді та обчислили швидкість поширення відокремленої хвилі (див. [191, с. 86]). І лише у 1895 році нідерландські математики Д. Кортевег (D. Korteweg) і Г. де Фріз (H. De Vries) вперше математично строго розв'язали задачу про поширення таких хвиль у прямокутному каналі (див. [69]) і тим самим поклали початок гідродинамічної теорії нелінійних хвиль (див. [120, 191, 211, 213]). Цікаво, що через 100 років (1995 р.) на конференції з теорії солітонів в Шотландії в каналі Форз-Клайд було повторено експеримент збурення відокремленої хвилі. Узагальнивши метод Релея, Кортевег і де Фріз у 1895 році вивели рівняння для опису довгих хвиль на воді.

Кортевег і де Фріз розглянули відхилення $u = u(x,t)$ від стану рівноваги поверхні води (визначає форму хвилі), яке залежить від координати x і часу t, вважаючи густину води сталою. Крім того, вони припустили, що виконуються умови

$$e = \frac{a}{h} \ll 1,\ d = \frac{h}{l} \ll 1,$$

де e і d — безрозмірні параметри, a — амплітуда хвилі, h — глибина басейну, l — довжина хвилі (рис. 1.2).

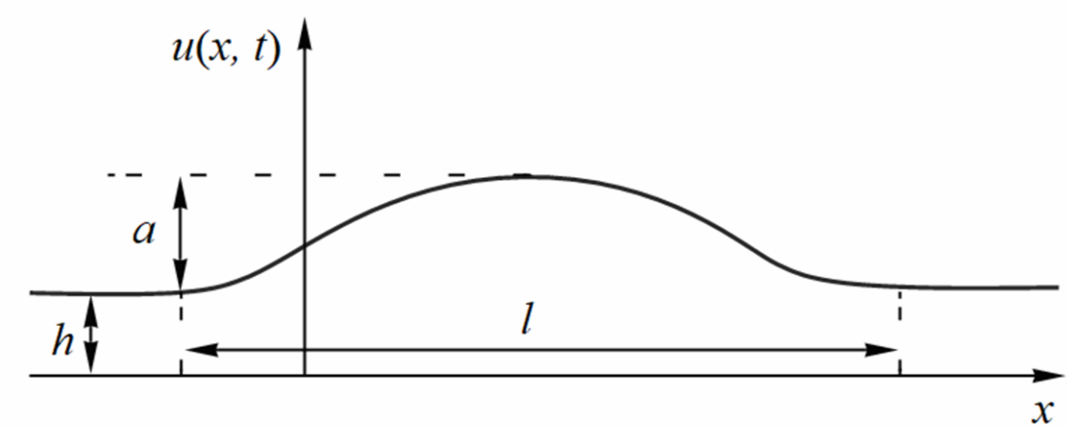

Рис. 1.2

Одержане ними рівняння має вигляд

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{1.4}$$

Рівняння (1.4) має хвильовий розв'язок, який виражається через спеціальну еліптичну функцію, вивчену К. Якобі (C. Jacobi). За певних умов еліптична функція Якобі переходить в гіперболічний секанс і розв'язок має вигляд

$$u(x,t) = 2k^2 \operatorname{ch}^{-2}(k(x - 4k^2 t) + j_0), \tag{1.5}$$

де j_0 — довільна стала. Розв'язок (1.5) рівняння (1.4) є граничним випадком хвилі нескінченно великого періоду. Саме цей граничний випадок є відокремленою хвилею, що відповідає спостереженню Рассела у 1834 році.

Зауважимо, що розв'язок рівняння Кортевега–де Фріза (1.4) є біжучою хвилею. Це означає, що він залежить від координати x і часу t через змінну $s = x - ct$. Ця змінна характеризує положення точки, що рухається зі швидкістю хвилі c, тобто вона позначає положення спостерігача, який постійно знаходиться на гребені хвилі.

Ці праці виявилися забутими на довгі десятиліття. Лише у 1953 році один із найвидатніших фізиків XX століття Е. Фермі (E. Fermi) попросив своїх колег по Лос-Аламоській лабораторії С. Улама (S. Ulam), Дж. Пасту (J. Pasta) та М. Цингу (M. Tsingou) розв'язати одну з нелінійних задач на ЕОМ «MANIAC I» (англ.: Mathematical Analyzer, Numerical Integrator and Computer). Вони повинні були дослідити питання про термалізацію енергії в нелінійних дискретно навантажених струнах на прикладі коливання 64 важків, пов'язаних одна з одною пружинками, які при відхиленні від положення рівноваги отримували силу повернення. Створюючи початкове коливання, дослідники хотіли подивитися, як ця початкова мода буде розподілятися по всіх інших модах. Передбачалося, що енергія в кінці кінців рівномірно розподілиться між модами, тобто по всій довжині хвилі, тим самим відбудеться термалізація енергії. Фактично задача зводилася до дослідження поведінки систем звичайних диференціальних рівнянь, які спочатку були лінійними, але в які було внесено нелінійність як збурення. Якби такого збурення не було, то енергія кожної нормальної моди лінійної системи, тобто коливань із заданою частотою, була б сталою. Тому можна було сподіватися, що нелінійні взаємодії між модами приведуть до того, щоб енергія системи рівномірно розподілилася між модами. Рух ланцюга важок, який розглядали Фермі, Паста та Улам, описувався системою

$$m\ddot{q}_n(t) = U'(q_{n+1}(t) - q_n(t)) - U'(q_n(t) - q_{n-1}(t)),\ n = \overline{1, N},$$

де $q_n(t)$ — відхилення n-ої важки в момент часу t, m — маса важки, $N = 64$. Вони розглядали потенціали $U(r)$ вигляду

$$U(r) = \frac{\gamma}{2}r^2 + \frac{\alpha}{3}r^3$$

та

$$U(r) = \frac{\gamma}{2}r^2 + \frac{\beta}{4}r^4.$$

Пізніше системи Фермі–Пасти–Улама (ФПУ) з такими потенціалами назвали

α-модель та β-модель ФПУ відповідно.

У 1954 році після проведення розрахунків цієї задачі на «MANIAC I» очікуваного результату вони не отримали, але виявили, що перекачування енергії в дві або три моди на початковому етапі розрахунку дійсно відбувається, але потім спостерігається повернення до початкового стану (див. [42, 214]). Про цей парадокс, пов'язаний з поверненням початкового коливання, стало відомо кільком математикам і фізикам. Зокрема, про цю задачу дізналися американські фізики Н. Забускі (N. Zabusky) і М. Крускал (M. Kruskal), які вирішили продовжити обчислювальні експерименти з моделлю, запропонованою Фермі. Виявилося, що в ланцюжку виникають особливі хвилі (пізніше їх назвали солітонами), які не дають енергії рівномірно розподілятися по всій її довжині. Це було виявлено тільки через 11 років. [132]

Після розрахунків і пошуку аналогій ці вчені встановили, що рівняння, яке використовували Фермі, Паста і Улам, при зменшенні відстані між важками і при необмеженому зростанні їх числа переходить в рівняння Кортевега–де Фріза. Тобто по суті задача, запропонована Фермі, зводилася до чисельного розв'язання рівняння Кортевега–де Фріза, запропонованого у 1895 році для опису відокремленої хвилі Рассела. Приблизно в ті ж роки було показано, що для опису іонно-звукових хвиль в плазмі використовується також рівняння Кортевега–де Фріза. Тоді стало зрозуміло, що це рівняння зустрічається в багатьох областях фізики і, отже, відокремлена хвиля, яка описується цим рівнянням, є широко поширеним явищем.

Продовжуючи обчислювальні експерименти з моделювання розповсюдження таких хвиль, Забускі і Крускал розглянули їх зіткнення (рис. 1.3). З формули для відокремлених хвиль (1.5) випливає, що швидкість руху таких хвиль тим вище, чим більше їх амплітуда, а ширина піку зменшується зі зростанням амплітуди. Таким чином, високі відокремлені хвилі рухаються швидше. Хвиля з більшою амплітудою наздожене рухому попереду хвилю з меншою амплітудою. Далі протягом деякого часу дві хвилі будуть рухатися разом як єдине ціле, взаємодіючи між собою, а потім вони роз'єднаються. Чудовою властивістю цих хвиль є те, що після своєї взаємодії форма і швидкість цих хвиль відновлюються. Обидві хвилі після зіткнення лише зміщуються на деяку відстань в порівнянні з тим, що якби вони рухалися без взаємодії.

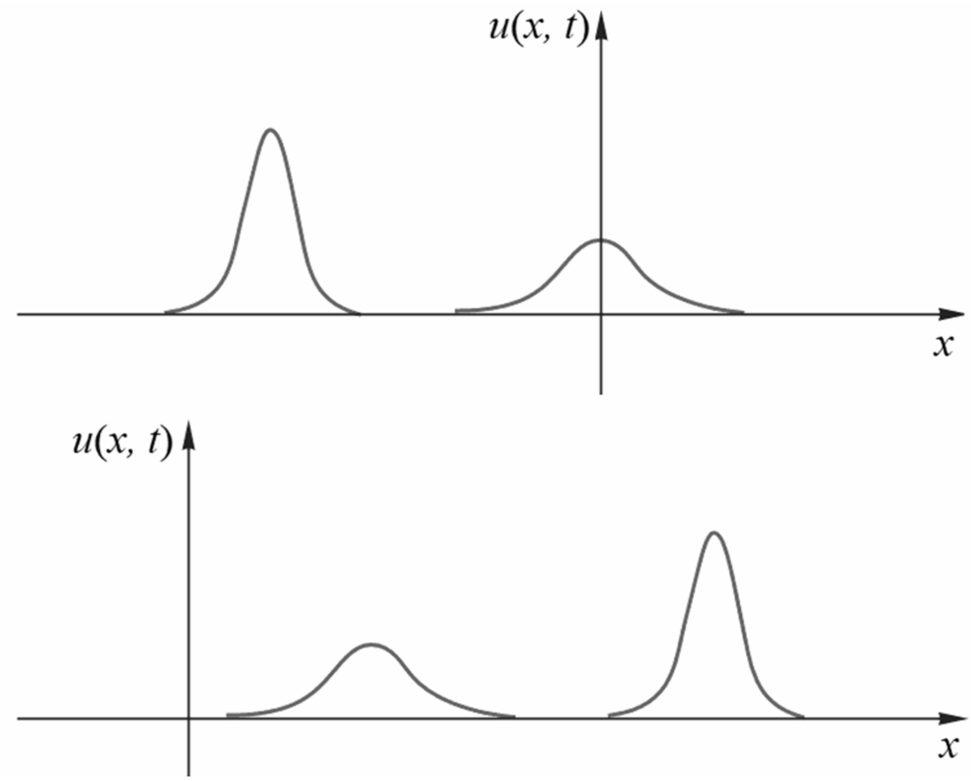

Рис. 1.3. Дві відокремлені хвилі до взаємодії і після

Процес, під час якого після взаємодії хвиль зберігаються форма і швидкість, нагадує пружне зіткнення двох частинок. Тому Забускі і Крускал (див. [132]) такі відокремлені хвилі назвали *солітонами* (від англ. solitary — відокремлений). Ця спеціальна назва відокремлених хвиль, співзвучна електрону, протону та багатьом іншим елементарним частинкам, у даний час загальноприйнята.

Варто зауважити, що відносно недавно (у 2015 р.) групою науковців у складі: М. Онорато (M. Onorato), Л. Возелла (L. Vozella), Д. Промент (D. Proment) під керівництвом американського вченого Ю. Львова (Yu. Lvov) вдалося знайти розв'язання проблеми Фермі–Пасти–Улама. В статті [88] наводиться математичне пояснення, який рівень енергії необхідний, щоб створити одну повну хвилю в ланцюжку з'єднаних важок, які прагнуть до теплової рівноваги. Головним в їх методиці є поступова передача енергії в той момент, коли збігаються шість станів в системі. Тоді енергія передається незворотнім чином. При великій кількості ітерацій моменти збігу шести станів з'являються достатню кількість разів, так що передається достатня кількість енергії, щоб досягти термальної рівноваги.

У 1967 році в статті [55] американські фізики К. Гарднер (C. Gardner), Дж. Грін (J. Greene), М. Крускал (M. Kruskal) і Р. Міура (R. Miura) використали перетворення рівняння Кортевега–де Фріза до системи двох лінійних диференціальних рівнянь, що називається тепер *парою Лакса*, названої на честь американського математика П. Лакса (P. Lax), який вніс великий вклад у розвиток теорії солітонів (див. [75]), і відкрили новий метод розв'язування ряду дуже важливих нелінійних рівнянь в частинних похідних. Цей метод отримав назву *методу оберненої задачі розсіяння*, оскільки в ньому істотно використовується розв'язання задачі квантової механіки про відновлення потенціалу за даними розсіяння.

У тому ж 1967 році Т. Бенжамін (T. Benjamin) і Дж. Фейєр (J. Feir) теоретичними розрахунками показали, що проста періодична хвиля на глибокій воді нестійка, і тому хвилі розбиваються на групи (див. [21]). Рівняння, за допомогою якого описується поширення груп хвиль на воді, було отримано В. Захаровим в 1968 році (див. [187]). На той час це рівняння вже було відоме у фізиці і носило назву *нелінійного рівняння Шредінгера*

$$iu_t + u_{xx} - 2ku|u|^2 = 0, \tag{1.6}$$

яке описує сукупність явищ у фізиці хвильових процесів (поширення електромагнітних хвиль в плазмі, поширення світла в нелінійних кристалах з дисперсією та ін.).

У 1971 році В. Захаров і А. Шабат показали (див. [188]), що це нелінійне рівняння має розв'язок також у вигляді солітонів, які відрізняються від солітонів Кортевега–де Фріза тим, що вони відповідають формі огинаючої групи хвиль (рис. 1.4).

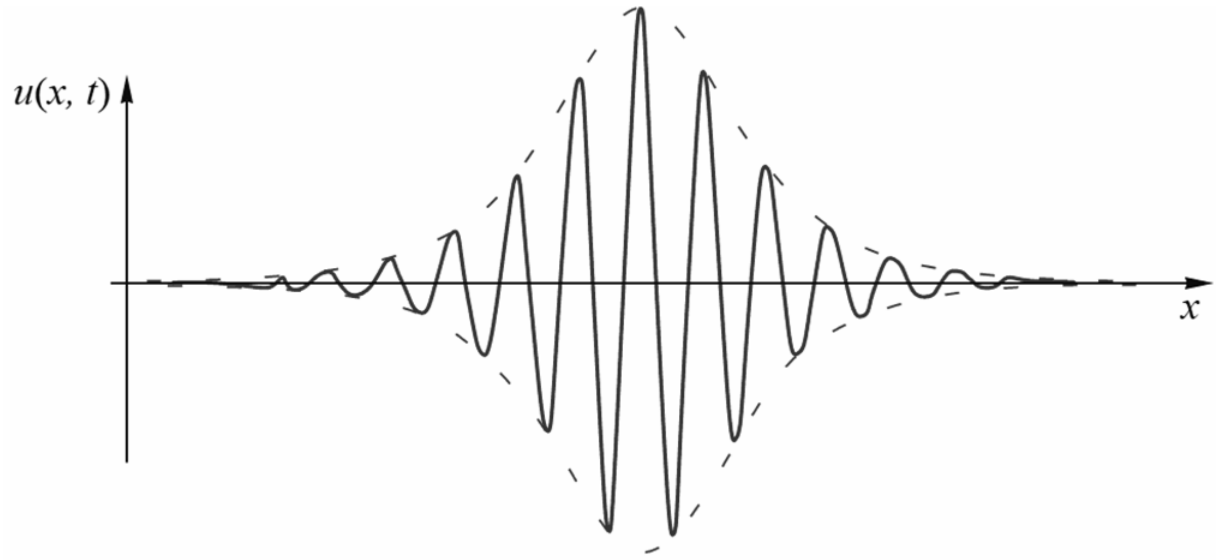

Рис. 1.4

Ці солітони називаються *груповими солітонами*, а іноді солітонами огинаючої. При цьому форма огинаючої описується залежністю

$$a(x,t) = a_0 \operatorname{ch}^{-1}\left(\frac{x - c_0 t}{l}\right),$$

де a_0 — амплітуда, а l — половина довжини солітона. Зазвичай під огинаючою солітона знаходиться від 14 до 20 хвиль, причому середня хвиля найбільша. З цим пов'язаний добре відомий факт, що найвища хвиля в групі на воді знаходиться між сьомою та десятою («дев'ятий вал»). Якщо в групі хвиль утворилася більша кількість хвиль, то відбудеться її розпад на кілька груп.

Солітон Кортевега–де Фріза і груповий солітон, звичайно, не вичерпує всього різноманіття цих дивовижних нелінійних об'єктів. Не менш популярним, ніж перелічені вище солітони, є так званий топологічний солітон, який також має цікаву історію і велику область застосувань (див. [202, 203, 215]). Цей солітон з'являється у всіх процесах, які описуються вже згаданим рівнянням синус–Ґордона (1.2).

1.1.2. Існування розв'язків в системах осциляторів

Рівняння, які описують системи осциляторів, вивчались в працях [7–10, 40, 41, 48, 49, 61, 79, 81, 82, 85, 95, 115, 138, 140–143, 209] та ін.

Нагадаємо, що під *осцилятором* розуміють систему, яка здійснює коливання.

Спочатку розглянемо ланцюг осциляторів (випадок одновимірної ґратки). Нехай $q_n = q_n(t)$ — узагальнена координата n-го осцилятора в момент часу t.

Зауважимо, що в механіці під *узагальненими координатами* розуміють змінні, які повністю визначають миттєве положення механічної системи в просторі. Це означає, що через узагальнені координати можна виразити декартові координати всіх точок механічної системи в будь-який момент часу. Вибір узагальнених координат визначається специфікою конкретної механічної системи. Наприклад, у випадку математичного маятника узагальненою координатою буде кут відхилення маятника від положення рівноваги.

Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з двома своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_n(t) = a_{n-1}(q_{n-1}(t) - q_n(t)) - a_n(q_n(t) - q_{n+1}(t)) - U_n'(q_n(t)),\ n \in \mathbb{Z}. \quad (1.7)$$

Рівняння (1.7) представляють собою нескінченну (зліченну) систему звичайних диференціальних рівнянь. Загальна теорія зліченних систем диференціальних рівнянь вивчалась А. Самойленком та Ю. Теплінським (див. [107, 210]). Зауважимо, що система (1.7) належить до динамічних систем. Монографія Ю. Митропольського, М. Боголюбова, А. Прикарпатського та В. Самойленка [198] присвячена спектральним і диференціально-геметричним аспектам інтегровних динамічних систем.

Розглядаються такі розв'язки системи (1.7), що

$$\lim_{n\to\pm\infty} q_n(t) = 0,$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Потенціал $U_n(r)$ запишемо у вигляді

$$U_n(r) = -\frac{c_n}{2}r^2 + V_n(r)$$

і покладемо $b_n = c_n - a_n - a_{n-1}$. Тоді система (1.6) матиме вигляд

$$\ddot{q}_n(t) = a_n q_{n+1}(t) + a_{n-1}q_{n-1}(t) + b_n q_n(t) - V_n'(q_n(t)),\ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.8}$$

Систему (1.8) можна записати у гамільтоновому вигляді (див. [39, 128, 135])

$$\begin{cases} \dot{p} = -H_q'(p, q), \\ \dot{q} = H_p'(p, q); \end{cases} \tag{1.9}$$

з гамільтоніаном

$$H(p, q) = \frac{1}{2}\left[\|p\|_{l^2}^2 - (Aq, q)_{l^2}\right] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(q_n),$$

де $p = \dot{q}$, $q = \{q_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \in l^2$, $(Aq)_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1}q_{n-1} + b_n q_n$.

Зауважимо, що динамічна система називається *гамільтоновою*, якщо можна ввести координати p, імпульси q і гамільтоніан $H(p, q)$ таким чином, щоб рівняння руху системи можна було записати у вигляді (1.9). Рівняння (1.9) називають *рівняннями Гамільтона*, а змінні (p, q) називають *спряженими* (див. [135, с. 75]). З фізичної точки зору гамільтоніан визначає повну енергію системи.

Упродовж 1994–1998 рр. С. Обрі (S. Aubry) та Р. Маккей (R. MacKay) досліджували питання про існування періодичних розв'язків для таких систем (див. [7, 8, 81]). Вони отримали часткові результати методами теорії збурень для однорідних за просторовою змінною n ланцюгів зі слабким зв'язком. Динаміка таких ланцюгів описується рівняннями

$$\ddot{q}_n(t) = \alpha(q_{n+1}(t) + q_{n-1}(t) - 2q_n(t)) - V'(q_n(t)),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{1.10}$$

де α — малий параметр, $V'(0) = 0$, $V''(0) = \omega_0^2 > 0$. Зауважимо, що рівняння (1.10) є дискретним аналогом рівняння Клейна–Ґордона (1.3).

У 2004 році С. Баком та О. Панковим в статті [142] одержано умови існування нетривіальних періодичних розв'язків системи (1.7). Для цього реалізовано варіаційний метод із використанням теореми про гірський перевал і метод періодичних апроксимацій. Основними умовами тут є просторова періодичність ланцюга осциляторів та додатність оператора лінійної взаємодії осциляторів. Крім того, у випадку степеневої потенціальної функції для побудови періодичних розв'язків С. Баком використано метод умовної мінімізації (див. [140]).

Зауважимо, що варіаційний метод та його застосування розглядались в багатьох працях (див. [1, 22, 29, 35, 70, 77, 78, 84, 90, 101, 103–106, 109, 116, 129, 133, 183] та ін.).

У 2006 р. С. Баком та О. Панковим в статті [141] досліджено питання коректності задачі Коші для системи рівнянь (1.8), яка полягає в знаходженні розв'язку (1.8), що задовольняє початкові умови

$$q(0) = q^{(0)} \in l^2,\ \dot{q}(0) = q^{(1)} \in l^2.$$

В цій статті, зокрема, встановлено умови існування локального і глобального розв'язків у просторі l^2. Для цього використано подання системи в гамільтоновому вигляді. Окремо, досліджено випадок кубічного потенціалу. Зокрема показано, що глобальний розв'язок існує, якщо початкові дані достатньо малі в l^2-нормі. Вказано умови, за яких він не існує.

Зазначимо, що в статті [209] А. Самойленком, В. Самойленком та В. Собчуком вивчалися періодичні розв'язки та поведінка фазових траєкторій диференціального рівняння нелінійного осцилятора з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу.

У 2000 році Г. Йоссом (G. Iooss) та К. Кіршгаснером (K. Kirschgässner) за допомогою методів теорії біфуркацій встановлено існування біжучих хвиль для системи (1.10) (див. [61]). Основи теорії біфуркацій можна знайти в [189].

Зауважимо, що *біжучою хвилею* є розв'язок вигляду

$$q_n(t) = u(n - ct),$$

де $u(s)$ — функція неперервного аргументу $s \in \mathbb{R}$. Функція $u(s)$ називається *профілем* хвилі. Стала c представляє собою *швидкість* хвилі. Якщо $c > 0$, то хвиля переміщується вправо, а якщо $c < 0$, то вліво.

Біжучі хвилі у параболічних рівняннях з частинними похідними досить детально досліджено Дж. Смоллером (J. Smoller), А. Вольпертом (A. Volpert) та В. Вольпертом (V. Volpert) (див. [114, 123]).

У 2006 році С. Баком (див. [138]) одержано умови існування нетривіальних періодичних і відокремлених біжучих хвиль для системи (1.7) у випадку просторово однорідного ланцюга осциляторів, тобто при $a_n \equiv a$ та $U_n(r) = -\frac{c_0}{2}r^2 + V(r)$. Для цього було використано метод критичних точок у комбінації з теоремою про гірський перевал для періодичних хвиль і метод періодичних апроксимацій для відокремлених хвиль.

У 2011 році П. Макіта (P. Makita, [82]) за допомогою подібної техніки встановив існування періодичних і гомоклінічних (відокремлених) біжучих хвиль для ланцюгів нелінійно зв'язаних нелінійних частинок, які описуються рівняннями:

$$\ddot{q}_n(t) + f'(q_n(t)) = V'(q_{n+1}(t) - q_n(t)) - V'(q_n(t) - q_{n-1}(t)),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Відзначимо недавню дисертацію О. Бурилка [182], в якій вивчалися рівняння, що описують взаємодію N фазових осциляторів

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} K_{ij}\Gamma_{ij}\left(\theta_i - \theta_j\right),\ i = \overline{1, N},$$

де $\theta_i \in [0, 2\pi) = \mathbb{T}^1$ — фазові змінні (фази), ω_i — власні частоти осциляторів, K_{ij} — параметри (сили) зв'язків між осциляторами, $\Gamma_{ij}(x)$ — гладкі 2π-періодичні функції зв'язку. Ця система є моделлю типу Курамото. Кожна змінна θ_i пробігає одновимірне коло, а тому, фазовим простором системи є тор $\mathbb{T}^N$. У цій праці досліджено стійкість та біфуркації розв'язків, що відповідають різним колективним режимам. Зауважимо, що в стандартній *моделі Курамото* (див. [74]), $\Gamma_{ij}(x) = -\sin x$ та $K_{ij} = K$.

Що ж стосується систем нелінійних осциляторів на двовимірних ґратках, то для них є всього декілька праць.

Зокрема, у 2003 році Ж. Фрізеке (G. Friesecke) та К. Маттісом (K. Matthies) досліджено питання існування відокремлених біжучих хвиль в системі лінійно зв'язаних частинок на двовимірній ґратці, кожна з яких взаємодіє як з чотирма найближчими сусідами (по вертикалі і по горизонталі), так і з чотирма діагональними сусідами без зовнішнього потенціалу (див. [49]).

А в 2007 році в статті [41] М. Фецканом (M. Fečkan) та В. Ротосом (V. Rothos) встановлено існування періодичних біжучих хвиль для системи частинок, які взаємодіють тільки з чотирма своїми найближчими сусідами (як у цій дисертації). Вони вивчали системи вигляду:

$$\ddot{q}_{n,m} = (\Delta q)_{n,m} - f(q_{n,m}),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{1.11}$$

де $(\Delta q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}$ — двовимірний дискретний оператор Лапласа, з припущенням, що нелінійність f — непарна і 2π-періодична.

Зауважимо, що біжучою хвилею на двовимірній ґратці є розв'язок вигляду

$$q_{n,m} = u(n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct).$$

У 2014 році Л. Жанг (L. Zhang) та Ш. Гуо (S. Guo) у статті [134] за допомогою методів теорії біфуркацій вивчали 2π-періодичні хвилі для систем вигляду (1.11).

Варто зазначити, що в статті [178] Г. Безуглова, П. Гончаров, Ю. Гуров, Г. Чечін досліджували *дискретні бризери* (періодичні, просторово локалізовані розв'язки систем частинок на ґратках) в двох скалярних динамічних моделях на квадратній ґратці (2011 р.), які описуються рівняннями

$$\ddot{x}_{i,j} + \gamma x_{i,j}^{m-1} =$$
$$= (x_{i+1,j} - x_{i,j})^{m-1} - (x_{i,j} - x_{i-1,j})^{m-1} + (x_{i,j+1} - x_{i,j})^{m-1} - (x_{i,j} - x_{i,j-1})^{m-1},$$

та

$$\ddot{x}_{i,j} + \gamma x_{i,j}^3 = x_{i+1,j} + x_{i-1,j} + x_{i,j+1} + x_{i,j-1} - 4x_{i,j}.$$

Перша модель відповідає однорідному потенціалу степеня m. Дискретні бризери в цій моделі представляють собою локалізовані в просторі нелінійні нормальні моди Розенберга. Друга модель описує систему лінійно зв'язаних осциляторів Дуффінга в вузлах квадратної ґратки. Для обох моделей дискретні бризери вони побудували на одних і тих же симетрійно обумовлених інваріантних многовидах, які знайдено за допомогою теоретико-групових методів.

Усі нові, одержані автором дисертації, результати, які стосуються існування розв'язків в системах осциляторів на двовимірних ґратках, наведені в розділах 2–4.

1.1.3. Існування розв'язків в дискретних рівняннях типу синус-Ґордона

Дискретні рівняння типу синус–Ґордона вивчались в працях [23, 24, 26, 70–73, 117, 181, 216] та ін.

Розглянемо дискретні рівняння типу синус–Ґордона

$$\ddot{q}_n(t) = U'(q_{n+1}(t) - q_n(t)) - U'(q_n(t) - q_{n-1}(t)) - K\sin(q_n(t)),\ n \in \mathbb{Z}, \quad (1.12)$$

зі сталою K, де $q_n(t)$ — узагальнена координата n-ої частинки. Ці рівняння описують динаміку частинок в нескінченному ланцюзі з пружною взаємодією найближчих сусідів і зовнішнім потенціалом відповідно до закону Ньютона (як і рівняння осциляторів). Аргументом потенціалу взаємодії $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є дискретне зміщення (зсув) $q_{n+1}(t) - q_n(t)$.

Після підстановки біжучої хвилі $q_n(t) = u(n - ct)$, в рівняння (1.12), для профілю $u(s)$, де $s = n - ct$, одержуємо рівняння

$$c^2u''(s) = U'(u(s+1) - u(s)) - U'(u(s) - u(s-1)) - K\sin(u(s)).$$

За відповідних умов існують три типи розв'язків:

- гетероклінічні біжучі хвилі:

$$\lim_{s\to-\infty} u(s) = -\pi \ \text{ та } \ \lim_{s\to+\infty} u(s) = \pi;$$

- гомоклінічні біжучі хвилі: $\lim\limits_{s\to-\infty} u(s) = \lim\limits_{s\to+\infty} u(s) = \pi$;

- періодичні біжучі хвилі: $u(s+T) = u(s)$ для деяких $T > 0$ і всіх $s \in \mathbb{R}$.

У 2007 році в дисертації [70] К. Крейнера (C. Kreiner) за допомогою варіаційного підходу встановлено існування періодичних і гомоклінічних біжучих хвиль в лінійно зв'язаних ланцюгах, тобто в системі (1.12) з квадратичним потенціалом

$$U(r) = \frac{c_0^2}{2} r^2.$$

У 2009 році К. Крейнер та Й. Зіммер (J. Zimmer) в статті [72] за допомогою принципу концентрованої компактності встановили існування ще гетероклінічних біжучих хвиль в системі (1.12) з квадратичним потенціалом. Крім того, в статті [73] вони дослідили питання існування гетероклінічних, гомоклінічних і періодичних біжучих хвиль в таких ланцюгах з нелінійним зв'язком сусідів.

А у 2011 році в статті [71] К. Крейнер та Й. Зіммер встановили існування дозвукових гетероклінічних біжучих хвиль в моделі Френкеля–Конторової, тобто в дискретних рівняннях синус–Ґордона з лінійним зв'язком.

У 2017 році Б. Буффоні (B. Buffoni), Г. Шветлік (H. Schwetlick) та Й. Зіммер (J. Zimmer) одержали існування гетероклінічних біжучих хвиль для цієї моделі з більш загальною нелінійністю (див. [26]).

Модель Френкеля–Конторової (ФК) з фізичної точки зору досить детально досліджено в статті [23] відомих фахівців з нелінійної динаміки і теорії солітонів О. Брауна та Ю. Ківшара. Найбільш повний огляд результатів досліджень цієї моделі подано в їх монографії [24,181]. У цій книзі систематично викладені, з найбільш загальної точки зору, концепції і методи низькорозмірної нелінійної фізики, які базуються на моделі ФК і її узагальненнях. Представлений панорамний погляд на загальні властивості і нелінійну динаміку моделей твердого тіла, включаючи фундаментальні фізичні поняття. Наведено детальне обговорення застосувань моделі ФК до фізичних систем різного типу (дислокації і краудіони в твердих тілах, доменні межі, джозефсонівські контакти, біологічні молекули і поверхні кристалів). Введено та описано багато важливих понять, таких, як нелінійна динаміка дискретних систем, динаміка солітонів і їх взаємодія, тощо. Розглянуто також відповідні нелінійні рівняння, досліджені властивості їх розв'язків і детально описані методи їх аналізу.

Що ж стосується дослідження двовимірних дискретних рівнянь типу синус–Ґордона, то такі рівняння також вивчалися переважно з фізичної точки зору, а питання встановлення умов існування біжучих хвиль в математичних працях не розглядалося.

Зокрема, Ж. Тамга (J. Tamga), М. Ремуссене (M. Remoissenet) та Ж. Пуже (J. Pouget) у 1995 році теоретично і чисельно дослідили динамічну поведінку двовимірної ґратки синус–Ґордона (див. [117]). Вони показали, що через модуляційну нестабільність початкова низько-амплітудна хвиля може спонтанно еволюціонувати в рухомі локалізовані моди з великою амплітудою. Ці нелінійні моди, з розмірами, що залежать від характерних довжин хвиль нестабільності, поводять себе як дихаючі (бризерні) відокремлені хвилі і присутні подібні до частинок властивості.

Усі нові, одержані автором дисертації, результати, які стосуються існування біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус–Ґордона на двовимірній ґратці, наведені в розділі 5.

1.1.4. Існування розв'язків в системах типу Фермі-Пасти-Улама

Праці Е. Фермі, Дж. Пасти та С. Улама дали поштовх для великої кількості подальших чисельних та аналітичних досліджень. До таких систем належить цілком інтегровна ґратка (ланцюг) Тоди (див. [95, 119, 212]):

$$m\ddot{q}_n(t) = U'(q_{n+1}(t) - q_n(t)) - U'(q_n(t) - q_{n-1}(t)),\ n \in \mathbb{Z},$$

де $U(r) = ab^{-1}(\exp(-br) + br - 1)$. На жаль, ґратка Тоди є єдиною відомою повністю інтегровною системою типу ФПУ. Переважна більшість існуючих результатів стосуються точних і наближених часткових розв'язків або чисельного моделювання.

Системи типу Фермі–Пасти–Улама (ФПУ) вивчено досить добре в працях [2–6, 27, 28, 32, 33, 38, 42, 43, 45, 47, 50–54, 57–60, 63, 64, 80, 88, 95, 96, 98, 100, 102, 106, 110, 112, 113, 115, 118, 121, 131, 214] та ін.

Один з перших строгих результатів щодо загальних систем типу ФПУ був отриманий у 1994 році Ж. Фрізеке (G. Friesecke) та Дж. Ваттісом (J. Wattis) в статті [53]. Вони довели існування відокремлених біжучих хвиль з деякими загальними припущеннями щодо потенціалу взаємодії між частинками. Зокрема, клас їх потенціалів включає потенціали типу Тоди, Леннарда-Джонса: $U(r) = a[(d+r)^{-6} - d^{-6}], a, d > 0, r > -d$ та ін. Для одержання основних результатів вони використали процедуру умовної мінімізації та принцип концентрованої компактності П. Ліонса (див. [77, 78]). Зауважимо, що для потенціалів типу Леннарда-Джонса Т. Валкерінг (T. Valkering) ще у 1978 році у статті [122] встановив існування періодичних біжучих хвиль за допомогою методу умовної мінімізації.

У 2000 році в статті [98] О. Панков та К. Пфлюгер (K. Pflüger) переглянули останній підхід, вибравши періодичні біжучі хвилі як відправну точку. Існування періодичних хвиль вони встановили за допомогою стандартної теореми про гірський перевал. А відокремлені хвилі було одержано за допомогою методу періодичних апроксимацій.

Інший напрям досліджень систем типу ФПУ запропонований Б. Руфом (B. Ruf) та П. Срікантом (P. Srikanth) у 1994 році (див. [106]), які розглядали періодичні рухи скінченних ґраток типу ФПУ, які не обов'язково складаються з однакових частинок. Подібну задачу для нескінченних ґраток, також неоднорідних, вивчали Г. Аріолі (G. Arioli), Дж. Чабровскі (J. Chabrowski), Ф. Газзола (F. Gazzola), A. Szulkin (А. Шулькін) та С. Терраціні (S. Terracini) в статтях [2–6] при більш обмежених припущеннях на потенціал.

Найбільш повний огляд результатів про існування розв'язків для систем ФПУ можна знайти в монографії О. Панкова [95], опублікованій у 2005 році. Тут розглядається одновимірний ланцюг частинок, що взаємодіють зі своїми найближчими сусідами. Рівняння руху такої системи мають вигляд:

$$m_n\ddot{q}_n(t) = U'_{n+1}(q_{n+1}(t) - q_n(t)) - U'_n(q_n(t) - q_{n-1}(t)),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{1.13}$$

де $q_n(t)$ — координата n-ої частинки в момент часу t, m_n — маса цієї частинки, U_n — потенціал взаємодії між n-ою та $(n-1)$-ою частинками. Це диференціальні рівняння з відхиленим аргументом. Теорії подібних рівнянь присвячено велику кількість робіт (див., наприклад, [136, 200, 218, 219]).

Припускається, що існують сталі $M_1 > 0, M_2 > 0$, такі, що

$$M_1 \leq m_n \leq M_2,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Система (1.13) також є гамільтоновою системою з гамільтоніаном

$$H(p, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{p_n^2}{2m_n} + U_{n+1}(q_{n+1} - q_n) \right),$$

де $p_n(t) = m_n\dot{q}_n(t)$.

Для системи (1.13) в монографії О. Панкова досить детально досліджено питання коректності задачі Коші, встановлено умови існування періодичних розв'язків, досліджено питання існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль.

У 2009 році Г. Шветлік (G. Schwetlick) та Й. Зіммер (J. Zimmer) дослідили існування біжучих хвиль в моделі атомів (ФПУ) для мартенситних фазових переходів (див. [110]).

У 2011 році О. Панков за допомогою варіаційної техніки і принципу концентрованої компактності встановив існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль для системи ФПУ з насичуваною нелінійністю (див. [100]).

Відзначимо, що є ще один клас біжучих хвиль, які у випадку ФПУ раніше не вивчалися. У 2010 році М. Геррманн (M. Herrmann) та Й. Радемахер (J. Rademacher) в статті [57] за допомогою варіаційного підходу встановили існування гетероклінічних біжучих хвиль в просторово однорідній системі ФПУ (1.13) при $m_n = 1$ з опуклими потенціалами $U_n \equiv U$, похідна яких U' має принаймні одну точку повороту (точка перегину, для якої $U''' = 0$).

У 2019 році О. Панков (див. [96]) за допомогою варіаційної техніки дослідив питання існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах типу ФПУ, в яких кожна частинка взаємодіє з $2M$ сусідами:

$$\ddot{q}_j = \sum_{m=1}^{M} \left[U'_m(q_{j+m} - q_j) - U'_m(q_j - q_{j-m}) \right], \; j \in \mathbb{Z}.$$

Як і у випадку систем осциляторів, системи типу ФПУ на двовимірних ґратках також вивчалися переважно з фізичної точки зору (див. [27, 28, 33, 44, 45, 124–126]).

Зокрема, у 1997 році в статті [45] Ф. Флах (F. Flach), К. Кладко (K. Kladko) та С. Такено (S. Takeno) вивчали дискретні бризери для двовимірної ґратки ФПУ з однією акустичною фононною гілкою.

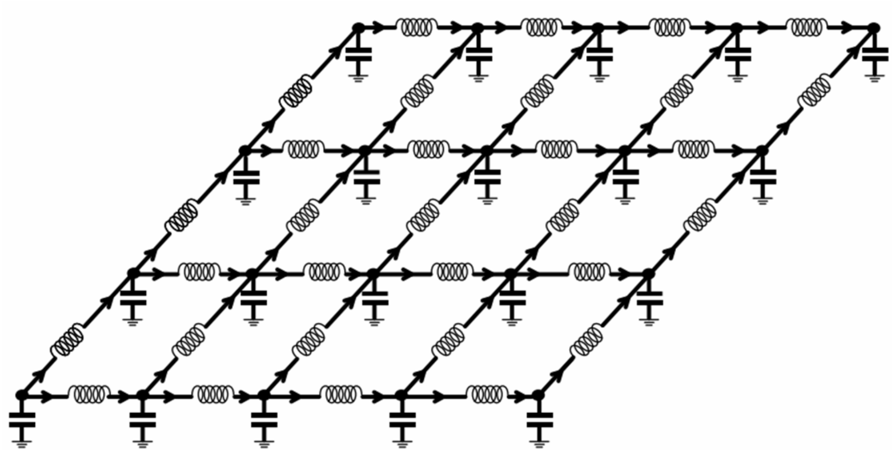

Рис. 1.5. Двовимірна ґратка електричної передачі

В статті [28] І. Батта (I. Butt) та Дж. Ваттіса (J. Wattis), яка вийшла у 2006 році, за допомогою асимптотичних методів також досліджувалися дискретні бризери для двовимірної ґратки ФПУ. Зокрема, показано, що така ґратка може бути використана для моделювання передачі (трансмісії) електричного заряду. Вона представляє собою мережу повторюваних секцій установки, кожна з яких складається з двох ідентичних лінійних індукторів і нелінійного конденсатора. Розташування показано на рис. 1.5. Вузли ґратки визначаються за розташуванням конденсаторів.

У наступному році вони одержали аналогічні результати для двовимірної гексагональної ґратки ФПУ (рис. 1.6).

У 2006 році Ю. Доі (Yu. Doi) та А. Накатані (A. Nakatani) дослідили

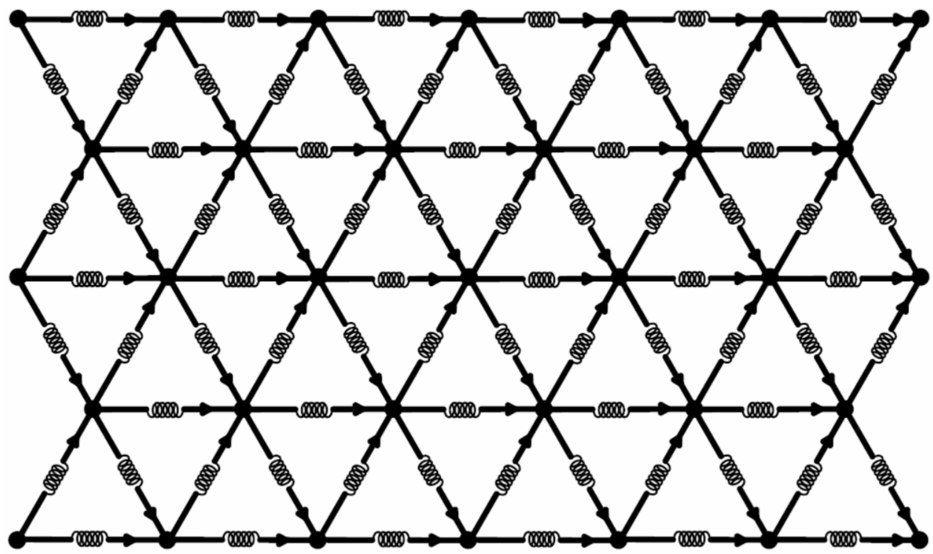

Рис. 1.6. Двовимірна гексагональна ґратка електричної передачі

структуру дискретних бризерів у двовимірній системі ФПУ (див. [33]).

У 2009 році Ї. Ксянг (Y. Xiang), Дж. Ваттіс (J. Wattis), Х. Сузанто (H. Susanto), Л. Каммінгс (L. Cummings) в статті [131] побудували асимптотичне наближення бризера для механічної пружинної ґратки, яка описується двовимірною системою типу ФПУ.

У 1998 році П. Срікантом (P. Srikanth) в статті [115] за допомогою варіаційного методу встановлено існування періодичних розв'язків у скінченній системі типу ФПУ на двовимірній ґратці. Фактично тут встановлено існування періодичних розв'язків у випадку потенціалів типу Тоди $V(r) = \frac{a}{b}e^{-bt} + at$, $a > 0$, $b > 0$, і зроблено деякі більш загальні висновки щодо потенціалів. Зокрема, вказано, що система має періодичні розв'язки для суперквадратичних потенціалів, які задовольняють умову Пале-Смейла.

Усі нові, одержані автором дисертації, результати, які стосуються існування біжучих хвиль в системах типу ФПУ на двовимірній ґратці, наведені в розділі 6.

1.1.5. Існування розв'язків в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера

Дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера досліджено в значній мірі в працях [20, 30, 46, 56, 65, 66, 66–68, 89, 91–93, 97, 99, 127, 139, 177, 220] та ін.

Розглянемо дискретні нелінійні рівняння Шредінгера (ДНРШ) з кубічною нелінійністю

$$i\dot{\psi}_n = -(\Delta\psi)_n + \varepsilon_n\psi_n - \sigma\chi_n|\psi_n|^2\psi_n,\ n \in \mathbb{Z}, \tag{1.14}$$

де $\psi_n = \psi_n(t)$ — хвильова функція, $\sigma = \pm 1$, $(\Delta\psi)_n = \psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n$ дискретний одновимірний Лапласіан, а послідовності $\{\varepsilon_n\}$ і $\{\chi_n\}$ є N-періодичними по n, тобто $\varepsilon_{n+N} = \varepsilon_n$ і $\chi_{n+N} = \chi_n$.

У квантовій механіці під *хвильовою функцією* розуміють комплексно-значну функцію, призначену для опису стану квантовомеханічної системи. У відповідності з постулатом про наявність хвильових властивостей в об'єктів мікросвіту (атом, молекула, протон, електрон тощо) квантова механіка приймає без доведення, що динамічний стан системи визначється хвильовою функцією $\psi(r,t)$, яка описує розповсюдження відповідної хвилі речовини в просторі і часі. Хвильова функція є аналогом траєкторії в класичній механіці. Частинка, що співставляється з хвилею, крім випадку хвилі де Бройля, не володіє ні певним положенням у просторі, тобто координатою r, ні певним імпульсом p. Тобто значення хвильової функції не може бути заміряне безпосередньо. Можна лише говорити про ймовірність знайти частинку в деякій області W в момент часу t, яка визначається формулою (див. [192, с. 492])

$$P(W) = \int\limits_W \psi(r,t)\psi^*(r,t)dW = \int\limits_W |\psi(r,t)|^2 dW,$$

де $\psi^*(r,t)$ — комплексно спряжена функція до $\psi(r,t)$.

Зауважимо, що рівняння (1.14) також можна подати у гамільтоновому вигляді

$$i\dot{\psi}_n = \frac{\partial H}{\partial \psi_n^*},\ n \in \mathbb{Z},$$

з гамільтоніаном

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[|\psi_n - \psi_{n-1}|^2 + \varepsilon_n|\psi_n|^2 - \frac{1}{2}\sigma\chi_n|\psi_n|^4\right] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[-(\Delta\psi)_n\psi_n^* + \varepsilon_n\psi_n\psi_n^* - \frac{1}{2}\sigma\chi_n(\psi_n\psi_n^*)^2\right],$$

де $\psi_n^*(t)$ — комплексно спряжена функція до $\psi_n(t)$.

Важливим класом розв'язків таких рівнянь є стоячі хвилі. Зауважимо, що *стояча хвиля* — це хвиля, яка при будь-якій фазі коливань не поширюється (локалізована) у просторі. Характерною особливістю стоячої хвилі є наявність у ній вузлів (точок, у яких амплітуда хвилі дорівнює нулю) та пучностей (точок, у яких амплітуда максимальна), причому положення вузлів і пучностей лишається незмінним у просторі (рис. 1.7). Стояча хвиля утворюється в результаті накладання двох когерентних біжучих хвиль з однаковими амплітудами, які поширюються назустріч одна одній. У біжучій хвилі, яка на відміну від стоячої поширюється в просторі зі скінченною швидкістю, відбувається перенесення енергії, а в стоячій хвилі через площини, в яких розташовані вузли, енергія не перетікає.

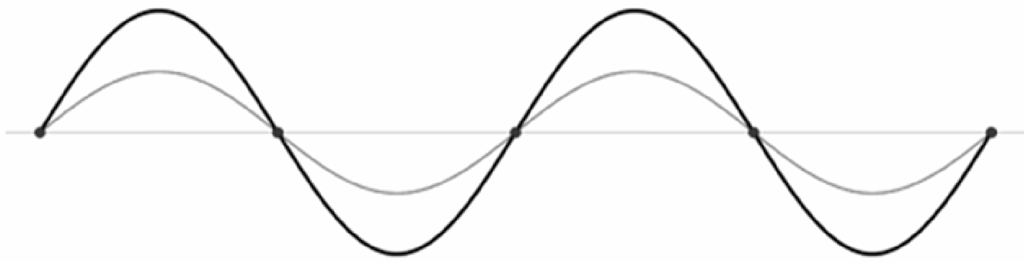

Рис. 1.7. Стояча хвиля

Використовуючи представлення стоячої хвилі у вигляді

$$\psi_n = u_n \exp(-i\omega t),$$

де $\{u_n\}$ — дійсна послідовність (амплітуда) і $\omega \in \mathbb{R}$ (частота), отримуємо систему

$$-(\Delta u)_n + \varepsilon u_n - \omega u_n = \sigma \chi_n |u_n|^2 u_n,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.15}$$

Накладемо наступні крайові умови:

$$\lim_{n \to \pm\infty} u_n = 0. \tag{1.16}$$

Далі ми розглянемо більш загальну систему

$$(Lu)_n - \omega u_n = \sigma \chi_n |u_n|^2 u_n,\ n \in \mathbb{Z} \tag{1.17}$$

з тими ж самими крайовими умовами (1.16). Тут L лінійний оператор

$$(Lu)_n = a_n u_{n+1} + a_{n-1} u_{n-1} + b_n u_n,$$

де a_n і b_n дійсні N-періодичні послідовності. Оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі l^2. Його спектр $\sigma(L)$ має групову структуру, тобто $\sigma(L)$ є об'єднанням скінченного числа відрізків (див. [119]). Доповнення $\mathbb{R} \setminus \sigma(L)$ складається зі скінченного числа інтервалів, які називаються *спектральними лакунами.*

В статті [91] О. Панков за допомогою варіаційного підходу із використанням теореми про зачеплення і методу періодичних апроксимацій встановив існування нетривіальних розв'язків $u \in l^2$ системи (1.17). Розв'язки, побудовані в цій статті, є *бризерами* спеціального виду. Вони також часто називаються *лакунарними солітонами.* Тут лакунарність означає, що частота лежить в спектральній лакуні. Відмітимо, що цей термін прийнятий в нелінійній оптиці, хоча розв'язки такого типу і не є, взагалі кажучи, солітонами в тому смислі, який використовується в теорії повністю інтегровних систем. У 2007 році О. Панков цей результат дещо узагальнив за допомогою варіаційного підходу із використанням многовиду Нехарі (див. [92]).

Зауважимо, що в статті [220] Р. Ередеро, Д. Леві та П. Вінтерніц описали алгебри Лі точкових симетрій для подібних рівнянь.

У 2008 році О. Панков та В. Ротос (V. Rothos) в статті [99] за допомогою теореми про гірський перевал і методу періодичних апроксимацій довели існування стоячих хвиль для ДНРШ із насичуваною нелінійністю:

$$i\dot{\psi}_n + (\Delta\psi)_n + \frac{\nu|\psi_n|^2}{1+\mu|\psi_n|^2}\psi_n = 0,\ n \in \mathbb{Z},$$

де $\mu > 0$ та $\nu \neq 0$.

У 2010 році С. Бак (див. [139]) за допомогою варіаційного підходу із використанням многовиду Нехарі довів існування стоячих хвиль в ДНРШ більш загального вигляду із насичуваною нелінійністю:

$$i\dot{\psi}_n - a_n\psi_{n+1} - a_{n-1}\psi_{n-1} - b_n\psi_n + \frac{\mu|\psi_n|^2}{1+|\psi_n|^2}\psi_n = 0,\ n \in \mathbb{Z},$$

де $\mu \neq 0$ та $a_n, b_n \in \mathbb{R}$.

В тому ж році О. Панков в статті [93] довів існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для ДНРШ вигляду

$$i\dot{\psi}_n = -(\Delta\psi)_n + \nu_n\psi_n - f_n(\psi_n),\ n \in \mathbb{Z},$$

з початковою умовою

$$\psi_n(0) = \psi_n^{(0)}$$

у широкому класі вагових l^2-просторів, які складаються з усіх двохсторонніх комплексних послідовностей з нормою

$$\|\psi\|_\Theta = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta_n|\psi_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

де $\Theta = \{\theta_n\}$ послідовність додатних чисел (вага).

Зауважимо, що трохи раніше (у 2005 році) П. Пачіані (P. Pacciani), В. Конотоп (V. Konotop) та Дж. Мензала (G. Menzala) в статті [89] дослідили коректність задачі Коші для більш простого випадку при $\nu_n = 0$ та $f_n(r) = \chi|r|^{p-1}r$, $p > 1$.

У 2016 році М. Ченг (M. Cheng) та О. Панков в статті [30] за допомогою теореми про зачеплення, принципу концентрованої компактності і методу періодичних апроксимацій встановили існування лакунарних солітонів в ДНРШ вигляду

$$i\dot{\psi}_n = -(\Delta\psi)_n + \varepsilon_n\psi_n - \beta_n f(\psi_n) - \alpha_n(|\psi_{n+1}|^2 + |\psi_{n-1}|^2),\ n \in \mathbb{Z},$$

де $\{\varepsilon_n\}, \{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$.

Що ж стосується дослідження двовимірних дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера, то такі рівняння також вивчалися переважно з фізичної точки зору (див., наприклад, [46], [196]), а питання встановлення умов існування стоячих хвиль в математичних працях не розглядалося.

Усі нові, одержані автором дисертації, результати, які стосуються існування стоячих хвиль в рівняннях типу ДНРШ на двовимірній ґратці, наведені в розділі 7.

1.2. Короткий огляд результатів дисертації

Дисертація присвячена побудові класів існування розв'язків таких дискретних нескінченновимірних гамільтонових систем на двовимірних ґратках, як системи лінійно і нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, дискретні рівняння типу синус–Ґордона, системи типу Фермі–Пасти–Улама та дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера.

У другому розділі дисертації вивчається питання коректності задачі Коші для системи рівнянь, які описують динаміку зліченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці:

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}(q_{n-1,m} - q_{n,m}) - a_{n,m}(q_{n,m} - q_{n+1,m}) +$$
$$+ b_{n,m-1}(q_{n,m-1} - q_{n,m}) - b_{n,m}(q_{n,m} - q_{n,m+1}) - U'_{n,m}(q_{n,m}), \ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (1.18)$$

з крайовими умовами

$$\lim_{n,m\to\pm\infty} q_{n,m}(t) = 0. \quad (1.19)$$

Розглядаються потенціали вигляду

$$U_{n,m}(r) = -\frac{d_{n,m}}{2} r^2 + V_{n,m}(r),$$

для яких систему (1.18) в просторі $l^2 = l^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{R})$ можна записати у вигляді

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \quad (1.20)$$

де

$$(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m} q_{n-1,m} + a_{n,m} q_{n+1,m} + b_{n,m-1} q_{n,m-1} + b_{n,m} q_{n,m+1} + c_{n,m} q_{n,m},$$

$$c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m},$$

$$(B(q))_{n,m} = V'_{n,m}(q_{n,m}).$$

У підрозділі 2.1 наводиться формулювання задачі Коші для рівняння (1.20) у просторі l^2 та основні припущення. У підрозділі 2.2 доведено існування та єдиність локального і глобального розв'язків задачі Коші. Для цього використано класичні теореми існування і єдиності в банахових просторах і подання системи в гамільтоновому вигляді. Також тут встановлено умови обмеженості глобального розв'язку. У підрозділі 2.3 окремо досліджено випадок степеневих потенціалів степеня $p > 2$. Показано, що якщо початкові дані достатньо малі в l^2-нормі, то глобальний розв'язок існує. Однак для достатньо великої множини початкових даних глобальний розв'язок не може існувати (підрозділ 2.4).

У третьому розділі вивчаються періодичні за часом розв'язки системи (1.18) з крайовими умовами (1.19). Як і в розділі 2, ця задача зводиться до вивчення періодичних розв'язків диференціально-операторного рівняння (1.20). У підрозділі 3.1 наводиться формулювання задачі про періодичні розв'язки та основні припущення. У підрозділі 3.2 наводиться варіаційне формулювання задачі. Тут розглядаються деякі функціонали J_k та J:

$$J_k(q) = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|^2_{l^2_k} + \frac{1}{2}(A_k q, q)_{l^2_k} - \sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} V_{n,m}(q_{n,m}(t)) \right] dt,$$

$$J(q) = \int_{-T/2}^{T/2} \left[\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|^2_{l^2} + \frac{1}{2}(A q, q)_{l^2} - \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} V_{n,m}(q_{n,m}(t)) \right] dt,$$

критичні точки яких є T-періодичними розв'язками відповідних задач. Ці функціонали визначені відповідно на просторах соболєвського типу $X_{T,k} = \{q \in H^1_{loc}(\mathbb{R}; l^2_k) : q(t+T) = q(t)\}$ та $X_T = \{q \in H^1_{loc}(\mathbb{R}; l^2) : q(t+T) = q(t)\}$, де l^2_k — простір kN-періодичних послідовностей ($q_{n+kN,m} = q_{n,m+kN} = q_{n,m}$) з нормою

$$\|q\|_{l^2_k} = \left(\sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} |q_{n,m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

У підрозділі 3.3 за допомогою теореми про гірський перевал доведено існування просторово-періодичних апроксимацій T-періодичних розв'язків (критичні точки функціоналу J_k). Дана задача використовується як допоміжна для отримання періодичних розв'язків вихідної задачі (випадок функціоналу J). У підрозділі 3.4 за допомогою методу періодичних апроксимацій отримано результат про існування T-періодичних розв'язків, які не є сталими для достатньо великих T. В даному випадку розв'язки шукаються як границя критичних точок функціоналу J_k. У підрозділі 3.5 показано, як за допомогою процедури умовної мінімізації можна побудувати періодичний розв'язок у випадку степеневої потенціальної функції.

У четвертому розділі дисертації досліджується питання існування біжучих хвиль в системах нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Вивчаються біжучі хвилі двох типів: періодичні та відокремлені. Профіль періодичної біжучої хвилі є періодичною функцією з періодом $2k$, а профіль відокремленої хвилі перетворюється в нуль на нескінченності. Підрозділ 4.1 присвячений питанню існування нетривіальних періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах лінійно зв'язаних осциляторів. Рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд:

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = c_1(q_{n+1,m}(t) + q_{n-1,m}(t) - 2q_{n,m}(t)) +$$
$$+c_2(q_{n,m+1}(t) + q_{n,m-1}(t) - 2q_{n,m}(t)) - U'(q_{n,m}(t)),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{1.21}$$

де $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Розглядаються потенціали вигляду

$$U(r) = -\frac{a}{2}r^2 + V(r),$$

для яких система (1.21) набуває вигляду

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = c_1(\Delta_{(1)}q)_{n,m}(t) + c_2(\Delta_{(2)}q)_{n,m}(t) + aq_{n,m-1}(t) - V'(q_{n,m}(t)),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{1.22}$$

де

$$(\Delta_{(1)}q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} - 2q_{n,m},$$
$$(\Delta_{(2)}q)_{n,m} = q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 2q_{n,m}$$

дискретні оператори Лапласа відповідно за змінними n і m. В перших двох пунктах підрозділу 4.1 розглядається формулювання задачі про біжучі хвилі та варіаційне формулювання задачі. Зокрема, після підстановки біжучої хвилі в систему (1.22), одержується рівняння для її профілю $u(s)$:

$$c^2u''(s) = c_1(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s)) +$$
$$+c_2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) - 2u(s)) + au(s) - V'(u(s)), \tag{1.23}$$

де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi$.

Залежно від типу біжучої хвилі, розглядаються функціонали

$$J_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} [\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - \frac{c_1}{2}(u(s+\cos\varphi) - u(s))^2 -$$
$$-\frac{c_2}{2}(u(s+\sin\varphi) - u(s))^2 + \frac{a}{2}u^2(s) - V(u(s))]ds,$$
$$J(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - \frac{c_1}{2}(u(s+\cos\varphi) - u(s))^2 -$$
$$-\frac{c_2}{2}(u(s+\sin\varphi) - u(s))^2 + \frac{a}{2}u^2(s) - V(u(s))]ds,$$

визначені відповідно на соболєвських просторах $E_k = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u(s+2k) = u(s)\}$ та $E = H^1(\mathbb{R})$. Доведено, що критичні точки цих функціоналів є розв'язками рівняння (1.23) у відповідних просторах. У пунктах 4.1.3 та 4.1.4 доведено існування надзвукових нетривіальних періодичних та несталих відокремлених біжучих хвиль. Показано, що для достатньо великих періодів профіль періодичної хвилі не сталий. Тут також використано теорему про гірський перевал для періодичних біжучих хвиль та метод періодичних апроксимацій для відокремлених біжучих хвиль. Крім того, доведено, що профіль відокремленої біжучої хвилі експоненціально спадає на нескінченності (пункт 4.1.5). У пункті 4.1.6 досліджено існування періодичних біжучих хвиль з довільною швидкістю $c > 0$, зокрема, дозвукових хвиль. Для цього використано теорему про зачеплення, яка вимагає, крім виконання умови Пале–Смейла, щоб функціонал задовольняв геометрію зачеплення. Підрозділ 4.2 присвячений питанню існування нетривіальних періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах нелінійно зв'язаних осциляторів. У цьому підрозділі вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці:

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = W_1'(q_{n+1,m}(t) - q_{n,m}(t)) - W_1'(q_{n,m}(t) - q_{n-1,m}(t)) + W_2'(q_{n,m+1}(t) -$$
$$-q_{n,m}(t)) - W_2'(q_{n,m}(t) - q_{n,m-1}(t)) - U'(q_{n,m}(t)),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{1.24}$$

де $W_1, W_2, U \in C^1(\mathbb{R})$ — потенціали взаємодії та зовнішній потенціал відповідно. У пункті 4.2.1 розглядаються основні припущення та варіаційне формулювання задачі. У пункті 4.2.2 за допомогою методу критичних точок і теореми про гірський перевал встановлено існування надзвукових періодичних біжучих хвиль. А в пункті 4.2.3 за допомогою методу періодичних апроксимацій доведено існування надзвукових відокремлених хвиль. У пункті 4.2.4 за допомогою теореми про зачеплення встановлено існування періодичних біжучих хвиль з довільною швидкістю $c > 0$, зокрема, дозвукових хвиль.

У п'ятому розділі дисертації вивчається питання існування біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус–Ґордона на двовимірній ґратці з нелінійним зв'язком частинок (осциляторів), тобто в системі (1.24) із зовнішнім потенціалом вигляду $U(r) = K(1 - \cos r)$, який не задовольняє умови підрозділу 4.2. У цьому випадку рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд:

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = W_1'(q_{n+1,m}(t) - q_{n,m}(t)) - W_1'(q_{n,m}(t) - q_{n-1,m}(t)) + W_2'(q_{n,m+1}(t) -$$

$$-q_{n,m}(t)) - W_2'(q_{n,m}(t) - q_{n,m-1}(t)) - K \sin q_{n,m}(t),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \qquad (1.25)$$

де $W_1, W_2 \in C^1(\mathbb{R})$, $K > 0$. У підрозділі 5.1 наводиться формулювання задачі про біжучі хвилі для таких рівнянь. Зокрема, для профілю біжучої хвилі одержується рівняння

$$c^2 u''(s) = W_1'(u(s + \cos\varphi) - u(s)) - W_1'(u(s) - u(s - \cos\varphi)) +$$

$$+ W_2'(u(s + \sin\varphi) - u(s)) - W_2'(u(s) - u(s - \sin\varphi)) - K \sin u(s). \qquad (1.26)$$

Вивчаються біжучі хвилі трьох типів: періодичні, гомоклінічні та гетероклінічні. Профіль $u(s)$ періодичної біжучої хвилі є періодичною функцією з періодом $2k$, профіль гомоклінічної хвилі збігається до π на нескінченності, а профіль гетероклінічної хвилі задовольняє крайові умови $\lim\limits_{s \to -\infty} u(s) = -\pi$, $\lim\limits_{s \to +\infty} u(s) = \pi$. У підрозділі 5.2 встановлено існування несталих періодичних біжучих хвиль. Для цього, як і в розділі 4, використано варіаційний підхід із використанням теореми про гірський перевал. Зокрема, побудовано функціонал J_k, критичні точки якого є періодичними розв'язками рівняння (1.26). Однак, на відміну від попереднього розділу, тут для доведення виконання умови Пале–Смейла побудовано спеціальний допоміжний функціонал $\tilde{J}_k$, який збігається з J_k для всіх u при $\|u\|_{L^\infty([-k,k])} \le \frac{\pi}{2}$. За допомогою функціоналу $\tilde{J}_k$ встановлено обмеженість послідовності Пале–Смейла функціоналу J_k. У підрозділі 5.3, в аналогічний до попереднього підрозділу спосіб, одержано умови існування несталих гомоклінічних біжучих хвиль. У підрозділі 5.4 доведено існування гетероклінічних біжучих хвиль. В силу особливості крайових умов для профілю таких хвиль, використати підхід, реалізований для періодичних і гомоклінічних хвиль неможливо. В даному випадку використано варіаційний метод із використанням принципу концентрованої компактності.

У шостому розділі дисертації вивчається питання існування біжучих хвиль в системі типу Фермі–Пасти–Улама на двовимірній ґратці:

$$\ddot{q}_{n,m} = W_1'(q_{n+1,m} - q_{n,m}) - W_1'(q_{n,m} - q_{n-1,m}) + \\ + W_2'(q_{n,m+1} - q_{n,m}) - W_2'(q_{n,m} - q_{n,m-1}),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \qquad (1.27)$$

де $W_1, W_2 \in C^1(\mathbb{R})$. У підрозділі 6.1 наводиться формулювання задачі про біжучі хвилі для таких систем. Спочатку розглядаються біжучі хвилі двох типів. У першому випадку похідна профілю $u(s)$ є періодичною функцією з періодом $2k$, а в другому — профіль хвилі задовольняє крайові умови $\lim\limits_{s\to\pm\infty} u'(s) = 0$. У підрозділі 6.2 доведено існування нетривіальних біжучих хвиль з періодичною похідною профілю. Для цього, як і в розділі 4, використано варіаційний метод. Зокрема, за допомогою теореми про гірський перевал встановлено існування нетривіальних надзвукових монотонних і необов'язково монотонних біжучих хвиль. Крім того, за допомогою теореми про зачеплення доведено існування дозвукових хвиль. У підрозділі 6.3 за допомогою методу періодичних апроксимацій доведено існування нетривіальних монотонних і необов'язково монотонних біжучих хвиль з профілем, похідна якого збігається до нуля на нескінченності. У підрозділі 6.4 вивчаються періодичні та відокремлені біжучі хвилі, які означаються аналогічно до розділу

4. Зокрема, профіль періодичної біжучої хвилі є періодичною функцією з періодом $2k$, а профіль відокремленої хвилі перетворюється в нуль на нескінченності. Тут одержано аналогічні теореми про існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль.

У сьомому розділі дисертації досліджується питання існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці. У підрозділі 7.1 вивчаються дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера на плоскій цілочисловій ґратці з кубічною нелінійністю:

$$i\dot{\psi}_{n,m}(t) + (\Delta\psi)_{n,m}(t) + \theta\mu_{n,m}|\psi_{n,m}(t)|^2\psi_{n,m}(t) = 0, \ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \qquad (1.28)$$

де

$$(\Delta\psi)_{n,m} = \psi_{n+1,m} + \psi_{n-1,m} + \psi_{n,m+1} + \psi_{n,m-1} - 4\psi_{n,m}$$

двовимірний дискретний оператор Лапласа, $\theta = \pm 1$. Зауважимо, що параметр θ введено для того, щоб розрізняти *самофокусований* ($\theta = 1$) та *розфокусований* ($\theta = -1$) випадки. В перших двох пунктах цього підрозділу розглядається формулювання задачі про стоячі хвилі та варіаційне формулювання задачі, доводяться попередні леми. Зокрема, при підстановці стоячої хвилі $\psi_{n,m}(t) = u_{n,m}\exp(-i\omega t)$ в систему (1.28), вона набуває вигляду

$$-(\Delta u)_{n,m} - \omega u_{n,m} = \theta\mu_{n,m}|u_{n,m}|^2 u_{n,m},$$

Далі розглядається більш загальна система

$$(Lu)_{n,m} - \omega u_{n,m} = \theta\mu_{n,m}|u_{n,m}|^2 u_{n,m}, \qquad (1.29)$$

де

$$(Lu)_{n,m} = a_{n,m}u_{n+1,m} + a_{n-1,m}u_{n-1,m} + b_{n,m}u_{n,m+1} + b_{n,m-1}u_{n,m-1} + c_{n,m}u_{n,m},$$

$$a_{n+N,m} = a_{n,m+N} = a_{n,m}, b_{n+N,m} = b_{n,m+N} = b_{n,m}, c_{n+N,m} = c_{n,m+N} = c_{n,m}.$$

Вивчаються стоячі хвилі двох типів: з kN-періодичною амплітудою $u_{n,m}$ (періодичні розв'язки) та амплітудою, яка збігається до нуля (локалізовані розв'язки). Залежно від типу стоячої хвилі, розглядаються функціонали J_k та J. Показано, що критичні точки цих функціоналів є розв'язками відповідних задач. У пункті 7.1.3 доведено існування нетривіальних періодичних розв'язків системи (1.27), а в пункті 7.1.4 – локалізованих розв'язків для самофокусованого випадку. Тут також, як і в попередніх розділах, використано теорему про зачеплення для періодичних розв'язків та метод періодичних апроксимацій для локалізованих розв'язків. У пункті 7.1.5 наведено аналогічні результати до одержаних вище для розфокусованого випадку ($\theta = -1$), які одержуються аналогічними методами. Підрозділ 7.2 присвячений питанню існування нетривіальних стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці із насичуваною нелінійністю:

$$i\dot{\psi}_{n,m}(t) - a_1(\Delta_{(1)}\psi)_{n,m}(t) - a_2(\Delta_{(2)}\psi)_{n,m}(t) + \theta f(\psi_{n,m}(t)) = 0,\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2,$$

де $\psi_{n,m}(t)$ — хвильова функція (n,m)-ї частинки, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$, $\theta = \pm 1$, $\Delta_{(1)}$ і $\Delta_{(2)}$ дискретні оператори Лапласа відповідно за змінними n і m, $f(z)$ — насичувана нелінійність. Це означає, що на нескінченності $f(z)$ росте як $const \cdot |z|$. Важливими прикладами таких нелінійностей є

$$f(u) = \frac{\nu|u|^p}{1+\mu|u|^p}u,\ \mu > 0, \nu > 0, p > 1,$$

та

$$f(u) = \chi(1 - \exp(-a|u|^p))u,\ \chi > 0, a > 0, p > 0.$$

У пункті 7.2.1 розглядається формулювання задачі та основні припущення. У пункті 7.2.2 подано варіаційне формулювання задачі і введено многовиди Нехарі. У пункті 7.2.3 встановлено існування періодичних розв'язків для самофокусовного випадку ($\theta = 1$). Для цього було використано варіаційний підхід із використанням многовиду Нехарі. У пункті 7.2.4 для самофокусовного випадку доведено існування локалізованих розв'язків за допомогою многовиду Нехарі і методу періодичних апроксимацій. Однією з умов існування періодичних і локалізованих розв'язків є умова (iv_7), яку задовольняє нелінійність $f(u) = \frac{\nu|u|^p}{1+\mu|u|^p}u$ при $1 < p \leq 2$. У пункті 7.2.5 умову (iv_7) замінено на (v_7), яка дозволяє довести виконання умови Пале–Смейла. Тому для встановлення існування періодичних розв'язків використано теорему про гірський перевал. Тут також за допомогою граничного переходу одержано результат про існування локалізованих розв'язків. Крім того, в цьому пункті наведено аналогічні результати до одержаних вище для розфокусованого випадку ($\theta = -1$).

Враховуючи сказане вище, може скластися враження, що всі розглянуті системи можна звести до відповідних континуальних наближень і встановити для них відповідні результати про існування розв'язків аналогічними методами. Проте, безумовно, це не так. По-перше, континуальне наближення є тільки, якщо в дискретній моделі є малий параметр (крок). А це, взагалі кажучи, не так, оскільки дискретна система не зобов'язана виникати внаслідок дискретизації неперервної. Наприклад, система осциляторів на цілочисловій ґратці. По-друге, якщо навіть система одержана за допомогою дискретизації неперервної, то не можна гарантувати, що дискретна модель успадковує всі властивості неперервної і навпаки. Як зазначено в [196], дискретні системи демонструють більш багату динаміку у порівнянні з відповідними неперервними моделями, оскільки останні описують лише граничні випадки дискретних задач. Варто зазначити, що тут мова йде не про дискретизацію неперервних систем, а про принципово дискретні проблеми. Окрім чисто фундаментального фізичного інтересу, дискретні моделі представляють інтерес і з точки зору їх практичних застосувань, таких як системи зв'язаних оптичних світловодів; моделі перенесення енергії в біофізичних системах; моделі електричних ґраток; моделі динаміки ДНК та ін.

Зауважимо, що розглянуті системи переважно вивчені у фізичних працях, в яких часто проводяться чисельні експерименти з відповідними моделями, обчислюються наближені розв'язки. Проте залишаються відкритими питання чи існують ці розв'язки взагалі, і за яких умов. Дана дисертація в певному сенсі дає строгі відповіді на ці запитання.

РОЗДІЛ 2

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

2.1. Формулювання задачі Коші для системи осциляторів. Основні припущення

У цьому розділі вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці.

Нехай $q_{n,m} = q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n, m)-го осцилятора в момент часу t. Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами (рис. 2.1). Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}(q_{n-1,m} - q_{n,m}) - a_{n,m}(q_{n,m} - q_{n+1,m}) +$$
$$+ b_{n,m-1}(q_{n,m-1} - q_{n,m}) - b_{n,m}(q_{n,m} - q_{n,m+1}) - U'_{n,m}(q_{n,m}),\ (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (2.1)$$

Рівняння (2.1) представляють собою нескінченну (зліченну) систему звичайних диференціальних рівнянь.

Розглядаються такі розв'язки системи (2.1), що

$$\lim_{n,m\to\pm\infty} q_{n,m}(t) = 0, \quad (2.2)$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Потенціал $U_{n,m}(r)$ запишемо у вигляді

$$U_{n,m}(r) = -\frac{d_{n,m}}{2} r^2 + V_{n,m}(r)$$

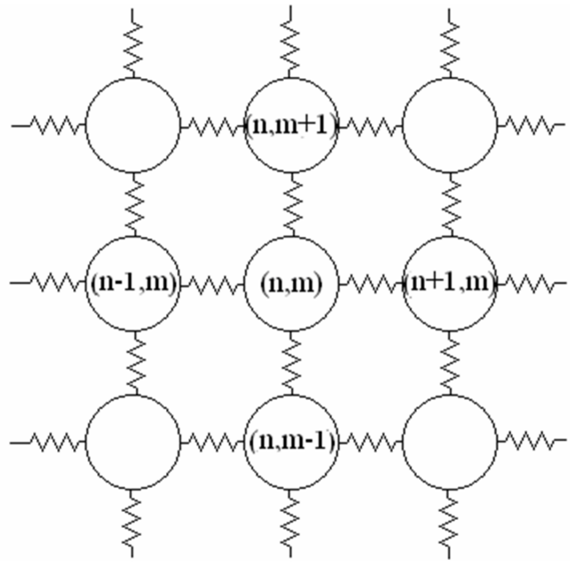

Рис. 2.1

і покладемо

$$c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}.$$

Тоді система (2.1) набуде вигляду

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} +$$
$$+ c_{n,m}q_{n,m} - V'_{n,m}(q_{n,m}),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2. \tag{2.3}$$

Природним конфігураційним простором для системи (2.3), враховуючи граничні умови (2.2), є простір $l^2 = l^2(\mathbb{Z}^2;\mathbb{R})$ дійсних двохсторонніх послідовностей $q = \{q_{n,m}\}$ зі скалярним добутком

$$\left(q^{(1)}, q^{(2)}\right) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} q^{(1)}_{n,m} q^{(2)}_{n,m}$$

і відповідною нормою $\|q\| = (q,q)^{\frac{1}{2}}$. Тому цю систему зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q) \tag{2.4}$$

в просторі l^2, де

$$(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m}$$

(такі оператори вивчалися в [179, с. 597]), а нелінійний оператор B визначається рівністю

$$(B(q))_{n,m} = V'_{n,m}(q_{n,m}). \tag{2.5}$$

Припускається, що виконуються такі умови:

(i_2) *$\{a_{n,m}\}, \{b_{n,m}\}$ і $\{d_{n,m}\}$ — обмежені послідовності дійсних чисел;*

(ii_2) *$V_{n,m} \in C^1(\mathbb{R})$, $V_{n,m}(0) = V'_{n,m}(0) = 0$, $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, причому для будь-якого $R > 0$ існує таке $C = C(R) > 0$, що для всіх $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$:*

$$|V'_{n,m}(r_1) - V'_{n,m}(r_2)| \le C|r_1 - r_2|, \ |r_1|, |r_2| \le R. \tag{2.6}$$

Легко бачити, що за виконання умови (i_2) оператор A обмежений і самоспряжений в l^2.

Лема 2.1. *Нехай виконується умова (ii_2). Тоді оператор B є обмеженим оператором в l^2. Більше того, оператор B є неперервним за Ліпшицем на кожній кулі простору l^2.*

Доведення. Нехай $q \in l^2$ і $\|q\| \le R$. Покажемо, що $B(q) \in l^2$ і $\|B(q)\| \le C\|q\|$ з деякою сталою $C = C(R)$. Оскільки $\|q\|_{l^\infty} \le \|q\|_{l^2} = \|q\| \le R$ то з нерівності (2.6) та умови $V'_{n,m}(0) = 0$ випливає, що

$$|V'_{n,m}(q_{n,m})| \le C|q_{n,m}|.$$

Звідси

$$\|B(q)\| = \left[\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} |V'_{n,m}(q_{n,m})|^2\right]^{\frac{1}{2}} \le \left[\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} |q_{n,m}|^2\right]^{\frac{1}{2}} = C\|q\|,$$

що і доводить першу частину леми.

Нехай тепер $q^{(1)} = \{q^{(1)}_{n,m}\}$, $q^{(2)} = \{q^{(2)}_{n,m}\} \in l^2$ і $\|q^{(i)}\| \le R$, $1 = 1, 2$. Тоді

$$\|q^{(i)}\|_{l^\infty} \le R$$

і нерівність (2.6) дає

$$|V'_{n,m}(q^{(1)}_{n,m}) - V'_{n,m}(q^{(2)}_{n,m})| \le C|q^{(1)}_{n,m} - q^{(2)}_{n,m}|.$$

Аналогічно до попереднього одержуємо

$$\|B(q^{(1)}) - B(q^{(2)})\| \le C\|q^{(1)} - q^{(2)}\|,$$

що і доводить неперервність за Ліпшицем. Лему доведено. □

Під *розв'язком* рівняння (2.4) ми розуміємо функцію $q : I \to l^2$, $q \in C^2(I; l^2)$, $I \subset \mathbb{R}$, яка задовольняє це рівняння.

Задача Коші для рівняння (2.4) полягає у знаходженні його розв'язку, який задовольняє початкові умови:

$$q(0) = q^{(0)},\ \dot{q}(0) = q^{(1)}. \tag{2.7}$$

Якщо розв'язок задачі (2.4), (2.7) визначений на всій числовій прямій ($I = \mathbb{R}$), то він називається *глобальним*, у протилежному випадку — *локальним*.

Для дослідження питання коректності задачі Коші (2.4), (2.7) використаємо техніку, яка була застосована в статті [141] для ланцюгів осциляторів (див. також [143]).

2.2. Існування та єдиність локального і глобального розв'язків задачі Коші. Обмеженість глобального розв'язку

Для одержання основних результатів цього підрозділу нам знадобляться дві теореми, які є наслідками зі стандартних результатів про існування та єдиність локального і глобального розв'язків задачі Коші для диференціальних рівнянь у банахових просторах (теореми Б.1 і Б.2).

Щоб скористатися теоремою Б.1 зведемо рівняння (2.4) до рівняння першого порядку в просторі $E = l^2 \times l^2$

$$\dot{x} = Gx, \tag{2.8}$$

де $x = (q, p)$ і $Gx = (p, Aq - B(q))$ (стандартний прийом приведення рівняння другого порядку до системи першого порядку). За лемою 2.1, оператор G є неперервним за Ліпшицем у просторі E. Норма в E визначається рівністю:

$$\|x\|_E = \left(\|q\|^2 + \|p\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

З теореми Б.1 випливає результат про існування та єдиність локального розв'язку:

Теорема 2.1. *Нехай виконуються умови (i_2) та (ii_2). Тоді для будь-яких $q^{(0)} \in l^2$ і $q^{(1)} \in l^2$ задача (2.4), (2.7) має єдиний локальний розв'язок.*

Доведення. Враховуючи обмеженість операторів A та B, для всіх $\|x\|_E \leq R$ маємо:

$$\|Gx\|_E = \left(\|p\|^2 + \|Aq - B(q)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\|p\|^2 + \|Aq\|^2 - 2(Aq, B(q)) + \|B(q)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$= \left(\|p\|^2 + \|Aq\|^2 + 2\|Aq\|\|B(q)\| + \|B(q)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$= \left(\|p\|^2 + 2\|Aq\|^2 + 2\|B(q)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$= \left(\|p\|^2 + C_1\|q\|^2 + C_2\|q\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$= \left(C_0\|p\|^2 + C_0\|q\|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{C_0}\|x\|_E \leq \sqrt{C_0}R = M_1,$$

де $C_0 = \max\{1; C_1 + C_2\}$, $M_1 = \sqrt{C_0}R$.

Аналогічно для $\|x_1\|_E, \|x_2\|_E \leq R$, де $x_1 = (q^{(1)}, p^{(1)})$, $x_2 = (q^{(2)}, p^{(2)}) \in E$, враховуючи обмеженість оператора A і лему 2.1, маємо:

$$Gx_1 - Gx_2 =$$

$$= \left(p^{(1)}, Aq^{(1)} - B(q^{(1)})\right) - \left(p^{(2)}, Aq^{(2)} - B(q^{(2)})\right) =$$

$$= \left(p^{(1)} - p^{(2)}, A(q^{(1)} - q^{(2)}) + B(q^{(2)}) - B(q^{(1)})\right),$$

$$\|Gx_1 - Gx_2\|_E =$$

$$= \left(\|p^{(1)} - p^{(2)}\|^2 + \|A(q^{(1)} - q^{(2)}) + B(q^{(2)}) - B(q^{(1)})\|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\|p^{(1)} - p^{(2)}\|^2 + \|A(q^{(1)} - q^{(2)})\|^2 + 2\left(A(q^{(1)} - q^{(2)}), B(q^{(2)}) - B(q^{(1)})\right) + \right.$$

$$\left. + \|B(q^{(2)}) - B(q^{(1)})\|^2\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\|p^{(1)} - p^{(2)}\|^2 + 2\|A(q^{(1)} - q^{(2)})\|^2 + 2\|B(q^{(2)}) - B(q^{(1)})\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\|p^{(1)} - p^{(2)}\|^2 + 2C_1\|q^{(1)} - q^{(2)}\|^2 + 2C\|q^{(2)} - q^{(1)}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(C_0\|p^{(1)} - p^{(2)}\|^2 + C_0\|q^{(1)} - q^{(2)}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{C_0}\|x_1 - x_2\|_E = M_2\|x_1 - x_2\|_E,$$

де $C_0 = \max\{1; 2C_1 + 2C\}$, $M_2 = \sqrt{C_0}$.

Таким чином, за теоремою Б.1 для $x_0 = \left(q^{(0)}, q^{(1)}\right)$ існує t_0 таке, що рівняння (2.8) має єдиний розв'язок $x = x(t) = (q(t), p(t))$ в інтервалі $(-t_0; t_0)$, який задовольняє початкову умову $x(0) = x_0$ тобто

$$(q(0), \dot{q}(0)) = \left(q^{(0)}, q^{(1)}\right).$$

Теорему доведено. $\square$

За допомогою теореми Б.2, аналогічно до теореми 2.1, неважко отримати результат про існування та єдиність глобального розв'язку:

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови* (i_2) *та* (ii_2), *причому нерівність (2.6) виконується зі сталою* C, *яка не залежить від* R. *Тоді для будь-яких* $q^{(0)} \in l^2$ *і* $q^{(1)} \in l^2$ *задача (2.4), (2.7) має єдиний глобальний розв'язок.*

Приклад 2.1. *Розглянемо двовимірний аналог моделі Френкеля-Конторової, що описується двовимірним дискретним рівнянням типу синус-Ґордона:*

$$\ddot{q}_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m} - \sin q_{n,m}. \tag{2.9}$$

Це рівняння можна розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = \Delta q - B(q), \tag{2.10}$$

де

$$(\Delta q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}$$

двохвимірний дискретний оператор Лапласа (як відомо, оператор Δ є обмеженим самоспряженим оператором, див., наприклад, [119]), а нелінійний оператор B –

$$(B(q))_{n,m} = \sin q_{n,m},$$

в просторі l^2.

У цьому випадку потенціал $V_{n,m}(r) = 1 - \cos r$ є неперервно диференційовним, причому $V_{n,m}(0) = V'_{n,m}(0) = 0$.

Крім того, очевидно, що оператор B є також обмеженим і до того ж неперервним за Ліпшицем. Справді,

$$\|B(q)\| = \left(\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} |\sin q_{n,m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} |q_{n,m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|q\|,$$

$$|\sin r_1 - \sin r_2| = 2|\sin \frac{r_1 - r_2}{2} \cos \frac{r_1 + r_2}{2}| \leq$$

$$\leq 2|\sin\frac{r_1-r_2}{2}| \leq |r_1-r_2|.$$

Таким чином, потенціал $V_{n,m}(r) = 1-\cos r$ задовольняє умову (ii_2).

Виконання умови (i_2) очевидне.

Отже, за теоремою 2.2 задача Коші для рівняння (2.10) має єдиний глобальний розв'язок для будь-яких початкових даних з простору l^2.

Зауважимо, що посилена умова (ii_2) виконується для нелінійностей, ріст яких на нескінченності не вище 2-го степеня. Щоб послабити цю умову, відмітимо, що рівняння (2.4) у просторі l^2 можна подати у гамільтоновому вигляді

$$\begin{cases} \dot{p} = -H'_q(p,q), \\ \dot{q} = H'_p(p,q); \end{cases} \tag{2.11}$$

з гамільтоніаном

$$H(p,q) = \frac{1}{2}\left(\|p\|^2 - (Aq,q)\right) + \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} V_{n,m}(q_{n,m}),$$

де $p = \dot{q}$. Гамільтоніан $H(p,q)$ задає повну енергію системи, тобто суму кінетичної і потенціальної енергії, причому $\frac{1}{2}\|p\|^2$ визначає кінетичну енергію, а $\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} V_{n,m}(q_{n,m}) - \frac{1}{2}(Aq,q)$ — потенціальну.

Лема 2.2. *Нехай виконуються умови* (i_2) *та* (ii_2). *Тоді гамільтоніан* $H(p,q)$ *є функціоналом класу* C^1 *на* $E = l^2\times l^2$.

Доведення. Квадратичні члени $\|p\|^2$ і (Aq,q) є, очевидно, функціоналами класу C^1 (нагадаємо, що за умовою (i_2), A — обмежений лінійний оператор). Тому достатньо показати, що

$$\phi(q) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} V_{n,m}(q_{n,m})$$

є функціоналом класу C^1 на l^2.

Нехай $q\in l^2$, $h\in l^2$ і $B(q)$ визначено рівністю (2.5). Тоді за формулою Лагранжа, існують такі $\theta_{n,m}\in(0,1)$, що

$$\phi(q+h) - \phi(q) - (B(q),h) =$$

$$= \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} V'_{n,m}(q_{n,m} + \theta_{n,m}h_{n,m})h_{n,m} - \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} V'_{n,m}(q_{n,m})h_{n,m} =$$
$$= \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \left[V'_{n,m}(q_{n,m} + \theta_{n,m}h_{n,m}) - V'_{n,m}(q_{n,m})\right] h_{n,m}.$$

Припустимо, що $\|q\| \leq R$ і $\|h\| \leq R$. Тоді $\|q\|_{l^\infty} \leq R$, $\|h\|_{l^\infty} \leq R$ і згідно (ii_2):

$$|\phi(q+h) - \phi(q) - (B(q), h)| \leq C \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \theta_{n,m}|h_{n,m}|^2 \leq$$
$$\leq C\|h\|^2 = o(\|h\|).$$

Це означає, що похідна $\phi'(q)$ існує і $\phi'(q) = B(q)$. Оскільки, за лемою 2.1, оператор $B(q)$ неперервний, то $\phi \in C^1$. Лему доведено. $\square$

Тепер розглянемо гамільтонову систему (2.11). Оскільки $H'_p(p,q) = p$ і $H'_q(p,q) = -Aq + B(q)$, то задача Коші для системи (2.11) еквівалентна задачі Коші для рівняння (2.4), а значить і для рівняння (2.1). Як добре відомо (див., наприклад, [31, 83, 137]), $H(p,q)$ є інтегралом системи (2.4) (у цьому неважко переконатися). Звідси отримуємо:

Наслідок 2.1. *За виконання умов $(i_2), (ii_2)$ нехай $q(t)$ — розв'язок рівняння (2.4). Тоді $H(\dot{q}(t), q(t)) = H\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right) = Const$.*

Теорема 2.3. *Нехай виконуються умови $(i_2), (ii_2)$ та оператор A недодатний, тобто $(Aq, q) \leq 0$ для будь-якого $q \in l^2$. Крім того, нехай виконується одна з таких двох умов:*

(a) $V_{n,m}(r) \geq 0$ для всіх $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ і $r \in \mathbb{R}$;

(b) існує така неспадна функція $h(\xi)$, визначена для $\xi \geq 0$, що $\lim\limits_{\xi\to+\infty} h(\xi) = +\infty$ і $V_{n,m}(r) \geq h(|r|)$ для всіх $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ і $r \in \mathbb{R}$.

Тоді для будь-яких початкових даних $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ задача (2.4), (2.7) має єдиний глобальний розв'язок.

Доведення. Крок 1. Нехай виконується умова (a) і $q(t)$ — локальний розв'язок задачі (2.4), (2.7), що існує згідно теореми 2.1. Для того щоб довести, що функція $q(t)$ визначена на всій осі, достатньо показати, що функція

$\|q(t)\| + \|\dot{q}(t)\|$ залишається обмеженою на будь-якому скінченному інтервалі $(-t_0, t_0)$ існування розв'язку (див., наприклад, [207], теорема X.74).

За наслідком 2.1 з леми 2.2

$$H\left(\dot{q}(t), q(t)\right) = H\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right).$$

Відповідно до умов теореми і означення гамільтоніана:

$$\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|^2 \leq H(q^{(1)}, q^{(0)}).$$

Отже, $\|\dot{q}(t)\|$ обмежена на $(-t_0, t_0)$. Оскільки

$$q(t) = \int\limits_0^t \dot{q}(\tau)d\tau + q^{(0)},$$

то звідси випливає обмеженість $\|q(t)\|$ і теорему в цьому випадку доведено.

Крок 2. Нехай тепер виконується умова (b) і $H_0 \geq 0$ таке, що

$$H\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right) \leq H_0$$

і $\overline{r} > 0$ — розв'язок рівняння $h(r) = H_0$ (він, очевидно, існує). Із означення H та умов теореми випливає, що $h(|q^{(0)}_{n,m}|) \leq H_0$ і, отже, на множині, де $h(r)$ строго зростає, виконується нерівність $|q^{(0)}_{n,m}| \leq \overline{r}$. На множині, де $h(r)$ стала, виберемо $H_0 \geq 0$ так, щоби $\overline{r}$ було найбільшим на даній множині, тоді автоматично $|q^{(0)}_{n,m}| \leq \overline{r}$.

Нехай $\psi(r)$ — функція, визначена рівністю

$$\psi(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq \overline{r}, \\ -r + \overline{r} + 1, & \overline{r} \leq r \leq \overline{r} + 1, \\ 0, & r \geq \overline{r} + 1. \end{cases}$$

Покладемо

$$\tilde{V}_{n,m}(r) = \int\limits_0^r \left[\psi(|\rho|)V'_{n,m}(\rho) + 2(1 - \psi(|\rho|))\rho\right] d\rho.$$

Покажемо, що для будь-яких $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ і для всіх $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ виконується нерівність

$$\left|\tilde{V}'_{n,m}(r_1) - \tilde{V}'_{n,m}(r_2)\right| \leq C|r_1 - r_2|$$

з деяким $C > 0$.

Справді, якщо $0 \le |r_1|, |r_2| \le \overline{r}$, то $\psi(|r_1|) = \psi(|r_2|) = 1$ і

$$\left|\tilde{V}'_{n,m}(r_1) - \tilde{V}'_{n,m}(r_2)\right| =$$

$$= \left|\psi(|r_1|)\tilde{V}'_{n,m}(r_1) + 2(1-\psi(|r_1|))r_1 - \psi(|r_2|)\tilde{V}'_{n,m}(r_2) - 2(1-\psi(|r_2|))r_2\right| =$$

$$\le |V'_{n,m}(r_1) - V'_{n,m}(r_2)| + 2|r_1 - r_2| \le C_1|r_1 - r_2|.$$

Якщо $\overline{r} \le |r_1|, |r_2| \le \overline{r}+1$, то $\psi(|r_1|) = -|r_1| + \overline{r} + 1$, $\psi(|r_2|) = -|r_2| + \overline{r} + 1$ і

$$\left|\tilde{V}'_{n,m}(r_1) - \tilde{V}'_{n,m}(r_2)\right| = \Big|(-|r_1| + \overline{r} + 1)V'_{n,m}(r_1) + 2(|r_1| - \overline{r})r_1 -$$

$$-(-|r_2| + \overline{r} + 1)V'_{n,m}(r_2) - 2(|r_2| - \overline{r})r_2\Big| \le C_2|r_1 - r_2|.$$

Якщо ж $|r_1|, |r_2| \ge \overline{r}+1$, то $\psi(|r_1|) = \psi(|r_2|) = 0$ і

$$\left|\tilde{V}'_{n,m}(r_1) - \tilde{V}'_{n,m}(r_2)\right| = 2|r_1 - r_2|.$$

Тепер візьмемо $C = \max\{C_1, C_2, 2\}$ і одержимо необхідне.

Таким чином, модифіковане рівняння (2.4) з потенціалом $\tilde{V}_{n,m}$ задовольняє умови теореми 2.2 і, отже, має глобальний розв'язок $q(t)$ з початковими даними $q^{(0)}, q^{(1)}$.

Крок 3. Покажемо, що $\tilde{V}_{n,m}(r) \ge \tilde{h}(r)$, де

$$\tilde{h}(r) = \begin{cases} h(r), & 0 \le r \le \overline{r}, \\ (-r + \overline{r} + 1)h(r) + \int\limits_{\overline{r}}^{r} h(\rho)d\rho + 2\left(\frac{r^3}{3} - \overline{r}\frac{r^2}{2} + \frac{\overline{r}^3}{6}\right), & \overline{r} \le r \le \overline{r}+1, \\ r^2 + \int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+1} h(\rho)d\rho + \left[\frac{\overline{r}^3}{3} - \frac{(\overline{r}+1)^3}{3}\right], & r \ge \overline{r}+1. \end{cases}$$

Справді, якщо $0 \le r \le \overline{r}$, то

$$\tilde{V}_{n,m}(r) = V_{n,m}(r) \ge h(|r|).$$

Якщо $\overline{r} \le r \le \overline{r}+1$, то

$$\tilde{V}_{n,m}(r) = \int\limits_0^r \left[\psi(|\rho|)V'_{n,m}(\rho) + 2(1-\psi(|\rho|))\rho\right] d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\overline{r}} \left[\psi(|\rho|)V'_{n,m}(\rho) + 2(1-\psi(|\rho|))\rho\right] d\rho +$$

$$+ \int\limits_{\overline{r}}^{r} \left[\psi(|\rho|)V'_{n,m}(\rho) + 2(1-\psi(|\rho|))\rho\right] d\rho =$$

$$= V_{n,m}(\overline{r}) + \int\limits_{\overline{r}}^{r} \left[(-\rho + \overline{r} + 1)V'_{n,m}(\rho) + 2(1 - (-\rho + \overline{r} + 1))\rho\right] d\rho =$$

$$= V_{n,m}(\overline{r}) + \int\limits_{\overline{r}}^{r} (\overline{r} + 1)V'_{n,m}(\rho)d\rho - \int\limits_{\overline{r}}^{r} \rho V'_{n,m}(\rho)d\rho + 2\int\limits_{\overline{r}}^{r} (\rho^2 - \overline{r}\rho)V'_{n,m}(\rho)d\rho =$$

$$= V_{n,m}(\overline{r}) + (\overline{r} + 1)(V_{n,m}(\overline{r}) - V_{n,m}(\overline{r})) - \rho V_{n,m}(\rho)|_{\overline{r}}^{r} + \int\limits_{\overline{r}}^{r} V_{n,m}(\rho)d\rho +$$

$$+2\left(\frac{\rho^3}{3} - \overline{r}\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_{\overline{r}}^{r} = (-r + \overline{r} + 1)V_{n,m}(r) + \int\limits_{\overline{r}}^{r} V_{n,m}(\rho)d\rho +$$

$$+2\left(\frac{r^3}{3} - \overline{r}\frac{r^2}{2} + \frac{\overline{r}^3}{6}\right) \geq$$

$$\geq (-r + \overline{r} + 1)h(r) + \int\limits_{\overline{r}}^{r} h(\rho)d\rho + 2\left(\frac{r^3}{3} - \overline{r}\frac{r^2}{2} + \frac{\overline{r}^3}{6}\right).$$

Якщо ж $r \geq \overline{r} + 1$, то

$$\tilde{V}_{n,m}(r) = \int\limits_{0}^{\overline{r}} \left[\psi(|\rho|)V'_{n,m}(\rho) + 2(1 - \psi(|\rho|))\rho\right] d\rho +$$

$$+ \int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+1} \left[\psi(|\rho|)V'_{n,m}(\rho) + 2(1 - \psi(|\rho|))\rho\right] d\rho +$$

$$+ \int\limits_{\overline{r}+1}^{r} \left[\psi(|\rho|)V'_{n,m}(\rho) + 2(1 - \psi(|\rho|))\rho\right] d\rho =$$

$$= V_{n,m}(\overline{r}) + \int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+1} (\overline{r} + 1 - \rho)V'_{n,m}(\rho)d\rho + 2\int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+1} (\rho^2 - \overline{r}\rho)d\rho + 2\int\limits_{\overline{r}+1}^{r} \rho d\rho =$$

$$= V_{n,m}(\overline{r}) + (\overline{r}+1)(V_{n,m}(\overline{r}+1) - V_{n,m}(\overline{r})) - \int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+1} \rho V'_{n,m}(\rho)d\rho + 2\left(\frac{\rho^3}{3} - \overline{r}\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_{\overline{r}}^{\overline{r}+1} +$$

$$+r^2 - (\overline{r} + 1)^2 = (\overline{r} + 1)V_{n,m}(\overline{r} + 1) - \overline{r}V_{n,m}(\overline{r}) - (\overline{r} + 1)V_{n,m}(\overline{r} + 1) +$$

$$+\overline{r}V_{n,m}(\overline{r}) + \int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+1} V_{n,m}(\rho)d\rho + 2\left(\frac{(\overline{r} + 1)^3}{3} - \overline{r}\frac{(\overline{r} + 1)^2}{2} - \frac{(\overline{r} + 1)^2}{2} + \frac{\overline{r}^3}{6}\right) +$$

$$+r^2 = r^2 + \int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+1} V_{n,m}(\rho)d\rho + \left[\frac{\overline{r}^3}{3} - \frac{(\overline{r}+1)^3}{3}\right] \geq r^2 + \int\limits_{\overline{r}}^{\overline{r}+1} h(\rho)d\rho + \left[\frac{\overline{r}^3}{3} - \frac{(\overline{r}+1)^3}{3}\right].$$

Для модифікованого гамільтоніана $\tilde{H}$ маємо $\tilde{H}\left(p(t), q(t)\right) = \tilde{H}\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right)$. Оскільки $|q^{(0)}_{n,m}| \leq \overline{r}$, то $\tilde{H}\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right) \leq H_0$. Отже, $\tilde{h}\left(|q_{n,m}|\right) \leq H_0$. Так як $\tilde{h}(r) \geq \tilde{h}(\overline{r}) = h(\overline{r}) = H_0$, то $|q_{n,m}| \leq \overline{r}$. Оскільки для $q(t)$ модифіковане рівняння збігається з вихідним ($\psi(|q_{n,m}|) = 1$ і $\tilde{V}_{n,m}(q_{n,m}) = V_{n,m}(q_{n,m})$), то $q(t)$ є глобальним розв'язком вихідної задачі. Теорему доведено. $\square$

За деяких додаткових припущень умову недодатності оператора A в теоремі 2.3 можна опустити.

Наслідок 2.2. *Нехай виконуються умови* (i_2), (ii_2) *та умова* (b) *теореми 2.3, де*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{h(r)}{r^2} = +\infty.$$

Тоді задача (2.4), (2.7) має единий глобальний розв'язок для будь-яких $q^{(0)}$, $q^{(1)} \in l^2$.

Доведення. Потенціал $U_{n,m}(r)$ запишемо у вигляді

$$U_{n,m}(r) = -\frac{d_{n,m} - 2\lambda}{2} r^2 + \left(V_{n,m}(r) - \lambda r^2\right)$$

з достатньо великим $\lambda > 0$. Тоді новий оператор A, що відповідає коефіцієнтам $a_{n,m}, b_{n,m}$ і $d_{n,m}$, буде недодатним. В той же час

$$V_{n,m}(r) - \lambda r^2 \geq k_1 h(|r|) - k_2$$

з деякими $k_1 \in (0, 1)$ і $k_2 \geq 0$. Тепер достатньо застосувати теорему 2.3 із заміною $h(r)$ на $k_1 h(r) - k_2$. $\square$

Наслідок 2.2 можна застосувати, наприклад, до потенціалів вигляду $V_{n,m}(r) = \alpha_{n,m} r^3 + \beta_{n,m} r^4$, де послідовності $\{\alpha_{n,m}\}$ і $\{\beta_{n,m}\}$ обмежені і $\beta_{n,m} \geq k > 0$.

Вище згадані аргументи можна також застосувати і у випадку сингулярних потенціалів типу Леннарда–Джонса (див. [53])

$$V(r) = a\left[(d + r)^{-6} - d^{-6}\right]^2,\ r > -d,$$

де $a > 0, d > 0$.

Наступна теорема доповнює теорему 2.3 результатом про обмеженість глобального розв'язку задачі Коші.

Теорема 2.4. *Нехай виконуються умови* $(i_2), (ii_2)$ *та* $V_{n,m}(r) \geq 0$ *для всіх* $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ *і* $r \in \mathbb{R}$. *Тоді*

(a) *якщо оператор* A *недодатний та* $\lim\limits_{r\to\pm\infty} V_{n,m}(r) = +\infty$ *(рівномірно по* $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$*), то єдиний розв'язок задачі (2.4), (2.7) з початковими даними* $q^{(0)}$, $q^{(1)} \in l^2$ *є обмеженою функцією на* $\mathbb{R}$ *зі значеннями в* l^∞. *Крім того, якщо для деякого* $s \geq 2$ *існують* $R > 0$ *і* $c > 0$ *такі, що*

$$V_{n,m}(r) \geq c|r|^s \text{ для всіх } r \in [-R, R] \text{ і } (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{2.12}$$

то розв'язок є обмеженою функцією на $\mathbb{R}$ *зі значеннями в* l^s;

(b) *якщо оператор* A *від'ємно визначений, тобто* $(Aq, q) \leq -\alpha\|q\|^2$, $\alpha > 0$, *то єдиний розв'язок задачі (2.4), (2.7) з початковими даними* $q^{(0)}$, $q^{(1)} \in l^2$ *є обмеженою функцією на* $\mathbb{R}$ *зі значеннями в* l^2.

Доведення. У випадку (a) маємо

$$\begin{aligned} &H\left(\dot{q}(t), q(t)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left[\|\dot{q}(t)\|^2 - (Aq(t), q(t))\right] + \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} V_{n,m}(q_{n,m}(t)) = \\ &= H\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right), \end{aligned} \tag{2.13}$$

оскільки гамільтоніан H зберігає своє значення. Звідси, в силу недодатності оператора A та невід'ємності потенціалу $V_{n,m}$, маємо

$$V_{n,m}(q_{n,m}(t)) \leq H\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right).$$

А це означає, що існує стала $C > 0$ така, що $|q_{n,m}(t)| \leq C$ для всіх $t \in \mathbb{R}$ і $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, оскільки $\lim\limits_{r\to\pm\infty} V_{n,m}(r) = +\infty$ рівномірно по відношенню до $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$.

Доведемо тепер другу частину твердження (a). Умова $\lim\limits_{r\to\pm\infty} V_{n,m}(r) = +\infty$ означає, що якщо нерівність (2.12) виконується для деякого $R > 0$, то вона виконується і для будь-якого $R > 0$ зі сталою $c > 0$, яка залежить від R. За першою частиною твердження існує $R > 0$ таке, що $\|q(t)\|_{l^\infty} \leq R$ для всіх $t \in \mathbb{R}$. Таким чином, враховуючи (2.13) і (2.12), маємо

$$c \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} |q_{n,m}(t)|^s \leq H\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right)$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. А це й означає, що $q \in l^s$.

У випадку (b) рівність (2.13) та від'ємність оператора A означають, що

$$\frac{1}{2}\alpha\|q\|^2 \leq H\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right)$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$, а це означає, що $q \in l^2$. Теорему доведено. □

Одержані в цьому підрозділі результати поширюють результати статті [141] на випадок двовимірної ґратки. Крім того, тут встановлено умови обмеженості глобального розв'язку, що не було зроблено в одновимірному випадку.

2.3. Існування та єдиність глобального розв'язку у випадку степеневих потенціалів

У цьому підрозділі розглянемо рівняння (2.4) зі степеневими потенціалами вигляду

$$V_{n,m}(r) = \frac{g_{n,m}}{p} r^p,\ p > 2,$$

де $\{g_{n,m}\}$ — обмежена послідовність, які в загальному випадку не задовольняють одержані вище умови. Передбачається, що оператор A від'ємно визначений, тобто

$$(Aq, q) \leq -\alpha_0\|q\|^2,\ \alpha_0 > 0, \tag{2.14}$$

для $q \in l^2$.

Подамо гамільтоніан H у вигляді

$$H(p,q) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + J(q),$$

де

$$J(q) = -\frac{1}{2}(Aq,q) + \frac{1}{p}\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} g_{n,m} q_{n,m}^p = \frac{1}{2}a(q) + \frac{1}{p}b(q).$$

Зазначимо, що $a^{\frac{1}{2}}(q)$ — норма на l^2, еквівалентна стандартній l^2-нормі. Оскіль-

ки $|b(q)| \le c' \|q\|_{l^p}^p \le c'' \|q\|^p$, то існує така стала $c > 0$, що
$$|b(q)|^{\frac{1}{p}} \le c a^{\frac{1}{2}}(q), \ q \in l^2. \tag{2.15}$$
Далі c завжди позначає сталу з (2.15).

Для одержання основного результату цього підрозділу використаємо техніку, запропоновану Д. Сеттінджером (див. [108]). Зауважимо, що ця техніка застосовувалася в статті [141] при дослідженні коректності задачі Коші для ланцюгів осциляторів (випадок одновимірної ґратки) з кубічним потенціалом.

Покладемо
$$\gamma = \inf_q \{ \sup_{\lambda \ge 0} J(\lambda q) : \ q \in l^2, q \ne 0 \}. \tag{2.16}$$

Лема 2.3. *Правильна нерівність*
$$\gamma \ge \frac{p-2}{2pc^{\frac{2p}{p-2}}}.$$

Доведення. Маємо
$$J(\lambda q) = \frac{\lambda^2}{2} a(q) + \frac{\lambda^p}{p} b(q).$$
Якщо $b(q) \ge 0$, то
$$\sup_{\lambda \ge 0} J(\lambda q) = +\infty.$$
Якщо $b(q) < 0$, то
$$\sup_{\lambda \ge 0} J(\lambda q) = J\left(\left(-\frac{a(q)}{b(q)} \right)^{\frac{1}{p-2}} q \right) = \frac{p-2}{2p} \left(\frac{a^p(q)}{b^2(q)} \right)^{\frac{1}{p-2}}.$$
Підносячи нерівність (2.15) до степеня $2p$, отримуємо необхідне. Лему доведено. □

Покладемо
$$W_\gamma = \{ q \in l^2 : \ 0 \le J(\lambda q) < \gamma \ \forall \lambda \in [0, 1] \}. \tag{2.17}$$
Очевидно, що W_γ зіркова область відносно початку координат, тобто якщо $q \in W_\gamma$, то $\theta q \in W_\gamma$ для будь-якого $\theta \in [0, 1]$.

Лема 2.4. *Множина W_γ містить відкритий еліпсоїд $B = \{ q \in l^2 : \ a(q) <$*

$\rho\}$ *для будь-якого* $\rho > 0$, *що задовольняє умови:*

$$\rho \leq \left(\frac{p}{2c^p}\right)^{\frac{2}{p-2}},$$
$$\frac{\rho}{2} + \frac{c^p}{p}\rho^{\frac{p}{2}} < \gamma.$$

Доведення. За нерівністю (2.15)

$$\frac{\lambda^2}{2}a(q) - \frac{\lambda^p c^p}{p}a^{\frac{p}{2}}(q) \leq J(\lambda q) \leq \frac{\lambda^2}{2}a(q) + \frac{\lambda^p c^p}{p}a^{\frac{p}{2}}(q).$$

При $a(q) \leq \left(\frac{p}{2c^p}\right)^{\frac{2}{p-2}}$ маємо, що

$$J(\lambda q) \geq \lambda^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda^{p-2}c^p}{p}a^{\frac{p}{2}-1}(q)\right) \geq \lambda^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda^{p-2}}{2}\right) \geq 0$$

для всіх $\lambda \in [0,1]$.

Якщо $a(q) < \rho$, то, згідно другої умови для ρ:

$$J(\lambda q) < \frac{\lambda^2}{2}\rho + \frac{\lambda^p c^p}{p}\rho^{\frac{p}{2}} = \lambda^2\left[\frac{1}{2}\rho + \frac{\lambda^{p-2}c^p}{p}\rho^{\frac{p}{2}}\right] < \gamma$$

для всіх $\lambda \in [0,1]$.

Отже, $0 \leq J(\lambda q) < \gamma$ для всіх $\lambda \in [0,1]$. Лему доведено. □

Введемо множину

$$W_{*,\gamma} = \{q \in l^2 : \ a(q) + b(q) > 0, \ J(q) < \gamma\}.$$

Оскільки функціонали $a(q)$ і $b(q)$ неперервні, то множина $W_{*,\gamma}$ відкрита.

Лема 2.5. *Правильне співвідношення*

$$W\gamma = W_{*,\gamma} \cup B.$$

Доведення. Враховуючи лему 2.4, для доведення твердження достатньо показати, що $W_\gamma = W_{*,\gamma} \cup \{0\}$.

Нехай $q \in W_\gamma \setminus \{0\}$. Тоді, якщо $b(q) \geq 0$, то $a(q) + b(q) > 0$ і $J(q) < \gamma$.

Якщо ж $b(q) < 0$, то

$$\sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda q) = J\left(-\frac{a(q)}{b(q)}q\right) \geq \gamma.$$

Тому $-\frac{a(q)}{b(q)} > 1$ і $J(q) < \gamma$. Отже, $q \in W_{*,\gamma}$.

І навпаки, нехай $q \in W_{*,\gamma}$. Тоді, якщо $b(q) \geq 0$, то

$$\sup_{\lambda \in [0,1]} J(\lambda q) = J(q),$$

що й дає необхідне. Лему доведено. □

Оскільки $W_{*,\gamma}$ і B відкриті, то лема 2.5 показує, що множина W_γ також відкрита, тобто є околом нуля у просторі l^2.

Лема 2.6. *Множина W_γ обмежена.*

Доведення. Якщо $b(q) \geq 0$, то
$$J(q) = \frac{1}{2}a(q) + \frac{1}{p}b(q) \geq \frac{1}{2}a(q)$$
і $a(q) < 2\gamma$.

Якщо ж $b(q) < 0$, то за лемою 2.5, $b(q) > -a(q)$. Звідки
$$J(q) > \frac{p-2}{2p}a(q) \ \text{ і } \ a(q) < \frac{2p}{p-2}\gamma.$$
Отже, W_γ міститься в обмеженій множині $\{q \in l^2 : \ a(q) < \frac{2p}{p-2}\gamma\}$ і лему доведено. $\square$

Наступна теорема є основним результатом цього підрозділу.

Теорема 2.5. *Нехай виконується умова (i_2), $V_{n,m}(r) = \frac{g_{n,m}}{p}r^p$, $p > 2$, де $\{g_{n,m}\}$ — обмежена послідовність, а оператор A від'ємно визначений і $q^{(0)} \in W_\gamma$, $q^{(1)} \in l^2$ такі, що $\frac{1}{2}\|q^{(1)}\|^2 + J(q^{(0)}) < \gamma$. Тоді задача (2.4), (2.7) має єдиний глобальний розв'язок.*

Доведення. За теоремою 2.1 існує єдиний локальний розв'язок $q(t)$ даної задачі Коші. Далі, як і в доведенні теореми 2.3, випадок (a), достатньо показати, що він залишається обмеженим на будь-якому скінченному інтервалі існування розв'язку.

Для цього методом від супротивного покажемо, що $q(t) \in W_\gamma$. Припустимо, що це не так і нехай $t_1 > 0$ найменше значення, для якого $q(t_1) \notin W_\gamma$. Тоді $q(t_1)$ належить межі ∂W_γ множини W_γ. Оскільки множина W_γ зіркова, то $\theta q(t_1) \in W_\gamma$ для будь-якого $\theta \in [0, 1)$. А це означає, що $J(\theta q(t_1)) < \gamma$. Переходячи до границі при $\theta \to 1$, отримуємо, що $J(q(t_1)) \leq \gamma$. Якщо $J(q(t_1)) < \gamma$, то, згідно означення множини W_γ і того, що $J(\theta q(t_1)) < \gamma$, отримуємо, що $q(t_1) \in W_\gamma$. А це суперечить зробленому припущенню.

Отже, $J(q(t_1)) = \gamma$.

Оскільки гамільтоніан H зберігається (див. наслідок 2.1), то

$$\gamma = J(q(t_1)) \leq \frac{1}{2}\|\dot{q}(t_1)\|^2 + J(q(t_1)) = H\left(\dot{q}(t_1), q(t_1)\right) =$$
$$= H\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right) = \frac{1}{2}\|q^{(1)}\|^2 + J\left(q^{(0)}\right) < \gamma.$$

Одержана суперечність означає, що $q(t) \in W_\gamma$ для всіх $t > 0$, для яких q визначене. Отже, розв'язок існує при всіх $t > 0$. Але рівняння (2.4) інваріантне відносно заміни t на $-t$. Тому розв'язок $q(t)$ визначений при всіх $t \in \mathbb{R}$, що й доводить теорему. $\square$

Доведена теорема дає існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші у випадку, коли початкові дані достатньо малі в l^2-нормі.

В силу того, що множина початкових даних із теореми 2.5 відкрита і містить нульові дані, одержуємо наслідок:

Наслідок 2.3. *Нехай виконується умова* (i_2), $V_{n,m}(r) = \frac{g_{n,m}}{p} r^p$, $p > 2$, *де* $\{g_{n,m}\}$ — *обмежена послідовність, а оператор* A *від'ємно визначений. Тоді існує таке* $\delta > 0$, *що для будь-яких початкових даних* $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ *з* $\|q^{(0)}\| \leq \delta$ *і* $\|q^{(1)}\| \leq \delta$ *задача (2.4), (2.7) має єдиний глобальний розв'язок.*

Зауважимо, що цей результат можна узагальнити на випадок потенціалів вигляду

$$V_{n,m}(r) = \frac{1}{p} f_{n,m}(r),$$

де $f_{n,m}(r)$ — додатно однорідна функція степеня $p > 2$ ($f_{n,m}(\lambda r) = \lambda^p f_{n,m}(r)$ для всіх $\lambda > 0$). Доведення у цьому випадку проводяться аналогічно як і вище.

Теорема 2.6. *Нехай виконується умова* (i_2), $V_{n,m}(r) = \frac{1}{p} f_{n,m}(r)$, *де* $f_{n,m}(r)$ — *додатно однорідна функція степеня* $p > 2$, *а оператор* A *від'ємно визначений. Тоді існує таке* $\delta > 0$, *що для будь-яких* $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ *з* $\|q^{(0)}\| \leq \delta$ *і* $\|q^{(1)}\| \leq \delta$ *задача (2.4), (2.7) має єдиний глобальний розв'язок.*

Фактично малість початкових даних виключає можливість ситуації *blow-up*, яка може виникнути у випадку, коли початкові дані не є достатньо малими.

2.4. Неіснування глобальних розв'язків у випадку степеневих потенціалів

У цьому підрозділі з'ясуємо за яких умов розв'язок задачі Коші (2.4), (2.7) у випадку степеневих потенціалів вигляду

$$V_{n,m}(r) = \frac{g_{n,m}}{p} r^p,\ p > 2,$$

де $\{g_{n,m}\}$ — обмежена послідовність, має скінченний інтервал існування, тобто дана задача не має глобальних розв'язків.

Нехай $q(t)$ — розв'язок рівняння (2.4) зі степеневими потенціалами і початковими даними $q(0) = q^{(0)}$, $\dot{q}(0) = q^{(1)}$. Нас цікавить питання про те, коли максимальний інтервал існування розв'язку $[0, t_0)$ скінченний. Це справджується тоді і тільки тоді, коли для деякого скінченного $t_0 > 0$

$$\lim_{t \to t_0 - 0} \|q(t)\| = +\infty.$$

Для деякого фіксованого розв'язку $q(t)$ покладемо

$$E(t) = H\left(\dot{q}(t), q(t)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\|\dot{q}(t)\|^2 - (Aq(t), q(t))\right] + \frac{1}{p} \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} g_{n,m} q_{n,m}^p(t).$$

Оператор A вважатимемо недодатним, тобто

$$(Aq, q) \leq 0,\ q \in l^2.$$

Відповідно до наслідку 2.1, $E(t)$ не залежить від t, тобто $E(t) \equiv E(0)$.

Покладемо також

$$F(t) = \|q(t)\|^2 = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} q_{n,m}^2(t).$$

Наступне просте твердження буде використовуватися для доведення неіснування глобальних розв'язків.

Лема 2.7. *Нехай для деякого $\alpha > 0$*

$$\left(F^{-\alpha}(t)\right)'|_{t=0} < 0 \quad i \quad \left(F^{-\alpha}(t)\right)'' \leq 0$$

для всіх $t > 0$ із максимального інтервалу існування розв'язків. Тоді максимальний інтервал існування розв'язку скінченний.

Доведення. Припустимо протилежне. Тоді функція $F^{-\alpha}(t)$ визначена при всіх $t > 0$. Умови леми означають, що функція $F^{-\alpha}(t)$ опукла вгору, а її графік лежить нижче дотичної при $t = 0$. Однак кутовий коефіцієнт дотичної від'ємний. Тобто вона перетинає додатну частину осі t. Звідси випливає, що і графік $F^{-\alpha}(t)$ повинен перетинати додатну частину осі t, тобто $F^{-\alpha}(t)$ перетворюється в нуль при деякому $t > 0$. Останнє, однак, неможливо, оскільки $F(t)$ скінченна при всіх $t > 0$. Одержана суперечність і доводить лему. □

Основним результатом цього підрозділу, який встановлює умови неіснування глобальних розв'язків, є наступна теорема.

Теорема 2.7. *Нехай виконується умова* (i_2), $V_{n,m}(r) = \frac{g_{n,m}}{p}r^p$, $p > 2$, *де* $\{g_{n,m}\}$ *— обмежена послідовність, а оператор* A *недодатний і нехай початкові дані* $q^{(0)} \in l^2$ *і* $q^{(1)} \in l^2$ *задовольняють умови*

$$\left(q^{(0)}, q^{(1)}\right) > 0 \tag{2.18}$$

і

$$E(0) = H\left(q^{(1)}, q^{(0)}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\|q^{(1)}\|^2 - (Aq^{(0)}, q^{(0)})\right] + \frac{1}{p}\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} g_{n,m}(q^{(0)}_{n,m})^p < 0. \tag{2.19}$$

Тоді глобальний розв'язок задачі (2.4), (2.7) не існує.

Доведення. Для доведення теореми достатньо показати, що виконуються умови леми 2.7 з деяким $\alpha > 0$. Справді, маємо

$$\left(F^{-\alpha}(t)\right)'|_{t=0} = -\alpha F^{-\alpha-1}(0)F'(0). \tag{2.20}$$

$$F'(t) = \frac{d}{dt}\left(q(t), q(t)\right) = 2\left(q(t), \dot{q}(t)\right). \tag{2.21}$$

Оскільки $F(0) = \|q(0)\|^2$ і, згідно (2.18), $q(0) = q^{(0)} \neq 0$, то $F(0) > 0$. Згідно (2.21),

$$F'(0) = 2\left(q(t), \dot{q}(t)\right) > 0$$

і рівність (2.20) показує, що

$$\left(F^{-\alpha}(t)\right)'|_{t=0} < 0$$

для будь-якого $\alpha > 0$.

Перевіримо тепер другу умову леми 2.7 з деяким $\alpha > 0$. Покладемо

$$Q(t) = (-\alpha)^{-1}(F(t))^{\alpha+2}\left(F^{-\alpha}(t)\right)''.$$

Пряме обчислення показує, що

$$Q(t) = F''(t)F(t) - (\alpha+1)(F'(t))^2. \tag{2.22}$$

Оскільки $F(t) \geq 0$, то достатньо показати, що $Q(t) \geq 0$ для $t \geq 0$.

Диференціюючи (2.21), отримуємо

$$F''(t) = 2\{(q(t), \ddot{q}(t) + \|\dot{q}(t)\|^2\} =$$

$$= 4(\alpha+1)\|\dot{q}(t)\|^2 + 2\{(q(t), \ddot{q}(t)) - (2\alpha+1)\|\dot{q}(t)\|^2\}. \tag{2.23}$$

Таким чином, використовуючи (2.21), (2.22) і (2.23), отримуємо

$$Q(t) = 4(\alpha+1)\{\|q(t)\|^2\|\dot{q}(t)\|^2 - (q(t), \dot{q}(t))^2\} +$$

$$+2F(t)\left[(q(t), \ddot{q}(t)) - (2\alpha+1)\|\dot{q}(t)\|^2\right]. \tag{2.24}$$

Покладемо

$$h(t) = (q(t), \ddot{q}(t)) - (2\alpha+1)\|\dot{q}(t)\|^2. \tag{2.25}$$

Оскільки, за нерівністю Коші–Буняковського–Шварца, перший член в правій частині (2.24) невід'ємний, то для доведення нерівності $Q(t) \geq 0$ достатньо перевірити, що $h(t) \geq 0$ при $t \geq 0$. Підставимо в (2.25) $\ddot{q}$ з рівняння (2.4). Тоді

$$h(t) = (Aq(t), q(t)) - \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} g_{n,m} q^p_{n,m}(t) - (2\alpha+1)\|\dot{q}(t)\|^2. \tag{2.26}$$

З іншого боку,

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\|\dot{q}(t)\|^2 - (Aq(t), q(t))\right) + \frac{1}{p}\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} g_{n,m} q^p_{n,m}(t). \tag{2.27}$$

Покладемо $\alpha = \frac{p-2}{4}$. Тоді $2(2\alpha+1) = p$ і рівності (2.26), (2.27) показують, що

$$h(t) = -pE(t) - \left(\frac{p}{2} - 1\right)(Aq(t), q(t)).$$

Оскільки $E(t) = E(0) < 0$ і $(Aq(t), q(t)) \leq 0$, то

$$h(t) \geq -pE(0) > 0.$$

Таким чином, всі умови леми 2.7 виконуються з $\alpha = \frac{p-2}{4}$ і теорему доведено. $\square$

Зауважимо, що достатньо малі початкові дані не задовольняють умову (2.19), оскільки квадратична частина гамільтоніана для таких даних буде більшою за його частину степеня $p > 2$.

У випадку непарних степеневих потенціалів наведемо більш явні умови неіснування глобальних розв'язків. Щоб виключити тривіальний випадок, припустимо, що $g_{n,m} \neq 0$ хоча б для однієї пари $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. Відмітимо, що в тривіальному випадку, коли $g_{n,m} \equiv 0$, нелінійність відсутня і $E(0)$ не може бути від'ємним. В цьому випадку, як випливає із теореми Б.2, глобальні розв'язки існують для будь-яких початкових даних. Покладемо

$$N_{\pm} = \{(n, m) \in \mathbb{Z}^2 | \ \pm g_{n,m} > 0\}.$$

Відмітимо, що в нетривіальному випадку хоча б одна множина N_+ або N_- непорожня.

Наслідок 2.4. *Нехай виконується умова* (i_2), $V_{n,m}(r) = \frac{g_{n,m}}{p} r^p$, $p > 2$ *— непарне число,* $\{g_{n,m}\}$ *— обмежена послідовність,* $g_{n,m} \not\equiv 0$ *і* $q^{(0)} = \{q^{(0)}_{n,m}\} \in l^2$, $q^{(1)} = \{q^{(1)}_{n,m}\} \in l^2$ *такі, що* $q^{(0)}_{n,m} q^{(1)}_{n,m} \geq 0$ *для будь-яких* $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $q^{(0)}_{n,m} q^{(1)}_{n,m} > 0$ *хоча б для однієї пари* $(n, m) \in N_+ \cup N_-$, *і* $\mp q^{(0)}_{n,m} \geq 0$ *для* $(n, m) \in N_{\pm}$. *Тоді існує таке* $\lambda \geq 0$, *що для будь-якого* $\lambda \geq \lambda_0$ *розв'язок задачі Коші для рівняння (2.4) з початковими даними* $\lambda q^{(0)}$ *і* $q^{(1)}$ *має тільки скінченний максимальний інтервал існування.*

Доведення. Перевіримо виконання умов теореми 2.7 для початкових даних $\lambda q^{(0)}$ і $q^{(1)}$. Маємо

$$\left(\lambda q^{(0)}, q^{(1)}\right) = \lambda \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} q^{(0)}_{n,m} q^{(1)}_{n,m} > 0$$

для будь-якого $\lambda > 0$. Далі

$$E(0) = \frac{1}{2}\left[\|q^{(1)}\|^2 - \left(A(\lambda q^{(0)}), \lambda q^{(0)}\right)\right] + \frac{1}{p} \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} g_{n,m} \left(\lambda q^{(0)}_{n,m}\right)^p =$$

$$= \frac{1}{2}\|q^{(1)}\|^2 - \frac{\lambda^2}{2}\left(A q^{(0)}, q^{(0)}\right) + \frac{\lambda^p}{p} \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} g_{n,m} \left(q^{(0)}_{n,m}\right)^p.$$

Останній вираз є многочленом степеня $p > 2$ від λ. Згідно умов, коефіцієнт при λ^p від'ємний. Тому $E(0) < 0$ для достатньо великих $\lambda > 0$. $\square$

Зауважимо, що результати підрозділів 2.3 і 2.4 узагальнюють результати статті [157], в якій досліджено випадок кубічного потенціалу.

Приклад 2.2. *Розглянемо двовимірний дискретний аналог квадратичного рівняння Клейна–Ґордона*

$$\ddot{q}_{n,m} = \Delta q_{n,m} - k^2 q_{n,m} + a q_{n,m}^2, \; k \geq 0, \; (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{2.28}$$

де $a \neq 0$, $(\Delta q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}$ *двовимірний дискретний оператор Лапласа.*

У даному випадку $A = \Delta - k^2$, $V_{n,m}(r) = -\frac{a}{3} r^3$. Як відомо, оператор Δ недодатний, а тому оператор A також недодатний.

Нехай $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ і $k^2 > 0$ (оператор A в цьому випадку від'ємно визначений). Тоді якщо $\|q^{(0)}\|$ і $\|q^{(1)}\|$ достатньо малі, то, як показує наслідок 2.3, задача Коші для рівняння (2.28) має єдиний глобальний розв'язок. З іншого боку, наслідок 2.4 показує, що при певному виборі початкових даних глобального розв'язку немає. Існування глобальних розв'язків при $k = 0$ залишається відкритим.

Висновки до розділу 2

Другий розділ дисертації присвячений питанням існування і єдиності розв'язків задачі Коші для зліченних систем звичайних диференціальних рівнянь, що описують нескінченні системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Він складається з чотирьох підрозділів.

У першому підрозділі наводиться формулювання задачі Коші для заданих систем у просторі l^2 та основні припущення.

У другому підрозділі, як наслідок стандартного результату для диференціальних рівнянь в банахових просторах, встановлено умови існування та єдиності локального розв'язку. Також в цьому підрозділі одержано достатні умови існування та єдиності глобального розв'язку. Для цього використано подання системи в гамільтоновому вигляді. Основними умовами тут є недодатність оператора лінійної взаємодії між осциляторами та напівобмеженість знизу їх потенціалів. Показано, що для потенціалів вище другого степеня умову недодатності оператора лінійної взаємодії можна опустити. Також тут встановлено умови обмеженості глобального розв'язку. Наведено приклад дискретного рівняння типу синус-Ґордона на двовимірній ґратці, до якого застосовано одержані результати.

У третьому підрозділі окремо досліджено випадок степеневих потенціалів степеня $p > 2$, які в загальному випадку не задовольняють одержані умови. Тут отримано умови існування та єдиності глобального розв'язку у випадку степеневої потенціальної функції. Зокрема, показано, що якщо початкові дані достатньо малі в l^2-нормі, то глобальний розв'язок існує.

У четвертому підрозділі одержано умови неіснування глобальних розв'язків у випадку степеневих потенціалів. За цих умов розв'язок задачі Коші має тільки скінченний інтервал існування. Розглянуто приклад двовимірного дискретного аналога квадратичного рівняння Клейна–Гордона. Показано, що при $k^2 > 0$, глобальний розв'язок задачі Коші існує для всіх початкових даних з достатньо малою l^2-нормою, незалежно від знаку a. Однак за наслідком 2.4 при певному виборі початкових даних глобального розв'язку немає.

Одержані результати поширюють результати статті [141] на випадок двовимірної ґратки, крім того, тут доведено обмеженість глобального розв'язку та досліджено випадок степеневих потенціалів степеня $p > 2$ (тоді як у згаданій статті досліджено випадок тільки кубічного потенціалу).

Результати даного розділу опубліковано в працях [12, 152, 154, 155] і додатково висвітлено в [157, 169, 170].

РОЗДІЛ 3

ПЕРІОДИЧНІ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ РОЗВ'ЯЗКИ В СИСТЕМАХ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

3.1. Формулювання задачі про періодичні розв'язки для системи осциляторів. Основні припущення

У цьому розділі вивчаються періодичні розв'язки системи (2.3) з крайовими умовами (2.2). Як і в розділі 2, ця задача зводиться до вивчення періодичних розв'язків диференціально-операторного рівняння (2.4) в просторі l^2. Нагадаємо, що рівняння (2.4) має вигляд

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \tag{3.1}$$

де лінійний оператор A визначається рівностями

$$(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m}, \tag{3.2}$$

$$c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m},$$

а нелінійний оператор B визначається рівністю

$$(B(q))_{n,m} = V'_{n,m}(q_{n,m}). \tag{3.3}$$

Будемо вивчати розв'язки рівняння (3.1), які задовольняють умову періодичності за часовою змінною

$$q(t+T) = q(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

де $T > 0$ — деяке число.

Припускається, що виконуються такі умови:

(i_3) *існує таке $N \in \mathbb{N}$, що коефіцієнти $a_{n,m}, b_{n,m}$ і $d_{n,m}$ є N-періодичними,* *тобто* $a_{n+N,m} = a_{n,m+N} = a_{n,m}$, $b_{n+N,m} = b_{n,m+N} = b_{n,m}$, $d_{n+N,m} = d_{n,m+N} = d_{n,m}$, $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$; A *— додатно визначений оператор в* l^2, *тобто існує таке* $\alpha_0 > 0$, *що*

$$(Aq, q) \geq \alpha_0 \|q\|^2, \ q \in l^2;$$

(ii_3) $V_{n,m} \in C^1(\mathbb{R})$, $V_{n,m}(0) = V'_{n,m}(0) = 0$ *і* $V'_{n,m}(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$, *та виконується умова* N*-періодичності* $V_{n+N,m}(r) = V_{n,m+N}(r) = V_{n,m}(r)$, $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$;

(iii_3) *існує таке* $\mu > 2$, *що для всіх* $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$:

$$0 < \mu V_{n,m}(r) \leq V'_{n,m}(r) r, \ \ r \neq 0.$$

Зауважимо, що умову (iii_3) називають *умовою Амброзетті–Рабіновіца* (див., наприклад, [79, с. 966]).

Лема 3.1. *Нехай виконуються умови* $(ii_3), (iii_3)$. *Тоді існують такі сталі* $d > 0$ *та* $d_0 \geq 0$, *які не залежать від* n *і* m, *що*

$$V_{n,m}(r) \geq d|r|^\mu - d_0. \tag{3.5}$$

Доведення. Зафіксуємо $r_0 > 0$. З умови (iii_3) одержуємо диференціальну нерівність

$$V'_{n,m}(r) \geq \mu \frac{V_{n,m}(r)}{r}.$$

З цієї нерівності відповідно до стандартних результатів (див. [217]), маємо

$$V_{n,m}(r) \geq y(r) \text{ при } r \geq r_0,$$

де $y(r)$ — розв'язок диференціального рівняння

$$y'(r) = \frac{\mu}{r} y(r)$$

з початковою умовою $y(r_0) = V_{n,m}(r_0)$. Цей розв'язок можна знайти в явному вигляді

$$y(r) = \frac{V_{n,m}(r_0)}{r_0^\mu} r^\mu.$$

Таким чином, маємо

$$y(r) = \frac{V_{n,m}(r_0)}{r_0^\mu} r^\mu, \ r \geq r_0.$$

Тоді для всіх $r \geq 0$

$$V_{n,m}(r) \geq V_{n,m}(r_0)\left(\frac{r^\mu}{r_0^\mu} - 1\right) =$$

$$= \frac{V_{n,m}(r_0)}{r_0^\mu} r^\mu - V_{n,m}(r_0).$$

Міркуючи аналогічно для $r \leq 0$, маємо

$$V_{n,m}(r) \geq \frac{V_{n,m}(-r_0)}{r_0^\mu}|r|^\mu - V_{n,m}(-r_0).$$

Останні дві нерівності дають (3.5) з

$$d = \inf_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \min\left\{\frac{V_{n,m}(-r_0)}{r_0^\mu}, \frac{V_{n,m}(r_0)}{r_0^\mu}\right\},$$

$$d_0 = \sup_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \max\left\{V_{n,m}(-r_0), V_{n,m}(r_0)\right\},$$

і лему доведено. □

Лема 3.2. *Нехай виконуються умови* $(ii_3), (iii_3)$. *Тоді існує така неперервна монотонно зростаюча функція* $\sigma(r)$, $r \geq 0$, *що*

$$\sigma(0) = 0, \ \lim_{r\to+\infty} \sigma(r) = +\infty$$

і

$$V'_{n,m}(r)r \leq \sigma(|r|)r^2. \tag{3.6}$$

Доведення. Покажемо, що в якості $\sigma(r)$ можна взяти функцію

$$\sigma(r) = \max_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \sup_{|s|\leq r} \left|\frac{V'_{n,m}(s)}{s}\right|.$$

Справді, нерівність (3.6), неперервність та монотонність $\sigma(r)$, а також рівність $\sigma(0) = 0$, очевидні. Залишається показати, що $\lim\limits_{r\to+\infty} \sigma(r) = +\infty$. Із умови (iii_3) та леми 3.1 випливає, що

$$\sigma(r) \geq Const \cdot r^{\mu-2}$$

при достатньо великих r. Оскільки $\mu > 2$, то $\sigma(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Лему доведено. □

Зауваження 3.1. *Додатково до умов* (i_3)*–*(iii_3) *припустимо, що виконується умова* (ii_2) *підрозділу 2.1, тобто потенціал* $V_{n,m}$ *дещо більш регулярний, ніж вимагається вище. Тоді лема 3.1 показує, зокрема, що в зроблених припущеннях рівняння (3.1) задовольняє умови наслідку 2.2, а отже, задача*

Коші для цього рівняння має єдиний глобальний розв'язок. Нагадаємо, що A — додатно визначений і, отже, умови теореми 2.3 не виконуються.

Відповідно до умови просторової періодичності системи, природно розглядати наступні періодичні за змінними n і m умови. Нехай $k \in \mathbb{N}$ — фіксоване. Тоді розглянемо систему (2.3) з періодичними умовами за просторовими змінними (замість крайових умов (2.2))

$$q_{n+kN,m}(t) = q_{n,m+kN}(t) = q_{n,m}(t). \tag{3.7}$$

Цю задачу буде використано як допоміжну при вивченні періодичних розв'язків задачі (2.3), (2.2).

Позначимо через l_k^2 скінченновимірний простір всіх kN-періодичних послідовностей з нормою

$$\|q\|_{l_k^2} = \left(\sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} |q_{n,m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

і скалярним добутком

$$(p, q)_{l_k^2} = \sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} p_{n,m} q_{n,m},$$

де $\left[\frac{kN}{2}\right]$ — ціла частина $\frac{kN}{2}$.

Через A_k позначимо оператор A, який діє в просторі l_k^2. Рівність (3.3) показує, що оператор B також діє в l_k^2. Тому позначимо його через B_k. Тоді задача (2.3), (3.7) запишеться у вигляді

$$\ddot{q} = A_k q - B_k(q). \tag{3.8}$$

Лема 3.3. *Нехай виконується умова* (i_3)*. Тоді*

$$(A_k q, q)_{l_k^2} \geq \alpha_0 \|q\|_{l_k^2}^2, \; q \in l_k^2.$$

Доведення. Оскільки A_k — самоспряжений скінченновимірний оператор, то достатньо показати, що для будь-якого його власного значення λ маємо $\lambda \geq \alpha_0$. Якщо λ — власне значення A_k з власним вектором $q \in l_k^2$, то q є узагальненим власним вектором оператора A (див. [36, 37, 119, 179, 180, 206]).

Отже, λ — точка спектру оператора A. Оскільки спектр A лежить у множині $[\alpha_0; +\infty)$, то отримуємо те, що вимагалося. Лему доведено. $\square$

3.2. Варіаційне формулювання задачі про періодичні розв'язки. Попередні леми

Позначимо через X_T підпростір простору $H^1_{loc}\left(\mathbb{R}; l^2\right)$, який складається з T-періодичних функцій. Це гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(q,p)_T = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[(\dot{q}(t), \dot{p}(t)) + (q(t), p(t))\right] dt$$

та відповідною нормою $\|q\|_T = (q,q)_T^{\frac{1}{2}}$. Простір X_T складається із послідовностей $q = \{q_{n,m}\}_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ таких функцій $q_{n,m} \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$, що $q_{n,m}(t+T) = q_{n,m}(t)$ і

$$\|q\|_T^2 = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \|q_{n,m}\|^2_{H^1\left(-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right)} < +\infty,$$

де

$$\|q_{n,m}\|^2_{H^1\left(-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right)} = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[|\dot{q}_{n,m}(t)|^2 + |q_{n,m}(t)|^2\right] dt.$$

Згідно теореми про вкладення (див. [193, 194]), X_T неперервно вкладено в простір $C_T\left(\mathbb{R}; l^2\right)$ неперервних T-періодичних функцій зі значеннями в l^2.

Через $X_{T,k}$ позначимо підпростір T-періодичних функцій із $H^1_{loc}\left(\mathbb{R}; l^2_k\right)$ зі скалярним добутком

$$(q,p)_{T,k} = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[(\dot{q}(t), \dot{p}(t))_{l^2_k} + (q(t), p(t))_{l^2_k}\right] dt$$

і відповідною нормою $\|\cdot\|_{T,k}$. Його елементами є послідовності $q = \{q_{n,m}\}_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ таких функцій $q_{n,m} \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$, що $q_{n,m}(t+T) = q_{n,m}(t)$ і

$$q_{n+kN,m}(t) = q_{n,m+kN}(t) = q_{n,m}(t).$$

Як і вище, $X_{T,k} \subset C_T\left(\mathbb{R}; l^2_k\right)$.

З рівняннями (3.1) та (3.8) пов'язуються два функціонали. Першому з них відповідає функціонал

$$J(q)=\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|^2+\frac{1}{2}(Aq(t),q(t))-\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}V_{n,m}\left(q_{n,m}(t)\right)\right]dt, \qquad (3.9)$$

визначений на просторі X_T. Рівнянню (3.8) відповідає функціонал

$$J_k(q)=\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|^2_{l^2_k}+\frac{1}{2}(A_kq(t),q(t))_{l^2_k}-\sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}V_{n,m}\left(q_{n,m}(t)\right)\right]dt, \quad (3.10)$$

який визначений на просторі $X_{T,k}$. Ці функціонали коректно визначені на відповідних просторах. Справді, їх квадратичні члени скінченні згідно означень просторів X_T та $X_{T,k}$. Неквадратичні члени також скінченні, оскільки, згідно теорем вкладення, $q(t)$ неперервна функція на $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ зі значеннями в l^2 або l^2_k відповідно, а згідно (ii_3)

$$|V_{n,m}(r)|\le C|r|^2$$

на будь-якому скінченому інтервалі зміни r.

Більше того, критичні точки функціоналів (3.9) і (3.10) є T-періодичними розв'язками рівнянь (3.1) та (3.8) відповідно.

Таким чином, задача про знаходження періодичних розв'язків зводиться до пошуку критичних точок відповідних функціоналів. Це встановлюється за допомогою наступних двох лем.

Лема 3.4. *Нехай виконуються умови (i_3) та (ii_3). Тоді функціонали J і J_k належать класу C^1, а їх похідні визначаються рівностями*

$$\langle J'(q),h\rangle=\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\Big[(\dot{q}(t),\dot{h}(t))+(Aq(t),h(t))-$$

$$-\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}V'_{n,m}\left(q_{n,m}(t)\right)h_{n,m}(t)\Big]dt, \qquad (3.11)$$

$$\langle J'_k(q),h\rangle=\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\Big[(\dot{q}(t),\dot{h}(t))_{l^2_k}+(A_kq(t),h(t))_{l^2_k}-$$

$$- \sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} V'_{n,m}\left(q_{n,m}(t)\right) h_{n,m}(t) \Bigg] \, dt, \tag{3.12}$$

для будь-яких $h \in X_T$ та $h \in X_{T,k}$ відповідно.

Доведення. Розглянемо функціонал J. Подамо його у вигляді

$$J(q) = \Psi(q) - S(q),$$

де

$$\Psi(q) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|^2 + \frac{1}{2}(Aq(t), q(t))\right] dt,$$

$$S(q) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} V_{n,m}\left(q_{n,m}(t)\right) dt.$$

Знайдемо похідну Гато функціоналу Ψ. Нехай $q \in X_T$, $h \in X_T$ та $|\lambda| \leq 1$. Тоді

$$\Psi(q + \lambda h) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Bigg[\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|^2 + \lambda(\dot{q}(t), \dot{h}(t)) + \frac{1}{2}\lambda^2\|\dot{h}(t)\|^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left(Aq(t) + \lambda Ah(t), q(t) + \lambda h(t)\right)\Bigg] dt =$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Bigg[\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|^2 + \lambda(\dot{q}(t), \dot{h}(t)) + \frac{1}{2}\lambda^2\|\dot{h}(t)\|^2 +$$

$$+\frac{1}{2}(Aq(t), q(t)) + \lambda(Aq(t), h(t)) + \frac{1}{2}\lambda^2(Ah(t), h(t))\Bigg] dt.$$

Оскільки

$$\Psi(q + \lambda h) - \Psi(q) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Bigg[\lambda(\dot{q}(t), \dot{h}(t)) + \frac{1}{2}\lambda^2\|\dot{h}(t)\|^2 +$$

$$+\lambda(Aq(t), h(t)) + \frac{1}{2}\lambda^2(Ah(t), h(t))\Bigg] dt,$$

то

$$\langle \Psi'(q), h\rangle = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\Psi(q + \lambda h) - \Psi(q)}{\lambda} =$$

$$= \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Big[(\dot{q}(t), \dot{h}(t)) + (Aq(t), h(t))\Big]\, dt.$$

Легко бачити, що $\Psi(q)$ є функціоналом класу C^1.

Покажемо тепер, що похідна Гато $S'(q)$ також існує і виражається формулою

$$\langle S'(q), h\rangle = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} V'_{n,m}\left(q_{n,m}(t)\right) h_{n,m}(t)dt \tag{3.13}$$

для будь-яких $q \in X_T$ та $h \in X_T$. Справді, нехай $q \in X_T$, $h \in X_T$ та $|\lambda| \le 1$. Тоді за формулою Лагранжа

$$S(q+\lambda h) - S(q) = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} V'_{n,m}\left(q_{n,m}(t) + \lambda\theta_{n,m}h_{n,m}(t)\right) \lambda h_{n,m}(t)dt$$

де $\theta_{n,m} \in (0,1)$.

Подамо праву частину останньої рівності у вигляді

$$\lambda \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} V'_{n,m}\left(q_{n,m}(t)\right) h_{n,m}(t)dt+$$

$$+\lambda \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \left[V'_{n,m}\left(q_{n,m}(t) + \lambda\theta_{n,m}h_{n,m}(t)\right) - V'_{n,m}(q_{n,m}(t))\right] h_{n,m}(t)dt.$$

За означенням похідної Гато, для доведення (3.13) достатньо показати, що

$$\lim_{\lambda\to 0} I_\lambda = 0,$$

де

$$I_\lambda = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \left[V'_{n,m}\left(q_{n,m}(t) + \lambda\theta_{n,m}h_{n,m}(t)\right) - V'_{n,m}(q_{n,m}(t))\right] h_{n,m}(t)dt.$$

Подамо I_λ у вигляді

$$I_\lambda = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{|n|<\tilde{n},|m|<\tilde{m}} \left[V'_{n,m}\left(q_{n,m}(t) + \lambda\theta_{n,m}h_{n,m}(t)\right) - V'_{n,m}(q_{n,m}(t))\right] h_{n,m}(t)dt+$$

$$+\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{|n|\geq\tilde{n},|m|\geq\tilde{m}} V'_{n,m}\left(q_{n,m}(t)+\lambda\theta_{n,m}h_{n,m}(t)\right)h_{n,m}(t)dt-$$

$$-\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{|n|\geq\tilde{n},|m|\geq\tilde{m}} V'_{n,m}\left(q_{n,m}(t)\right)h_{n,m}(t)dt=$$

$$=I_\lambda^{(1)}+I_\lambda^{(2)}-I_\lambda^{(3)},$$

де $\tilde{n}$ і $\tilde{m}$ буде вибрано пізніше.

Нехай $\varepsilon>0$. За умовою (ii_3) існує таке $\delta_\varepsilon>0$, що $|V'_{n,m}(r)|\leq\varepsilon|r|$ при $|r|\leq\delta_\varepsilon$. За теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\|q_{n,m}\|^2_{C\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)}=\|q\|_T^2.$$

За теоремою вкладення,

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\|q_{n,m}\|^2_{C\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)}\leq C\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\|q_{n,m}\|^2_{H^1\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)}<+\infty.$$

Таким чином, при достатньо великих $\tilde{n}$ і $\tilde{m}$ маємо $\|q_{n,m}\|_{C\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)}\leq\delta_\varepsilon$ при $|n|\geq\tilde{n}$ і $|m|\geq\tilde{m}$. Аналогічно, враховуючи, що $\theta_{n,m}\in(0,1)$ і $|\lambda|\leq1$, та збільшуючи, можливо, $\tilde{n}$ і $\tilde{m}$, можна вважати, що

$$\|q_{n,m}+\lambda\theta_{n,m}h_{n,m}\|_{C\left([-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]\right)}\leq\delta_\varepsilon$$

при $|n|\geq\tilde{n}$ і $|m|\geq\tilde{m}$. Тоді

$$\left|I_\lambda^{(3)}\right|\leq\varepsilon\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sum_{|n|\geq\tilde{n},|m|\geq\tilde{m}}|q_{n,m}(t)|\cdot|h_{n,m}(t)|dt\leq\varepsilon\|q\|_{L^2\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l^2\right)}\|h\|_{L^2\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l^2\right)}$$

і

$$\left|I_\lambda^{(2)}\right|\leq\varepsilon\left(\|q\|_{L^2\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l^2\right)}+\|h\|_{L^2\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l^2\right)}\right)\|h\|_{L^2\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l^2\right)}.$$

Що стосується $I_\lambda^{(1)}$, то $\lambda\theta_{n,m}h_{n,m}(t)\to0$ при $\lambda\to0$ рівномірно по t, функції $V'_{n,m}(r)$ рівномірно неперервні на кожному скінченному інтервалі зміни r, а вираз для $I_\lambda^{(1)}$ містить скінченне число доданків. Отже,

$$\lim_{\lambda\to0}I_\lambda^{(0)}=0.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне, то звідси випливає, що

$$\lim_{\lambda\to 0} I_\lambda = 0.$$

І нарешті покажемо, що похідна $S'(q)$, задана формулою (3.13), неперервна по $q \in X_T$. Для цього потрібно показати, що

$$\lim_{\|v\|_T\to 0} \sup_{\|h\|_T\leq 1} |\langle S'(q+v) - S'(q), h\rangle| = 0.$$

За формулою (3.13),

$$\langle S'(q+v) - S'(q), h\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \left[V'_{n,m}\left(q_{n,m}(t) + v_{n,m}(t)\right) - V'_{n,m}(q_{n,m}(t))\right] h_{n,m}(t)dt =$$

$$= \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{|n|<\tilde{n},|m|<\tilde{m}} \left[V'_{n,m}\left(q_{n,m}(t) + v_{n,m}(t)\right) - V'_{n,m}(q_{n,m}(t))\right] h_{n,m}(t)dt +$$

$$+ \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{|n|\geq\tilde{n},|m|\geq\tilde{m}} V'_{n,m}\left(q_{n,m}(t) + v_{n,m}(t)\right) h_{n,m}(t)dt -$$

$$- \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{|n|\geq\tilde{n},|m|\geq\tilde{m}} V'_{n,m}\left(q_{n,m}(t)\right) h_{n,m}(t)dt. \tag{3.14}$$

Як і вище,

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \|q_{n,m}\|^2_{C\left([-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]\right)} < +\infty,$$

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \|v_{n,m}\|^2_{C\left([-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]\right)} \leq C\|v\|^2_T$$

з деякою сталою $C > 0$. Тому, згідно (ii_3), для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдуться такі додатні $\tilde{n}$ і $\tilde{m}$, що для будь-якого $v \in X_T$ з достатньо малою нормою $\|v\|_T$ другий та третій члени в правій частині (3.14) за модулем не перевищують

$$\varepsilon\left(\|q\|_T + \|v\|_T\right)\|h\|_T \leq \varepsilon\left(\|q\|_T + \|v\|_T\right) \leq C_1\varepsilon$$

та

$$\varepsilon\|q\|_T \cdot \|h\|_T \leq \varepsilon\|q\|_T \leq C_1\varepsilon$$

відповідно з деяким $C_1 > 0$.

Перший член в правій частині (3.14) по модулю не перевищує

$$\sup_{|n|<\tilde{n},|m|<\tilde{m},|t|\le\frac{T}{2}} \left|V'_{n,m}(q_{n,m}(t)+v_{n,m}(t))-V'_{n,m}(q_{n,m}(t))\right|\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sum_{|n|<\tilde{n},|m|<\tilde{m}}|h_{n,m}(t)|dt\le$$

$$\le\sup_{|n|<\tilde{n},|m|<\tilde{m},|t|\le\frac{T}{2}} \left|V'_{n,m}(q_{n,m}(t)+v_{n,m}(t))-V'_{n,m}(q_{n,m}(t))\right|\cdot$$

$$\cdot C_2\left(\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sum_{|n|<\tilde{n},|m|<\tilde{m}}|h_{n,m}(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le C_2\cdot\sup_{|n|<\tilde{n},|m|<\tilde{m},|t|\le\frac{T}{2}} \left|V'_{n,m}(q_{n,m}(t)+v_{n,m}(t))-V'_{n,m}(q_{n,m}(t))\right|\cdot\|h\|_T\le$$

$$\le C_2\cdot\sup_{|n|<\tilde{n},|m|<\tilde{m},|t|\le\frac{T}{2}} \left|V'_{n,m}(q_{n,m}(t)+v_{n,m}(t))-V'_{n,m}(q_{n,m}(t))\right|.$$

Оскільки $\|v\|_T\to 0$, то $\|v\|_{C\left([-\frac{T}{2},\frac{T}{2}];l^2\right)}\to 0$ і, згідно (ii_3), права частина останньої нерівності прямує до нуля рівномірно по $h\in X_T$ з $\|h\|_T\le 1$. Оскільки $\varepsilon>0$ довільне, то звідси випливає те, що вимагалося.

Випадок функціоналу J_k аналогічний і навіть простіший.

Лему доведено. □

Лема 3.5. *Нехай виконуються умови* (i_3)*—*(iii_3)*. Тоді критичні точки функціоналів* J *і* J_k *є* T*-періодичними розв'язками рівнянь (3.1) та (3.8) відповідно.*

Доведення. Нехай $q\in X_T$ — критична точка функціоналу J. Тоді за лемою 3.4,

$$\langle J'(q),h\rangle=\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\Big[(\dot{q}(t),\dot{h}(t))+(Aq(t),h(t))-$$

$$\left.-\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}V'_{n,m}\left(q_{n,m}(t)\right)h_{n,m}(t)\right]dt=$$

$$= \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Big[(\dot{q}(t), \dot{h}(t)) + (Aq(t), h(t)) - (B(q(t)), h(t))\Big]\, dt = 0$$

для будь-якого $h \in X_T$. Інтегруючи частинами перший доданок під знаком інтеграла, одержуємо

$$\langle J'(q), h\rangle = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [-(\ddot{q}(t), h(t)) + (Aq(t), h(t)) - (B(q(t)), h(t))]\, dt =$$

$$= \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (-\ddot{q}(t) + Aq(t) - B(q(t), h(t))\, dt \equiv 0.$$

Останнє означає, що q — слабкий розв'язок рівняння (3.1).

Таким чином,

$$\ddot{q} \equiv Aq - B(q)$$

в сенсі узагальнених функцій. Але, за теоремою вкладення, $q \in C(\mathbb{R}; l^2)$, а отже, $Aq \in C(\mathbb{R}; l^2)$ і, згідно умови (ii_3), $B(q) \in C(\mathbb{R}; l^2)$. Таким чином, $\ddot{q} \in C(\mathbb{R}; l^2)$ і значить, q — двічі неперервно диференційовна функція зі значеннями в l^2. Оскільки, за означенням простору X_T, q є T-періодичною функцією, то q — T-періодичний розв'язок рівняння (3.1).

Випадок функціоналу J_k аналогічний. Лему доведено. $\square$

Далі нам знадобиться наступне твердження.

Лема 3.6. *Нехай виконуються умови (i_3)—(iii_3). Тоді існують такі сталі $\varepsilon_0 > 0$ і $c > 0$, які не залежать від k, що для будь-якої критичної точки функціоналів J та J_k правильні відповідно нерівності*

$$\varepsilon_0 \le \|q\|_T^2 \le cJ(q),$$

$$\varepsilon_0 \le \|q\|_{T,k}^2 \le cJ_k(q).$$

Доведення. Розглянемо випадок функціоналу J. Випадок функціоналу J_k аналогічний.

Нехай $q \in l^2$ — критична точка функціоналу J, тоді $J'(q) = 0$ і

$$J(q) = J(q) - \frac{1}{\mu}\langle J'(q), q\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\|\dot{q}(t)\|^2 + (Aq(t), q(t))\right] dt -$$

$$- \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \left[V_{n,m}\left(q_{n,m}(t)\right) - \frac{1}{\mu} V'_{n,m}(q_{n,m}(t))\right] dt.$$

Враховуючи умови (i_3) та (iii_3), маємо

$$J(q) \geq \frac{\mu - 2}{2\mu} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\|\dot{q}(t)\|^2 + \alpha_0 \|q(t)\|^2\right] dt \geq$$

$$\geq \frac{\mu - 2}{2\mu} \beta_0 \|q(t)\|_T^2,$$

де $\beta_0 = \min\{1; \alpha_0\}$. Звідси випливає те, що вимагалося в другій нерівності.

Далі, оскільки $\langle J'(q), q\rangle = 0$, то

$$\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\|\dot{q}(t)\|^2 + (Aq(t), q(t))\right] dt = \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} V'_{n,m}(q_{n,m}(t)) dt.$$

Використовуючи лему 3.2, одержуємо

$$\beta_0 \|q\|_T^2 \leq \sigma\left(\|q\|_{C\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}; l^\infty\right)}\right) \|q\|_T^2.$$

Звідси, враховуючи, що $q \neq 0$, маємо

$$\beta_0 \leq \sigma\left(\|q\|_{C\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}; l^\infty\right)}\right).$$

А за теоремою вкладення

$$\beta_0 \leq \sigma\left(\|q\|_{C\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}; l^\infty\right)}\right) \leq \sigma\left(\|q\|_T\right)$$

з деяким $C > 0$. Тепер достатньо покласти

$$\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} = C^{-1} \cdot \sigma^{-1}(\beta_0)$$

і лему доведено. □

Для одержання основного результату цього розділу нам знадобиться одна проста властивість стаціонарних розв'язків. Зауважимо, що будь-який стаціонарний, що не залежить від t, розв'язок систем, які розглядалися вище, є T-періодичним для будь-якого $T > 0$. Залежно від граничних умов стаціонарні розв'язки задовольняють рівняння

$$Aq = B(q) \tag{3.15}$$

або

$$A_k q = B_k(q). \tag{3.16}$$

Зазначимо, що обмеження функціоналів J та J_k на простори сталих функцій мають вигляд $T \cdot \tilde{J}(q)$ і $T \cdot \tilde{J}_k(q)$, де

$$\tilde{J}(q) = \frac{1}{2}(Aq, q) - \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} V_{n,m}(q_{n,m}),\ q \in l^2,$$

$$\tilde{J}_k(q) = \frac{1}{2}(A_k q, q)_{l_k^2} - \sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} V_{n,m}(q_{n,m}),\ q \in l_k^2.$$

Таким чином, сталі розв'язки рівнянь (3.15) і (3.16) є критичними точками функціоналів $\tilde{J}$ та $\tilde{J}_k$ відповідно.

Зауважимо, що за виконання умов (i_3)—(iii_3) $q \equiv 0$ є тривіальним стаціонарним розв'язком рівнянь (3.1) та (3.8) відповідно.

Лема 3.7. *Нехай виконуються умови (i_3)—(iii_3). Тоді існує така стала $\delta_0 > 0$, яка не залежить від k, що для будь-якого ненульового розв'язку $q \in l_k^2$ (відповідно $q \in l^2$) рівняння (3.16) (відповідно (3.15)) $\|q\|_{l_k^2} \geq \delta_0$ (відповідно, $\|q\| \geq \delta_0$). Крім того,*

$$\tilde{J}_k(q) \geq \frac{\mu - 2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2,$$

$$\tilde{J}(q) \geq \frac{\mu - 2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2,$$

відповідно.

Доведення. Розглянемо випадок рівняння (3.16). Помноживши його скалярно на q, одержимо

$$(A_k q, q)_{l_k^2} = (B_k(q), q)_{l_k^2}.$$

За умовою (i_3) маємо

$$\alpha_0\|q\|^2_{l^2_k} \le (B_k(q), q)_{l^2_k} = \sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} V'_{n,m}(q_{n,m})q_{n,m}. \tag{3.17}$$

За лемою 3.2

$$V'_{n,m}(r)r \le \sigma(|r|)r^2, \tag{3.18}$$

де функція $\sigma(r)$, неперервна, монотонно зростає, $\sigma(0) = 0$ і $\sigma(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. З нерівностей (3.17) і (3.18) маємо $\alpha_0\|q\|^2_{l^2_k} \le \sigma\left(\|q\|_{l^2_k}\right)\|q\|^2_{l^2_k}$. Оскільки $q \ne 0$, то $\sigma\left(\|q\|_{l^2_k}\right) \ge \alpha_0 > 0$ і, отже,

$$\|q\|_{l^2_k} \ge \delta_0 = \sigma^{-1}(\alpha_0) > 0.$$

Тепер доведемо другу частину леми. Оскільки q — критична точка функціоналу $\tilde{J}_k$, то $\tilde{J}'_k(q) = 0$. Отже,

$$\tilde{J}_k(q) = \tilde{J}_k(q) - \frac{1}{\mu}\langle \tilde{J}'_k(q), q\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)(A_k q, q)_{l^2_k} -$$

$$-\sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \left[V_{n,m}(q_{n,m}) - \frac{1}{\mu}V'_{n,m}(q_{n,m})q_{n,m}\right].$$

Враховуючи умови (i_3) та (iii_3), одержуємо

$$\tilde{J}_k(q) \ge \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\|q\|^2_{l^2_k} \ge \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2,$$

що й доводить лему. □

3.3. Існування просторово-періодичних апроксимацій періодичних за часовою змінною розв'язків

У цьому підрозділі доводиться існування просторово-періодичних апроксимацій T-періодичних розв'язків рівняння (3.1), тобто T-періодичних розв'язків рівняння (3.8). Для побудови шуканих розв'язків, згідно леми 3.5, достатньо знайти нетривіальні критичні точки функціоналу J_k у просторі $X_{T,k}$. З цією метою буде використана теорема про гірський перевал (Теорема B.1).

Перевіримо виконання умов теореми про гірський перевал для функціоналу J_k. Почнемо з умови Пале-Смейла.

Лема 3.8. *Нехай виконуються умови* (i_3)*–*(iii_3)*. Тоді функціонал* J_k *задовольняє умову Пале–Смейла.*

Доведення. Нехай $\{u^{(j)}\} \subset X_{T,k}$ така послідовність, що $J_k(u^{(j)}) \le C$ і $J_k'(u^{(j)}) \to 0$ при $j \to \infty$. Покажемо, що $\{u^{(j)}\}$ містить збіжну підпослідовність.

Справді, маємо

$$J_k(u^{(j)}) - \frac{1}{\mu}\langle J_k'(u^{(j)}), u^{(j)}\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\|u^{(j)}(t)\|^2_{l^2_k} + (A_k u^{(j)}(t), u^{(j)}(t))_{l^2_k}\right] dt -$$

$$- \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \left[V_{n,m}(u^{(j)}_{n,m}(t)) - \frac{1}{\mu} V'_{n,m}(u^{(j)}_{n,m}(t)) u^{(j)}_{n,m}(t)\right] dt \ge$$

$$\ge \frac{\mu - 2}{2\mu} \beta_0 \|u^{(j)}\|^2_{T,k},$$

де $\beta_0 = \min\{1; \alpha_0\}$. Оскільки $J_k'(u^{(j)}) \to 0$, то при достатньо великому j маємо

$$\left|\langle J_k'(u^{(j)}), u^{(j)}\rangle\right| \le \mu \|u^{(j)}\|^2_{T,k}.$$

Тоді з останніх двох нерівностей одержуємо

$$\frac{\mu - 2}{2\mu} \beta_0 \|u^{(j)}\|^2_{T,k} \le C + \|u^{(j)}\|_{T,k}.$$

Остання нерівність не може виконуватися для необмеженої послідовності $\{u^{(j)}\}$ (додатний дискримінант). Отже, послідовність $\{u^{(j)}\}$ обмежена.

Але простір $X_{T,k}$ гільбертів, а послідовність $\{u^{(j)}\}$ обмежена, тому, переходячи до підпослідовності (для якої збережемо те ж саме позначення), можна вважати, що $u^{(j)} \to u$ слабко в $X_{T,k}$. Оскільки простір l^2_k скінченновимірний, то вкладення $X_{T,k} \subset C\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}; l^2_k\right)$ компактне. Тому $u^{(j)} \to u$ сильно в $C\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}; l^2_k\right)$.

Маємо

$$\langle J_k'(u^{(j)}) - J_k'(u^{(l)}), u^{(j)} - u^{(l)}\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\|u^{(j)}(t) - u^{(l)}(t)\|^2_{l^2_k} + (A_k u^{(j)}(t) - A_k u^{(l)}(t), u^{(j)}(t) - u^{(l)}(t))_{l^2_k} \right] dt -$$

$$- \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \left[V'_{n,m}(u^{(j)}_{n,m}(t)) - V'_{n,m}(u^{(l)}_{n,m}(t)) \right] \left(u^{(j)}_{n,m}(t) - u^{(l)}_{n,m}(t) \right) dt \geq$$

$$\geq \beta_0 \|u^{(j)} - u^{(l)}\|^2_{T,k} -$$

$$- \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \left[V'_{n,m}(u^{(j)}_{n,m}(t)) - V'_{n,m}(u^{(l)}_{n,m}(t)) \right] \left(u^{(j)}_{n,m}(t) - u^{(l)}_{n,m}(t) \right) dt,$$

де $\beta_0 = \min\{1; \alpha_0\}$. Таким чином, маємо

$$\beta_0 \|u^{(j)} - u^{(l)}\|^2_{T,k} \leq \langle J'_k(u^{(j)}) - J'_k(u^{(l)}), u^{(j)} - u^{(l)} \rangle +$$

$$+ \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \left[V'_{n,m}(u^{(j)}_{n,m}(t)) - V'_{n,m}(u^{(l)}_{n,m}(t)) \right] \left(u^{(j)}_{n,m}(t) - u^{(l)}_{n,m}(t) \right) dt. \quad (3.19)$$

Оскільки $J'(u^{(j)}) \to 0$ сильно, а послідовність $\{u^{(j)}\}$ обмежена, то перший доданок в правій частині (3.19) прямує до нуля при $j, l \to \infty$. Другий доданок також збігається до нуля, оскільки $u^{(j)} \to u$ сильно в $C\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}; l^2_k\right)$. Таким чином, $\|u^{(j)} - u^{(l)}\|_{T,k} \to 0$ при $j, l \to \infty$, тобто $\{u^{(j)}\}$ — послідовність Коші в $X_{T,k}$, а отже, $u^{(j)} \to u$ сильно $X_{T,k}$. Лему доведено. □

Лема 3.9. *Нехай виконуються умови* (i_3)—(iii_3). *Тоді існують такі* $r_0 > 0$ *(яке не залежить від* k*) та* $e \in X_T$ *з* $\|e\|_{T,k} > r_0$*, що*

$$\inf_{\|u\|_{T,k} = r_0} J_k(u) > 0 \quad (3.20)$$

і $J_k(e) \leq 0$.

Доведення. Згідно (iii_3), використовуючи нерівність (3.17), маємо

$$V_{n,m}(r) \leq \mu^{-1} \sigma(|r|) r^2.$$

Тоді

$$J_k(u) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\|\dot{u}(t)\|^2_{l^2_k} + (A_k u(t), u(t))_{l^2_k} \right] dt -$$

$$-\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}V_{n,m}(u_{n,m}(t))dt\geq\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[\|\dot{u}(t)\|^2_{l^2_k}+(A_ku(t),u(t))_{l^2_k}\right]dt-$$

$$-\mu^{-1}\sigma(\|u\|_{T,k})\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}|u_{n,m}(t)|^2dt.$$

Оскільки другий інтеграл в правій частині останньої нерівності більший за $\|u\|^2_{T,k}$, то, враховуючи (i_3), отримуємо

$$J_k(q)\geq\frac{\beta_0}{2}\|u\|^2_{T,k}-\mu^{-1}\sigma(\|u\|_{T,k})\|u\|^2_{T,k}=$$

$$=\left[\frac{\beta_0}{2}-\mu^{-1}\sigma(\|u\|_{T,k})\right]\|u\|^2_{T,k},$$

де $\beta_0=\min\{1,\alpha_0\}$. Виберемо r_0 так, щоб $\sigma(r_0)=\frac{\mu\beta_0}{4}$. Тоді одержуємо

$$J_k(u)\geq\frac{\beta_0}{4}r_0^2>0,$$

що й доводить (3.20).

Для доведення другої частини леми зафіксуємо ненульовий елемент $u\in X_{T,k}$. За лемою 3.1 при $\tau>0$ маємо

$$J_k(\tau u)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[\|\tau\dot{u}(t)\|^2_{l^2_k}+(A_k(\tau u(t)),\tau u(t))_{l^2_k}\right]dt-$$

$$-\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}V_{n,m}(\tau u_{n,m}(t))dt\leq$$

$$\leq\frac{\tau^2}{2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[\|\dot{u}(t)\|^2_{l^2_k}+(A_ku(t),u(t))_{l^2_k}\right]dt-$$

$$-d\tau^\mu\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}|u_{n,m}(t)|^\mu dt+Nd_0T.$$

Тоді при достатньо великому $\tau>0$, враховуючи, що $\mu>2$, маємо

$$J_k(\tau u)<0,$$

і отже, твердження леми має місце з $e=\tau u$. Лему доведено. $\square$

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови* (i_3)*–*(iii_3)*. Тоді для будь-яких* $T > 0$ *і* $k \geq 1$ *задача (2.3), (3.7) (тобто рівняння (3.8)) має нетривіальний розв'язок* $q = q^{(T,k)} \in X_{T,k}$*. Крім того, для будь-якого* $T > 0$ *існують такі додатні сталі* ε_0*,* C_0*,* ε *і* C*, які не залежать від* k*, що*

$$\varepsilon_0 \leq \|q^{(T,k)}\|_{T,k} \leq C_0, \ \varepsilon \leq J_k(q^{(T,k)}) \leq C.$$

Більше того, існує таке $T_0 > 0$*, яке не залежить від* k*, що при всіх* $T \geq T_0$ *цей розв'язок є несталою функцією від* t*.*

Доведення. З лем 3.8 і 3.9 випливає, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал (теорема В.1), а отже, він має ненульову критичну точку $q = q^{(T,k)}$, яка, згідно леми 3.5, є розв'язком рівняння (3.8). Покажемо, що при достатньо великих T цей розв'язок не є сталим.

Нехай $q^{(0)}$ — деякий сталий розв'язок. Тоді, згідно леми 3.7, для відповідного критичного значення функціоналу J маємо

$$J_k(q^{(0)}) \geq \frac{\mu - 2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2 T, \tag{3.21}$$

де δ_0 з леми 3.7.

Тепер оцінимо $J_k(q^{(T,k)})$ зверху. Нехай $u \in X_T \setminus \{0\}$. Тоді, як показано в доведенні леми 3.9, $J_k(\tau u) \leq 0$ при всіх достатньо великих $\tau > 0$. Згідно останньої нерівності в теоремі про гірський перевал (теорема В.1), для критичного значення маємо

$$J_k(q) \leq \sup_{\tau \geq 0} J_k(\tau u). \tag{3.22}$$

В якості $u(t)$ візьмемо таку функцію, що $u_{n,m} \equiv 0$ при $(n,m) \not\equiv (0,0)$, $u_{0,0} \geq \sin\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right)$ при $0 \leq t \leq \eta T$ і $u_{0,0}(t) = 0$ при $\eta T \leq t \leq T$, де $\eta \in (0,1)$ буде вибрано пізніше. Припускається, що $u_{0,0}(t)$ продовжена на всю вісь як T-періодична функція. Тоді, використовуючи лему 3.1, одержуємо

$$J_k(\tau u) = \frac{\tau^2}{2}\int\limits_0^{\eta T} \left[(\dot{u}_{0,0}(t))^2 + c_{0,0}(u_{0,0}(t))^2\right] dt - \int\limits_0^{\eta T} V_{0,0}(\tau u_{0,0}(t)) dt \leq$$

$$\leq \frac{\tau^2}{2}\int\limits_0^{\eta T}\left[\left(\frac{2\pi}{\eta T}\cos\frac{2\pi t}{\eta T}\right)^2 + c_{0,0}\left(\sin\frac{2\pi t}{\eta T}\right)^2\right]dt-$$

$$-d\tau^{\mu}\int\limits_0^{\eta T}\left|\sin\frac{2\pi t}{\eta T}\right|^{\mu}dt + d_0\eta T. \qquad (3.23)$$

Покладемо

$$A_{\mu} = \int\limits_0^1 |\sin 2\pi t|^{\mu} dt.$$

Із (3.23) випливає, що

$$J_k(\tau u) \leq \frac{\tau^2}{4}\left(\frac{4\pi^2}{\eta T} + c_{0,0}\eta T\right) - dA_{\mu}(\eta T)\tau^{\mu} + d_0\eta T.$$

Нехай $T_0 = \frac{2\pi}{\eta\sqrt{c_{0,0}}}$ і $T > T_0$. Тоді $\frac{4\pi^2}{\eta T} \leq c_{0,0}\eta T$ і

$$J_k(\tau u) \leq \frac{\tau^2}{2}c_{0,0}\eta T - dA_{\mu}\eta T\tau^{\mu} + d_0\eta T =$$

$$= \eta\left[\frac{\tau^2}{2}c_{0,0} - dA_{\mu}\tau^{\mu} + d_0\right]T.$$

Нехай

$$m_0 = \max_{\tau\geq 0}\left[\frac{\tau^2}{2}c_{0,0} - dA_{\mu}\tau^{\mu} + d_0\right].$$

Тоді, згідно (3.22),

$$J_k(q) \leq \eta m_0 T.$$

Далі вибираємо η таким, що

$$J_k(q) \leq \eta m_0 T < \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2 T \leq J_k(q^{(0)}).$$

Остання строга нерівність означає, що при $T \geq T_0$ розв'язок $q = q^{(T,k)}$ не може бути сталим. Теорему доведено. $\square$

Зауваження 3.2. *Зазначимо, що сталі η, m_0, як і α_0, δ_0, не залежать від k і T. Таким чином, для будь-яких k і $T \geq T_0$ правильна нерівність*

$$J_k(q^{(T,k)}) \leq \eta m_0 T < \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2 T, \qquad (3.24)$$

де $\eta < \frac{\mu-2}{2\mu m_0}\alpha_0\delta_0^2$.

3.4. Існування періодичних розв'язків в системах осциляторів

У цьому підрозділі доводиться основний результат третього розділу — існування T-періодичних розв'язків системи (2.3) з крайовими умовами (2.2), тобто рівняння (3.1). Розв'язки цієї задачі, за лемою 3.5, є критичними точками функціоналу J. Для цього функціоналу не виконується умова Пале–Смейла. Зауважимо, що в доведенні леми 3.8 була використана компактність відповідного соболєвського вкладення, яка відсутня у випадку функціоналу J. Таким чином, теорема про гірський перевал (теорема B.1) не може бути застосована до функціоналу J і тому розв'язки відповідної задачі будуть побудовані в інший спосіб — за допомогою переходу до границі при $k \to \infty$ у розв'язку $q = q^{(T,k)}$, побудованому у попередньому підрозділі. Для цього знадобляться наступні дві леми.

Лема 3.10. *Нехай $v^{(k)} \in l^2$, причому $\|v^{(k)}\|_{l^2}$ обмежена і $v^{(k)} \to 0$ в l^∞. Тоді для будь-якого $p > 2$ маємо $v^{(k)} \to 0$ в l^p.*

Доведення. Маємо

$$\|v^{(k)}\|_{l^p}^p = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} |v_{n,m}^{(k)}|^p = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} |v_{n,m}^{(k)}|^{p-2} |v_{n,m}^{(k)}|^2 \le$$

$$\le \left\{ \sup_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} |v_{n,m}^{(k)}| \right\}^{p-2} \cdot \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} |v_{n,m}^{(k)}|^2 = \|v^{(k)}\|_{l^\infty}^{p-2} \|v^{(k)}\|_{l^2}^2.$$

Враховуючи, що $p > 2$ і $\|v^{(k)}\|_{l^\infty} \to 0$, одержуємо те, що й вимагалося. Лему доведено. $\square$

Тепер нагадаємо, що $\|\cdot\|_{l_k^p}$ на просторі kN-періодичних послідовностей визначається рівністю

$$\|u\|_{l_k^p} = \left\{ \sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} |u_{n,m}|^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Зауважимо, що при кожному фіксованому k і різних p ці норми еквівалентні, але ця еквівалентність не є рівномірною по k.

Лема 3.11. *Нехай* $u^{(k)} \in l^2_k$, *причому* $\|u^{(k)}\|_{l^2_k}$ *обмежена і* $u^{(k)} \to 0$ *в* l^∞. *Тоді для будь-якого* $p > 2$ *маємо* $\|u^{(k)}\|_{l^p_k} \to 0$.

Доведення. Візьмемо послідовність $v^{(k)} \in l^2$, яка визначається наступним чином: $v^{(k)}_{n,m} = u^{(k)}_{n,m}$ при $-\left[\frac{kN}{2}\right] \le n, m \le kN - \left[\frac{kN}{2}\right] - 1$ і $v^{(k)}_{n,m} = 0$ в протилежному випадку. Тоді легко бачити, що

$$\|v^{(k)}\|_{l^\infty} \le \|u^{(k)}\|_{l^\infty}, \ \|v^{(k)}\|_{l^p} = \|u^{(k)}\|_{l^p_k}.$$

Таким чином, $\|v^{(k)}\|_{l^\infty} \to 0$ і $\|v^{(k)}\|_{l^2} = \|u^{(k)}\|_{l^2_k}$ обмежена. За лемою 3.10,

$$\|v^{(k)}\|_{l^p} = \|u^{(k)}\|_{l^p_k} \to 0$$

для будь-якого $p > 2$. Лему доведено. □

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема.

Теорема 3.2. *Нехай виконуються умови* (i_3)—(iii_3). *Тоді для будь-якого* $T > 0$ *рівняння (3.1) має нетривіальний* T*-періодичний розв'язок. Більше того, для достатньо великих значень* T *цей розв'язок не є сталим.*

Доведення. Крок 1. Нехай $q^{(k)}(t) = \{q^{(k)}_{n,m}(t)\}$ розв'язок $q^{(T,k)}$, побудований в теоремі 3.1. Тоді, згідно просторової періодичності, $\{q^{(k)}_{n+kN,m}(t)\} = \{q^{(k)}_{n,m+kN}(t)\}$ — також розв'язок задачі (2.3), (3.7). За теоремою 3.1 маємо

$$\varepsilon_0 \le \|q^{(k)}\|_{T,k} \le C, \tag{3.25}$$

$$\varepsilon_0 \le J_k(q^{(k)}) \le C, \tag{3.26}$$

де сталі $0 < \varepsilon_0 \le C$ не залежать від k. За теоремою вкладення, збільшуючи сталу C, маємо

$$\|q^{(k)}\|_{C\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l^2_k\right)} \le C. \tag{3.27}$$

Зокрема, для будь-яких $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$

$$\|q^{(k)}_{n,m}\|_{C\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)} \le C. \tag{3.28}$$

Доведемо тепер наступну властивість розв'язків $q^{(k)}$: для будь-якого k існує така пара $(n_k, m_k) \in \mathbb{Z}^2$, що

$$\|q^{(k)}_{n_k,m_k}\|_{C\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)} \ge \delta \tag{3.29}$$

з деяким δ, що не залежить від k. Справді, покладемо

$$u_{n,m}^{(k)} = \|q_{n,m}^{(k)}\|_{C\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)}.$$

Тоді для $u^{(k)} = \{u_{n,m}^{(k)}\}$, згідно неперервності соболєвського вкладення $H^1\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right) \subset C\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ та нерівності (3.25), маємо

$$\|u^{(k)}\|_{l_k^2}^2 = \sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \|q_{n,m}^{(k)}\|_{C\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)}^2 \le C_1^2 \sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \|q_{n,m}^{(k)}\|_{H^1\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)}^2 =$$
$$= C_1^2\|q^{(k)}\|_{T,k}^2 \le C_1^2C^2$$

з деяким C_1, яке не залежить від k. Таким чином, $\|u^{(k)}\|_{l_k^2}$ обмежена. Нерівність (3.29) означає, що $u^{(k)} \ge \delta$ з деякими номерами n_k і m_k. Припустимо, що остання нерівність не виконується. Тоді $\|u^{(k)}\|_{l^\infty} \to 0$ і, отже, згідно леми 3.11, $\|u^{(k)}\|_{l_k^p} \to 0$ для будь-якого $p > 2$. Однак

$$\|u^{(k)}\|_{l_k^p}^p = \sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \|q_{n,m}^{(k)}\|_{C\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)}^p.$$

Оскільки вкладення $C\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right) \subset L^p\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ неперервне, то звідси випливає, що

$$\|u^{(k)}\|_{l_k^p}^p \ge C_2 \sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \|q_{n,m}^{(k)}\|_{L^p\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)}^p = C_2\|q^{(k)}\|_{L^p\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l_k^p\right)}^p.$$

Звідси випливає, що

$$\|q^{(k)}\|_{L^p\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l_k^p\right)}^p \to 0 \tag{3.30}$$

при $k \to \infty$.

Зафіксуємо тепер довільне $p > 2$. Покажемо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така стала $M = M(\varepsilon) > 0$, що

$$|V_{n,m}'(r)| \le \varepsilon|r| + M|r|^{p-1}, |r| \le C. \tag{3.31}$$

Справді, за умовою (ii_3),

$$|V_{n,m}'(r)| \le \varepsilon|r|, |r| \le r_\varepsilon,$$

з деяким $r_\varepsilon > 0$. При $r_\varepsilon \le |r| \le C$ маємо

$$|V_{n,m}'(r)| \le M|r|^{p-1},$$

де

$$M=\max_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\sup_{r_\varepsilon\le|r|\le C}\frac{|V'_{n,m}(r)|}{|r|^{p-1}}.$$

Звідси й випливає (3.31).

Оскільки $q^{(k)}$ — критична точка функціоналу J_k, то

$$\langle J'_k(q^{(k)}),q^{(k)}\rangle=\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[\|\dot q^{(k)}(t)\|^2_{l^2_k}+(A_kq^{(k)}(t),q^{(k)}(t))_{l^2_k}\right]dt-$$

$$-\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))dt=0.$$

Звідси, використовуючи (3.31) та (3.28), одержуємо

$$\beta_0\|q^{(k)}\|^2_{T,k}\le\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[\|\dot q^{(k)}(t)\|^2_{l^2_k}+(A_kq^{(k)}(t),q^{(k)}(t))_{l^2_k}\right]dt=$$

$$=\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))dt\le$$

$$\le\varepsilon\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|q^{(k)}_{n,m}(t)|^2dt+M\sum_{n,m=-[\frac{kN}{2}]}^{kN-[\frac{kN}{2}]-1}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|q^{(k)}_{n,m}(t)|^pdt=$$

$$=\varepsilon\|q^{(k)}\|^2_{L^2\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l^2_k\right)}+M\|q^{(k)}\|^p_{L^p\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l^p_k\right)}\le$$

$$\le\varepsilon\|q^{(k)}\|^2_{T,k}+M\|q^{(k)}\|^p_{L^p\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l^p_k\right)}.$$

Взявши $\varepsilon=\frac{\beta_0}{2}$, одержуємо, що

$$\frac{\beta_0}{2}\|q^{(k)}\|^2_{T,k}\le M\|q^{(k)}\|^p_{L^p\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l^p_k\right)}.$$

Звідси, згідно (3.30), випливає, що $\|q^{(k)}\|^2_{T,k}\to0$ при $k\to\infty$. Але це суперечить першій нерівності в (3.25). Одержана суперечність і доводить властивість (3.29).

Крок 2. Замінюючи, якщо потрібно, $q^{(k)}_{n,m}$ на $q^{(k)}_{n+aN,m+bN}$ з деякими $a,b\in\mathbb{Z}$ (кратними k), можна вважати, що в (3.29) $0\le n_k,m_k\le N-1$. Однак таких значень n_k і m_k скінченне число. Тому, переходячи до підпослідовності (по k), можна вважати, що всі пари (n_k,m_k) співпадають, тобто $(n_k,m_k)=(n_0,m_0)$.

Тоді

$$\|q^{(k)}_{n_0,m_0}\|_{C\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)} \geq \delta > 0. \tag{3.32}$$

Враховуючи нерівність (3.25) і компактність вкладення $H^1\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right) \subset C\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$, можна вважати, переходячи до підпослідовності (по k), що для будь-яких $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ існує таке $q_{n,m} \in H^1\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$, що $q^{(k)}_{n,m} \to q_{n,m}$ слабко в $H^1\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ і сильно в $C\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$. Покладемо $q = \{q_{n,m}\}$. Переходячи в (3.32) до границі при $k \to \infty$, одержуємо

$$\|q_{n_0,m_0}\|_{C\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)} \geq \delta > 0,$$

тобто $q \neq 0$. Далі, згідно (3.25), для будь-якого натурального l і достатньо великого k,

$$\sum_{|n|,|m|\leq l} \|q^{(k)}_{n,m}\|^2_{H^1\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)} \leq \sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \|q^{(k)}_{n,m}\|^2_{H^1\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)} = \|q^{(k)}\|^2_{T,k} \leq C^2.$$

Переходячи до границі при $k \to \infty$ та враховуючи слабку напівнеперервність знизу норми в H^1, одержуємо

$$\sum_{|n|,|m|\leq l} \|q_{n,m}\|^2_{H^1\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)} \leq C^2.$$

Наступний перехід до границі при $l \to \infty$ показує, що $\|q\|_T \leq C < \infty$ і $q \in X_T$.

Крок 3. Покажемо тепер, що q — критична точка функціоналу J, тобто

$$\langle J'(q), h\rangle = 0 \tag{3.33}$$

для будь-якого $h \in X_T$. Оскільки множина таких функцій $h = \{h_{n,m}\}$, що $h_{n,m} = 0$ для всіх $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, окрім скінченної кількості номерів, всюди щільна в X_T, то рівність (3.33) достатньо перевірити тільки для таких функцій.

Нехай $h = \{h_{n,m}\} \in X_T$ така, що $h_{n,m} = 0$ при $|n|, |m| \geq l$. Для достатньо великого k коректно визначена така функція $h^{(k)} \in X_{T,k}$, що $h^{(k)}_{n,m} = h_{n,m}$ при $-\left[\frac{kN}{2}\right] \leq n, m \leq \left[\frac{kN}{2}\right]$. Оскільки $q^{(k)}$ — критична точка функціоналу J_k, то

$$0=\langle J_k'(q^{(k)}),h^{(k)}\rangle=\sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\dot q^{(k)}_{n,m}(t)\dot h^{(k)}_{n,m}(t)dt+$$

$$+\sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\Big[a_{n-1,m}q^{(k)}_{n-1,m}(t)+a_{n,m}q^{(k)}_{n+1,m}(t)+b_{n,m-1}q^{(k)}_{n,m-1}(t)+$$

$$+b_{n,m}q^{(k)}_{n,m+1}(t)+c_{n,m}q^{(k)}_{n,m}(t)\Big]\,h^{(k)}_{n,m}(t)dt-$$

$$-\sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))h^{(k)}_{n,m}(t)dt.$$

Сумування в правій частині останньої рівності, згідно означення $h^{(k)}$, при достатньо великому k поширюється, фактично, на область $|n|,|m|\le l$, і ми одержуємо

$$\sum_{|n|,|m|\le l}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\dot q^{(k)}_{n,m}(t)\dot h^{(k)}_{n,m}(t)dt+\sum_{|n|,|m|\le l}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\Big[a_{n-1,m}q^{(k)}_{n-1,m}(t)+a_{n,m}q^{(k)}_{n+1,m}(t)+$$

$$+b_{n,m-1}q^{(k)}_{n,m-1}(t)+b_{n,m}q^{(k)}_{n,m+1}(t)+c_{n,m}q^{(k)}_{n,m}(t)\Big]\,h^{(k)}_{n,m}(t)dt-$$

$$-\sum_{|n|,|m|\le l}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))h^{(k)}_{n,m}(t)dt=0.$$

Оскільки $q^{(k)}_{n,m}\to q_{n,m}$ слабко в $H^1\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ і сильно в $C\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$, то в останній рівності можна перейти до границі при $k\to\infty$. В результаті отримуємо

$$\sum_{|n|,|m|\le l}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\dot q_{n,m}(t)\dot h_{n,m}(t)dt+\sum_{|n|,|m|\le l}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}[a_{n-1,m}q_{n-1,m}(t)+a_{n,m}q_{n+1,m}(t)+$$

$$+b_{n,m-1}q_{n,m-1}(t)+b_{n,m}q_{n,m+1}(t)+c_{n,m}q_{n,m}(t)]\,h_{n,m}(t)dt-$$

$$-\sum_{|n|,|m|\le l}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))h_{n,m}(t)dt=0.$$

При зробленому виборі h це і є рівність (3.33). Отже, функціонал J має нетривіальну критичну точку $q\in X_T$, яка за лемою 3.5 є T-періодичним розв'язком рівняння (3.1).

Крок 4. Тепер залишається лише перевірити, що q не може бути сталою для достатньо великих T. Справді, для $q^{(k)}$ маємо

$$J_k(q^{(k)}) = J_k(q^{(k)}) - \frac{1}{2}\langle J_k(q^{(k)}), q^{(k)}\rangle =$$

$$= \sum_{n,m=-\left[\frac{kN}{2}\right]}^{kN-\left[\frac{kN}{2}\right]-1} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{2}V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))q^{(k)}_{n,m}(t) - V_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))\right] dt.$$

Згідно (iii_3), всі доданки в правій частині останньої рівності невід'ємні. Тому для довільного фіксованого l і достатньо великого k маємо

$$J_k(q^{(k)}) \geq \sum_{|n|,|m|\leq l} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{2}V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))q^{(k)}_{n,m}(t) - V_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))\right] dt.$$

Звідси, згідно зауваження 3.2, випливає, що

$$\sum_{|n|,|m|\leq l} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{2}V'_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))q^{(k)}_{n,m}(t) - V_{n,m}(q^{(k)}_{n,m}(t))\right] dt \leq \eta m_0 T < \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2 T$$

при достатньо малому η і $T \geq T_0 = \frac{2\pi}{\eta\sqrt{c_{0,0}}}$ (див. доведення теореми 3.1). Оскільки для будь-яких $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ маємо, що $q^{(k)}_{n,m} \to q_{n,m}$ в $C\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$, то переходячи в останніх нерівностях до границі при $k \to \infty$, одержуємо

$$\sum_{|n|,|m|\leq l} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{2}V'_{n,m}(q_{n,m}(t))q_{n,m}(t) - V_{n,m}(q_{n,m}(t))\right] dt \leq \eta m_0 T < \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2 T.$$

Але $J'(q) = 0$, тому ліва частина цих нерівностей дорівнює

$$J(q) - \frac{1}{2}\langle J'(q), q\rangle = J(q).$$

Отже,

$$J(q) \leq \eta m_0 T < \frac{\mu-2}{2\mu}\alpha_0\delta_0^2 T. \tag{3.34}$$

Однак за лемою 3.7 для будь-якого ненульового сталого розв'язку $q^{(0)}$ відповідне критичне значення $J(q^{(0)})$ не менше правої частини (3.34). Звідси, як і в доведенні теореми 3.1, робимо висновок, що розв'язок q не може бути сталим при $T \geq T_0$. Теорему доведено. □

3.5. Побудова періодичних розв'язків у випадку степеневих потенціалів

У цьому підрозділі покажемо, що T-періодичні розв'язки системи (2.3) зі степеневими потенціалами вигляду

$$V_{n,m}(r) = \frac{g_{n,m}}{p}|r|^p, \tag{3.35}$$

де $g_{n,m} > 0, p > 2$, можуть бути побудовані за допомогою методу умовної мінімізації.

У даному випадку система (2.3) набуває вигляду

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = a_{n-1,m}q_{n-1,m}(t) + a_{n,m}q_{n+1,m}(t) + b_{n,m-1}q_{n,m-1}(t) + b_{n,m}q_{n,m+1}(t)+$$
$$+c_{n,m}q_{n,m}(t) - g_{n,m}|q_{n,m}(t)|^{p-2}q_{n,m}(t),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{3.36}$$

де $c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}$. Як і вище, зробимо припущення:

(i_3') *існує таке* $N \in \mathbb{N}$, *що коефіцієнти* $a_{n,m}, b_{n,m}, d_{n,m}$ *і* $g_{n,m}$ *є* N*-періодичними, тобто* $a_{n+N,m} = a_{n,m+N} = a_{n,m}$, $b_{n+N,m} = b_{n,m+N} = b_{n,m}$, $d_{n+N,m} = d_{n,m+N} = d_{n,m}$, $g_{n+N,m} = g_{n,m+N} = g_{n,m}$, *і* A *— додатно визначений оператор в* l^2, *тобто існує таке* $\alpha_0 > 0$, *що*

$$(Aq, q) \geq \alpha_0 \|q\|^2,\ q \in l^2.$$

При цьому систему (3.36) також можна розглядати у просторі l^2 як диференціально-операторне рівняння вигляду (3.1) з обмеженим самоспряженим лінійним оператором

$$(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m},$$

і обмеженим неперервним нелінійним оператором

$$(B(q))_{n,m} = g_{n,m}|q_{n,m}|^{p-2}q_{n,m}.$$

Неважко переконатися в тому, що функція $V_{n,m}(r) = \frac{g_{n,m}}{p}|r|^p$ задовольняє умови (ii_3) та (iii_3).

Таким чином, в зроблених припущеннях умови (i_3)—(iii_3) виконуються, а отже, задача (3.36), (2.2) має ненульовий T-періодичний розв'язок.

Надалі розв'язки задачі (3.36), (2.2) розуміються в слабкому сенсі. А саме, функція $q(t)$ зі значенням в l^2, називається *розв'язком*, якщо $q \in H^1(a,b;l^2)$ (тобто $q \in L^2(a,b;l^2)$ і має слабку похідну $\dot{q} \in L^2(a,b;l^2)$) та виконується інтегральна тотожність

$$\int_a^b [(\dot{q}(t), \dot{v}(t)) + (Aq(t), v(t)) - (B(q(t)), v(t))]\, dt = 0 \tag{3.37}$$

для будь-якої функції $v \in C_0^\infty(a,b;l^2)$, або еквівалентно, для будь-якої функції $v \in H_0^1(a,b;l^2)$, тобто $v \in H^1(a,b;l^2)$ і $v(a) = v(b) = 0$. Нагадаємо, що будь-яка функція із $H^1(a,b;l^2)$ абсолютно неперервна на $[a,b]$. Функція $q(t)$ є слабким розв'язком на $\mathbb{R}$, якщо вона є слабким розв'язком на будь-якому скінченному інтервалі. Як випливає із леми 3.5, слабкі розв'язки є розв'язками в класичному сенсі.

У випадку, що розглядається, функціонал J має вигляд

$$J(q) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|^2 + \frac{1}{2}(Aq(t), q(t)) - \frac{1}{p}\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} g_{n,m}|q_{n,m}(t)|^p\right] dt. \tag{3.38}$$

Функціонал J неперервно диференційовний за Фреше (а отже, і за Гато) і

$$\langle J'(q), h\rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Big[(\dot{q}(t), \dot{h}(t)) + (Aq(t), h(t)) - (B(q(t)), h(t))\Big]\, dt, \tag{3.39}$$

для будь-якого $h \in X_T$. Лема 3.5 показує, що критичні точки функціоналу J в просторі X_T є шуканими розв'язками.

Подамо функціонал J у вигляді

$$J(q) = \Psi(q) - S(q),$$

де

$$\Psi(q) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|^2 + \frac{1}{2}(Aq(t), q(t))\right] dt,$$

$$S(q) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{p}\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} g_{n,m}|q_{n,m}(t)|^p\right] dt.$$

Далі ми використаємо підхід (див. [140]), що ґрунтується на наступній задачі мінімізації з обмеженнями. Для будь-якого $\theta > 0$ розглянемо задачу умовної мінімізації:

$$\text{\textit{знайти} } u \in X_T, \text{ \textit{для якого існує} } \inf_{q \in X_T} \{\Psi(q) : \ S(q) = \theta\} =: I_\theta. \tag{3.40}$$

Виявляється, як буде показано нижче, ця задача має розв'язки для будь-яких $\theta > 0$ і $T > 0$.

Наступні дві теореми є основними результатами цього підрозділу.

Теорема 3.3. *Нехай виконується умова* (i_3') *та* u *— розв'язок задачі (3.40). Тоді існує таке* $\lambda > 0$*, що* $q = \lambda^{\frac{1}{p-2}} u$ *є* T*-періодичним розв'язком задачі (3.36), (2.2).*

Доведення. Нехай для деякого $\theta > 0$ задача (3.40) має розв'язок і $u \in X_T$ — відповідна точка мінімуму. Оскільки функціонали Ψ та S неперервно диференційовні, то існує таке $\lambda \in \mathbb{R}$ (множник Лагранжа), що

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Big[(\dot{u}(t), \dot{h}(t)) + (Au(t), h(t))\Big]\, dt =$$

$$= \lambda \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} g_{n,m} |u_{n,m}(t)|^{p-2} u_{n,m}(t) h_{n,m}(t) \right] dt \tag{3.41}$$

для будь-якого $h \in X_T$. Підстановка $h = u$ показує, що $\lambda > 0$, оскільки в цьому випадку обидва інтеграли в (3.41) додатні. Більше того, при $h = u$ ліва частина в (3.41) рівна $2I_\theta$, а інтеграл в правій частині рівний $p\theta$. Звідси

$$\lambda = \frac{2I_\theta}{p\theta}.$$

Підставляючи $u = \lambda^{-\frac{1}{p-2}} q$ в тотожність (3.41), одержуємо,

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \Big[(\dot{q}(t), \dot{h}(t)) + (Aq(t), h(t))\Big]\, dt =$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} g_{n,m} |q_{n,m}(t)|^{p-2} q_{n,m}(t) h_{n,m}(t) \right] dt$$

для будь-якого $h \in X_T$. А це означає, що $q = \lambda^{\frac{1}{p-2}} u \in X_T$ — T-періодичний розв'язок задачі (3.36), (2.2). Теорему доведено. □

Тепер перейдемо до дослідження задачі (3.40).

Лема 3.12. *Задачі (3.40) при різних θ еквівалентні, причому*

$$I_\theta = \theta^{\frac{2}{p}} I_1. \tag{3.42}$$

Доведення. Зауважимо спочатку, що $\Psi(sq) = s^2\Psi(q)$ та $S(sq) = s^p S(q)$ для будь-якого $s > 0$. Покладемо $q = \theta^{\frac{1}{p}} v$, тоді $\Psi(q) = \theta^{\frac{2}{p}}\Psi(v)$ і $S(q) = \theta S(v)$. Тоді

$$I_\theta = \inf_{q\in X_T}\{\Psi(q):\ S(q) = \theta\} =$$
$$= \inf_{v\in X_T}\left\{\theta^{\frac{2}{p}}\Psi(v):\ \theta S(v) = \theta\right\} = \theta^{\frac{2}{p}} I_1.$$

Лему доведено. □

Теорема 3.4. *Нехай виконується умова (i_3'). Тоді для будь-якого $T > 0$ задача (3.40) має розв'язок $u \in X_T$. Більше того, для достатньо великих значень T цей розв'язок не є сталим.*

Доведення. Крок 1. Нехай $\{w^{(j)}\}$ довільна мінімізуюча послідовність задачі (3.40), тобто $w^{(j)} = \{w^{(j)}_{n,m}(t)\} \in X_T$, $S(w^{(j)}) = \theta$ і $\Psi(w^{(j)}) \to I_\theta$. При цьому можна вважати, що $\Psi(w^{(j)}) \le 2I_\theta$. За умовою (i_3'),

$$\Psi(q) \ge \frac{\beta_0}{2}\|q\|_T^2,$$

де $\beta_0 = \min\{1, \alpha_0\}$. Тому існує така стала $C > 0$, яка залежить тільки від α_0, що

$$\|w^{(j)}\|_T^2 \le C I_\theta. \tag{3.43}$$

Покладемо

$$v^{(j)}_{n,m} = \frac{1}{p}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g_{n,m}|w^{(j)}_{n,m}(t)|^p dt,$$
$$v^{(j)} = \{v^{(j)}_{n,m}\}.$$

Оскільки $H^1\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ неперервно вкладений в $L^p\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ (зі сталою, що не залежить від T), то із нерівності (3.43) випливає, що

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} (v^{(j)}_{n,m})^{\frac{2}{p}} \le C \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \|w^{(j)}_{n,m})\|^2_{L^p\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)} \le C\|w^{(j)}\|_T^2 \le C I_\theta. \tag{3.44}$$

Крім того,

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} v^{(j)}_{n,m} = \|v^{(j)}\|_{l^1} = S(v^{(j)}) = \theta > 0. \tag{3.45}$$

Далі до послідовності $\{v^{(j)}\}$ застосуємо лему Г.2. Після переходу до підпослідовності (з тим самим позначенням) має виконуватися одна із можливостей (i)—(iii).

Крок 2. Розпливання (можливість (ii)) не може виконуватися. Справді, якщо $\|v^{(j)}\|_{l^\infty} \to 0$, при $j \to \infty$, то із (3.44) випливає, що

$$\|v^{(j)}\|_{l^1} = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} [v^{(j)}_{n,m}]^{1-\frac{2}{p}} [v^{(j)}_{n,m}]^{\frac{2}{p}} \le \sup_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} [v^{(j)}_{n,m}]^{1-\frac{2}{p}} [v^{(j)}_{n,m}]^{\frac{2}{p}} \le$$
$$\le [v^{(j)}_{n,m}]^{1-\frac{2}{p}} C I_\theta.$$

Припустимо тепер, що виконується розщеплення (властивість (iii)). Визначимо $w^{(j,1)}$, $w^{(j,2)} \in X_T$ наступним чином. Нехай $u^{(j,1)}_{n,m} = w^{(j)}_{n,m}$ при $(n,m) \in \operatorname{supp}\{v^{j,i}\}$ та $u^{(j,i)}_{n,m} = 0$ у протилежному випадку $(i = 1, 2)$. Неважко перевірити, що

$$S(u^{(j,i)}) = \sum_{(n,m)\in \operatorname{supp}\{v^{j,i}\}} v^{(j)}_{n,m}$$

і, отже,

$$\lim_{j\to\infty} S(u^{(j,1)}) = \alpha, \ \lim_{j\to\infty} S(u^{(j,2)}) = \theta - \alpha.$$

Покладемо

$$s^{(j)}_1 = \left(\frac{\alpha}{S(u^{(j,1)})}\right)^{\frac{1}{p}}, \ s^{(j)}_2 = \left(\frac{\theta-\alpha}{S(u^{(j,2)})}\right)^{\frac{1}{p}}$$

і

$$w^{(j,i)} = s^{(j)}_i u^{(j,i)}.$$

Тоді із (iii) випливає, що

$$\lim_{j\to\infty} \|w^{(j)} - (w^{(j,1)} + w^{(j,2)})\|_T = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{j\to\infty} \|\Psi(w^{(j)}) - \Psi(w^{(j,1)} + w^{(j,2)})\|_T = 0. \tag{3.46}$$

Оскільки носії $\{w^{(j,1)}\}$ і $\{w^{(j,2)}\}$ не перетинаються, то

$$\Psi(w^{(j,1)} + w^{(j,2)}) = \Psi(w^{(j,1)}) + \Psi(w^{(j,2)}) \ge I_\alpha + I_{\theta-\alpha}.$$

З іншого боку, із (3.46) випливає, що

$$\lim_{j\to\infty}\Psi(w^{(j,1)}+w^{(j,2)})=I_\theta.$$

Отже,

$$I_\theta \geq I_\alpha + I_{\theta-\alpha}.$$

Однак $I_\theta=\theta^{\frac{2}{p}}I_1$, $p>2$, $\theta>0$ і $\alpha\in(0,\theta)$. Легко бачити, що функція $f(x)=x^{\frac{2}{p}}+(1-x)^{\frac{2}{p}}$ на відрізку $[0,1]$ досягає мінімуму на кінцях відрізка, який дорівнює 1, а отже, $f(x)>1$ для всіх $x\in(0,1)$. Тепер поклавши $x=\frac{\alpha}{\theta}$, маємо, що $\theta^{\frac{2}{p}}<\alpha^{\frac{2}{p}}+(\theta-\alpha)^{\frac{2}{p}}$. Звідси, одержуємо

$$I_\theta < I_\alpha + I_{\theta-\alpha}.$$

Одержана суперечність показує, що твердження (iii) не може виконуватися.

Крок 3. Отже, для послідовності $\{v^{(j)}\}$ має місце (i) (концентрація). Зауважимо, що згідно умов періодичності,

$$\Psi\left(\{u_{n+N,m}(t)\}\right)=\Psi\left(\{u_{n,m+N}(t)\}\right)=\Psi\left(\{u_{n,m}(t)\}\right),$$

$$S\left(\{u_{n+N,m}(t)\}\right)=S\left(\{u_{n,m+N}(t)\}\right)=S\left(\{u_{n,m}(t)\}\right).$$

Тому, замінюючи $\{w^{(j)}_{n,m}(t)\}$ на $\{w^{(j)}_{n+a_jN,m+b_jN}(t)\}$ з деякими $a_j,b_j\in\mathbb{Z}$, можна вважати, що в твердженні (i) $(n_j,m_j)=(0,0)$, тобто для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $r>0$, що

$$\sum_{|n-n_j|^2+|m-m_j|^2>r^2} v^{(j)}_{n,m}\leq\varepsilon.$$

Оскільки $g_{n,m}>0$ — періодична послідовність, то остання нерівність означає, що для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $C>0$, що

$$\sum_{|n-n_j|^2+|m-m_j|^2>r^2}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|w^{(j)}_{n,m}(t)|^p dt\leq C\varepsilon. \tag{3.47}$$

Згідно (3.43), послідовність $\{w^{(j)}\}$ обмежена в X_T. Переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), можна вважати, що $w^{(j)}\to u=\{u_{n,m}\}$ слабко в X_T. Оскільки X_T неперервно вкладений в $L^p\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2};l^p\right)$, то $w^{(j)}\to u$ слабко і в останньому просторі. Крім того, $H^1\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$ компактно вкладений в $L^p\left(-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right)$. Тому, переходячи до підпослідовності, можна вважати, що $w_{n,m}^{(j)} \to u_{n,m}$ сильно в $L^p\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ для будь-яких $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$. Крім того, із рівності $S(w^{(j)}) = \theta$ випливає, що $\{w^{(j)}\}$ обмежена послідовність в $L^p\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}; l^p\right)$. Разом зі збіжністю $w_{n,m}^{(j)} \to u_{n,m}$ і (3.47) це дає сильну збіжність $w^{(j)} \to u$ в $L^p\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}; l^p\right)$. Разом з неперервністю S на $L^p\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}; l^p\right)$ це показує, що $S(u) = \theta$. Оскільки Ψ — неперервний квадратичний додатно визначений функціонал, то він слабко напівнеперервний знизу. Звідси випливає, що

$$I_\theta \le \Psi(u) \le \lim_{j\to\infty} \Psi(w^{(j)}) = I_\theta.$$

Таким чином, $\Psi(u) = I_\theta$ і, отже, u — розв'язок задачі (3.40).

Крок 4. Доведемо, що при достатньо великих T цей розв'язок не сталий. Припустимо, що $u = \{u_{n,m}\}$ — сталий розв'язок задачі (3.40). Тоді

$$0 < \theta = S(u) = \frac{1}{p} \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} g_{n,m}|u_{n,m}|^p T.$$

Звідси $\theta \le C\|u\|_{l^p}^p T$ або $\|u\|_{l^p}^p \ge C_0 \theta T^{-\frac{1}{p}}$. Тоді

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}(Au, u)T \ge \frac{\alpha_0}{2}\|u\|_{l^2}^2 T \ge \frac{\alpha_0 (C_0\theta)^2}{2} T^{1-\frac{2}{p}}. \tag{3.48}$$

З іншого боку, нехай $v = \{v_{n,m}\}$ таке, що $v_{n,m}(t) \equiv 0$ при $(n,m) \neq (0,0)$, $v_{0,0}(t) = \lambda \sin\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right)$ при $0 \le t \le \eta T$, $v_{0,0}(t) = 0$ при $\eta T < t < T$ і $v_{0,0}$ продовжена на всю вісь як T-періодична функція $(0 < \eta < 1)$. Сталу λ виберемо з умови $S(v) = \theta$. Маємо

$$S(v) = \frac{g_{0,0}}{p} \int_0^T \left|\lambda \sin\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right)\right| dt = g_{0,0} p^{-1} (\eta T) \lambda^p A_p = \theta,$$

де $A_p = \int\limits_0^1 |\sin 2\pi t|^p dt$. Звідси

$$\lambda = \left(g_{0,0} p^{-1} \theta^{-1} \eta T A_p\right)^{-\frac{1}{p}}.$$

Далі, враховуючи, що

$$\int_0^1 \cos^2 2\pi t dt = \int_0^1 \sin^2 2\pi t dt = A_2,$$

маємо

$$2\Psi(v) = \lambda^2 \int\limits_0^{\eta T} \left[\left(\frac{2\pi}{\eta T} \cos\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right) \right)^2 + c_{0,0} \sin^2\left(\frac{2\pi t}{\eta T}\right) \right] dt =$$

$$= \lambda^2 A_2 \left(\frac{4\pi^2}{\eta T} + c_{0,0}\eta T \right) = A_2 \left(g_{0,0} p^{-1}\theta^{-1} A_p \right)^{-\frac{2}{p}} (\eta T)^{1-\frac{2}{p}} \left(4\pi^2 (\eta T)^{-2} + c_{0,0} \right).$$

Зауважимо, що згідно умови (i_3'), $c_{0,0} \geq \alpha_0 > 0$. Тепер виберемо $\eta \in (0,1)$ таким чином, щоб

$$A_2 c_{0,0} \left(g_{0,0} p^{-1}\theta^{-1} A_p \right)^{-\frac{2}{p}} \eta^{1-\frac{2}{p}} < \alpha_0 (C_0\theta)^2.$$

Тоді, враховуючи (3.48), при достатньо великих T маємо:

$$\Psi(v) \leq \frac{1}{2} A_2 c_{0,0} \left(g_{0,0} p^{-1}\theta^{-1} A_p \right)^{-\frac{2}{p}} \eta^{1-\frac{2}{p}} T^{1-\frac{2}{p}} < \frac{\alpha_0 (C_0\theta)^2}{2} T^{1-\frac{2}{p}} \leq \Psi(u),$$

тобто

$$\Psi(v) < \Psi(u).$$

А це означає, що u не може бути розв'язком задачі мінімізації (3.40). Теорему доведено. □

Приклад 3.1. *Розглянемо дискретні рівняння типу Клейна-Ґордона*

$$\ddot{q}_{n,m} = a\Delta q_{n,m} + c q_{n,m} - d|q_{n,m}|^{p-2} q_{n,m}, \ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{3.49}$$

з $a \neq 0$, $d > 0$, $p > 2$ *і крайовими умовами на нескінченності*

$$\lim_{n,m \to \pm\infty} q_{n,m} = 0. \tag{3.50}$$

Потенціал $V_{n,m}(r) = \frac{d}{p}|r|^p$ задовольняє умову (iii_3). Тут Δ — двовимірний дискретний оператор Лапласа. Як відомо,

$$-8\|q\|^2 \leq (\Delta q, q) \leq 0.$$

Тому для оператора $A = a\Delta + c$ маємо

$$(Aq,q) \geq (-8a + c)\|q\|^2 \text{ при } a > 0$$

та

$$(Aq,q) \geq c\|q\|^2 \text{ при } a < 0.$$

Отже, оператор A додатно визначений при $0 < a < \frac{c}{8}$ або при $a < 0 < c$ Тоді в обох випадках теорема 3.2 (так само як і теорема 3.4) показує, що для будь-якого достатньо великого $T > 0$ задача (3.49), (3.50) має несталий T-

періодичний розв'язок, який можна побудувати за допомогою методу умовної мінімізації.

Таким чином, у цьому розділі результати статей [140, 142] (див. також [143]) поширено на випадок двовимірної ґратки. Для подібних систем на двовимірній ґратці є лише одна стаття [115], в якій за допомогою варіаційного методу доведено існування періодичних розв'язків у скінченній системі типу ФПУ на двовимірній ґратці. Зауважимо, що в статтях [7, 8, 81] вивчались періодичні розв'язки в однорідних ланцюгах осциляторів зі слабким зв'язком та зовнішніми потенціалами, які задовольняють умови $V'(0) = 0$, $V''(0) = \omega_0^2 > 0$.

Висновки до розділу 3

Третій розділ дисертації присвячений періодичним за часом розв'язкам у нескінченних системах нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Він складається з п'яти підрозділів. У першому підрозділі наводиться формулювання задачі про періодичні розв'язки та основні припущення. Основними умовами в даному розділі є просторова періодичність системи осциляторів з періодом N, додатність оператора лінійної взаємодії осциляторів та умова типу Амброзетті–Рабіновіца, яка накладається на нелінійність.

У другому підрозділі наводиться варіаційне формулювання задачі. Розглядаються деякі функціонали J та J_k, критичні точки яких є T-періодичними розв'язками відповідних задач. Другий підрозділ містить також деякі допоміжні відомості про стаціонарні розв'язки, тобто про розв'язки, що не залежать від часу.

У третьому підрозділі доводиться існування T-періодичних розв'язків, що задовольняють умову просторової періодичності (випадок функціоналу J_k). Для цього використано теорему про гірський перевал, важливою умовою в якій є так звана умова Пале-Смейла, яку задовольняє функціонал J_k. Дана задача використовується як допоміжна для отримання періодичних розв'язків вихідної задачі (випадок функціоналу J).

У четвертому підрозділі отримано результат про існування T-періодичних розв'язків, які не є сталими для достатньо великих T. Зауважимо, що функціонал J не задовольняє умову Пале–Смейла, тому теорему про гірський перевал використати не можна. У даному випадку розв'язки шукаються як границя критичних точок функціоналу J_k. Цей метод відомий як метод періодичних апроксимацій.

У випадку степеневої потенціальної функції для отримання періодичних розв'язків використано метод умовної мінімізації (п'ятий підрозділ). Розглянуто відповідну задачу мінімізації для квадратичної частини функціоналу J, розв'язки якої, помножені на деяку сталу, і є шуканими періодичними розв'язками вихідної задачі. Для доведення існування розв'язків даної задачі умовної мінімізації використано дискретний варіант принципу концентрованої компактності. Наведено приклад, в якому встановлені вище результати застосовуються до системи

$$\ddot{q}_{n,m} = a\Delta q_{n,m} + cq_{n,m} - d|q_{n,m}|^{p-2}q_{n,m},\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2.$$

Результати даного розділу опубліковано в працях [146, 162], а також додатково висвітлено в [168].

РОЗДІЛ 4

БІЖУЧІ ХВИЛІ В СИСТЕМАХ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

4.1. Біжучі хвилі в системах осциляторів з лінійним зв'язком

У цьому підрозділі вивчаються рівняння, що описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на плоскій цілочисловій ґратці. Як і в попередніх розділах, припускається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = c_1 \left(q_{n+1,m}(t) + q_{n-1,m}(t) - 2q_{n,m}(t)\right) +$$
$$+c_2 \left(q_{n,m+1}(t) + q_{n,m-1}(t) - 2q_{n,m}(t)\right) - U'(q_{n,m}(t)),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{4.1}$$

де $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата n–го осцилятора в момент часу t, c_1, c_2 $\in \mathbb{R}$.

Розглянемо систему осциляторів із зовнішнім потенціалом вигляду

$$U(r) = -\frac{a}{2}r^2 + V(r).$$

Тоді система (4.1) набуде вигляду

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = c_1\Delta_{(1)}q_{n,m}(t) + c_2\Delta_{(2)}q_{n,m}(t) + aq_{n,m}(t) - V'(q_{n,m}(t)),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{4.2}$$

де

$$\left(\Delta_{(1)}q\right)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} - 2q_{n,m},$$
$$\left(\Delta_{(2)}q\right)_{n,m} = q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 2q_{n,m}$$

(дискретні оператори Лапласа відповідно за змінними n і m). Якщо $c_1 = c_2 =$

1, то сума цих операторів буде двовимірним дискретним оператором Лапласа

$$(\Delta q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}.$$

4.1.1. Формулювання задачі про біжучі хвилі. Основні припущення

Біжучою хвилею в даному випадку є розв'язок вигляду

$$q_{n,m}(t) = u(n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct), \tag{4.3}$$

де $\overrightarrow{l}(\cos\varphi, \sin\varphi)$ — фіксований *хвильовий вектор*, який задає напрям поширення хвилі. Нагадаємо, що функція $u(s)$ неперервного аргументу $s \in \mathbb{R}$ називається *профілем* біжучої хвилі. Стала c представляє собою *швидкість* хвилі. Якщо $c > 0$, то хвиля зміщується вправо, а якщо $c < 0$, то вліво.

Підставляючи (4.3) в (4.2), одержуємо рівняння для профілю $u(s)$ біжучої хвилі

$$c^2u''(s) = c_1(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s)) +$$

$$+ c_2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) - 2u(s)) + au(s) - V'(u(s)), \tag{4.4}$$

де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$. Цікавими є нетривіальні хвилі з профілем u не рівним нулю тотожно.

Всюди далі під розв'язком рівняння (4.4) розуміється функція $u \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, яка задовольняє це рівняння.

Будемо вивчати два види біжучих хвиль: періодичні та відокремлені. У випадку періодичних біжучих хвиль для знаходження профілю хвилі достатньо знайти розв'язок рівняння (4.4) з умовою періодичності

$$u(s+2k) = u(s),\ s \in \mathbb{R}, \tag{4.5}$$

де $k > 0$ — деяке число. Профіль відокремленої хвилі є розв'язком рівняння (4.4) з крайовими умовами на нескінченності

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \tag{4.6}$$

Зауважимо, що для кутів $\varphi = \frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, рівняння (4.4) зводиться до рівняння, що відповідає одновимірній ґратці. Таким чином, результати цього підрозділу містять результати праць [9, 138, 143] в якості часткових випадків.

Зазначимо, що в рівняння (4.4) швидкість c входить тільки в квадраті. Звідси випливає, що якщо функція $u(s)$ задовольняє рівняння (4.4), то існує дві біжучі хвилі з даним профілем та швидкостями $\pm c$.

Використовуючи ідею, реалізовану в [82], введемо в розгляд множину

$$\Omega(c_1, c_2, a) = \left\{c > 0 : \min_{\xi\in\mathbb{R}} \sigma(\xi) \geq 0\right\},$$

де

$$\sigma(\xi) = c^2\xi^2 - 4c_1 \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\cos\varphi\right) - 4c_2 \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\sin\varphi\right) + a.$$

Очевидно, що ця множина непорожня, якщо $a \geq 0$. Важливу роль відіграє величина c_0, яка визначається рівністю

$$c_0 = c_0(c_1, c_2, a) := \inf_{c>0} \Omega(c_1, c_2, a). \tag{4.7}$$

Всюди далі припускається, що потенціал $V(r)$ задовольняє умову:

(h_4) $V(r)$ — *неперервно диференційовна функція на* $\mathbb{R}$, $V(0) = V'(0) = 0$ *і* $V'(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$, *та існує таке* $\mu > 2$, *що*

$$0 < \mu V(r) \leq V'(r)r, \quad r \neq 0.$$

Зауважимо, що за виконання умови (h_4) потенціали $U(r) = -\frac{a}{2}r^2 + V(r)$ є притягуючими до стану рівноваги при $a \geq 0$ (сильно поблизу нуля, якщо $a > 0$, і слабко поблизу нуля, якщо $a = 0$) і відштовхуючими при $a < 0$.

4.1.2. Варіаційне формулювання задачі. Попередні леми

З рівнянням (4.4) та умовою (4.5) пов'язується функціонал

$$J_k(u) = \int_{-k}^{k} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - \frac{c_1}{2}(u(s+\cos\varphi) - u(s))^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{c_2}{2}(u(s+\sin\varphi) - u(s))^2 + \frac{a}{2}u^2(s) - V(u(s))\right] ds, \tag{4.8}$$

визначений на просторі

$$E_k = \left\{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : \ u(s+2k) = u(s)\right\}$$

з нормою

$$\|u\|_k = \left(\|u\|^2_{L^2(-k,k)} + \|u'\|^2_{L^2(-k,k)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-k}^{k} \left[(u(s))^2 + (u'(s))^2\right] ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тобто E_k — соболєвський простір $2k$–періодичних функцій.

З рівнянням (4.4) та умовами (4.6) пов'язується функціонал

$$J(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - \frac{c_1}{2}(u(s+\cos\varphi) - u(s))^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{c_2}{2}(u(s+\sin\varphi) - u(s))^2 + \frac{a}{2}u^2(s) - V(u(s)) \right] ds, \qquad (4.9)$$

визначений на просторі $E = H^1(\mathbb{R})$ зі стандартною соболєвською нормою:

$$\|u\| = \left(\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[(u(s))^2 + (u'(s))^2 \right] ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нагадаємо, що за теоремою вкладення $E_k \subset C([-k,k])$ та $E \subset C_0(\mathbb{R})$, де $C([-k,k])$ та $C_0(\mathbb{R})$ — відповідно простір неперервних функцій на $[-k,k]$ та замкнений підпростір простору обмежених неперервних на $\mathbb{R}$ функцій, які збігаються до нуля на нескінченності (див. [194]). Останнє означає, що для будь-якого $u \in E$ виконуються умови (4.6).

Для спрощення записів на просторі E_k означимо оператори $E_k \to E_k$:

$$(Au)(s) := u(s+\cos\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\cos\varphi} u'(\tau)d\tau,$$

$$(Bu)(s) := u(s+\sin\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\sin\varphi} u'(\tau)d\tau.$$

Далі нам знадобиться наступна лема:

Лема 4.1. *Оператори A та B є обмеженими лінійними операторами, що задовольняють такі нерівності*

$$\|Au\|_{L^2(-k,k)} \leq |\cos\varphi| \cdot \|u'\|_{L^2(-k,k)}, \ \|Bu\|_{L^2(-k,k)} \leq |\sin\varphi| \cdot \|u'\|_{L^2(-k,k)}, \ u \in E_k,$$

$$\|Au\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq |\cos\varphi| \cdot \|u'\|_{L^2(\mathbb{R}))}, \ \|Bu\|_{L^2(\mathbb{R}))} \leq |\sin\varphi| \cdot \|u'\|_{L^2(\mathbb{R}))}, \ u \in E \quad (4.10)$$

і

$$\|Au\|_{L^\infty(-k,k)} \leq l_1(k) \cdot \|u'\|_{L^2(-k,k)}, \ \|Bu\|_{L^\infty(-k,k)} \leq l_2(k) \cdot \|u'\|_{L^2(-k,k)}, \ u \in E_k,$$

$$\|Au\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq l_1(k) \cdot \|u'\|_{L^2(\mathbb{R}))}, \ \|Bu\|_{L^\infty(\mathbb{R}))} \leq l_2(k) \cdot \|u'\|_{L^2(\mathbb{R}))}, \ u \in E, \quad (4.11)$$

з

$$l_1(k)=\begin{cases}|\cos\varphi|\sqrt{\left[\frac{1}{2k}\right]+1}, & 0<2k<1,\\ |\cos\varphi|, & 2k\ge 1,\end{cases}$$

та

$$l_2(k)=\begin{cases}|\sin\varphi|\sqrt{\left[\frac{1}{2k}\right]+1}, & 0<2k<1,\\ |\sin\varphi|, & 2k\ge 1,\end{cases}$$

де $\left[\frac{1}{2k}\right]$ *— ціла частина* $\frac{1}{2k}$.

Доведення. Нехай $\cos\varphi\ge 0$, тоді за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца маємо

$$|u(s+\cos\varphi)-u(s)|^2=\left|\int\limits_s^{s+\cos\varphi}u'(\tau)d\tau\right|^2\le\left|\int\limits_s^{s+\cos\varphi}|u'(\tau)|d\tau\right|^2\le$$

$$\le\left(\left(\int\limits_s^{s+\cos\varphi}d\tau\right)^{\frac12}\right)^2\cdot\left(\left(\int\limits_s^{s+\cos\varphi}|u'(\tau)|^2|d\tau\right)^{\frac12}\right)^2=$$

$$=\cos\varphi\cdot\int\limits_s^{s+\cos\varphi}|u'(\tau)|^2|d\tau.$$

Інтегруючи останню нерівність, одержуємо

$$\int\limits_{-k}^{k}|u(s+\cos\varphi)-u(s)|^2ds\le\cos\varphi\cdot\int\limits_{-k}^{k}\int\limits_s^{s+\cos\varphi}|u'(\tau)|^2|d\tau ds=$$

$$=\cos\varphi\cdot\iint\limits_D|u'(\tau)|^2|d\tau ds,$$

де

$$D=\{(s,\tau):\ -k\le s\le k,\ s\le\tau\le s+\cos\varphi\}.$$

Змінюючи порядок інтегрування, неважко бачити, що подвійний інтеграл в правій частині співпадає з інтегралом

$$\cos\varphi\cdot\iint\limits_{D_1}|u'(\tau)|^2|d\tau ds,$$

де

$$D_1=\{(s,\tau):\ -k\le\tau\le k,\ \tau-\cos\varphi\le s\le\tau\}.$$

Переходячи в останньому інтегралі до повторного, одержуємо

$$\int_{-k}^{k} |u(s+\cos\varphi)-u(s)|^2 ds \le \cos\varphi \cdot \int_{-k}^{k} \int_{\tau-\cos\varphi}^{\tau} |u'(\tau)|^2 |d\tau ds =$$

$$= \cos^2\varphi \cdot \int_{-k}^{k} |u'(\tau)|^2 |d\tau = \cos^2\varphi \cdot \|u'\|^2_{L^2(-k,k)}.$$

Тепер нехай $\cos\varphi \le 0$, тоді $-\cos\varphi \ge 0$ і, міркуючи аналогічно, одержуємо

$$\int_{-k}^{k} |u(s+\cos\varphi)-u(s)|^2 ds \le -\cos\varphi \cdot \int_{-k}^{k} \int_{\tau}^{\tau-\cos\varphi} |u'(\tau)|^2 |d\tau ds =$$

$$= \cos^2\varphi \cdot \int_{-k}^{k} |u'(\tau)|^2 |d\tau = \cos^2\varphi \cdot \|u'\|^2_{L^2(-k,k)}.$$

Таким чином, в обох випадках

$$\int_{-k}^{k} |u(s+\cos\varphi)-u(s)|^2 ds \le \cos^2\varphi \cdot \|u'\|^2_{L^2(-k,k)}.$$

Добуваючи корінь квадратний від обох частин нерівності, отримуємо першу з нерівностей (4.10). Друга нерівність доводиться аналогічно.

Для доведення третьої нерівності з нерівностей (4.10) використаємо перетворення Фур'є:

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} u(s) ds.$$

Тоді, використовуючи формулу інтегрування частинами, маємо

$$\hat{u'}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} u'(s) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi e^{-i\xi s} u(s) ds = i\xi \hat{u}(\xi),$$

звідси

$$|\hat{u'}(\xi)|^2 = \xi^2 |\hat{u}(\xi)|^2.$$

Далі

$$\widehat{Au}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} Au(s) ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} u(s+\cos\varphi) ds - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} u(s) ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi(s-\cos\varphi)} u(s) ds - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} u(s) ds =$$

$$= \left(e^{i\xi\cos\varphi} - 1\right) \hat{u}(\xi).$$

Тоді

$$|\widehat{Au}(\xi)|^2 = |2 - 2\cos(\xi\cos\varphi)| \cdot |\hat{u}(\xi)|^2 = 4\sin^2\left(\frac{\xi\cos\varphi}{2}\right) |\hat{u}(\xi)|^2 \leq$$

$$\leq \xi^2 \cos^2\varphi |\hat{u}(\xi)|^2 = \cos^2\varphi |\hat{u'}(\xi)|^2.$$

Звідси, використовуючи рівність Парсеваля:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(s)|^2 ds,$$

одержуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |Au(s)|^2 ds \leq \cos^2\varphi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u'(s)|^2 ds,$$

або

$$\|Au\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq |\cos\varphi| \cdot \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Аналогічно одержуємо четверту нерівність

$$\|Bu\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq |\sin\varphi| \cdot \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Зауважимо, що перші дві нерівності з нерівностей (4.10) можна аналогічно довести за допомогою рядів Фур'є замість перетворення Фур'є.

Доведемо першу з нерівностей (4.11). Нехай $2k = 1$ і $\cos\varphi \geq 0$, тоді аналогічно, як і вище,

$$|Au(s)| = \left| \int\limits_{s}^{s+\cos\varphi} u'(\tau) d\tau \right| \leq \int\limits_{s}^{s+\cos\varphi} |u'(\tau)| d\tau \leq$$

$$\leq \sqrt{\cos\varphi} \left(\int\limits_{s}^{s+\cos\varphi} |u'(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\cos\varphi} \left(\cos\varphi \int\limits_{0}^{1} |u'(\tau)|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = \cos\varphi \cdot \|u'\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}.$$

Якщо ж $\cos\varphi \leq 0$, то $|Au(s)| \leq -\cos\varphi \cdot \|u'\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$.

Нехай тепер $0 < 2k \neq 1$ і $\cos\varphi \geq 0$. Позначимо через $\omega = \left[\frac{1}{2k}\right] \cos\varphi$, тоді $2k\omega \le \cos\varphi < 2k(\omega + \cos\varphi)$, звідки маємо

$$|Au(s)| \le \sqrt{\cos\varphi}\left(\int\limits_{s}^{s+\cos\varphi} |u'(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sqrt{\cos\varphi}\left(\int\limits_{s}^{s+2k(\omega+\cos\varphi)} |u'(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\cos\varphi}\left((\omega+\cos\varphi)\int\limits_{0}^{2k} |u'(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sqrt{\cos\varphi}\sqrt{\omega+\cos\varphi}\|u'\|_{L^2(-k,k)} = \sqrt{\cos\varphi}\sqrt{\left[\frac{1}{2k}\right]+1}\|u'\|_{L^2(-k,k)}.$$

Аналогічно міркуємо у випадку $\cos\varphi \le 0$ і першу з нерівностей (4.11) доведено. Всі інші нерівності (4.11) доводяться аналогічно. Лему доведено. $\square$

Лема 4.2. *Нехай виконується умова (h_4). Тоді функціонали J_k і J належать класу C^1, а їх похідні визначаються формулами*

$$\langle J_k'(u), h\rangle = \int\limits_{-k}^{k} [c^2 u'(s)h'(s) + c_1(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s))h(s) +$$

$$+ c_2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) - 2u(s))h(s) + au(s)h(s) - V'(u(s))h(s)]ds,$$

$$\langle J'(u), h\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [c^2 u'(s)h'(s) + c_1(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s))h(s) +$$

$$+ c_2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) - 2u(s))h(s) + au(s)h(s) - V'(u(s))h(s)]ds,$$

для будь-яких $u, h \in E_k$ та $u, h \in E$ відповідно.

Доведення. Крок 1. Розглянемо функціонал J_k і подамо його у вигляді

$$J_k(u) = c^2\Psi_k^{(1)}(u) - c_1\Psi_k^{(2)}(u) - c_2\Psi_k^{(3)}(u) + a\Psi_k^{(4)}(u) - S_k(u),$$

де

$$\Psi_k^{(1)}(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k} (u'(s))^2 ds = \frac{1}{2}\|u'\|^2_{L^2(-k,k)},$$

$$\Psi_k^{(2)}(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k} (Au(s))^2 ds = \frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k} (u(s+\cos\varphi) - u(s))^2 ds,$$

$$\Psi_k^{(3)}(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k}(Bu(s))^2 ds = \frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k}(u(s+\sin\varphi) - u(s))^2 ds,$$

$$\Psi_k^{(4)}(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k}(u(s))^2 ds,$$

$$S_k(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k} V(u(s))ds.$$

Легко бачити, що $\Psi_k^{(i)} \in C^1$, $i = \overline{1,4}$. При цьому для похідних маємо

$$\langle \Psi_k^{(1)'}(u), h\rangle = \int\limits_{-k}^{k} u'(s)h'(s)ds,$$

$$\langle \Psi_k^{(2)'}(u), h\rangle = \int\limits_{-k}^{k}(u(s+\cos\varphi) - u(s))(h(s+\cos\varphi) - h(s))ds,$$

$$\langle \Psi_k^{(3)'}(u), h\rangle = \int\limits_{-k}^{k}(u(s+\sin\varphi) - u(s))(h(s+\sin\varphi) - h(s))ds,$$

$$\langle \Psi_k^{(4)'}(u), h\rangle = \int\limits_{-k}^{k} u(s)h(s)ds.$$

Далі маємо

$$\langle \Psi_k^{(2)'}(u), h\rangle = \int\limits_{-k}^{k} u(s+\cos\varphi)h(s+\cos\varphi)ds + \int\limits_{-k}^{k} u(s)h(s)ds -$$

$$-\int\limits_{-k}^{k} u(s+\cos\varphi)h(s)ds - \int\limits_{-k}^{k} u(s)h(s+\cos\varphi)ds.$$

Враховуючи $2k$-періодичність та роблячи заміну $\tau = s + \cos\varphi$ одержуємо

$$\langle \Psi_k^{(2)'}(u), h\rangle = \int\limits_{-k+\cos\varphi}^{k+\cos\varphi} u(\tau)h(\tau)d\tau + \int\limits_{-k}^{k} u(s)h(s)ds -$$

$$-\int\limits_{-k}^{k} u(s+\cos\varphi)h(s)ds - \int\limits_{-k+\cos\varphi}^{k+\cos\varphi} u(\tau - \cos\varphi)h(\tau)d\tau =$$

$$= 2\int\limits_{-k}^{k} u(s)h(s)ds - \int\limits_{-k}^{k} u(s+\cos\varphi)h(s)ds - \int\limits_{-k}^{k} u(s-\cos\varphi)h(s)ds =$$

$$= -\int\limits_{-k}^{k} (u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s))h(s)ds.$$

Аналогічно

$$\langle \Psi_k^{(3)\prime}(u), h\rangle = -\int\limits_{-k}^{k} (u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) - 2u(s))h(s)ds.$$

Знайдемо тепер похідну Гато функціоналу S_k. Нехай $u, h \in E_k$, тоді за формулою Лагранжа для будь-якого $s \in [-k, k]$ існує таке $\theta = \theta(s) \in (0, 1)$, що

$$\frac{1}{\lambda}\left(S_k(u+\lambda h) - S_k(u)\right) = \int\limits_{-k}^{k} V'\left(u(s) + \lambda\theta h(s)\right) h(s)ds =$$

$$= \int\limits_{-k}^{k} V'\left(u(s)\right) h(s)ds + \int\limits_{-k}^{k} \left[V'\left(u(s) + \lambda\theta h(s)\right) - V'(u(s))\right] h(s)ds.$$

Тут останній інтеграл прямує до нуля при $\lambda \to 0$. Справді, згідно теореми вкладення, $u, h \in C([-k, k])$, причому існує таке $R > 0$, що при $|\lambda| \le 1$ маємо

$$\|u\|_{C([-k,k])} \le R \ \text{ і } \ \|u + \lambda\theta h\|_{C([-k,k])} \le R.$$

Оскільки функція $V'(r)$ неперервна і, отже, рівномірно неперервна на $[-R, R]$, а $\lambda\theta h \to 0$ рівномірно на $[-k, k]$, то

$$V'\left(u(s) + \lambda\theta h(s)\right) - V'(u(s)) \to 0$$

рівномірно на $[-k, k]$. Звідси випливає, що

$$\int\limits_{-k}^{k} \left[V'\left(u(s) + \lambda\theta h(s)\right) - V'(u(s))\right] h(s)ds \to 0$$

при $\lambda \to 0$. Отже,

$$\langle S_k'(u), h\rangle = \int\limits_{-k}^{k} V'(u(s))h(s)ds.$$

Крок 2. Доведемо тепер, що $S_k(u)$ належить класу C^1. Для цього достатньо показати, що він належить класу C^1 на кожній відкритій кулі простору

E_k з центром у нулі. Нехай B_{r_0} — така куля радіуса $r_0 > 0$. За теоремою вкладення, $B_{r_0} \subset \tilde{B}_{r_1}$, де $\tilde{B}_{r_1}$ — відкрита куля деякого радіуса r_1 у просторі $C([-k,k])$. Зафіксуємо довільну неперервно диференційовну функцію $\tilde{V}(r)$ таку, що $\tilde{V}(r) = V(r)$ при $|r| < r_2$ і $\tilde{V}(r) = r$ при $|r| \geq r_2$, де $r_2 > r_1$ достатньо велике.

Розглянемо функціонал

$$\tilde{S}_k = \int_{-k}^{k} \tilde{V}(u(s))ds.$$

За побудовою, $\tilde{S}_k$ збігається з S_k на кулі B_{r_0}. В силу класичних результатів (див. [183, 190], $\tilde{S}_k$ є C^1-функціоналом на просторі $L^2(-k,k)$ і, отже, на неперервно вкладеному в нього просторі E_k.

Доведення у випадку функціоналу J аналогічне. Лему доведено. $\square$

Наступна лема показує, що рівняння (4.4), у деякому розумінні, є рівнянням Ейлера-Лагранжа для функціоналів дії (4.8) та (4.9) у відповідних просторах.

Лема 4.3. *Нехай виконується умова* (h_4). *Тоді критичні точки функціоналів* J_k *та* J *є розв'язками рівняння (4.4), які задовольняють умови (4.5) та (4.6) відповідно.*

Доведення. Розглянемо функціонал J. Оскільки за теоремою вкладення кожний елемент $u \in E$ задовольняє умови (4.6), то достатньо тільки перевірити, що критичні точки функціоналу J є розв'язками рівняння (4.4).

Нехай $u \in E$ — критична точка функціоналу J. Тоді $\langle J'(u), h\rangle = 0$ для будь-якого $h \in E$. Виберемо $h = g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ довільно і використаємо лему 4.2. Тоді

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [c^2 u'(s)g'(s) + c_1(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s))g(s) +$$

$$+c_2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) - 2u(s))g(s) + au(s)g(s) - V'(u(s))g(s)]ds = 0.$$

Інтегруючи перший доданок під знаком інтеграла частинами і враховуючи умови (4.6), одержуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[-c^2u''(s)+c_1(u(s+\cos\varphi)+u(s-\cos\varphi)-2u(s))+$$
$$+c_2(u(s+\sin\varphi)+u(s-\sin\varphi)-2u(s))+au(s)-V'(u(s))]g(s)ds=0.$$

Це означає, що u задовольняє рівняння (4.4) в сенсі узагальнених функцій, тобто u — слабкий розв'язок рівняння (4.4). Але тоді, також в сенсі узагальнених функцій, правильна рівність

$$c^2u''(s)=c_1(u(s+\cos\varphi)+u(s-\cos\varphi)-2u(s))+$$
$$+c_2(u(s+\sin\varphi)+u(s-\sin\varphi)-2u(s))+au(s)-V'(u(s)). \tag{4.12}$$

За теоремою вкладення $u\in C_b(\mathbb{R})$. Тому права частина (4.12) — неперервна функція. Звідки $u''(s)$ також неперервна функція і, отже, $u\in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ — розв'язок рівняння (4.4) в звичайному сенсі.

Доведення у випадку функціоналу J_k аналогічне. Лему доведено. $\square$

Подамо функціонали J_k та J у вигляді

$$J_k(u)=\frac{1}{2}\Psi_k(u)-S_k(u),$$
$$J(u)=\frac{1}{2}\Psi(u)-S(u),$$

де

$$\Psi_k(u)=\int\limits_{-k}^{k}\left[c^2|u'(s)|^2-c_1|Au(s)|^2-c_2|Bu(s)|^2+a|u(s)|^2\right]ds,$$

$$S_k(u)=\int\limits_{-k}^{k}V(u(s))ds,$$

$$\Psi(u)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[c^2|u'(s)|^2-c_1|Au(s)|^2-c_2|Bu(s)|^2+a|u(s)|^2\right]ds,$$

$$S(u)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}V(u(s))ds.$$

Далі знадобиться наступна лема, яка дає певні оцінки для функціоналів Ψ_k та Ψ.

Лема 4.4. *Для будь-яких $a > 0$ і $c > c_0$ існують додатні сталі λ_0 та λ_1, які залежать від a і c, і такі, що*

$$\lambda_0\|u\|_k^2 \leq \Psi_k(u) \leq \lambda_1\|u\|_k^2, \;\; \lambda_0\|u\|^2 \leq \Psi(u) \leq \lambda_1\|u\|^2. \tag{4.13}$$

Доведення. Розглянемо випадок функціоналу J. Для доведення леми використаємо перетворення Фур'є

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} u(s) ds.$$

Тоді, використовуючи формулу інтегрування частинами, маємо

$$\hat{u'}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} u'(s) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\xi e^{-i\xi s} u(s) ds = i\xi\hat{u}(\xi),$$

звідси

$$|\hat{u'}(\xi)|^2 = \xi^2 |\hat{u}(\xi)|^2.$$

Далі

$$\widehat{Au}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} Au(s) ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} u(s + \cos\varphi) ds - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} u(s) ds =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi (s-\cos\varphi)} u(s) ds - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} u(s) ds =$$

$$= \left(e^{i\xi\cos\varphi} - 1\right) \hat{u}(\xi),$$

звідки

$$|\widehat{Au}(\xi)|^2 = |2 - 2\cos(\xi\cos\varphi)| \cdot |\hat{u}(\xi)|^2 = 4\sin^2\left(\frac{\xi\cos\varphi}{2}\right) |\hat{u}(\xi)|^2.$$

Аналогічно

$$\widehat{Bu}(\xi) = \left(e^{-i\xi\sin\varphi} - 1\right) \hat{u}(\xi),$$

$$|\widehat{Bu}(\xi)|^2 = 4\sin^2\left(\frac{\xi\sin\varphi}{2}\right) |\hat{u}(\xi)|^2.$$

Тоді, використовуючи рівність Парсеваля:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |u(s)|^2 ds,$$

одержуємо, що

$$\|u\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (|u(s)|^2 + |u'(s)|^2) ds = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (|\hat{u}(\xi)|^2 + |\hat{u'}(\xi)|^2) d\xi =$$

$$= \|\hat{u}\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+\xi^2)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Таким чином, маємо

$$\Psi(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[c^2|u'(s)|^2 - c_1|Au(s)|^2 - c_2|Bu(s)|^2 + a|u(s)|^2\right] ds =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[c^2|\hat{u'}(\xi)|^2 - c_1|\widehat{Au}(\xi)|^2 - c_2|\widehat{Bu}(\xi)|^2 + a|\hat{u}(\xi)|^2\right] d\xi =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(c^2\xi^2 - 4c_1 \sin^2\left(\frac{\xi\cos\varphi}{2}\right) - 4c_2 \sin^2\left(\frac{\xi\sin\varphi}{2}\right) + a\right) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma(\xi)}{1+\xi^2}(1+\xi^2)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

де

$$\sigma(\xi) = c^2\xi^2 - 4c_1 \sin^2\left(\frac{\xi\cos\varphi}{2}\right) - 4c_2 \sin^2\left(\frac{\xi\sin\varphi}{2}\right) + a.$$

Звідси одержуємо

$$\lambda_0\|u\|^2 = \lambda_0\|\hat{u}\|^2 \le \Psi(u) \le \lambda_1\|\hat{u}\|^2 = \lambda_1\|u\|^2,$$

де

$$\lambda_0 = \inf_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{\sigma(\xi)}{1+\xi^2}, \quad \lambda_1 = \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \frac{\sigma(\xi)}{1+\xi^2}.$$

У випадку функціоналу J_k доведення аналогічне (тільки замість перетворення Фур'є потрібно використати ряд Фур'є). Лему доведено. $\square$

Лема 4.5. *Нехай виконується умова* (h_4), $a > 0$ *і* $c > c_0$. *Тоді існують такі* $\varepsilon_0 > 0$ *і* $\gamma > 0$, *які не залежать від* k, *що для нетривіальних критичних точок функціоналів* J_k *та* J *правильні відповідно нерівності*

$$\varepsilon_0 \le \|u\|_k^2 \le \gamma J_k(u), \quad \varepsilon_0 \le \|u\|^2 \le \gamma J(u). \tag{4.14}$$

Доведення. Доведемо першу з подвійних нерівностей (4.14). Нехай $u \in$

E_k — критична точка функціоналу J_k. Тоді $J_k'(u) = 0$ і, враховуючи умову (h_4), одержуємо

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{\mu}\langle J_k'(u), u\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2|u'(s)|^2 - c_1|Au(s)|^2 - c_2|Bu(s)|^2 + a|u(s)|^2\right] ds -$$

$$- \int\limits_{-k}^{k} \left[V(u(s)) - \frac{1}{\mu}V'(u(s))u(s)\right] ds \geq \frac{\mu-2}{2\mu}\Psi_k(u).$$

Використовуючи лему 4.4, отримуємо, що

$$J_k(u) \geq \frac{\mu-2}{2\mu}\lambda_0\|u\|_k^2.$$

Звідси випливає права нерівність.

Доведемо ліву нерівність. Для критичної точки $u \in E_k$ маємо $\langle J_k'(u), u\rangle = 0$, тобто

$$\int\limits_{-k}^{k} \left[c^2|u'(s)|^2 - c_1|Au(s)|^2 - c_2|Bu(s)|^2 + a|u(s)|^2\right] ds = \int\limits_{-k}^{k} V'(u(s))ds.$$

Звідси, як і вище, маємо

$$\lambda_0\|u\|_k^2 \leq \int\limits_{-k}^{k} V'(u(s))ds. \tag{4.15}$$

Згідно леми 3.2,

$$V'(r)r \leq \sigma(|r|)r^2,$$

де $\sigma(r)$ — деяка монотонно зростаюча неперервна функція від $r \geq 0$ і $\sigma(0) = 0$. Тоді із (4.15) випливає, що

$$\lambda_0\|u\|_k^2 \leq \sigma\left(\|u\|_{C([-k,k])}\right) \int\limits_{-k}^{k} |u(s)|^2 ds.$$

За теоремою вкладення, $\|u\|_{C([-k,k])} \leq C \cdot \|u\|_k$ зі сталою C, яка не залежить від k. Таким чином,

$$\lambda_0\|u\|_k^2 \leq \sigma\left(C \cdot \|u\|_k\right)\|u\|_k^2.$$

Оскільки $u \neq 0$, то

$$\sigma\left(C \cdot \|u\|_k\right) \geq \lambda_0,$$

звідки випливає ліва нерівність з

$$\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} = C^{-1} \cdot \sigma^{-1}(\lambda_0).$$

Друга подвійна нерівність (4.14) доводиться аналогічно, з тими ж сталими ε_0 та γ. Лему доведено. □

4.1.3. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системах лінійно зв'язаних осциляторів

За допомогою теореми про гірський перевал (теорема B.1) встановимо існування нетривіальних біжучих хвиль з періодичним профілем. Для цього, згідно леми 4.3, достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k. Зауважимо, що $u = 0$ завжди є тривіальною критичною точкою та дає тривіальну біжучу хвилю, яка тотожно рівна нулю.

Наступна теорема є основним результатом даного пункту.

Теорема 4.1. *Нехай виконується умова (h_4) і $a > 0$. Тоді для будь-яких $k > 0$ і $c > c_0$ рівняння (4.4) має нетривіальний розв'язок u, що задовольняє умову (4.5). Крім того, існують такі додатні сталі ε_0, C_0, ε і C, які не залежать від k, що*

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C_0, \tag{4.16}$$

$$\varepsilon \leq J_k(u) \leq C. \tag{4.17}$$

Більше того, цей розв'язок не сталий при достатньо великих значеннях k.

Для функціоналу J_k перевіримо виконання умов теореми про гірський перевал. Почнемо з умови Пале–Смейла.

Лема 4.6. *За виконання умов теореми 4.1 функціонал J_k задовольняє умову Пале–Смейла.*

Доведення. Нехай $\{u_n\}$ — послідовність Пале-Смейла функціоналу J_k на деякому рівні b. Тоді, для достатньо великого n, $\|J_k'(u_n)\|_{k,*} \leq 1$ і $|J_k(u_n)| \leq b + 1$. Тобто для достатньо великих n маємо

$$b + 1 + \frac{1}{\mu}\|u_n\|_k \geq J_k(u_n) - \frac{1}{\mu}\langle J_k'(u_n), u_n\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2(u_n'(s))^2 - c_1(Au_n(s))^2 - c_2(Bu_n(s))^2 + a(u_n(s))^2\right] ds +$$

$$+ \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{1}{\mu} V'(u_n(s)) u_n(s) - V(u_n(s))\right] ds =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \Psi_k(u) + \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{1}{\mu} V'(u_n(s)) u_n(s) - V(u_n(s))\right] ds \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \lambda_0 \|u_n\|_k^2.$$

Остання нерівність доводить обмеженість послідовності $\{u_n\}$.

Оскільки простір E_k гільбертів, то можна вважати (переходячи до підпослідовності з тим самим позначенням), що $u_n \to u$ слабко в E_k. Згідно компактності вкладення $E_k \subset C([-k,k])$ остання збіжність є сильною в $C([-k,k])$.

Тоді за лемою 4.2 для будь-яких натуральних n і m маємо

$$\langle J_k'(u_n) - J_k'(u_m), u_n - u_m \rangle =$$

$$= \Psi(u_n - u_m) - \int\limits_{-k}^{k} [V'(u_n(s)) - V'(u_m(s))] ds.$$

Звідси, використовуючи нерівності (4.14), одержуємо

$$\langle J_k'(u_n) - J_k'(u_m), u_n - u_m \rangle \geq \lambda_0 \|u_n - u_m\|_k^2 - \int\limits_{-k}^{k} [V'(u_n(s)) - V'(u_m(s))] ds,$$

або

$$\lambda_0 \|u_n - u_m\|_k^2 \leq \langle J_k'(u_n) - J_k'(u_m), u_n - u_m \rangle + \int\limits_{-k}^{k} [V'(u_n(s)) - V'(u_m(s))] ds. \quad (4.18)$$

Оскільки $u_n - u_m \to 0$ слабко в E_k (послідовність $\{u_n\}$ обмежена), а $J_k'(u_n) \to 0$ сильно в спряженому просторі E_k^* (при $n, m \to \infty$), то перший доданок в правій частині (4.18) прямує до нуля. Крім того, $u_n \to u$ в $C([-k,k])$. Звідси випливає, що підінтегральний вираз в (4.18) прямує до нуля рівномірно на $[-k,k]$ при $n, m \to \infty$. Таким чином, другий доданок в правій частині (4.18) також прямує до нуля. Тоді і ліва частина цієї нерівності прямує до нуля, звідки $\|u_n - u_m\|_k \to 0$ при $n, m \to \infty$, тобто $\{u_n\}$ — фундаментальна послідовність в гільбертовому просторі E_k і, отже, $u_n \to u$ сильно в E_k. Лему доведено. □

В наступних двох лемах перевіряється геометрія гірського перевалу.

Лема 4.7. *За виконання умов теореми 4.1 існують такі $r_0 > 0$ та $\alpha_0 > 0$, які не залежать від k, що*

$$\inf_{\|u\|_k = r_0} J_k(u) > \alpha_0.$$

Доведення. За лемою 3.2, враховуючи умову (h_4), маємо

$$V(r) \leq \mu^{-1}\sigma(|r|)r^2.$$

Тоді

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\Psi(u) - \int_{-k}^{k} V(u(s))ds \geq$$

$$\geq \frac{\lambda_0}{2}\|u\|_k^2 - \frac{1}{\mu}\int_{-k}^{k} \sigma(|u(s)|)(u(s))^2 ds \geq$$

$$\geq \frac{\lambda_0}{2}\|u\|_k^2 - \frac{1}{\mu}\sigma\left(\|u\|_{C([-k,k])}\right)\|u\|^2_{L^2(-k,k)} \geq$$

$$\geq \frac{\lambda_0}{2}\|u\|_k^2 - \frac{1}{\mu}\sigma\left(\|u\|_{C([-k,k])}\right)\|u\|_k^2.$$

Але за теоремою вкладення, $\|u\|_{C([-k,k])} \leq C\|u\|_k$. Тому

$$J_k(u) \geq \left(\frac{\lambda_0}{2} - \frac{1}{\mu}\sigma(C\|u\|_k)\right)\|u\|_k^2.$$

Тепер виберемо $r_0 > 0$ таким, що $\frac{1}{\mu}\sigma(Cr_0) = \frac{\lambda_0}{4}$. Це очевидно можливо в силу властивостей функції $\sigma(r)$. Тоді при $\|u\|_k = r_0$ маємо

$$J_k(u) \geq \frac{\lambda_0 r_0^2}{4},$$

і лему доведено. □

Лема 4.8. *За виконання умов теореми 4.1 існує елемент $e \in E_k$ з нормою $\|u\|_k > r_0$ такий, що $J_k(e) \leq 0$.*

Доведення. За лемою 3.1, для всіх r

$$V(r) \geq d|r|^\mu - d_0.$$

Нехай $u \in E_k \setminus \{0\}$ та $r > 0$. Тоді маємо

$$J_k(ru) = \frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k} \left[c^2 r^2 (u'(s))^2 - c_1 r^2 (Au(s))^2 - c_2 r^2 (Bu(s))^2 + ar^2 (u(s))^2\right] ds-$$

$$-\int\limits_{-k}^{k} V(ru(s))ds \leq$$

$$\leq \frac{r^2}{2}\int\limits_{-k}^{k} \left[c^2 (u'(s))^2 - c_1 (Au(s))^2 - c_2 (Bu(s))^2 + a(u(s))^2\right] ds-$$

$$-dr^{\mu}\int\limits_{-k}^{k} |u(s)|^{\mu} + 2kd_0.$$

Оскільки $\mu > 2$, то $J_k(ru) \to -\infty$ при $r \to +\infty$, а отже, існує таке $r_0 = r_0(u) > 0$, що $J_k(ru) \leq 0$ для всіх $r > r_0$. Лему доведено. $\Box$

Доведення теореми 4.1. Згідно лем 4.6–4.8, для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал. Таким чином, J_k має нетривіальну критичну точку $u \in E_k$, яка за лемою 4.3 є розв'язком задачі (4.4), (4.5). Оцінки знизу для $\|u\|_k$ і $J_k(u)$ випливають із леми 4.5. За теоремою про гірський перевал, $J_k(u) \leq \sup\limits_{\tau \geq 0} J_k(\tau e) = C$ і тепер верхня оцінка для $\|u\|_k$ випливає із леми 4.5.

Покажемо, що цей розв'язок не сталий для достатньо великих k. Справді, нехай $u(s) = \alpha > 0$ сталий розв'язок рівняння (4.4) (випадок $\alpha < 0$ аналогічний). Тоді з рівняння (4.4) маємо, що $a\alpha - V'(\alpha) \equiv 0$. Оскільки $V'(r) = o(r)$ при $r \to 0$, то існує таке $\alpha_0 > 0$, що $ar - V'(r) > 0$ при $0 < r < \alpha_0$. Зауважимо, що за умовою (h_4): $V'(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$, а отже, за теоремою про проміжне значення сталий розв'язок існує. Таким чином, $\alpha \geq \alpha_0$. Тоді $\|u\|_k = (2k)^{\frac{1}{2}}|\alpha| \geq (2k)^{\frac{1}{2}}|\alpha_0| \to +\infty$ при $k \to +\infty$, а це суперечить верхній оцінці для $\|u\|_k$ в (4.16). Теорему доведено. $\Box$

Зауважимо, що оскільки серед встановлених умов існування біжучих хвиль є умова $c > c_0$, то c_0 будемо називати *швидкістю звуку* в даній системі (як це зроблено, наприклад, в [95]). Тоді теорема 4.1 встановлює існування надзвукових періодичних біжучих хвиль.

4.1.4. Існування надзвукових відокремлених біжучих хвиль в системах лінійно зв'язаних осциляторів

Доведемо тепер існування відокремлених біжучих хвиль. Біжучі хвилі в даному випадку знаходяться як критичні точки функціоналу J, для якого виконуються твердження, аналогічні лемам 4.7 та 4.8. Таким чином, функціонал J задовольняє частині умов теореми про гірський перевал. Однак умова Пале–Смейла для цього функціоналу не виконується. Тому критичні точки в даному випадку будуються за допомогою переходу до границі в критичних точках функціоналу J_k при $k \to \infty$, як це було зроблено у випадку T-періодичних розв'язків у розділі 3.

Для доведення основного результату нам знадобиться частковий випадок леми 4.1 з [94], який доведено в [143] (Лема 3.5.2):

Лема 4.9. *Нехай $u_n \in E_{k_n}$, де $k_n \to \infty$, і $\{\|u_n\|_{k_n}\}$ обмежена. Тоді, якщо для деякого $r > 0$*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \int\limits_{y-r}^{y+r} (u_n(s))^2 ds \to 0, \tag{4.19}$$

то $\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)} \to 0$ для будь-якого $p > 2$.

Наступна теорема є основним результатом даного пункту.

Теорема 4.2. *Нехай виконується умова (h_4) і $a > 0$. Тоді для будь-якого $c > c_0$ рівняння (4.4) має несталий розв'язок u, який задовольняє умови (4.6), а отже, існують дві несталі відокремлені біжучі хвилі з профілем u та швидкостями $\pm c$.*

Доведення. Крок 1. Візьмемо довільну послідовність $k_n \to \infty$ і позначимо через $u_n \in E_{k_n}$ розв'язок рівняння (4.4) з умовою (4.5), побудований в теоремі 4.1 при $k = k_n$.

Спочатку покажемо, що переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), можна вважати, що існують такі $\delta > 0$, $r > 0$ і послідовність $\{y_n\} \subset \mathbb{R}$, що

$$\int\limits_{y_n-r}^{y_n+r} (u_n(s))^2 ds \geq \delta. \tag{4.20}$$

Справді, нехай це не так. Тоді для будь-якого $r > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \int\limits_{y-r}^{y+r} (u_n(s))^2 ds = 0.$$

Крім того, в силу нерівності (4.16), послідовність $\{\|u_n\|_{k_n}\}$ обмежена. Тоді за лемою 4.9 маємо, що

$$\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)} \to 0. \tag{4.21}$$

Оскільки $J'_{k_n}(u_n) = 0$, то

$$\langle J'_{k_n}(u_n), u_n \rangle =$$

$$= \int\limits_{-k_n}^{k_n} \left[c^2(u'_n(s))^2 - c_1(Au_n(s))^2 - c_2(Bu_n(s))^2 + a(u_n(s))^2\right] ds -$$

$$- \int\limits_{-k_n}^{k_n} V'(u_n(s))u_n(s)ds = 0,$$

тобто

$$\int\limits_{-k_n}^{k_n} \left[c^2(u'_n(s))^2 - c_1(Au_n(s))^2 - c_2(Bu_n(s))^2 + a(u_n(s))^2\right] ds =$$

$$= \int\limits_{-k_n}^{k_n} V'(u_n(s))u_n(s)ds.$$

Звідки, згідно (4.13), одержуємо

$$\lambda_0\|u_n\|^2_{k_n} \leq \int\limits_{-k_n}^{k_n} V'(u_n(s))u_n(s)ds. \tag{4.22}$$

За теоремою вкладення, функції $u_n(s)$ неперервні і рівномірно по n обмежені, тобто існує таке $R > 0$, що $|u_n(s)| \leq R$ для всіх n. Зафіксуємо довільне $p > 2$. Тоді, згідно умови (h_4), для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $C = C(\varepsilon) > 0$, що при $|r| \leq R$

$$|V'(r)| \leq \varepsilon |r| + C|r|^{p-1}.$$

Застосовуючи останню нерівність до нерівності (4.22), маємо

$$\lambda_0 \|u_n\|_{k_n}^2 \leq \varepsilon \int\limits_{-k_n}^{k_n} |u_n(s)|^2 ds + C \int\limits_{-k_n}^{k_n} |u_n(s)|^p ds =$$

$$= \varepsilon \|u_n\|_{L^2(-k_n,k_n)}^2 + C\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)}^p \leq$$

$$\leq \varepsilon \|u_n\|_{k_n}^2 + C\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)}^p.$$

Тоді для $\varepsilon = \frac{\lambda_0}{2}$ маємо

$$\frac{\lambda_0}{2} \|u_n\|_{k_n}^2 \leq C\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)}^p.$$

Але, згідно (4.21), $\|u_n\|_{k_n} \to 0$, що суперечить першій нерівності в (4.16). Одержана суперечність й доводить (4.20).

Зауважимо, що рівняння (4.4) інваріантне відносно зсувів. Тому, якщо $u(s)$ його розв'язок, то $u(s+y)$ також розв'язок для будь-якого $y \in \mathbb{R}$. Таким чином, замінюючи $u_n(s)$ на $u_n(s+y_n)$, можна вважати, що (4.20) виконується з $y_n = 0$.

Тепер оскільки $\{\|u_n\|_{k_n}\}$ обмежена, то, переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), можна вважати, що $u_n \to u$ слабко в $H^1_{loc}(\mathbb{R})$, тобто слабко в $H^1(a,b)$ для будь-якого скінченого інтервалу (a,b). За теоремою вкладення, $u_n \to u$ рівномірно на будь-якому скінченому інтервалі. Тому в нерівності (4.20) (з $y_n = 0$) можна перейти до границі та отримати, що

$$\int\limits_{-r}^{r} |u_n(s)|^2 ds \geq \delta.$$

А це означає, що $u \neq 0$.

Крок 2. Покажемо тепер, що $u \in E$. Для цього візьмемо довільне $b > 0$ і, в силу обмеженості $\{\|u_n\|_{k_n}\}$, при достатньо великих n маємо

$$\int\limits_{-b}^{b} \left[(u_n'(s))^2 + (u_n(s))^2\right] ds \leq \int\limits_{-k_n}^{k_n} \left[(u_n'(s))^2 + (u_n(s))^2\right] ds \leq C.$$

Оскільки $u_n \to u$ слабко в $H^1(-b,b)$, то

$$\int\limits_{-b}^{b} \left[(u'(s))^2 + (u(s))^2\right] ds \le \liminf_{n\to\infty} \int\limits_{-b}^{b} \left[(u_n'(s))^2 + (u_n(s))^2\right] ds \le C.$$

Звідси, в силу довільності b, випливає, що

$$\|u\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[(u'(s))^2 + (u(s))^2\right] ds \le C < +\infty,$$

і отже, $u \in E$.

Крок 3. І нарешті залишається показати, що u — розв'язок рівняння (4.4). Нехай $g(s)$ — довільна нескінченно диференційовна функція з компактним носієм $\operatorname{supp} g(s) \subset (-b,b)$. Тоді для достатньо великого n інтервал $(-k_n, k_n)$ містить $(-b,b)$ і, отже, коректно визначена функція $g_n \in E_{k_n}$, яка співпадає з g на $(-k_n, k_n)$. Оскільки u_n — критична точка функціоналу J_k при $k = k_n$, то

$$0 = \langle J'_{k_n}(u_n), g_n\rangle =$$

$$= \int\limits_{-k_n}^{k_n} \left[c^2 u_n'(s) g_n'(s) + c_1(u_n(s+\cos\varphi) + u_n(s-\cos\varphi) - 2u_n(s))g_n(s) + \right.$$

$$+c_2(u_n(s+\sin\varphi) + u_n(s-\sin\varphi) - 2u_n(s))g_n(s) + au_n(s)g_n(s) -$$

$$\left. -V'(u_n(s))g_n(s)\right] ds =$$

$$= \int\limits_{-b}^{b} \left[c^2 u_n'(s) g'(s) + c_1(u_n(s+\cos\varphi) + u_n(s-\cos\varphi) - 2u_n(s))g(s) + \right.$$

$$+c_2(u_n(s+\sin\varphi) + u_n(s-\sin\varphi) - 2u_n(s))g(s) + au_n(s)g(s) -$$

$$\left. -V'(u_n(s))g(s)\right] ds.$$

Оскільки $u_n \to u$ слабко в $H^1(-b,b)$, то в першому інтегралі правої частини останньої рівності можна перейти до границі при $n \to \infty$. За теоремою вкладення, $u_n \to u$ рівномірно на $[-b,b]$, тому і в другому інтегралі можна перейти до границі. Таким чином,

$$0 = \int\limits_{-b}^{b} \left[c^2 u'(s) g'(s) + c_1(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s))g(s) + \right.$$

$$+c_2(u(s+\sin\varphi)+u(s-\sin\varphi)-2u(s))g(s)+au(s)g(s)-$$

$$-V'(u(s))g(s)]\,ds=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[c^2u'(s)g'(s)+c_1(u(s+\cos\varphi)+u(s-\cos\varphi)-2u(s))g(s)+\right.$$

$$+c_2(u(s+\sin\varphi)+u(s-\sin\varphi)-2u(s))g(s)+au(s)g(s)-$$

$$-V'(u(s))g(s)]\,ds=\langle J'(u),g\rangle.$$

Звідси маємо, що $J'(u)=0$, оскільки g — довільна нескінченно диференційовна функція з компактним носієм, а множина таких функцій щільна в E. Таким чином, u — критична точка функціоналу J і, отже, за лемою 4.3, розв'язок рівняння (4.4), який задовольняє умови (4.6).

Оскільки $u\not\equiv 0$, то згідно умов (4.6), цей розв'язок, очевидно, не сталий. Теорему доведено. □

4.1.5. Експоненціальна оцінка профілю відокремленої хвилі

У цьому пункті за відповідних припущень доводиться експоненціальна оцінка для розв'язку задачі (4.4), (4.6).

Спочатку рівняння (4.4) запишемо у вигляді

$$Lu=f(u),\tag{4.23}$$

де

$$(Lu)(s)=-c^2u''(s)+c_1(u(s+\cos\varphi)+u(s-\cos\varphi)-2u(s))+$$

$$+c_2(u(s+\sin\varphi)+u(s-\sin\varphi)-2u(s))+au(s)\tag{4.24}$$

і $f(r)=V'(r)$. На функцію $f(r)$ накладемо більш слабшу, ніж (h_4), умову:

(h_4') *функція* $f(r)$ *неперервна на* $\mathbb{R}$, $f(0)=0$, $f(r)=o(r)$ *при* $r\to 0$, *і* $f(r)\neq 0$ *при* $r\neq 0$.

Нехай $u\in E$ – розв'язок рівняння (4.23). Тоді покладемо

$$g(s)=\begin{cases}\frac{f(u(s))}{u(s)}, & u(s)\neq 0,\\ 0, & u(s)=0.\end{cases}$$

Із умови (h_4') випливає, що

$$\lim_{s\to\pm\infty} g(s) = 0.$$

У цьому випадку рівняння (4.23) набуде вигляду

$$(Lu)(s) = g(s)u(s). \tag{4.25}$$

Застосовуючи до рівняння (4.25) перетворення Фур'є:

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} u(s) ds,$$

одержуємо рівняння

$$\widehat{Lu}(\xi) = \widehat{g \cdot u}(\xi). \tag{4.26}$$

Тоді

$$\widehat{Lu}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} \left[-c^2 u''(s) + c_1(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s)) + \right.$$
$$\left. + c_2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) - 2u(s)) + au(s)\right] ds.$$

Інтегруючи перший доданок двічі частинами, одержуємо

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s}(-c^2 u''(s)) ds = c^2\xi^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} u(s) ds = c^2\xi^2 \hat{u}(\xi).$$

Далі, оскільки для будь-якого $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s} u(s+t) ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi(s-t)} u(s) ds = e^{i\xi t}\hat{u}(\xi),$$

то

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s}(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s)) ds =$$
$$= \left(e^{i\xi\cos\varphi} + e^{-i\xi\cos\varphi} - 2\right)\hat{u}(\xi) = \left(e^{\frac{1}{2}i\xi\cos\varphi} - e^{-\frac{1}{2}i\xi\cos\varphi}\right)^2 \hat{u}(\xi) =$$
$$= -4\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\cos\varphi\right).$$

Аналогічно

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s}(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) - 2u(s)) ds =$$
$$= -4\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\sin\varphi\right).$$

Таким чином, рівняння (4.26) набуває вигляду

$$\sigma(\xi)\hat{u}(\xi) = \widehat{g \cdot u}(\xi), \tag{4.27}$$

де

$$\sigma(\xi) = c^2\xi^2 - 4c_1 \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\cos\varphi\right) - 4c_2 \sin^2\left(\frac{\xi}{2}\sin\varphi\right) + a.$$

Зауважимо, що функція $\sigma(\xi), \xi \in \mathbb{R}$, продовжується до цілої функції

$$\sigma(\zeta) = c^2\zeta^2 - 4c_1 \sin^2\left(\frac{\zeta}{2}\cos\varphi\right) - 4c_2 \sin^2\left(\frac{\zeta}{2}\sin\varphi\right) + a,\ \zeta \in \mathbb{C}.$$

Лема 4.10. *Нехай $a > 0$ та $c > 0$. Тоді існує таке β_0, що функція $\sigma(\zeta)$ не має нулів у смужці $|\mathrm{Im}\zeta| < \beta_0$.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що $\sigma(\xi) > 0$ при всіх $\xi \in \mathbb{R}$ і, отже, σ не перетворюється в нуль на дійсній прямій.

Нехай тепер A — довільне додатне число і нехай $|\mathrm{Im}\zeta| < A$. Записавши ζ у вигляді $\zeta = \xi + i\tau$, маємо, що $|\tau| < A$ та

$$\left|\sin\left(\frac{\zeta}{2}\cos\varphi\right)\right| = \frac{1}{2}\left|e^{\left(\frac{i\zeta}{2}\cos\varphi\right)} - e^{\left(\frac{-i\zeta}{2}\cos\varphi\right)}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|e^{\frac{i\xi}{2}\cos\varphi}e^{-\frac{\tau}{2}\cos\varphi} - e^{\frac{-i\xi}{2}\cos\varphi}e^{\frac{\tau}{2}\cos\varphi}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\left|e^{\frac{i\xi}{2}\cos\varphi}e^{-\frac{\tau}{2}\cos\varphi}\right| + \left|e^{\frac{-i\xi}{2}\cos\varphi}e^{\frac{\tau}{2}\cos\varphi}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\tau}{2}\cos\varphi} + e^{\frac{\tau}{2}\cos\varphi}\right) \le$$

$$\le e^{\frac{A}{2}|\cos\varphi|}.$$

Таким чином,

$$\left|c_1 \sin^2\left(\frac{\zeta}{2}\cos\varphi\right)\right| \le |c_1| e^{A|\cos\varphi|}.$$

Аналогічно

$$\left|c_2 \sin^2\left(\frac{\zeta}{2}\sin\varphi\right)\right| \le |c_2| e^{A|\sin\varphi|}.$$

Тоді

$$|\sigma(\xi + i\tau)| \ge c^2|\xi + i\tau|^2 - 4|c_1|e^{\frac{A}{2}|\cos\varphi|} - 4|c_2|e^{\frac{A}{2}|\sin\varphi|} - a.$$

А це означає, що якщо значення $|\xi|$ достатньо велике та $|\tau| < A$, то $|\sigma(\xi + i\tau)| > 0$ і, отже, $\sigma(\zeta) \neq 0$ для таких $\zeta = \xi + i\tau$. Таким чином, існує таке $B > 0$, що при $|\tau| < A$, $|\xi| \ge B$ функція $\sigma(\zeta)$ не перетворюється в нуль. Крім того, аналітична функція $\sigma(\zeta)$ в прямокутнику $|\tau| < A$, $|\xi| < B$ може мати не більше, ніж скінченне число нулів. Тоді можна вказати таке $\beta_0 > 0$, що в смужці $|\tau| < \beta_0$ функція $\sigma(\zeta)$ не має нулів. Лему доведено. $\square$

Далі знадобиться наступна лема (див. [95], лема 4.8).

Лема 4.11. *Нехай $f(s)$ і $g(s)$ обмежені невід'ємні функції на $\mathbb{R}$, причому $\lim\limits_{s\to\pm\infty} g(s) = 0$. Нехай також*

$$f(s) \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|s-t|} g(t) f(t) dt,$$

з $\beta > 0$. Тоді для всіх $\alpha \in (0, \beta)$ існує така стала $C = C(\alpha)$, що

$$f(s) \le C e^{-\alpha|s|}.$$

Основним результатом даного пункту є наступна теорема.

Теорема 4.3. *Нехай виконується умова (h_4'), $a > 0$ та $c > c_0$. Тоді якщо $u \in E$ — розв'язок рівняння (4.4), то для будь-якого $\alpha \in (0, \beta_0)$, де β_0 з леми 4.10, існує таке $C_\alpha > 0$, що*

$$|u(s)| \le C_\alpha e^{-\alpha|s|}. \tag{4.28}$$

Доведення. З рівняння (4.27) маємо

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sigma(\xi)} \widehat{g \cdot u}(\xi).$$

Покладемо

$$K(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{is\xi} \cdot \frac{1}{\sigma(\xi)} d\xi.$$

Тоді $u(s)$ можна подати у вигляді

$$u(s) = [K * (g \cdot u)](s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(s-t) g(t) u(t) dt, \tag{4.29}$$

де $*$ — операція згортки функцій.

За лемою 4.10 функція $\frac{1}{\sigma(\zeta)}$ аналітична в смужці $|\mathrm{Im}\zeta| < \beta_0$, тому за теоремою Пелі–Вінера (див. [207], теорема IX.14), для $K(s)$ правильна оцінка

$$|K(s)| \le C_\beta e^{-\beta|s|}$$

для будь-якого $\beta \in (0, \beta_0)$. Тоді з (4.29) маємо

$$|u(s)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta|s-t|} C_\beta |g(t)| \cdot |u(t)| dt.$$

Звідси, враховуючи лему 4.11, одержуємо оцінку (4.28). Теорему доведено.

□

Враховуючи те, що умова (h_4) сильніша, ніж (h_4'), одержуємо наступний наслідок.

Наслідок 4.1. *Нехай виконується умова (h_4), $a > 0$ та $c > c_0$. Тоді для розв'язку $u \in E$ рівняння (4.4) правильна експоненціальна оцінка (4.28) для будь-якого $\alpha \in (0, \beta_0)$.*

Приклад 4.1. *Розглянемо систему (4.1) з потенціалом*

$$U(r) = -\frac{a}{2} r^2 + \frac{d}{p} |r|^p,$$

де $a > 0$, $d > 0$, $p > 2$.

У цьому випадку система (4.1) матиме вигляд

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = c_1 \left(q_{n+1,m}(t) + q_{n-1,m}(t) - 2q_{n,m}(t) \right) + c_2 \left(q_{n,m+1}(t) + \right.$$

$$\left. + q_{n,m-1}(t) - 2q_{n,m}(t) \right) + a q_{n,m}(t) - d |q_{n,m}(t)|^{p-2} q_{n,m}(t), \ (n, m) \in \mathbb{Z}^2.$$

Підставляючи в це рівняння розв'язок вигляду $q_{n,m}(t) = u(n \cos\varphi + m \sin\varphi - ct)$, для профілю $u(s)$ одержуємо рівняння

$$c^2 u''(s) = c_1 (u(s + \cos\varphi) + u(s - \cos\varphi) - 2u(s)) +$$

$$+ c_2 (u(s + \sin\varphi) + u(s - \sin\varphi) - 2u(s)) + a u(s) - d |u(s)|^{p-2} u(s). \qquad (4.30)$$

Потенціал $V(r) = \frac{d}{p}|r|^p$ задовольняє умову (h_4), і тому за теоремою 4.1 для будь-яких $k > 0$ та $c > c_0$ рівняння (4.30) має $2k$-періодичний розв'язок u. Більше того, існують такі сталі $\varepsilon_0 > 0$ і $C_0 > 0$, які не залежать від k, що $\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C_0$. А за теоремою 4.2 для будь-якого $c > c_0$ рівняння (4.30) має несталий розв'язок $u \in E$, тобто існують дві несталі відокремлені біжучі хвилі з профілем u та швидкостями $\pm c$. Крім того, за теоремою 4.3 для $c > c_0$ профіль $u \in E$ має експоненціальну оцінку (4.28).

4.1.6. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системах лінійно зв'язаних осциляторів

У цьому пункті дослідимо питання існування дозвукових періодичних біжучих хвиль. З цією метою замість теореми про гірський перевал буде використана теорема про зачеплення (теорема B.4).

Наступна теорема встановлює існування нетривіальних періодичних біжучих хвиль для рівняння (4.4) для довільних швидкостей $c > 0$. Зокрема, сюди входять хвилі зі швидкостями $c > c_0$ і хвилі зі швидкостями $c \in (0, c_0]$. Існування перших (надзвукових хвиль) було встановлено за допомогою теореми про гірський перевал, а от існування дозвукових хвиль залишалося відкритим.

Теорема 4.4. *Нехай виконується умова* (h_4) *і* $a > 0$. *Тоді для будь-яких* $k > 0$ *і* $c > 0$ *рівняння (4.4) має нетривіальний розв'язок* u, *що задовольняє умову (4.5).*

Перевіримо виконання умов теореми про зачеплення (теорема B.4) для функціоналу J_k. Як і вище, почнемо з умови Пале–Смейла.

Лема 4.12. *За виконання умов теореми 4.4 функціонал* J_k *задовольняє умову Пале–Смейла.*

Доведення. Нехай $\{u_n\} \subset E_k$ — послідовність Пале–Смейла функціоналу J_k на деякому рівні b. Виберемо $\beta \in (\mu^{-1}, 2^{-1})$. Тоді для достатньо великих n маємо

$$b + 1 + \beta\|u_n\|_k \geq J_k(u_n) - \beta\langle J_k'(u_n), u_n\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2(u_n'(s))^2 - c_1(Au_n(s))^2 - c_2(Bu_n(s))^2 + a(u_n(s))^2\right] ds -$$

$$- \int\limits_{-k}^{k} \left[V(u_n(s)) - \beta V'(u_n(s))u_n(s)\right] ds.$$

Якщо $c_1 \le 0$ і $c_2 \le 0$, то

$$J_k(u_n) - \beta\langle J_k'(u_n), u_n\rangle \ge \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2(u_n'(s))^2 + a(u_n(s))^2\right] ds \ge$$

$$\ge \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \alpha_0 \|u_n\|_k^2,$$

де $\alpha_0 = \min\{c^2; a\}$. Отже,

$$b + 1 + \beta\|u_n\|_k \ge \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \alpha_0 \|u_n\|_k^2,$$

а це і означає, що $\{u_n\}$ — обмежена послідовність в E_k.

Якщо $c_1 > 0$ і $c_2 \le 0$, то

$$J_k(u_n) - \beta\langle J_k'(u_n), u_n\rangle \ge$$

$$\ge \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \left(c^2\|u_n'\|^2_{L^2(-k,k)} - c_1\|Au_n\|^2_{L^2(-k,k)} + a\|u_n\|^2_{L^2(-k,k)}\right) +$$

$$+C(\beta\mu - 1)\|Au_n\|^{\mu}_{L^{\mu}(-k,k)} - C_0.$$

Оскільки для $\mu > 2$ маємо

$$\|Au_n\|^2_{L^2(-k,k)} \le C\|Au_n\|^2_{L^{\mu}(-k,k)} \le K(\varepsilon) + \varepsilon\|Au_n\|^{\mu}_{L^{\mu}(-k,k)},$$

де $K(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то

$$b + 1 + \beta\|u_n\|_k \ge \left(\frac{1}{2} - \beta\right) c^2\|u_n'\|^2_{L^2(-k,k)} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) a\|u_n\|^2_{L^2(-k,k)} -$$

$$-\left(\frac{1}{2} - \beta\right) c_1\varepsilon\|Au_n\|^{\mu}_{L^{\mu}(-k,k)} - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) c_1 K(\varepsilon) +$$

$$+C(\beta\mu - 1)\|Au_n\|^{\mu}_{L^{\mu}(-k,k)} - C_0.$$

Вибираючи ε достатньо малим, отримаємо

$$b + 1 + \beta\|u_n\|_k \ge \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \left(c^2\|u_n'\|^2_{L^2(-k,k)} + a\|u_n\|^2_{L^2(-k,k)}\right) +$$

$$+C_1\|Au_n\|^{\mu}_{L^{\mu}(-k,k)} - C_0 \ge \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \alpha_0\|u_n\|_k^2 + C_1\|Au_n\|^{\mu}_{L^{\mu}(-k,k)} - C_0,$$

де $\alpha_0 = \min\{c^2; a\}$. Оскільки $\beta\mu - 1 > 0$, то $C_1 = C(\beta\mu - 1) > 0$, звідки маємо

$$b + 1 + \beta\|u_n\|_k \ge \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \alpha_0\|u_n\|_k^2 - C_0.$$

Остання нерівність і доводить обмеженість $\{u_n\}$.

Подібні міркування і у випадках, коли $c_1 \le 0$, $c_2 > 0$ та $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

Обмеженість послідовності $\{u_n\}$ означає, що переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), $u_n \to u$ слабко в E_k, а отже, $Au_n \to Au$ і

$Bu_n \to Bu$ слабко в E_k, і сильно в $L^2(-k,k)$ і $C([-k,k])$ (згідно компактності соболєвського вкладення).

Безпосередньо обчислюючи, маємо

$$c^2\|u_n - u\|_k^2 = \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2(u_n'(s) - u'(s))^2 + c^2(u_n(s) - u(s))^2\right] ds =$$

$$= \langle J_k'(u_n), u_n\rangle + c_1\|Au_n - Au\|_{L^2(-k,k)}^2 + c_2\|Bu_n - Bu\|_{L^2(-k,k)}^2 -$$

$$-a\|u_n - u\|_{L^2(-k,k)}^2 + \int\limits_{-k}^{k} \left[V'(u_n(s)) - V'(u(s))\right](u_n(s) - u(s))ds.$$

Очевидно, що всі доданки в правій частині останньої рівності збігаються до нуля. Перший згідно слабкої збіжності, а наступні — згідно сильної збіжності в $L^2(-k,k)$ і $C([-k,k])$.Таким чином, $\|u_n - u\|_k^2 \to 0$, що і доводить лему. □

Лема 4.13. *За виконання умов теореми 4.4 функціонал J_k задовольняє геометрію зачеплення.*

Доведення. Розглянемо оператор

$$(Lu)(s) := -c^2u''(s) + c_1(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s)) +$$

$$+c_2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) - 2u(s)) + au(s)$$

із $2k$-періодичними умовами. Оператор L є самоспряженим в $L^2(-k,k)$, обмеженим знизу та має дискретний спектр, який накопичується біля $+\infty$, тобто нижче нуля власних чисел є скінченна кількість.

Нехай Z — підпростір E_k, утворений власними функціями з додатними власними значеннями, а Y — підпростір E_k, утворений власними функціями з недодатними власними значеннями. Легко перевірити, що $Y \perp Z$ і $E_k = Y \oplus Z$.

Позначимо через Q_k квадратичну частину функціоналу J_k

$$Q_k(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k} \left[c^2(u'(s))^2 - c_1(Au(s))^2 - c_2(Bu(s))^2 + a(u(s))^2\right] ds.$$

Легко бачити, що

$$Q_k(y+z) = Q_k(y) + Q_k(z)$$

де $y \in Y$, $z \in Z$.

Зауважимо, що квадратична форма Q_k додатно визначена на Z, тобто

$$Q_k(u) \geq \alpha \|u\|_k^2,$$

з $\alpha > 0$. З умови (h_4) випливає, що для деякого $\varepsilon > 0$ існує таке $r_0 > 0$, що $|V(r)| \leq \varepsilon r^2$ при $|r| \leq r_0$. Тоді

$$J_k(u) \geq Q_k(u) - \varepsilon \int\limits_{-k}^{k} (u(s))^2 ds \geq Q_k(u) - \varepsilon \|u\|_k^2 \geq \delta \|u\|_k^2,$$

де $\delta > 0$. Отже, $J_k(u) > 0$ на $N = \{u \in Z : \ \|u\|_k = r\}$ з достатньо малим $r > 0$.

Зафіксуємо $z \in Z$, $\|z\|_k = 1$ та множину

$$M = \{u = y + \lambda z : \ y \in Y, \ \|u\|_k \leq \rho, \ \lambda \geq 0\}.$$

Маємо

$$J_k(y + \lambda z) = Q_k(y) + \lambda^2 Q_k(z) - \int\limits_{-k}^{k} V(y(s) + \lambda z(s)) ds.$$

За лемою 3.1 маємо, що існують такі сталі $d > 0$ та $d_0 \geq 0$, що правильна нерівність

$$V(r) \geq d|r|^\mu - d_0, \ \mu > 2.$$

Тоді, враховуючи, що $Q_k(y) \leq 0$,

$$J_k(y + \lambda z) \leq \lambda^2 \gamma_0 + 2kd_0 - d\|y + \lambda z\|^\mu_{L^\mu(-k,k)},$$

де $\gamma_0 = Q_k(z)$. Оскільки

$$\rho^2 = \|y + \lambda z\|_k^2 = \|y\|_k^2 + \lambda^2,$$

то $\lambda^2 \leq \rho^2$. До того ж, у скінченновимірних просторах всі норми еквівалентні. Отже,

$$\|y + \lambda z\|_{L^\mu(-k,k)} \geq c\|y + \lambda\|_k = c\rho,$$

$$J_k(y + \lambda z) \leq \gamma_0 \rho^2 + 2kd_0 - dc^\mu \rho^\mu.$$

Оскільки $\mu > 2$, то права частина від'ємна, якщо ρ — достатньо велике. Отже, $J_k(y + \lambda z) \leq 0$. Якщо $u \in M_0$, $\|u\|_k \leq \rho$ і $\lambda = 0$, то $u = y \in Y$ і, очевидно, що $J_k(u) \leq 0$. Таким чином, функціонал J_k задовольняє геометрію зачеплення.

Лему доведено. □

Доведення теореми 4.4. Леми 4.12 і 4.13 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про зачеплення (теорема B.4). Отже, J_k має ненульову критичну точку J_k, яка є розв'язком задачі (4.4), (4.5). Теорему доведено. □

Зауваження 4.1. *На відміну від теореми 4.1, теорема 4.4 встановлює існування тільки нетривіальних періодичних хвиль хоча із більш широким діапазоном швидкостей. Довести несталість цих розв'язків тут не вдається, оскільки в надзвуковому випадку є рівномірні по k оцінки розв'язків (4.16) і це дає несталість при великих періодах, а у дозвуковому випадку таких оцінок немає. Якби вони були, то за допомогою методу періодичних апроксимацій можна було б одержати і відокремлені хвилі. Теорема 4.4 наведена для ілюстрації варіаційного методу із використанням теореми про зачеплення. Оскільки відомі методи у цьому випадку застосувати не можна, то питання про існування несталих розв'язків залишається відкритим.*

Проте, дещо інакша ситуація у випадку, коли $a = 0$. Наступна теорема встановлює існування несталих періодичних біжучих хвиль.

Теорема 4.5. *Нехай виконується умова (h_4) і $a = 0$. Тоді для будь-яких $k > 0$ і $c > 0$ рівняння (4.4) має нетривіальний розв'язок u, що задовольняє умову (4.5). Більше того, цей розв'язок не сталий при достатньо великих значеннях k.*

Як і вище, перевіримо виконання умов теореми про зачеплення (теорема B.4) для функціоналу J_k.

Лема 4.14. *За виконання умов теореми 4.7 функціонал J_k задовольняє умову Пале–Смейла.*

Доведення. Подамо функціонал J_k у вигляді

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\Psi_k(u) - \int\limits_{-k}^{k} V(u(s))ds,$$

де

$$\Psi_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2(u'(s))^2 - c_1(Au(s))^2 - c_2(Bu(s))^2\right] ds.$$

Нехай $\{u_n\} \subset E_k$ — послідовність Пале–Смейла на деякому рівні b, тобто $J_k(u_n) \to b$ і $J_k'(u_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Доведемо методом від супротивного, що вона обмежена. Припустимо, що $\{u_n\}$ необмежена. Тоді (можливо після переходу до підпослідовності) $\|u_n\|_k \to \infty$ при $n \to \infty$.

Нехай E_k^+ — підпростір E_k, утворений власними функціями оператора L з додатними власними значеннями, E_k^- — підпростір E_k, утворений власними функціями з від'ємними власними значеннями, а E_k^0 — підпростір E_k, утворений власними функціями з нульовим власним значенням. Зауважимо, що при $c > c_0$ спектр оператора L накопичується біля $+\infty$ і, отже, невід'ємних власних значень є скінченна кількість. Причому, при достатньо великих c недодатних власних значень може взагалі не бути, а тому підпростори E_k^0 та E_k^- можуть бути нульовими. Легко перевірити, що всі вони попарно ортогональні і $E_k = E_k^+ \oplus E_k^0 \oplus E_k^-$. Тоді будь-яку функцію $u \in E_k$ можна подати у вигляді $u = u^+ + u^0 + u^-$ де $u^+ \in E_k^+$, $u^0 \in E_k^0$, $u^- \in E_k^-$.

Покладемо

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_k},$$

тоді $\|v_n\|_k = 1$ і, переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), $v_n \to v \in E_k$ слабко в E_k. Крім того, $v_n \to v$ сильно в $L^p(-k,k)$, $p > 2$, і майже скрізь. Припустимо, що $v \neq 0$. Легко перевірити, що

$$\Psi_k(u^+ + u^0 + u^-) = \Psi_k(u^+) + \Psi_k(u^-),$$

$$\|u\|_k^2 = \|u^+\|_k^2 + \|u^0\|_k^2 + \|u^-\|_k^2$$

для $u \in E_k$ і $\|u^+\|_k \leq \|u\|_k$, $\|u^-\|_k \leq \|u\|_k$.

Далі, оскільки $u_n = \|u_n\|_k v_n$, то

$$\frac{J_k(u_n)}{\|u_n\|_k} = \frac{1}{2}\Psi_k(v_n^+) + \frac{1}{2}\Psi_k(v_n^-) - \frac{1}{\|u_n\|_k^2}\int\limits_{-k}^{k} V(\|u_n\|_k v_n(s))ds. \tag{4.31}$$

Оскільки $J_k'(u_n) \to 0$, то ліва частина цієї рівності збігається до нуля. Покажемо, що права частина збігається до $-\infty$. Справді, $\Psi_k(v_n^+)$ обмежена, $\Psi_k(v_n^-) \le 0$, крім того, за лемою 3.1, існують такі сталі $d > 0$ та $d_0 \ge 0$, що правильна нерівність $V(r) \ge d|r|^\mu - d_0$, де $\mu > 2$. Тоді

$$\frac{1}{\|u_n\|_k^2}\int\limits_{-k}^{k} V(\|u_n\|_k v_n(s))ds \ge d\|u_n\|_k^{\mu-2}\int\limits_{-k}^{k} |v_n(s)|^\mu ds - d_0\|u_n\|_k^{-2} =$$

$$= d\|u_n\|_k^{\mu-2}\cdot\|u_n\|_{L^\mu(-k,k)}^\mu - d_0\|u_n\|_k^{-2} \to +\infty,$$

оскільки $\|v_n\|_{L^\mu(-k,k)}^\mu \to \|v\|_{L^\mu(-k,k)}^\mu \ne 0$. Таким чином, права частина рівності (4.31) прямує до $-\infty$ при $n \to \infty$. Одержали суперечність. Отже, $v = 0$.

Оскільки простір E_k розкладається на ортогональну пряму суму $E_k = E_k^+ \oplus E_k^0 \oplus E_k^-$, то $v_n^+ \to 0$, $v_n^0 \to 0$ і $v_n^- \to 0$ слабко в E_k. Але простори E_k^0 та E_k^- скінченновимірні, а тому $v_n^0 \to 0$ і $v_n^- \to 0$ сильно в E_k.

Припустимо тепер, що $v_n^+ \to 0$ сильно в E_k. Тоді

$$1 = \|v_n\|_k^2 = \|v_n^+\|_k^2 + \|v_n^0\|_k^2 + \|v_n^-\|_k^2 \to 0.$$

Одержали суперечність. Отже, $v_n^+ \not\to 0$ сильно в E_k і $\|v_n^+\|_k \ge \varepsilon > 0$ для деякого $\varepsilon > 0$ (після переходу до підпослідовності).

Таким чином, маємо

$$0 \leftarrow \frac{J_k(u_n)}{\|u_n\|_k^2} - \frac{1}{\mu\|u_n\|_k^2}\langle J_k'(u_n), u_n\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\int\limits_{-k}^{k}\left[c^2(v_n'(s))^2 - c_1(Av_n(s))^2 - c_2(Bv_n(s))^2\right]ds-$$

$$-\frac{1}{\|u_n\|_k^2}\int\limits_{-k}^{k}\left[V(u_n(s)) - \frac{1}{\mu}V'(u_n(s))u_n(s)\right]ds =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\Psi_k(v_n) + \frac{1}{\|u_n\|_k^2}\int\limits_{-k}^{k}\left[\frac{1}{\mu}V'(u_n(s))u_n(s) - V(u_n(s))\right]ds =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\left(\Psi_k(v_n^+) + \Psi_k(v_n^-)\right) +$$

$$+\frac{1}{\|u_n\|_k^2}\int\limits_{-k}^{k}\left[\frac{1}{\mu}V'(u_n(s))u_n(s) - V(u_n(s))\right]ds.$$

Але, в силу умови (h_4), інтеграл в правій частині останньої рівності невід'ємний. Крім того, $\Psi_k(v_n^-) \to 0$ і на просторі E_k^+ квадратична частина Ψ_k додатно визначена, тобто $\Psi_k(v_n^+) \geq \varepsilon_0 > 0$, оскільки $\|v_n^+\|_k \geq \varepsilon$. Тобто

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\Psi_k(v_n^+) + \frac{1}{\|u_n\|_k^2}\int\limits_{-k}^{k}\left[\frac{1}{\mu}V'(u_n(s))u_n(s) - V(u_n(s))\right]ds \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\varepsilon_0 > 0.$$

Але ліва частина збігається до нуля. Одержали суперечність. Отже, послідовність $\{u_n\}$ обмежена. А це означає (див. доведення леми 4.12), після переходу до підпослідовності, що $\|u_n - u\|_k \to 0$. Лему доведено. $\square$

Наступна лема доводиться аналогічно до леми 4.13.

Лема 4.15. *За виконання умов теореми 4.7 функціонал J_k задовольняє геометрію зачеплення.*

Доведення теореми 4.5. Леми 4.14 і 4.15 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про зачеплення (теорема B.4). Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in E_k$, яка є розв'язком задачі (4.4), (4.5). Покажемо, що $u \neq Const$. Справді, нехай $u(s) = \alpha \neq 0$ сталий розв'язок рівняння (4.4). Тоді з рівняння (4.4) при $a = 0$ маємо, що $V'(\alpha) = 0$, але це суперечить умові (h_4). Теорему доведено. $\square$

Таким чином, у підрозділі 4.1 одержано результати про існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль, які поширюють результати статті [138] на випадок двовимірної ґратки. Більше того, тут вдалося розширити проміжки для значень періодів і швидкостей, визначити більш точно «швидкість звуку». Зазначимо, що у згаданій статті період $k \geq 1$, а швидкість хвилі

c задовольняла нерівність $c^2 > \max\{0, a\}$. Відзначимо ще одну статтю [61], в якій Г. Йосс (G. Iooss) та К. Кіршгаснер (K. Kirschgässner) за допомогою методів теорії біфуркацій встановили існування біжучих хвиль для лінійно зв'язаних ланцюгів зі слабким зв'язком. А для двовимірних ґраток є лише одна стаття [41] з подібними результатами, в якій М. Фецкан (M. Fečkan) та В. Ротос (V. Rothos) за допомогою топологічних і варіаційних методів встановили існування періодичних біжучих хвиль для системи вигляду:

$$\ddot{q}_{n,m} = \Delta q_{n,m} - f(q_{n,m}),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2,$$

де $(\Delta q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}$ — двовимірний дискретний оператор Лапласа, з припущенням, що нелінійність f — непарна і 2π-періодична.

4.2. Біжучі хвилі в системах нелінійно зв'язаних осциляторів

У цьому підрозділі вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці:

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = W_1'(q_{n+1,m}(t) - q_{n,m}(t)) - W_1'(q_{n,m}(t) - q_{n-1,m}(t)) + W_2'(q_{n,m+1}(t) - \\ - q_{n,m}(t)) - W_2'(q_{n,m}(t) - q_{n,m-1}(t)) - U'(q_{n,m}(t)),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{4.32}$$

де $W_1, W_2, U \in C^1(\mathbb{R})$ — потенціали взаємодії та зовнішній потенціал відповідно.

Підставляючи (4.3) в (4.32), одержуємо рівняння для профілю $u(s)$ біжучої хвилі

$$c^2 u''(s) = W_1'(u(s+\cos\varphi) - u(s)) - W_1'(u(s) - u(s-\cos\varphi)) + \\ + W_2'(u(s+\sin\varphi) - u(s)) - W_2'(u(s) - u(s-\sin\varphi)) - U'(u(s)). \tag{4.33}$$

Як і вище, під розв'язком рівняння (4.33) розуміється функція $u \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, яка задовольняє це рівняння.

4.2.1. Основні припущення. Варіаційне формулювання задачі

Всюди далі в цьому підрозділі розглядаються потенціали вигляду:

(i_4) $W_1(r) = \frac{c_1}{2}r^2 + f_1(r)$, $W_2(r) = \frac{c_2}{2}r^2 + f_2(r)$, $U(r) = -\frac{a}{2}r^2 + V(r)$, *де* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Також припускається, що неквадратична частина $h \in \{f_1; f_2; V\}$ кожного з цих потенціалів задовольняє умови:

(ii_4) $h(0) = h'(0) = 0$ *і* $h'(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$*;*

(iii_4) *існує* $\mu > 2$ *таке, що*

$$0 < \mu h'(r) \leq r h'(r),\ r \neq 0.$$

Неважко переконатися в тому (див. лему 3.1), що з цих умов випливає існування сталих $d > 0$ і $d_0 \geq 0$ таких, що

$$h(r) \geq d|r|^\mu - d_0.$$

Крім того, виконується нерівність (3.6)

$$h(r) \leq \sigma(|r|)r^2$$

леми 3.2.

Розглянемо функціонали

$$J_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - W_1(Au(s)) - W_2(Bu(s)) - U(u(s))\right] ds,$$

$$J(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - W_1(Au(s)) - W_2(Bu(s)) - U(u(s))\right] ds,$$

визначені на просторах E_k та E відповідно.

Безпосереднім обчисленням одержуються наступні два твердження.

Лема 4.16. *Нехай виконуються умови* (i_4)*–*(iii_4)*. Тоді функціонали* J_k *та* J *належать класу* C^1*, а їх похідні визначаються формулами*

$$\langle J_k'(u), v\rangle = \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2 u'(s)v'(s) - W_1'(Au(s))Av(s) - W_2'(Bu(s))Bv(s) - \right.$$
$$\left. - U'(u(s))v(s)\right] ds,\ u, v \in E_k,$$

$$\langle J'(u), v\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[c^2 u'(s)v'(s) - W_1'(Au(s))Av(s) - W_2'(Bu(s))Bv(s) - \right.$$

$$-U'(u(s))v(s)]\,ds,\ u,v\in E.$$

Доведення. Розглянемо функціонал J_k (доведення у випадку J аналогічне). Подамо його у вигляді

$$J_k(u)=\Psi_k(u)-S_k(u)-\Phi_k(u),$$

де

$$\Psi_k(u)=c^2\Psi_k^{(1)}(u)-c_1\Psi_k^{(2)}(u)-\Psi_k^{(3)}(u)+a\Psi_k^{(4)}(u),$$

$$\Psi_k^{(1)}(u)=\frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k}(u'(s))^2ds=\frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(-k,k)},$$

$$\Psi_k^{(2)}(u)=\frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k}(Au(s))^2ds=\frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k}(u(s+\cos\varphi)-u(s))^2ds,$$

$$\Psi_k^{(3)}(u)=\frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k}(Bu(s))^2ds=\frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k}(u(s+\sin\varphi)-u(s))^2ds,$$

$$\Psi_k^{(4)}(u)=\frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k}(u(s))^2ds,$$

$$S_k(u)=\frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k}V(u(s))ds,$$

$$\Phi_k(u)=\frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k}\{f_1(Au(s))+f_2(Bu(s))\}\,ds.$$

Таким чином, враховуючи лему 4.2, достатньо розглянути тільки функціонал Φ_k.

Оскільки для будь-якого $u\in E_k$ функції Au і Bu неперервні, то $\Phi_k<\infty$. Безпосереднім обчисленням неважко показати (див. лему 4.2), що похідна функціоналу Φ_k існує і обчислюється за формулою

$$\langle\Phi_k'(u),v\rangle=\int\limits_{-k}^{k}\{f_1'(Au(s))Av(s)+f_2'(Bu(s))Bv(s)\}\,ds.$$

Перевіримо неперервність цієї похідної.

Нехай $\|v\|_k\le 1$ і $u_n\to u$ в E_k. Тоді $Au_n\to Au$ і $Bu_n\to Bu$ рівномірно на $[-k,k]$ і

$$|\langle \Phi_k'(u_n)-\Phi_k'(u),v\rangle|\leq$$

$$\leq \|Av\|_{L^1(-k,k)}\cdot\|f_1'(Au_n)-f_1'(Au)\|_{L^\infty(-k,k)}+$$

$$+\|Bv\|_{L^1(-k,k)}\cdot\|f_2'(Bu_n)-f_2'(Bu)\|_{L^\infty(-k,k)}\leq$$

$$\leq (2k)^{\frac{1}{2}}\|Av\|_{L^2(-k,k)}\cdot\|f_1'(Au_n)-f_1'(Au)\|_{L^\infty(-k,k)}+$$

$$+(2k)^{\frac{1}{2}}\|Bv\|_{L^2(-k,k)}\cdot\|f_2'(Bu_n)-f_2'(Bu)\|_{L^\infty(-k,k)}\leq$$

$$\leq (2k)^{\frac{1}{2}}\left[\|f_1'(Au_n)-f_1'(Au)\|_{L^\infty(-k,k)}+\|f_2'(Bu_n)-f_2'(Bu)\|_{L^\infty(-k,k)}\right].$$

Тут перехід від L^1-норми до L^2-норми здійснено за допомогою нерівності Гельдера. Оскільки $f_1'(Au_n)\to f_1'(Au)$, $f_2'(Bu_n)\to f_2'(Bu)$ рівномірно на $[-k,k]$, то лему доведено. □

Лема 4.17. *Нехай виконуються умови (i_4)—(iii_4). Тоді критичні точки функціоналів J_k та J є розв'язками рівняння (4.33), які задовольняють умови (4.5) та (4.6) відповідно.*

Доведення. Розглянемо функціонал J (доведення у випадку J_k аналогічне). Нехай u є критичною точкою функціоналу J. Тоді, вибравши довільно $v(s)=w(s)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, матимемо

$$0=\langle J'(u),w\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[c^2u'(s)w'(s)-W_1'(Au(s))Aw(s)-\right.$$

$$\left.-W_2'(Bu(s))Bw(s)-U'(u(s))w(s)\right]ds=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[-c^2u''(s)w(s)-W_1'(Au(s))Aw(s)-W_2'(Bu(s))Bw(s)-\right.$$

$$\left.-U'(u(s))w(s)\right]ds=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[-c^2u''(s)w(s)-W_1'(u(s+\cos\varphi)-u(s))(w(s+\cos\varphi)-w(s))-\right.$$

$$\left.-W_2'(u(s+\sin\varphi)-u(s))(w(s+\sin\varphi)-w(s))-U'(u(s))w(s)\right]ds=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[-c^2u''(s)w(s)-W_1'(u(s+\cos\varphi)-u(s))w(s+\cos\varphi)+\right.$$

$$+W_1'(u(s+\cos\varphi)-u(s))w(s)-W_2'(u(s+\sin\varphi)-u(s))w(s+\sin\varphi)+$$

$$+W_2'(u(s+\sin\varphi)-u(s))w(s)-U'(u(s))w(s)]\,ds=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[-c^2u''(s)w(s)-W_1'(u(s)-u(s-\cos\varphi))w(s)+\right.$$

$$+W_1'(u(s+\cos\varphi)-u(s))w(s)-W_2'(u(s)-u(s-\sin\varphi))w(s)+$$

$$+W_2'(u(s+\sin\varphi)-u(s))w(s)-U'(u(s))w(s)]\,ds=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[-c^2u''(s)+W_1'(u(s+\cos\varphi)-u(s))-W_1'(u(s)-u(s-\cos\varphi))+\right.$$

$$+W_2'(u(s+\sin\varphi)-u(s))-W_2'(u(s)-u(s-\sin\varphi))-U'(u(s))]\,w(s)ds.$$

Це означає, що u задовольняє рівняння (4.33) в смислі узагальнених функцій, тобто u — слабкий розв'язок цього рівняння. Оскільки, за теоремою вкладення, $u\in C_b(\mathbb{R})$, причому $W_1'(r)$, $W_2'(r)$ і $U'(r)$ неперервні функції, то права частина рівняння (4.33) є неперервною. Звідси отримуємо, що $u''(s)$ — неперервна, тобто u — розв'язок рівняння (4.33) у звичайному розумінні. Лему доведено. □

Аналогічно, як і вище, введемо в розгляд множину

$$\Omega(c_1,c_2,a)=\left\{c>0:\ \min_{\xi\in\mathbb{R}}\sigma(\xi)\ge 0\right\},$$

де

$$\sigma(\xi)=c^2\xi^2-4c_1\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\cos\varphi\right)-4c_2\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\sin\varphi\right)+a,$$

і величину

$$c_0=c_0(c_1,c_2,a):=\inf_{c>0}\Omega(c_1,c_2,a),$$

яку теж будемо називати *швидкістю звуку*.

Подамо функціонали J_k та J у вигляді

$$J_k(u)=\frac{1}{2}\Psi_k(u)-S_k(u),$$

$$J(u)=\frac{1}{2}\Psi(u)-S(u),$$

де

$$\Psi_k(u)=\int\limits_{-k}^{k}\left[c^2(u'(s))^2-c_1(Au(s))^2-c_2(Bu(s))^2+a(u(s))^2\right]ds,$$

$$S_k(u)=\int\limits_{-k}^{k}\left[f_1(Au(s))+f_2(Bu(s))+V(u(s))\right]ds,$$

$$\Psi(u)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[c^2(u'(s))^2-c_1(Au(s))^2-c_2(Bu(s))^2+a(u(s))^2\right]ds,$$

$$S(u)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(Au(s))+f_2(Bu(s))+V(u(s))\right]ds.$$

Лема 4.18. *Нехай виконуються умови* (i_4)—(iii_4), $a>0$ *і* $c>c_0$. *Тоді існують такі* $\varepsilon_0>0$ *і* $\gamma>0$ *які не залежать від* k, *що для нетривіальних критичних точок функціоналів* J_k *та* J *правильні відповідно нерівності*

$$\varepsilon_0\le\|u\|_k^2\le\gamma J_k(u), \tag{4.34}$$

$$\varepsilon_0\le\|u\|^2\le\gamma J(u). \tag{4.35}$$

Доведення. Нехай u — критична точка функціоналу J_k. Тоді $J_k'(u)=0$ і

$$J_k(u)=J_k(u)-\frac{1}{\mu}\langle J_k'(u),u\rangle=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\Psi_k(u)-\int\limits_{-k}^{k}\left[f_1(Au(s))-\frac{1}{\mu}f_1'(Au(s))Au(s)\right]ds-$$

$$-\int\limits_{-k}^{k}\left[f_2(Bu(s))-\frac{1}{\mu}f_2'(Bu(s))Bu(s)\right]ds-$$

$$-\int\limits_{-k}^{k}\left[V(u(s))-\frac{1}{\mu}V'(u(s))u(s)\right]ds\ge\frac{\mu-2}{2\mu}\Psi_k(u).$$

Використовуючи лему 4.4, отримуємо, що

$$J_k(u)\ge\frac{\mu-2}{2\mu}\lambda_0\|u\|_k^2.$$

Звідси випливає права нерівність з нерівностей (4.34).

Доведемо тепер ліву нерівність з нерівностей (4.34). Для критичної точки $u \in E_k$ функціоналу J_k маємо, що $\langle J_k'(u), u\rangle = 0$ тобто

$$\int_{-k}^{k} \left[c^2(u'(s))^2 - c_1(Au(s))^2 - c_2(Bu(s))^2 + a(u(s))^2\right] ds =$$

$$= \int_{-k}^{k} \left[f_1'(Au(s))Au(s) + f_2'(Bu(s))Bu(s) + V'(u(s))u(s)\right] ds.$$

Звідси, як і вище, маємо

$$\lambda_0 \|u\|_k^2 \le \int_{-k}^{k} \left[f_1'(Au(s))Au(s) + f_2'(Bu(s))Bu(s) + V'(u(s))u(s)\right] ds. \tag{4.36}$$

Застосовуючи лему 3.2 до (4.36), одержуємо

$$\lambda_0 \|u\|_k^2 \le \tilde{\sigma}\left(\|u\|_{C([-k,k])}\right) \int_{-k}^{k} (u(s))^2 ds,$$

де $\tilde{\sigma}(r)$ — монотонно зростаюча неперервна функція від $r \ge 0$, $\tilde{\sigma}(0) = 0$ і $\lim\limits_{r\to+\infty} \tilde{\sigma}(r) = +\infty$.

Оскільки за теоремою вкладення $\|u\|_{C([-k,k])} \le C\|u\|_k$ зі сталою C, що не залежить від k, то

$$\lambda_0 \|u\|_k^2 \le \tilde{\sigma}(C\|u\|_k)\|u\|_k^2.$$

Але $u \ne 0$, тому

$$\tilde{\sigma}(C\|u\|_k) \ge \lambda_0,$$

звідки випливає перша з нерівностей (4.34) з $\varepsilon_0^{\frac{1}{2}} = C^{-1}\tilde{\sigma}^{-1}(\lambda_0)$.

Нерівності (4.35) доводяться аналогічно, з тими ж сталими. Лему доведено. □

4.2.2. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системах нелінійно зв'язаних осциляторів

Як і у підрозділі 4.1.3, встановимо існування нетривіальних періодичних біжучих хвиль за допомогою теореми про гірський перевал (теорема B.1). Для цього, згідно леми 4.17, достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k.

Наступна теорема є основним результатом даного пункту.

Теорема 4.6. *Нехай виконуються умови* (i_4)*—*(iii_4) *і* $a > 0$*. Тоді для будь-яких* $k > 0$ *і* $c > c_0$ *рівняння (4.33) має нетривіальний розв'язок* u*, що задовольняє умову (4.5). Крім того, існують такі додатні сталі* ε_0*,* C_0*,* ε *і* C*, які не залежать від* k*, що*

$$\varepsilon_0 \le \|u\|_k^2 \le C_0, \tag{4.37}$$

$$\varepsilon \le J_k(u) \le C. \tag{4.38}$$

Більше того, цей розв'язок не сталий при достатньо великих значеннях k*.*

Перевіримо виконання умов теореми про гірський перевал для функціоналу J_k.

Лема 4.19. *За виконання умов теореми 4.6 функціонал* J_k *задовольняє умову Пале–Смейла.*

Доведення. Нехай $\{u_n\}$ — послідовність Пале-Смейла на деякому рівні b. Тоді для достатньо великих n маємо

$$\begin{gathered} b + 1 + \frac{1}{\mu}\|u_n\|_k \ge J_k(u_n) - \frac{1}{\mu}\langle J_k'(u_n), u_n\rangle = \\ = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\Psi_k(u) + \\ + \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{1}{\mu} f_1'(Au_n(s))Au_n(s) - f_1(Au_n(s))\right] ds + \\ + \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{1}{\mu} f_2'(Bu_n(s))Bu_n(s) - f_2(Bu_n(s))\right] ds + \\ + \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{1}{\mu} V'(u_n(s))u_n(s) - V(u_n(s))\right] ds \ge \\ \ge \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\lambda_0\|u_n\|_k^2. \end{gathered}$$

Звідси послідовність $\{u_n\}$ обмежена.

Оскільки простір E_k гільбертів, то переходячи до підпослідовності з тим самим позначенням, $u_n \to u$ слабко в E_k і сильно в $L^2(-k, k)$, як і в

$C([-k,k])$ (згідно компактності соболєвського вкладення). А отже, $Au_n \to Au$ і $Bu_n \to Bu$ сильно в $L^2(-k,k)$ і $C([-k,k])$.

Безпосередньо обчислюючи, маємо

$$\|u_n - u\|_k^2 = \int\limits_{-k}^{k} \left(c^2(u_n'(s) - u'(s))^2 + c^2(u_n(s) - u(s))^2\right) ds =$$

$$= \langle J_k'(u_n) - J_k'(u), u_n - u\rangle + c_1\|Au_n - Au\|^2_{L^2(-k,k)} + c_2\|Bu_n - Bu\|^2_{L^2(-k,k)} +$$

$$+a\|u_n - u\|^2_{L^2(-k,k)} + \int\limits_{-k}^{k} \left(f_1'(Au_n(s)) - f_1'(Au(s))\right)\left(Au_n(s) - Au(s)\right) ds +$$

$$+ \int\limits_{-k}^{k} \left(f_2'(Bu_n(s)) - f_2'(Bu(s))\right)\left(Bu_n(s) - Bu(s)\right) ds +$$

$$+ \int\limits_{-k}^{k} \left(V'(u_n(s)) - V'(u(s))\right)\left(u_n(s) - u(s)\right) ds.$$

Всі члени в правій частині збігаються до нуля. Перший згідно слабкої збіжності, а наступні — згідно сильної збіжності в $L^2(-k,k)$ і $C([-k,k])$. Таким чином, $\|u_n - u\|_k \to 0$ при $n \to \infty$, що і доводить лему. □

Лема 4.20. *За виконання умов теореми 4.6 існують такі $r_0 > 0$ і $\alpha_0 > 0$, які не залежать від k, що* $\inf\limits_{\|u\|_k = r_0} J_k(u) > \alpha_0$.

Доведення. Оскільки $J_k(u) = \frac{1}{2}\Psi_k(u) - S_k(u)$, то за лемою 4.4 маємо

$$J_k(u) + S_k(u) = \frac{1}{2}\Psi_k(u) \geq \frac{\lambda_0}{2}\|u\|_k^2.$$

Покажемо, що $S_k(u) = o(\|u\|_k^2)$. Згідно умови (ii_4), для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $|r| \leq \delta$

$$\max\{f_1(r), f_2(r), V(r)\} \leq \frac{\varepsilon r^2}{2}.$$

Покладемо

$$r_0 = \frac{\delta}{\max\{l_1(k), l_2(k), C_s\}}$$

де $l_1(k), l_2(k)$ з леми 4.1, C_s — стала з соболєвського вкладення $E_k \subset C([-k,k])$. І візьмемо $u \in E_k$ з нормою $\|u\|_k = r_0$. Тоді, враховуючи лему 4.1, для майже всіх s маємо

$$|u(s)| \leq \|u\|_{L^\infty(-k,k)} \leq C_s \|u\|_k \leq \delta,$$

$$|Au(s)| \leq \|Au\|_{L^\infty(-k,k)} \leq l_1(k)\|u'\|_k \leq \delta,$$

$$|Bu(s)| \leq \|Bu\|_{L^\infty(-k,k)} \leq l_2(k)\|u'\|_k \leq \delta.$$

Таким чином,

$$S_k(u) \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{-k}^{k} \left[(u(s))^2 + (Au(s))^2 + (Bu(s))^2\right] ds \leq \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_k^2.$$

В силу довільності ε, маємо

$$S_k(u) = o(\|u\|_k^2).$$

Зокрема, якщо вибрати ε так, щоб $0 < \varepsilon < \lambda_0$, то за лемою 4.4, одержимо

$$J_k(u) \geq (\lambda_0 - \varepsilon)\frac{r_0^2}{2} > 0.$$

Лему доведено. □

Лема 4.21. *За виконання умов теореми 4.6 існує елемент $e \in E_k$ з нормою $\|e\|_k > r_0$ такий, що $J_k(e) \leq 0$.*

Доведення. За лемою 3.1, для всіх r

$$\min\{f_1(r), f_2(r), V(r)\} \geq d|r|^\mu - d_0.$$

Нехай $u \in E_k \setminus \{0\}$ та $r > 0$. Тоді маємо

$$J_k(ru) = \frac{1}{2}\int_{-k}^{k} \left[c^2 r^2 (u'(s))^2 - c_1 r^2 (Au(s))^2 - c_2 r^2 (Bu(s))^2 + ar^2 (u(s))^2\right] ds -$$

$$- \int_{-k}^{k} [f_1(A(ru(s))) + f_2(B(ru(s))) + V(ru(s))]\, ds \leq$$

$$\leq \frac{r^2}{2}\Psi_k(u) - dr^\mu \int_{-k}^{k} [|u(s)|^\mu + |Au(s)|^\mu + |Bu(s)|^\mu]\, ds + 6kd_0.$$

Оскільки $\mu > 2$, то $J_k(ru) \to -\infty$ при $r \to +\infty$, а отже, існує таке $r_0 = r_0(u) > 0$, що $J_k(ru) \leq 0$ для всіх $r > r_0$. Лему доведено. □

Доведення теореми 4.6. Леми 4.19 — 4.21 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал, а отже, він має ненульову критичну точку $u \in E_k$. За лемою 4.19, u — розв'язок задачі (4.33), (4.5). Оцінки (4.37), (4.38) випливають із леми 4.18 і теореми про гірський перевал. Несталість розв'язку доводиться аналогічно до того, як це зроблено у доведенні теореми 4.1. Теорему доведено. $\square$

4.2.3. Існування надзвукових відокремлених біжучих хвиль в системах нелінійно зв'язаних осциляторів

Тепер доведемо існування відокремлених біжучих хвиль з тими ж самими припущеннями, з якими встановлено існування періодичних хвиль. Біжучі хвилі в даному випадку знаходяться як критичні точки функціоналу J, які будуються за допомогою переходу до границі в критичних точках функціоналу J_k при $k \to \infty$.

Основним результатом цього пункту є наступна теорема.

Теорема 4.7. *Нехай виконуються умови (i_4)—(iii_4) і $a > 0$. Тоді для будь-якого $c > c_0$ рівняння (4.33) має несталий розв'язок u, який задовольняє умови (4.6), а отже, існують дві несталі відокремлені біжучі хвилі з профілем u та швидкостями $\pm c$.*

Доведення. Крок 1. Виберемо довільну послідовність $\{k_n\}$, $k_n \to \infty$. Позначимо через $u_n \in E_{k_n}$ $2k$-періодичний розв'язок рівняння (4.33), побудований в теоремі 4.6 при $k = k_n$.

Переходячи до підпослідовності, можна вважати, що існують такі $\delta > 0$, $r > 0$ і послідовність $\{y_n\} \subset \mathbb{R}$, що

$$\int\limits_{y_n - r}^{y_n + r} (u_n(s))^2 ds \geq \delta. \tag{4.39}$$

Припустимо протилежне, тоді для будь-якого $r > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}} \int\limits_{y-r}^{y+r} (u_n(s))^2 ds = 0.$$

Крім того, в силу нерівності (4.37), послідовність $\{\|u_n\|_{k_n}\}$ обмежена. Тому за лемою 4.9,

$$\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)} \to 0. \tag{4.40}$$

Так як $J'_{k_n}(u_n) = 0$, то як і у доведенні теореми 4.2,

$$\int\limits_{-k_n}^{k_n} \left[c^2(u_n'(s))^2 - c_1(Au_n(s))^2 - c_2(Bu_n(s))^2 + a(u_n(s))^2\right] ds =$$

$$= \int\limits_{-k_n}^{k_n} [f_1'(Au_n(s))Au_n(s) + f_2'(Bu_n(s))Bu_n(s) + V'(u_n(s))u_n(s)]\, ds,$$

звідки

$$\lambda_0 \|u_n\|_{k_n}^2 \le \int\limits_{-k_n}^{k_n} [f_1'(Au_n(s))Au_n(s) + f_2'(Bu_n(s))Bu_n(s)$$

$$+V'(u_n(s))u_n(s)]\, ds. \tag{4.41}$$

В силу теореми вкладення, функції $u_n(s)$ неперервні і рівномірно по n обмежені, тобто існує таке $R > 0$, що $|u_n(s)| \le R$ для всіх n. Зафіксуємо довільне $p > 2$. Тоді, згідно умови (iii_4), для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $C = C(\varepsilon) > 0$, що при $|r| \le R$

$$|h'(r)| \le \varepsilon|r| + C|r|^{p-1},\ h \in \{f_1; f_2; V\}.$$

Тоді, згідно нерівності (4.41), маємо

$$\lambda_0 \|u_n\|_{k_n}^2 \le \varepsilon \int\limits_{-k_n}^{k_n} |u_n(s)|^2 ds + C \int\limits_{-k_n}^{k_n} |u_n(s)|^p ds \le$$

$$\le \varepsilon \|u_n\|_{k_n}^2 + C\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)}^p.$$

Зокрема, при $\varepsilon = \frac{\lambda_0}{2}$, одержуємо

$$\frac{\lambda_0}{2} \|u_n\|_{k_n}^2 \le C\|u_n\|_{L^p(-k_n,k_n)}^p.$$

Враховуючи (4.40), $\|u_n\|_{k_n} \to 0$. Але це суперечить першій нерівності в (4.37), що й доводить (4.39).

В силу інваріантності рівняння (4.33) відносно зсувів, замінюючи $u_n(s)$ на $u_n(s + y_n)$, можна вважати, що (4.39) виконується з $y_n = 0$.

Тоді оскільки $\{\|u_n\|_{k_n}\}$ обмежена, то, переходячи до підпослідовності, $u_n \to u$ слабко в $H^1_{loc}(\mathbb{R})$. І за теоремою вкладення, $u_n \to u$ рівномірно на будь-якому скінченому інтервалі. Тому в нерівності (4.39) (з $y_n = 0$) можна перейти до границі:

$$\int\limits_{-r}^{r} |u_n(s)|^2 ds \geq \delta.$$

Звідси $u \neq 0$.

Крок 2. Доведемо, що $u \in E$. Для цього візьмемо довільне $b > 0$. Тоді при достатньо великих n,

$$\int\limits_{-b}^{b} \left[(u_n'(s))^2 + (u_n(s))^2\right] ds \leq \int\limits_{-k_n}^{k_n} \left[(u_n'(s))^2 + (u_n(s))^2\right] ds \leq C$$

в силу обмеженості $\{\|u_n\|_{k_n}\}$. Оскільки $u_n \to u$ слабко в $H^1(-b,b)$, то

$$\int\limits_{-b}^{b} \left[(u'(s))^2 + (u(s))^2\right] ds \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_{-b}^{b} \left[(u_n'(s))^2 + (u_n(s))^2\right] ds \leq C.$$

Далі, оскільки b довільне, то

$$\|u\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[(u'(s))^2 + (u(s))^2\right] ds \leq C < +\infty.$$

А це означає, $u \in E$.

Крок 3. Покажемо тепер, що u — розв'язок рівняння (4.33). Нехай $g(s)$ — довільна нескінченно диференційовна функція з компактним носієм $\operatorname{supp} g(s) \subset (-b,b)$. Для достатньо великого n інтервал $(-k_n,k_n)$ містить $(-b,b)$ і, отже, коректно визначена функція $g_n \in E_{k_n}$, яка збігається з g на $(-k_n,k_n)$. Оскільки $J_{k_n}'(u_n) = 0$, то

$$0 = \langle J_{k_n}'(u_n), g_n\rangle =$$

$$= \int\limits_{-k_n}^{k_n} \left[c^2 u_n'(s) g_n'(s) + c_1(u_n(s+\cos\varphi) + u_n(s-\cos\varphi) - 2u_n(s))g_n(s) + \right.$$

$$\left. + c_2(u_n(s+\sin\varphi) + u_n(s-\sin\varphi) - 2u_n(s))g_n(s) + a u_n(s) g_n(s)\right] ds -$$

$$- \int\limits_{-k_n}^{k_n} \left[f_1'(Au_n(s))Ag_n(s) + f_2'(Bu_n(s))Bg_n(s) + V'(u_n(s))g_n(s)\right] ds =$$

$$= \int\limits_{-b}^{b} \left[c^2 u_n'(s) g_n'(s) + c_1(u_n(s+\cos\varphi) + u_n(s-\cos\varphi) - 2u_n(s))g_n(s) + \right.$$

$$+c_2(u_n(s+\sin\varphi)+u_n(s-\sin\varphi)-2u_n(s))g_n(s)+au_n(s)g_n(s)]ds-$$

$$-\int_{-b}^{b}\left[f_1'(Au_n(s))Ag_n(s)+f_2'(Bu_n(s))Bg_n(s)+V'(u_n(s))g_n(s)\right]ds.$$

У першому інтегралі правої частини цієї рівності можна перейти до границі при $n\to\infty$, оскільки $u_n\to u$ слабко в $H^1(-b,b)$. За теоремою вкладення, $u_n\to n$ рівномірно на $[-b,b]$, тому і в другому інтегралі можна перейти до границі. Отже,

$$0=\int_{-b}^{b}\left[c^2u'(s)g'(s)+c_1(u(s+\cos\varphi)+u(s-\cos\varphi)-2u(s))g(s)+\right.$$

$$+c_2(u(s+\sin\varphi)+u(s-\sin\varphi)-2u(s))g(s)+au(s)g(s)]ds-$$

$$-\int_{-b}^{b}\left[f_1'(Au(s))Ag(s)+f_2'(Bu(s))Bg(s)+V'(u(s))g(s)\right]ds=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[c^2u'(s)g'(s)+c_1(u(s+\cos\varphi)+u(s-\cos\varphi)-2u(s))g(s)+\right.$$

$$+c_2(u(s+\sin\varphi)+u(s-\sin\varphi)-2u(s))g(s)+au(s)g(s)]ds-$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1'(Au(s))Ag(s)+f_2'(Bu(s))Bg(s)+V'(u(s))g(s)\right]ds=$$

$$=\langle J'(u),g\rangle.$$

Тоді оскільки g — довільна нескінченно диференційовна функція з компактним носієм, а множина таких функцій щільна в E, то $J'(u)=0$. Таким чином, u — критична точка функціоналу J і, отже, розв'язок задачі (4.33), (4.6). В силу крайових умов (4.6) цей розв'язок не сталий. Теорему доведено. □

Зауважимо, що міркуючи аналогічно, як у підрозділі 4.2.6, для профілю відокремленої хвилі неважко одержати експоненціальну оцінку вигляду (4.28).

4.2.4. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системах нелінійно зв'язаних осциляторів

За допомогою теореми про зачеплення (теорема B.4), аналогічно як і вище, можна встановити існування нетривіальних періодичних біжучих хвиль з будь-якою швидкістю $c > 0$. Однак довести несталість цих розв'язків при $a > 0$ тут також не вдасться, оскільки в надзвуковому випадку є рівномірні по k оцінки розв'язків і це дає несталість при великих періодах, а у дозвуковому випадку таких оцінок немає. Проте це можна зробити у випадку, коли $a = 0$.

Наступна теорема встановлює існування несталих періодичних біжучих хвиль з довільною швидкістю, зокрема, дозвукових хвиль.

Теорема 4.8. *Нехай виконуються умови (i_4)–(iii_4) і $a = 0$. Тоді для будь-яких $k > 0$ і $c > 0$ рівняння (4.33) має нетривіальний розв'язок u, що задовольняє умову (4.5). Більше того, цей розв'язок не сталий при достатньо великих значеннях k.*

Перевіримо для функціоналу J_k виконання умов теореми про зачеплення (теорема B.4). Почнемо з умови Пале–Смейла.

Лема 4.22. *За виконання умов теореми 4.8 функціонал J_k задовольняє умову Пале–Смейла.*

Доведення. Подамо функціонал J_k у вигляді

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\Psi_k(u) - \int_{-k}^{k} \left[f_1(Au(s)) + f_2(Bu(s)) + V(u(s))\right] ds,$$

де

$$\Psi_k(u) = \int_{-k}^{k} \left[c^2(u'(s))^2 - c_1(Au(s))^2 - c_2(Bu(s))^2\right] ds.$$

Нехай $\{u_n\}$ — послідовність Пале–Смейла на деякому рівні b. Доведемо методом від супротивного, що вона обмежена. Припустимо, що $\{u_n\}$ необмежена. Тоді (можливо після переходу до підпослідовності) $\|u_n\|_k \to \infty$ при

$n \to \infty$.

Розглянемо оператор

$$(Lu)(s) := -c^2u''(s) + c_1(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s)) +$$
$$+c_2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) - 2u(s))$$

із $2k$-періодичними умовами. Як і в доведенні леми 4.14, позначимо через E_k^+ — підпростір E_k, утворений власними функціями оператора L з додатними власними значеннями, через E_k^- — підпростір, утворений власними функціями з від'ємними власними значеннями, а через E_k^0 підпростір, утворений власними функціями з нульовим власним значенням. Тоді $E_k = E_k^+ \oplus E_k^0 \oplus E_k^-$ і будь-яку функцію $u \in E_k$ можна подати у вигляді $u = u^+ + u^0 + u^-$, де $u^+ \in E_k^+$, $u^0 \in E_k^0$ і $u^+ \in E_k^-$.

Позначимо через

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_k}.$$

Очевидно, що $\|v_n\| = 1$. Тоді, переходячи до підпослідовності, $v_n \to v$ слабко в E_k і сильно в $L^p(-k,k)$, $p \geq 2$, і майже скрізь. Покажемо методом від супротивного, що $v = 0$. Припустимо протилежне. Легко бачити, що

$$\Psi_k(u^+ + u^0 + u^-) = \Psi_k(u^+) + \Psi_k(u^-),$$
$$\|u\|_k^2 = \|u^+\|_k^2 + \|u^0\|_k^2 + \|u^-\|_k^2$$

для $u \in E_k$ і $\|u^+\|_k \leq \|u\|_k$, $\|u^-\|_k \leq \|u\|_k$.

Тоді

$$0 \leftarrow \frac{J_k(u_n)}{\|u_n\|_k} = \frac{1}{2}\Psi_k(v_n^+) + \frac{1}{2}\Psi_k(v_n^-) - \frac{1}{\|u_n\|_k^2}\int\limits_{-k}^{k} \left[f_1\left(\|Au_n\|_k Av_n(s)\right) + \right.$$
$$\left. +f_2\left(\|Bu_n\|_k Bv_n(s)\right) + V\left(\|u_n\|_k v_n(s)\right)\right] ds. \tag{4.42}$$

Покажемо, що права частина рівності (4.42) збігається до $-\infty$. Дійсно, $\Psi_k(v_n^+)$ обмежена, $\Psi_k(v_n^-) \leq 0$. Крім того, існують такі сталі $d > 0$ та $d_0 \geq 0$, що $h(r) \geq d|r|^\mu - d_0$, де $h \in \{f_1, f_2, V\}$, $\mu > 2$. Тоді, враховуючи (iii_4), маємо

$$\frac{1}{\|u_n\|_k^2}\int\limits_{-k}^{k} \left[f_1\left(\|Au_n\|_k Av_n(s)\right) + f_2\left(\|Bu_n\|_k Bv_n(s)\right) + V\left(\|u_n\|_k v_n(s)\right)\right] ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{\|u_n\|_k^2} \int\limits_{-k}^{k} V\left(\|u_n\|_k v_n(s)\right) ds \geq d\|u_n\|_k^{\mu-2} \int\limits_{-k}^{k} |v_n(s)|^\mu ds - d_0\|u_n\|_k^{-2} =$$

$$= d\|u_n\|_k^{\mu-2} \cdot \|v_n|_{L^\mu(-k,k)}^\mu - d_0\|u_n\|_k^{-2} \to +\infty,$$

оскільки $\|v_n|_{L^\mu(-k,k)}^\mu \to \|v|_{L^\mu(-k,k)}^\mu$, тобто права частина рівності (4.42) прямує до $-\infty$ при $n \to \infty$. Одержана суперечність доводить, що $v = 0$.

Оскільки простір E_k розкладається на ортогональну пряму суму, то $v_n^+ \to 0$, $v_n^0 \to 0$ і $v_n^- \to 0$ слабко в E_k. Але простори E_k^0 та E_k^- скінченновимірні, а тому $v_n^0 \to 0$ і $v_n^- \to 0$ сильно в E_k. Якщо $v_n^+ \to 0$ сильно в E_k, то $1 = \|v_n^+\|_k^2 = \|\beta_n\|_k^2 + \|v_n^+\|_k^2 \to 0$, що неможливо. Це означає, $v_n^+ \not\to 0$ сильно в E_k і $\|v_n^+\|_k \geq \varepsilon > 0$ для деякого $\varepsilon > 0$ (після переходу до підпослідовності).

Таким чином, маємо

$$0 \leftarrow \frac{J_k(u_n)}{\|u_n\|_k^2} - \frac{1}{\mu\|u_n\|_k^2}\langle J_k'(u_n), u_n\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2(v_n'(s))^2 - c_1(Av_n(s))^2 - c_2(Bv_n(s))^2\right] ds -$$

$$- \frac{1}{\|u_n\|_k^2} \int\limits_{-k}^{k} \left[f_1(Au_n(s)) - \frac{1}{\mu} f_1'(Au_n(s))Au_n(s)\right] ds -$$

$$- \frac{1}{\|u_n\|_k^2} \int\limits_{-k}^{k} \left[f_2(Bu_n(s)) - \frac{1}{\mu} f_2'(Bu_n(s))Bu_n(s)\right] ds -$$

$$- \frac{1}{\|u_n\|_k^2} \int\limits_{-k}^{k} \left[V(u_n(s)) - \frac{1}{\mu} V'(u_n(s))u_n(s)\right] ds =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \Psi_k(v_n) + \frac{1}{\|u_n\|_k^2} \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{1}{\mu} f_1'(Au_n(s))Au_n(s) - f_1(Au_n(s))\right] ds +$$

$$+ \frac{1}{\|u_n\|_k^2} \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{1}{\mu} f_2'(Bu_n(s))Bu_n(s) - f_2(Bu_n(s))\right] ds +$$

$$+ \frac{1}{\|u_n\|_k^2} \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{1}{\mu} V'(u_n(s))u_n(s) - V(u_n(s))\right] ds =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \left(\Psi_k(v_n^+) + \Psi_k(v_n^-)\right) +$$

$$+\frac{1}{\|u_n\|_k^2} \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{1}{\mu} f_1'(Au_n(s))Au_n(s) - f_1(Au_n(s))\right] ds +$$

$$+\frac{1}{\|u_n\|_k^2} \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{1}{\mu} f_2'(Bu_n(s))Bu_n(s) - f_2(Bu_n(s))\right] ds +$$

$$+\frac{1}{\|u_n\|_k^2} \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{1}{\mu} V'(u_n(s))u_n(s) - V(u_n(s))\right] ds.$$

Але, в силу умови (iii_4), інтеграли в правій частині останньої рівності невід'ємні. Крім того, $\Psi_k(v_n^-) \to 0$ і на просторі E_k^+ квадратична частина Ψ_k додатно визначена, тобто $\Psi_k(v_n^+) \geq \varepsilon_0 > 0$, оскільки $\|v_n^+\|_k \geq \varepsilon$. Тобто права частина останньої рівності $\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \varepsilon_0 > 0$. Але ліва частина збігається до нуля. Одержали суперечність. Таким чином, послідовність $\{u_n\}$ обмежена.

Як і вище, з обмеженості послідовності $\{u_n\}$, переходячи до підпослідовності, одержуємо, що $u_n \to u$ слабко в E_k, а отже, $Au_n \to Au$ і $Bu_n \to Bu$ слабко в E_k, і сильно в $L^2(-k,k)$ та $C([-k,k])$.

Тоді

$$c^2\|u_n - u\|_k^2 = \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2(u_n'(s) - u'(s))^2 + c^2(u_n(s) - u(s))^2\right] ds =$$

$$= \langle J_k'(u_n), u_n\rangle + c_1\|Au_n - Au\|_{L^2(-k,k)}^2 + c_2\|Bu_n - Bu\|_{L^2(-k,k)}^2 +$$

$$+ \int\limits_{-k}^{k} \left[f_1'(Au_n(s)) - f_1'(Au(s))\right](Au_n(s) - Au(s)) ds +$$

$$+ \int\limits_{-k}^{k} \left[f_2'(Bu_n(s)) - f_2'(Bu(s))\right](Bu_n(s) - Bu(s)) ds +$$

$$+ \int\limits_{-k}^{k} \left[V'(u_n(s)) - V'(u(s))\right](u_n(s) - u(s)) ds.$$

Легко бачити, що всі члени в правій частині останньої рівності збігаються до нуля, а отже, $\|u_n - u\|_k^2 \to 0$. Лему доведено. $\square$

Лема 4.23. *За виконання умов теореми 4.8 функціонал J_k задовольняє геометрію зачеплення.*

Доведення. Як у доведенні леми 4.13, позначимо через Z — підпростір E_k, утворений власними функціями оператора L з додатними власними значеннями, а через Y — підпростір, утворений власними функціями з недодатними власними значеннями. Тоді $Y \perp Z$ і $E_k = Y \oplus Z$.

Покладемо

$$Q_k(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k} \left[c^2(u'(s))^2 - c_1(Au(s))^2 - c_2(Bu(s))^2\right] ds.$$

Тоді $Q_k(y+z) = Q_k(y)+Q_k(z)$, де $y \in Y$, $z \in Z$. Зауважимо, що квадратична форма Q_k додатно визначена на Z, тобто $Q_k(u) \geq \alpha\|u\|_k^2$, де $\alpha > 0$.

З умов (i_4)—(iii_4) випливає, що для деякого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $r_0 > 0$, що $\max\{|f_1(r)|, |f_2(r)|, |V(r)|\} \leq \varepsilon r^2$ при $|r| \leq r_0$. Тоді

$$J_k(u) \geq Q_k(u) - \varepsilon \int\limits_{-k}^{k} (u(s))^2 ds \geq Q_k(u) - \varepsilon\|u\|_k^2 \geq \delta\|u\|_k^2,$$

де $\delta > 0$. Таким чином, на $N = \{u \in Z:\ \|u\|_k = r\}$,

$$J_k(u) > 0$$

з достатньо малим $r > 0$.

Тепер зафіксуємо $z \in Z$, $\|z\|_k = 1$ та множину

$$M = \{u = y + \lambda z:\ y \in Y,\ \|u\|_k \leq \rho,\ \lambda \geq 0\}$$

і доведемо, що $J_k(u) \leq 0$ на $M_0 = \partial M$ за умови, що ρ достатньо велике. Нагадаємо, що

$$M_0 = \{u = y + \lambda z:\ y \in Y,\ \|u\|_k = \rho \text{ і } \lambda \geq 0,\ \text{або } \|u\|_k \leq \rho \text{ і } \lambda = 0\}.$$

Оскільки існують такі сталі $d > 0$, $d_0 \geq 0$, що правильні нерівності

$$\min\{f_1(r), f_2(r), V(r)\} \geq d|r|^\mu - d_0,\ \mu > 2,$$

то, враховуючи, що $Q_k(y) \leq 0$

$$J_k(y + \lambda z) \leq \lambda^2\gamma_0 + 6kd_0 -$$

$$-d\left(\|A(y+\lambda z)\|^\mu_{L^\mu(-k,k)} + \|B(y+\lambda z)\|^\mu_{L^\mu(-k,k)} + \|y+\lambda z\|^\mu_{L^\mu(-k,k)}\right) \leq$$

$$\le \lambda^2\gamma_0 + 6kd_0 - C\|y+\lambda z\|^{\mu}_{L^{\mu}(-k,k)},$$

де $\gamma_0 = Q_k(z)$, $C > 0$. Оскільки

$$\rho^2 = \|y+\lambda z\|_k^2 = \|y\|_k^2 + \lambda^2,$$

то $\lambda^2 \le \rho^2$. Крім того, у скінченновимірних просторах всі норми еквівалентні. Отже,

$$\|y+\lambda z\|_{L^{\mu}(-k,k)} \ge c\|y+\lambda z\|_k = c\rho,$$

$$J_k(y+\lambda z) \le \gamma_0\rho^2 + 6kd_0 - Cc^{\mu}\rho^{\mu}.$$

Оскільки $\mu > 2$, то при достатньо великих ρ права частина цієї нерівності від'ємна. Таким чином, $J_k(y+\lambda z) \le 0$.

Тепер якщо $u \in M_0$, $\|u\|_k \le \rho$ і $\lambda = 0$, то $u = y \in Y$ і $J_k(u) \le 0$. Отже, функціонал J_k задовольняє геометрію зачеплення. Лему доведено. □

Доведення теореми 4.8. Згідно лем 4.22 і 4.23, функціонал J_k задовольняє всі умови теореми про зачеплення (теорема B.4), а отже, він має нетривіальну критичну точку $u \in E_k$, яка є $2k$-періодичним розв'язком рівняння (4.33). Доведемо, що цей розв'язок не сталий. Дійсно, нехай $u(s) = \beta$ сталий розв'язок рівняння (4.33). Тоді з цього рівняння при $a = 0$ маємо, що $V'(\beta) = 0$, але це суперечить умові (iii_4). Теорему доведено. □

Таким чином, у підрозділі 4.2 одержано результати про існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль для систем нелінійно зв'язаних осциляторів, які поширюють результати статті [82] на випадок систем на двовимірних ґратках з різними потенціалами взаємодії відносно просторових координатних осей n і m. Більше того, тут вдалося розширити проміжок для значень швидкостей періодичних хвиль, який включає дозвуковий випадок. Зазначимо, що у згаданій статті доведено існування несталих надзвукових періодичних хвиль при $a = 0$, а також нетривіальних надзвукових періодичних і відокремлених хвиль при $a > 0$. Зауважимо, що для систем нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірних ґратках подібних результатів немає.

Висновки до розділу 4

Четвертий розділ дисертації присвячений питанню існування біжучих хвиль в нескінченних системах зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Він складається з двох підрозділів, які в свою чергу складаються з шести та п'яти пунктів відповідно.

Розглядаються біжучі хвилі двох типів: періодичні та відокремлені. Профіль періодичної біжучої хвилі є періодичною функцією з періодом $2k$, а профіль відокремленої хвилі перетворюється в нуль на нескінченності.

Перший підрозділ присвячений питанню існування нетривіальних періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах лінійно зв'язаних осциляторів. У перших двох пунктах цього підрозділу розглядається формулювання задачі про біжучі хвилі та варіаційне формулювання задачі. Залежно від типу біжучої хвилі розглядаються функціонали J_k та J. Показано, що критичні точки цих функціоналів є розв'язками відповідних задач. У третьому та четвертому пунктах встановлено існування несталих надзвукових періодичних та відокремлених біжучих хвиль. Тут також, як і в попередньому розділі, використано теорему про гірський перевал для періодичних біжучих хвиль та метод періодичних апроксимацій для відокремлених біжучих хвиль. Доведено також, що профіль відокремленої біжучої хвилі експоненціально спадає на нескінченності (п'ятий пункт). Наведено приклад, в якому встановлені вище результати застосовуються до дискретного рівняння типу Клейна–Ґордона. У шостому пункті одержано результати про існування періодичних біжучих хвиль з довільною швидкістю $c > 0$, зокрема, дозвукових хвиль. Для цього використано теорему про зачеплення, яка вимагає, крім виконання умови Пале–Смейла, щоб функціонал задовольняв геометрію зачеплення. Тут доведено існування нетривіальних хвиль при $a > 0$, і несталих хвиль при $a = 0$.

Другий підрозділ присвячений питанню існування нетривіальних періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах нелінійно зв'язаних осциляторів. У першому пункті цього підрозділу розглядається варіаційне формулювання задачі. У другому пункті за допомогою методу критичних точок і теореми про гірський перевал встановлено існування несталих надзвукових періодичних біжучих хвиль. Аналогічно, як і в першому підрозділі, за допомогою методу періодичних апроксимацій, також одержано існування надзвукових відокремлених хвиль (третій пункт). У четвертому пункті за допомогою теореми про зачеплення у випадку $a = 0$ доведено існування несталих дозвукових періодичних біжучих хвиль.

Результати даного розділу опубліковано в працях [144, 147–149, 158] і додатково висвітлено в [19, 159, 163, 165, 167, 171].

РОЗДІЛ 5

БІЖУЧІ ХВИЛІ В ДИСКРЕТНИХ РІВНЯННЯХ ТИПУ СИНУС-ҐОРДОНА НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

У цьому розділі вивчаються дискретні рівняння типу синус–Ґордона на двовимірній ґратці:

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = W_1'(q_{n+1,m}(t) - q_{n,m}(t)) - W_1'(q_{n,m}(t) - q_{n-1,m}(t)) + W_2'(q_{n,m+1}(t)-$$

$$-q_{n,m}(t)) - W_2'(q_{n,m}(t) - q_{n,m-1}(t)) - K \sin q_{n,m}(t),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \qquad (5.1)$$

де $W_1, W_2 \in C^1(\mathbb{R})$, $K > 0$.

Система (5.1) фактично є системою (4.32) із зовнішнім потенціалом вигляду $U(r) = K(1 - \cos r)$, який не задовольняє умови розділу 4 (після виділення квадратичної частини не виконується умова Амброзетті-Рабіновіца).

5.1. Формулювання задачі про біжучі хвилі

Підставляючи (4.3) в (5.1), одержуємо рівняння для профілю $u(s)$ біжучої хвилі

$$c^2 u''(s) = W_1'(u(s + \cos\varphi) - u(s)) - W_1'(u(s) - u(s - \cos\varphi))+$$

$$+W_2'(u(s + \sin\varphi) - u(s)) - W_2'(u(s) - u(s - \sin\varphi)) - K \sin u(s), \qquad (5.2)$$

де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$.

Всюди далі під розв'язком рівняння (5.2) розуміється функція $u \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, яка задовольняє це рівняння.

Тут будемо вивчати три види біжучих хвиль: періодичні, гомоклінічні та гетероклінічні. У випадку періодичних біжучих хвиль для знаходження профілю хвилі достатньо знайти розв'язок рівняння (5.2) з умовою періодичності

$$u(s+2k) = u(s), \ s \in \mathbb{R}, \tag{5.3}$$

де $k > 0$ — деяке число. Профіль гомоклінічної біжучої хвилі є розв'язком рівняння (5.2) з крайовими умовами на нескінченності

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = \pi. \tag{5.4}$$

А профіль гетероклінічної хвилі задовольняє такі крайові умови

$$\lim_{s\to+\infty} u(s) = \pi, \ \lim_{s\to-\infty} u(s) = -\pi. \tag{5.5}$$

Зауважимо, що за допомогою заміни

$$u(s) = v(s) + \pi,$$

рівняння (5.2) зводиться до рівняння

$$c^2 v''(s) = W_1'(v(s+\cos\varphi) - v(s)) - W_1'(v(s) - v(s-\cos\varphi)) +$$

$$+W_2'(v(s+\sin\varphi) - v(s)) - W_2'(v(s) - v(s-\sin\varphi)) + K\sin v(s), \tag{5.2'}$$

розв'язки якого відрізняються на π від розв'язків рівняння (5.2). Більше того, крайові умови (5.4) зводяться до умов

$$\lim_{s\to\pm\infty} v(s) = v(\pm\infty) = 0,$$

які накладалися на профіль відокремлених біжучих хвиль, що вивчалися у попередньому розділі. А умова періодичності для v залишається тією ж, що й для u. Тому для встановлення існування періодичних і гомоклінічних хвиль ми будемо розглядати рівняння (5.2') з u замість v, а для гетероклінічних — (5.2).

5.2. Існування періодичних біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус–Ґордона

Розглянемо рівняння

$$c^2 u''(s) = W_1'(u(s+\cos\varphi) - u(s)) - W_1'(u(s) - u(s-\cos\varphi)) +$$

$$+W_2'(u(s+\sin\varphi) - u(s)) - W_2'(u(s) - u(s-\sin\varphi)) + K\sin u(s). \tag{5.6}$$

З рівнянням (5.6) та умовою (5.3) пов'язується функціонал

$$J_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - W_1(Au(s)) - W_2(Bu(s)) + \right.$$
$$\left. + K(1 - \cos u(s))\right] ds, \tag{5.7}$$

де

$$(Au(s)) := u(s + \cos\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\cos\varphi} u'(\tau)d\tau,$$

$$(Bu(s)) := u(s + \sin\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\sin\varphi} u'(\tau)d\tau.$$

Функціонал (5.7) визначений на просторі $E_k = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : \; u(s + 2k) = u(s)\}$ з нормою

$$\|u\|_k = \left(\|u\|^2_{L^2(-k,k)} + \|u\|^2_{L^2(-k,k)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_{-k}^{k} [(u(s))^2 + (u'(s))^2]ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Надалі передбачається, що потенціали задовольняють умову:

(h_5) $W_i(r) = \frac{c_i^2}{2}r^2 + f_i(r)$, $i = 1, 2$, *де* $f_i \in C^1(\mathbb{R})$, *причому* $f_i(0) = f_i'(0) = 0$ *і* $f_i'(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$, *та існує таке* $\mu > 2$, *що*

$$0 < \mu f_i(r) \le f_i'(r)r, \; r \ne 0.$$

Неважко переконатися в тому, що якщо виконується умова (h_5), то існують такі сталі $d > 0$ і $d_0 \ge 0$, що $f_i(r) \ge d|r|^\mu - d_0$ (див. лему 3.2). Більше того, існує таке $\tilde{d} > 0$, що $f_i(r) \ge \tilde{d}(|r|^\mu - |r|^2)$ (див. [95, с. 83]).

Далі, використовуючи підхід, реалізований в [73], введемо в розгляд допоміжний функціонал

$$\tilde{J}_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - W_1(Au(s)) - W_2(Bu(s)) + \right.$$
$$\left. + K[1 - \cos u(s) + f(u(s))]\right] ds,$$

де

$$f(r) = \frac{1}{2}\left(\max\left\{0; |r| - \frac{\pi}{2}\right\}\right)^2.$$

Очевидно, що $J_k(u) \le \tilde{J}_k(u)$ та $J_k(u) = \tilde{J}_k(u)$ для всіх u з $\|u\|_{L^\infty([-k,k])} \le \frac{\pi}{2}$. Більше того, f є неперервно диференційовною функцією, $1-\cos r + f(r) \le \frac{r^2}{2}$ та існує таке $\omega = \omega(\mu) > 0$, що для всіх $r \in \mathbb{R}$

$$\omega r^2 \le 1 - \cos r + f(r) - \frac{1}{\mu} r \sin r - \frac{1}{\mu} r f'(r). \tag{5.8}$$

Далі нам знадобляться такі величини:

$$c_0^2 = c_0^2(\varphi) := c_1^2 \cos^2 \varphi + c_2^2 \sin^2 \varphi$$

та

$$\alpha = \min \left\{ \frac{\mu - 2}{2\mu}(c^2 - c_0^2), \omega K \right\}.$$

Безпосереднім обчисленням одержуються наступні дві леми (див. попередній розділ).

Лема 5.1. *Нехай виконується умова (h_5). Тоді функціонали J_k та $\tilde{J}_k$ належать класу C^1, а їхні похідні визначаються формулами*

$$\langle J_k'(u), u \rangle = \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2 u'(s) h'(s) - W_1'(Au(s)) Ah(s) - W_2'(Bu(s)) Bh(s) - \right.$$
$$\left. + K \sin(u(s)) h(s) \right] ds,$$

$$\langle \tilde{J}_k'(u), u \rangle = \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2 u'(s) h'(s) - W_1'(Au(s)) Ah(s) - W_2'(Bu(s)) Bh(s) - \right.$$
$$\left. + K(\sin u(s) + f'(u(s))) h(s) \right] ds,$$

для $u, h \in E_k$.

Лема 5.2. *Критичні точки функціоналу J_k є розв'язками рівняння (5.6), які задовольняють умову (5.3).*

В наступних двох лемах для функціоналу J_k перевіряються умови теореми про гірський перевал.

Лема 5.3. *Нехай виконується умова (h_5) і $c^2 > c_0^2$. Тоді існують такі $e \in E_k$ і $r > 0$, що $\|e\|_k > r$ і $\beta := \inf\limits_{\|u\|_k = r} J_k(u) > 0 = J_k(0) \ge J_k(e)$.*

Доведення. Візьмемо $\varepsilon > 0$ таке, що $c^2 - c_0^2 - 2\varepsilon > 0$ і виберемо достатньо мале $r \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ таке, що $|f_i(x)| \le \varepsilon x^2$ для всіх $x \le r$. Тоді, використовуючи лему 4.1 і нерівність $1-\cos r \geq \frac{r^2}{4}$ при $|r|<\frac{\pi}{2}$, для кожного u з $\|u\|_{L^2(-k,k)} \leq \|u\|_k < \frac{\pi}{2}$ маємо

$$J_k(u) \geq \int_{-k}^{k} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - \frac{c_1^2}{2}(Au(s))^2 - \frac{c_2^2}{2}(Bu(s))^2 - \varepsilon(Au(s))^2 - \varepsilon(Bu(s))^2 + \right.$$

$$\left. + K(1-\cos u(s))\right] ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}(c^2 - c_0^2 - 2\varepsilon)\|u'\|^2_{L^2(-k,k)} + \frac{K}{4}\|u\|^2_{L^2(-k,k)} \geq \alpha_0\|u\|_k^2,$$

де $\alpha_0 = \min\left\{\frac{1}{2}(c^2-c_0^2-2\varepsilon), \frac{K}{4}\right\} > 0$. Отже, для $\|u\|_k = r$,

$$J_k(u) \geq \alpha_0 r^2 > 0.$$

Для того, щоб знайти $e \in E_k$ таке, що $\|e\|_k > r$ і $J_k(e) \leq J_k(0)$, зафіксуємо $u_0 \in E_k \setminus \{0\}$. Тоді для всіх $\lambda \geq 0$, згідно нерівності $1-\cos r \leq \frac{r^2}{2}$, маємо

$$J_k(\lambda u_0) \leq \frac{c^2}{2}\lambda^2\|u_0'\|^2_{L^2(-k,k)} - d\lambda^\mu\|Au_0\|^\mu_{L^\mu(-k,k)} - d\lambda^\mu\|Bu_0\|^\mu_{L^\mu(-k,k)} +$$

$$+4kd_0 + \frac{K}{2}\lambda^2\|u_0\|^2_{L^2(-k,k)}.$$

Звідси, враховуючи, що $\mu > 2$, $d>0$, $d_0 \geq 0$, маємо

$$\lim_{\lambda\to+\infty} J_k(\lambda u_0) = -\infty,$$

а отже, існує таке $\lambda_0 > 0$, що $J_k(\lambda u_0) \leq 0$ для всіх $\lambda > \lambda_0$. Лему доведено. $\square$

Зафіксуємо $u_0 \in E_k$ і покладемо

$$M := \sup_{\tau \geq 0} \tilde{J}_k(\tau u_0).$$

Припустимо, що задані величини, задовольняють нерівність

$$\frac{1}{\alpha\mu} + \sqrt{\frac{M+1}{\alpha}} < \frac{\pi}{2}. \tag{5.9}$$

Лема 5.4. *Нехай виконується умова (h_5), нерівність (5.9) і $c^2 > c_0^2$. Тоді функціонал J_k задовольняє умову Пале–Смейла.*

Доведення. Розглянемо спочатку функціонал $\tilde{J}_k$. Нехай $\{u_n\} \subset E_k$ — послідовність Пале–Смейла функціоналу $\tilde{J}_k$. Тоді для достатньо великих n, враховуючи лему 4.1 і нерівність (5.8), маємо

$$M + 1 + \frac{1}{\mu}\|u_n\|_k \geq J_k(u_n) - \frac{1}{\mu}\langle \tilde{J}'(u_n), u_n\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2 (u_n'(s))^2 - c_1^2 (Au_n(s))^2 - c_2^2 (Bu_n(s))^2\right] ds +$$

$$+ \int\limits_{-k}^{k} \Bigg[\frac{1}{\mu}\left(f_1'(Au_n(s))Au_n(s) + f_2'(Bu_n(s))Bu_n(s)\right) - f_1(Au_n(s)) -$$

$$- f_2(Bu_n(s))\Bigg] ds + K \int\limits_{-k}^{k} \Bigg\{1 - \cos u_n(s) + f(u_n(s)) - \frac{1}{\mu} u_n(s) \sin u_n(s) -$$

$$- \frac{1}{\mu} u_n(s) f'(u_n(s))\Bigg\} ds \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) c^2 \|u_n'\|_k^2 -$$

$$- \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right) \left(c_1^2 \|Au_n\|^2_{L^2(-k,k)} + c_2^2 \|Bu_n\|^2_{L^2(-k,k)}\right) +$$

$$+ K \int\limits_{-k}^{k} \Bigg\{1 - \cos u_n(s) + f(u_n(s)) - \frac{1}{\mu} u_n(s) \sin u_n(s) -$$

$$- \frac{1}{\mu} u_n(s) f'(u_n(s))\Bigg\} ds \geq$$

$$\geq \frac{\mu - 2}{2\mu}(c^2 - c_0^2) \|u_n'\|^2_{L^2(-k,k)} + \omega K \|u_n\|^2_{L^2(-k,k)} \geq \alpha \|u_n\|_k^2,$$

де $\alpha = \left\{\frac{\mu-2}{2\mu}(c^2 - c_0^2), \omega K\right\}$. Таким чином, маємо нерівність

$$M + 1 + \frac{1}{\mu}\|u_m\|_k - \alpha \|u_n\|_k^2 \geq 0,$$

звідки, враховуючи (5.9), одержуємо

$$\|u_n\|_k \leq \frac{\frac{1}{\mu} + \sqrt{\frac{1}{\mu^2} + 4\alpha(M+1)}}{2\alpha} \leq \frac{1}{\alpha\mu} + \sqrt{\frac{M+1}{\alpha}} < \frac{\pi}{2}.$$

Отже, послідовність $\{u_n\}$ обмежена.

Оскільки

$$\|u_n\|_{L^\infty(-k,k)} \leq \|u_n\|_k \leq \frac{1}{\alpha\mu} + \sqrt{\frac{M+1}{\alpha}} < \frac{\pi}{2},$$

та $J_k(u) = \tilde{J}_k(u)$ для всіх $u \in E_k$ з $\|u\|_{L^\infty(-k,k)} \leq \frac{\pi}{2}$, то послідовність $\{u_n\}$ є також послідовністю Пале–Смейла і для функціоналу J_k. А її обмеженість означає, що переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), $u_n \to u$ слабко в E_k, а отже, $Au_n \to Au$ і $Bu_n \to Bu$ слабко в E_k, і сильно в $L^2(-k,k)$ і $C([-k,k])$ (згідно компактності соболєвського вкладення).

Тоді, безпосереднім обчисленням, одержуємо

$$c^2\|u_n - u\|_k^2 = \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2(u_n'(s) - u'(s))^2 + c^2(u_n(s) - u(s))^2\right] ds =$$

$$= \langle J_k'(u_n), -J_k'(u), u_n - u\rangle + c_1^2\|Au_n - Au\|_{L^2(-k,k)}^2 + c_2^2\|Bu_n - Bu\|_{L^2(-k,k)}^2 +$$

$$+ \int\limits_{-k}^{k} [f_1'(Au_n(s)) - f_1'(Au(s))](Au_n(s) - Au(s))ds +$$

$$+ \int\limits_{-k}^{k} [f_2'(Bu_n(s)) - f_2'(Bu(s))](Bu_n(s) - Bu(s))ds -$$

$$-K \int\limits_{-k}^{k} [\sin u_n(s) - \sin u(s)](u_n(s) - u(s))ds.$$

Очевидно, що всі доданки в правій частині цієї рівності збігаються до нуля. Перший згідно слабкої збіжності, а наступні — згідно сильної збіжності в $L^2(-k,k)$ і $C([-k,k])$. Таким чином, $\|u_n - u\|_k \to 0$ при $n \to \infty$, і лему доведено. □

Наступна теорема є основним результатом даного підрозділу.

Теорема 5.1. *Нехай виконується умова* (h_5), *нерівність (5.9),* $c^2 > c_0^2$, $k > 0$ *і* $M < 4kK$. *Тоді рівняння (5.6) має несталий розв'язок* $u \in E_k$, *а отже, існують дві несталі* $2k$*-періодичні біжучі хвилі з профілем* u *і швидкостями* $\pm c$.

Доведення. Леми 5.3 і 5.4 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал (теорема B.1). Отже, J_k має нетривіальну критичну точку $u_0 \in E_k$:

$$J_k(u_0) := b \le M < 4kK.$$

Покажемо, що цей розв'язок несталий. Справді, сталий розв'язок $u = \alpha$ рівняння (5.6) обов'язково задовольняє тотожність $\sin\alpha \equiv 0$, а отже, $\alpha = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Якщо n — парне, то $J_k(\pi n) = 0$, але $b > 0$. Якщо ж n — непарне, то $J_k(\pi n) = 4kK$, але $b < 4kK$. Теорему доведено. □

Доведена теорема поширює результат про існування періодичних біжучих хвиль, одержаний в статті [73], на випадок систем на двовимірних ґратках з різними потенціалами взаємодії відносно просторових координатних осей n і m. Більше того, умови існування було послаблено, оскільки у згаданій статті серед умов існування були парність потенціалів взаємодії і значення періоду хвилі $T = 2k > 3$. Зауважимо, що в статті [41] вивчались системи вигляду:

$$\ddot{q}_{n,m} = \Delta q_{n,m} - f(q_{n,m}),\ (n, m) \in \mathbb{Z}^2,$$

де $(\Delta q)_{n,m} = q_{n+1,m} + q_{n-1,m} + q_{n,m+1} + q_{n,m-1} - 4q_{n,m}$ — двовимірний дискретний оператор Лапласа, з припущенням, що нелінійність f — непарна і 2π-періодична. Зокрема, до таких систем належать дискретні рівняння типу синус-Ґордона на двовимірній ґратці з лінійним зв'язком. У цій статті за допомогою топологічних і варіаційних методів встановлено існування нетривіальних періодичних біжучих хвиль за певних обмежень на період і швидкість хвилі.

5.3. Існування гомоклінічних біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус–Ґордона

Розглянемо рівняння (5.6) з крайовими умовами

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0, \tag{5.4'}$$

для якого побудуємо функціонал

$$J(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - W_1(Au(s)) - W_2(Bu(s)) + \right.$$
$$\left. + K(1 - \cos u(s))\right] ds,$$

визначений на просторі $E = H^1(\mathbb{R})$ зі стандартною соболєвською нормою:

$$\|u\| = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} [(u(s))^2 + (u'(s))^2] ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Як і вище, припускається, що потенціали задовольняють умову (h_5).

Зауважимо, що оскільки для періодичних хвиль немає рівномірних оцінок типу (4.37), то одержати гомоклінічні хвилі за допомогою методу періодичних апроксимацій не вдасться. Тому гомоклінічні хвилі буде побудовано за допомогою іншого підходу. Для цього, як і вище, побудуємо допоміжний функціонал

$$\tilde{J}(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - W_1(Au(s)) - W_2(Bu(s)) + \right.$$

$$\left. + K(1 - \cos u(s) + f(u(s)))\right] ds,$$

де

$$f(r) = \frac{1}{2}\left(\max\left\{0; |r| - \frac{\pi}{2}\right\}\right)^2.$$

Легко бачити, що $J(u) \leq \tilde{J}(u)$ та $J(u) = \tilde{J}(u)$ для всіх u з $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{\pi}{2}$. Крім того, f є неперервно диференційовною функцією, $1 - \cos r + f(r) \leq \frac{r^2}{2}$ та існує таке $\omega = \omega(\mu) > 0$, що для всіх $r \in \mathbb{R}$ виконується нерівність (5.8).

Як і вище, покладемо

$$\alpha = \min\left\{\frac{\mu - 2}{2\mu}(c^2 - c_0^2), \omega K\right\}.$$

Безпосереднім обчисленням одержуються наступні дві леми.

Лема 5.5. *Нехай виконується умова* (h_5). *Тоді функціонали* J *та* $\tilde{J}$ *належать класу* C^1, *а їхні похідні визначаються формулами*

$$\langle J'(u), u\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[c^2 u'(s)h'(s) - W_1'(Au(s))Ah(s) - W_2'(Bu(s))Bh(s) - \right.$$

$$\left. + K\sin(u(s))h(s)\right] ds,$$

$$\langle \tilde{J}'(u), u\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[c^2 u'(s)h'(s) - W_1'(Au(s))Ah(s) - W_2'(Bu(s))Bh(s) - \right.$$

$$\left. + K(\sin u(s) + f'(u(s)))h(s)\right] ds,$$

для $u, h \in E$.

Лема 5.6. *Критичні точки функціоналу* J *є розв'язками рівняння (5.6), які задовольняють умови (5.4').*

Лема 5.7. *Нехай виконується умова* (h_5) *і* $c^2 > c_0^2$. *Тоді існують такі* $e \in E$ *і* $r > 0$, *що* $\|e\| > r$ *і* $\beta := \inf\limits_{\|u\|=r} \tilde{J}(u) > 0 = \tilde{J}(0) \geq \tilde{J}(e)$.

Доведення. Аналогічно, як у доведенні леми 5.3, візьмемо $\varepsilon > 0$ таке, що $c^2 - c_0^2 - 2\varepsilon > 0$ і виберемо достатньо мале $r \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ таке, що $|f_i(x)| \leq \varepsilon x^2$ для всіх $x \leq r$. Тоді, враховуючи невід'ємність функції $f(r)$,для кожного u з $\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|u\| < \frac{\pi}{2}$,

$$\tilde{J}(u) \geq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - \frac{c_1^2}{2}(Au(s))^2 - \frac{c_2^2}{2}(Bu(s))^2 - \varepsilon(Au(s))^2 - \varepsilon(Bu(s))^2 + \right.$$

$$\left. + K(1 - \cos u(s))\right] ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}(c^2 - c_0^2 - 2\varepsilon)\|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{K}{4}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \geq \alpha_0 \|u\|^2,$$

де $\alpha_0 = \min\left\{\frac{1}{2}(c^2 - c_0^2 - 2\varepsilon), \frac{K}{4}\right\} > 0$. Таким чином, для $\|u\| = r$: $\tilde{J}(u) \geq \alpha_0 r^2 > 0$.

Тепер, щоб знайти $e \in E$ з відповідними властивостями, зафіксуємо $u_0 \in E \setminus \{0\}$. Тоді, враховуючи, що $1 - \cos r + f(r) \leq \frac{r^2}{2}$, для всіх $\lambda \geq 0$,

$$\tilde{J}(\lambda u_0) \leq \frac{c^2}{2}\lambda^2 \|u_0'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - d\lambda^\mu \|Au_0\|^\mu_{L^\mu(\mathbb{R})} - d\lambda^\mu \|Bu_0\|^\mu_{L^\mu(\mathbb{R})} +$$

$$+ 4kd_0 + \frac{K}{2}\lambda^2 \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Оскільки $\mu > 2$, $d > 0$, $d_0 \geq 0$, то $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \tilde{J}(\lambda u_0) = -\infty$, що й дає необхідне. Лему доведено. $\square$

Зауваження 5.1. *Оскільки $J(u) \leq \tilde{J}(u)$ та $J(u) = \tilde{J}(u)$ для всіх u з $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{\pi}{2}$, то твердження леми є справедливим і для функціоналу J з тим самим β.*

Зафіксуємо $u_0 \in E$ і покладемо

$$M := \sup_{\tau \geq 0} \tilde{J}(\tau u_0).$$

Припустимо, що задані величини, задовольняють нерівність (5.9).

З леми 5.7 і теореми про гірський перевал (див. [129], Теорема 1.15, а також теорему B.3) випливає наступний наслідок.

Наслідок 5.1. *За виконання умов леми 5.7 існує послідовність Пале-Смейла функціоналу $\tilde{J}$, тобто послідовність $\{u_n\} \subset E$ така, що при $n \to \infty$*

$$\tilde{J}(u_n) \to b \text{ *та* } \tilde{J}'(u_n) \to 0$$

для деякого $b \in [\beta, M]$.

Лема 5.8. *Нехай виконується умова (h_4), нерівність (5.9) і $c^2 > c_0^2$. Тоді послідовність Пале–Смейла $\{u_n\} \subset E$ функціоналу $\tilde{J}$, одержана в наслідку 5.1, є обмеженою, та*

$$\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \frac{\pi}{2}$$

для достатньо великих n. Крім того, послідовність $\{u_n\}$ не збігається до нуля за мірою.

Доведення. Нехай $\{u_n\} \subset E$ послідовність Пале–Смейла функціоналу $\tilde{J}$. Її обмеженість доводиться аналогічно, як у лемі 5.4.

Зауважимо, що оскільки $J(u) = \tilde{J}(u)$ для всіх u з $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \frac{\pi}{2}$, то послідовність $\{u_n\}$ є послідовністю Пале-Смейла і для функціоналу J.

Доведемо, що вона не збігається до нуля за мірою.

Справді, оскільки $\{u_n\}$ обмежена в E, то послідовності $\{Au_n\}$ та $\{Bu_n\}$ також обмежені в E. Більше того, оскільки

$$\max\left\{\|Au\|_{L^2(\mathbb{R})}, \|Au\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right\} \le \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

$$\max\left\{\|Bu\|_{L^2(\mathbb{R})}, \|Bu\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right\} \le \|u'\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

то існує таке достатньо мале $\varepsilon_0 > 0$, що

$$\max\left\{\|Au\|_{L^2(\mathbb{R})}, \|Au\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right\} \le \sup_n \|u_n\| \le C_1 := \frac{\pi}{2} - \varepsilon_0,$$

$$\max\left\{\|Bu\|_{L^2(\mathbb{R})}, \|Bu\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\right\} \le \sup_n \|u_n\| \le C_1 := \frac{\pi}{2} - \varepsilon_0.$$

За умовою (h_5),

$$r^{-2}\left(\frac{1}{2}f_i'(r)r - f_i(r)\right) \to 0 \text{ при } r \to 0.$$

Також

$$r^{-2}\left(1 - \cos r - \frac{1}{2}r\sin r\right) \to 0 \text{ при } r \to 0.$$

Отже, існує така стала $C_2 > 0$, що

$$\sup_{|r|\le C_1} \frac{\frac{1}{2}f_i'(r)r - f_i(r)}{r^2} \le C_2,$$

$$\sup_{|r|\le C_1} \frac{1 - \cos r - \frac{1}{2}r\sin r}{r^2} \le C_2.$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для всіх $|r| < \delta$ виконуються нерівності

$$\left|\frac{1}{2}f_i'(r)r - f_i(r)\right| \le \varepsilon r^2,$$

$$\left|1 - \cos r - \frac{1}{2}r\sin r\right| \le \varepsilon r^2.$$

Звідси, враховуючи, що $\frac{1}{2}f_i'(r)r - f_i(r) \ge 0$, маємо

$$0 \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}f_1'(Au_n(s))Au_n(s) - f_1(Au_n(s))\right)ds \le$$

$$\le \left|\{s\in\mathbb{R}:\ |Au_n(s)|>\delta\}\right| C_2\|Au_n\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} + \varepsilon\|Au_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \le$$

$$\le C_1^2\left(\left|\{s\in\mathbb{R}:\ |Au_n(s)|>\delta\}\right| C_2 + \varepsilon\right),$$

$$0 \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}f_2'(Bu_n(s))Bu_n(s) - f_2(Bu_n(s))\right)ds \le$$

$$\le \left|\{s\in\mathbb{R}:\ |Bu_n(s)|>\delta\}\right| C_2\|Bu_n\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} + \varepsilon\|Bu_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \le$$

$$\le C_1^2\left(\left|\{s\in\mathbb{R}:\ |Bu_n(s)|>\delta\}\right| C_2 + \varepsilon\right).$$

Також, оскільки $\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}} < \frac{\pi}{2}$, то

$$0 \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(1 - \cos u_n(s) - \frac{1}{2}u_n(s)\sin u_n(s)\right)ds \le$$

$$\le \left|\{s\in\mathbb{R}:\ |u_n(s)|>\delta\}\right| C_2\|u_n\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})} + \varepsilon\|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \le$$

$$\le C_1^2\left(\left|\{s\in\mathbb{R}:\ |u_n(s)|>\delta\}\right| C_2 + \varepsilon\right).$$

Оскільки $J(u_n) \to b \in [\beta, M]$ та $J'(u_n) \to 0$ при $n \to \infty$, то для достатньо великих n,

$$|\langle J'(u_n), u_n\rangle| < \frac{\beta}{4} \text{ та } J(u_n) > \frac{3}{4}\beta.$$

Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ маємо

$$0 < \frac{\beta}{2} \le J(u_n) - \frac{1}{2}\langle J'(u_n), u_n\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}f_1'(Au_n(s))Au_n(s) - f_1(Au_n(s))\right]ds +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}f_2'(Bu_n(s))Bu_n(s)-f_2(Bu_n(s))\right]ds+$$

$$+K\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[1-\cos u_n(s)-\frac{1}{2}u_n(s)\sin u_n(s)\right]ds\leq$$

$$\leq C_1^2\left[\left(|\{s\in\mathbb{R}:\ |Au_n(s)|>\delta\}|+|\{s\in\mathbb{R}:\ |Bu_n(s)|>\delta\}|\right)C_2+\varepsilon\right]+$$

$$+KC_1^2\left(|\{s\in\mathbb{R}:\ |u_n(s)|>\delta\}|\,C_2+\varepsilon\right)=$$

$$=C_1^2C_2\left[|\{s\in\mathbb{R}:\ |Au_n(s)|>\delta\}|+|\{s\in\mathbb{R}:\ |Bu_n(s)|>\delta\}|+\right.$$

$$\left.+K\,|\{s\in\mathbb{R}:\ |u_n(s)|>\delta\}|\right]+(1+K)\varepsilon C_1^2.$$

Таким чином, якщо $u_n\to 0$ за мірою, то $Au_n\to 0$ і $Bu_n\to 0$ за мірою. Тоді для достатньо великих n права частина останньої нерівності може бути як завгодно малою, зокрема, меншою $\frac{\beta}{2}$. Одержали суперечність, яка й доводить лему. □

Основним результатом даного підрозділу є наступна теорема.

Теорема 5.2. *Нехай виконується умова (h_5), нерівність (5.9) і $c^2>c_0^2$. Тоді рівняння (5.6) має несталий розв'язок u, який задовольняє умови (5.4'), а отже, існують дві несталі гомоклінічні (відокремлені) біжучі хвилі з профілем u і швидкостями $\pm c$.*

Доведення. Нехай $\{u_n\}\subset E$ послідовність Пале–Смейла функціоналу J, одержана вище. Оскільки за лемою 5.8 вона обмежена і не збігається до нуля за мірою, то існує її підпослідовність (для якої збережемо теж саме позначення) та послідовність $\{\eta_n\}\subset\mathbb{R}$ такі, що $w_n:=u_n(s+\eta_n)\to u\neq 0$ слабко в E (див. [76], лема 6).

Нехай $g\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, тоді

$$\langle J'(w_n),g\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[c^2w_n'(s)g'(s)-W_1'(Aw_n(s))Ag(s)-W_2'(Bw_n(s))Bg(s)+$$

$$+K\sin(w_n(s))g(s)]ds.$$

Слабка збіжність $w_n\to u$ в E означає слабку збіжність в $L^2(\mathbb{R})$, а отже,

перший доданок
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} c^2 w_n'(s)g'(s)ds \to \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c^2 u'(s)g'(s)ds.$$
Оскільки збіжність $Aw_n \to Au$ та $Bw_n \to Bu$ є сильною в $C^0(\mathrm{supp}(Ag))$ та $C^0(\mathrm{supp}(Bg))$ відповідно, а функції W_1' та W_2' рівномірно неперервні на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то другий і третій доданки також збігаються, тобто
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_1'(Aw_n(s))Ag(s)ds = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathrm{supp}(Ag)} W_1'(Aw_n(s))Ag(s)ds =$$
$$= \int\limits_{\mathrm{supp}(Ag)} W_1'(Au(s))Ag(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_1'(Au(s))Ag(s)ds,$$
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_2'(Bw_n(s))Bg(s)ds = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathrm{supp}(Bg)} W_2'(Bw_n(s))Bg(s)ds =$$
$$= \int\limits_{\mathrm{supp}(Bg)} W_2'(Bu(s))Bg(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_2'(Bu(s))Bg(s)ds.$$
Аналогічно
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(w_n(s))g(s)ds = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin(u(s))g(s)ds.$$

Таким чином, для всіх $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,
$$\langle J'(w_n), g\rangle \to \langle J'(u), g\rangle,\ n \to \infty.$$
Тоді
$$|\langle J'(u), g\rangle| = \lim_{n\to\infty} |\langle J'(w_n), g\rangle| = \lim_{n\to\infty} |\langle J'(u_n(\cdot + \eta_n)), g\rangle| =$$
$$= \lim_{n\to\infty} |\langle J'(u_n), g(\cdot - \eta_n)\rangle| \le \lim_{n\to\infty} \|J'(u_n)\| \cdot \|g\| = 0.$$
А це означає, що $\langle J'(u), g\rangle = 0$ для всіх $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, тобто $u \in E$ критична точка функціоналу J: $0 < J(u) := b < +\infty$. За лемою 5.6 ця критична точка є розв'язком рівняння (5.6), який задовольняє умови (5.4'). Зауважимо, що оскільки простір E не містить сталих, відмінних від нуля функцій, то побудований розв'язок $u \in E$ не сталий. Теорему доведено. $\square$

Доведена теорема поширює результат про існування гомоклінічних біжучих хвиль, одержаний в статті [73], на випадок систем на двовимірних ґратках з різними потенціалами взаємодії відносно просторових координат n і m. Більше того, тут вдалося розширити клас потенціалів взаємодії зі степеневих (див. згадану статтю) до потенціалів, які задовольняють умову Амброзетті–Рабіновіца.

5.4. Існування гетероклінічних біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус–Ґордона

У цьому підрозділі будемо розглядати рівняння (5.2) з гетероклінічними крайовими умовами (5.5). Спочатку розглянемо випадок квадратичних потенціалів взаємодії

$$W_1(r) = \frac{c_1^2}{2}r^2,\ W_2(r) = \frac{c_2^2}{2}r^2,$$

де $c_1^2, c_2^2 > 0$. У цьому випадку рівняння (5.2) набуде вигляду

$$c^2u''(s) = c_1^2(u(s+\cos\varphi) + u(s-\cos\varphi) - 2u(s))+$$
$$+c_2^2(u(s+\sin\varphi) + u(s-\sin\varphi) - 2u(s)) - K\sin u(s). \tag{5.10}$$

Як і вище, позначимо через

$$c_0^2 = c_0^2(\varphi) := c_1^2\cos^2\varphi + c_2^2\sin^2\varphi.$$

З рівнянням (5.10) пов'язується функціонал

$$J(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - \frac{c_1^2}{2}(u(s+\cos\varphi) - u(s))^2 - \right.$$
$$\left. -\frac{c_2^2}{2}(u(s+\sin\varphi) - u(s))^2 + K(1+\cos u(s))\right] ds, \tag{5.11}$$

визначений на гільбертовому просторі

$$X = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) :\ u' \in L^2(\mathbb{R})\}$$

зі скалярним добутком

$$(u, v) = u(0)v(0) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u'(s)v'(s)ds.$$

Далі, використовуючи підхід, реалізований в [72], позначимо через

$$M_{-\pi,\pi} = \{u \in X :\ u(-\infty) = -\pi,\ u(+\infty) = \pi\}.$$

Нехай $v_0 : \mathbb{R} \to [-\pi, \pi]$ — монотонна функція в $C^\infty(\mathbb{R})$ така, що $v_0(s) = -\pi$ для $s < -1$ і $v_0(s) = \pi$ для $s > 1$. Тоді означимо функціонал $\Psi : H^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\Psi(v) := J(v_0 + v).$$

Неважко переконатися, що $\Psi(v) < \infty$ для всіх $v \in H^1(\mathbb{R})$ і точку мінімуму u функціоналу J на $M_{-\pi,\pi}$ можна записати у вигляді $u = v_0 + v$ для деякого $v \in H^1(\mathbb{R})$ (див. [70]). Більше того, функціонал Ψ є неперервно диференційовним на $H^1(\mathbb{R})$.

Лема 5.9. *Нехай v є критичною точкою функціоналу Ψ і $u = v_0 + v \in M_{-\pi,\pi}$. Тоді u є розв'язком рівняння (5.10), який задовольняє умови (5.5).*

Доведення. Нехай $v \in H^1(\mathbb{R})$ — критична точка функціоналу Ψ. Тоді $\langle \Psi'(v), h \rangle = 0$ для будь-якого $h \in H^1(\mathbb{R})$, тобто

$$0 = \langle \Psi'(v), h \rangle = \langle J'(u), h \rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big[c^2 u'(s) h'(s) + c_1^2 (u(s + \cos\varphi) + u(s - \cos\varphi) - 2u(s)) h(s) +$$

$$+ c_2^2 (u(s + \sin\varphi) + u(s - \sin\varphi) - 2u(s)) h(s) - K \sin(u(s)) h(s) \big] \, ds.$$

Це означає, що u задовольняє рівняння (5.10) в смислі узагальнених функцій (слабкий розв'язок). Нагадаємо, що за теоремою вкладення $u \in C_b(\mathbb{R})$, а отже, права частина рівняння (5.10) — неперервна функція. Звідси маємо, що $u''(s)$ — неперервна функція і, отже, $u \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ — розв'язок рівняння (5.10) в звичайному сенсі. Лему доведено. □

Нагадаємо, що за лемою 4.1,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (Au(s))^2 ds \le \cos^2\varphi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u'(s))^2 ds,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (Bu(s))^2 ds \le \sin^2\varphi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u'(s))^2 ds. \tag{5.12}$$

Тому

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{c^2-c_0^2}{2}(u'(s))^2+K(1+\cos u(s))\right]ds \le J(u) \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2+K(1+\cos u(s))\right]ds$$

для всіх $u \in X$. Зауважимо, що оскільки $1+\cos r \ge 0$, то

$$\frac{c^2-c_0^2}{2}\|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \le J(u). \tag{5.13}$$

Позначимо через

$$I_\gamma(u) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\gamma(u'(s))^2+K(1+\cos u(s))\right]ds,$$

де $\gamma > 0$. Легко бачити, що функціонал I_γ досягає мінімуму на $M_{-\pi,\pi}$, причому

$$\min_{u\in M_{-\pi,\pi}} I_\gamma(u) = 2\sqrt{\gamma K}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+\cos x}dx = 8\sqrt{2\gamma K}. \tag{5.14}$$

Більше того,

$$\inf_{T>0}\inf_{u\in H^1(-T,T)}\{I_\gamma(u):\ u(-T)=-\pi,\ u(T)=\pi\} = 8\sqrt{2\gamma K}. \tag{5.15}$$

Звідси, враховуючи, що

$$I_{\frac{c^2-c_0^2}{2}}(u) \le J(u) \le I_{\frac{c^2}{2}}(u)$$

для всіх $u \in X$, одержуємо

$$8\sqrt{(c^2-c_0^2)K} \le \inf_{u\in M_{-\pi,\pi}} J(u) \le 8c\sqrt{K}. \tag{5.16}$$

Легко бачити, що (5.14)—(5.16) залишаються справедливими з крайовими умовами $u(-\infty)=\pi$, $u(+\infty)=-\pi$ (для цього достатньо зробити заміну s на $-s$). Більше того, оскільки, в силу періодичності $\cos u$, значення функціоналу I_γ не змінюється при заміні u на $u+2\pi\nu$, то (5.14)—(5.16) правильні і при $u(-\infty)=-\pi+2\pi\nu$, $u(+\infty)=\pi+2\pi\nu$ та $u(-\infty)=\pi+2\pi\nu$, $u(+\infty)=-\pi+2\pi\nu$ для будь-якого $\nu\in\mathbb{Z}$.

Лема 5.10. *Нехай $c^2 > c_0^2$. Тоді точка глобального мінімуму u_0 функціоналу*

J на $M_{-\pi,\pi}$ задовольняє нерівність

$$\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}} < (2k+3)\pi,$$

де $k = \max\left\{j \in \mathbb{N}_0 :\ (2j+1) \le \sqrt{\frac{c^2}{c^2-c_0^2}}\right\}$.

Доведення. Покладемо $T_0 = -\infty$ і побудуємо T_i індуктивно. Нехай T_i вже знайдено таким чином, що $u_0(T_i) = \nu\pi$ з непарним ν. Тоді в якості T_{i+1} візьмемо перше значення $s > T_i$, для якого $u_0(s)$ дорівнює або $(\nu+2)\pi$, або $(\nu-2)\pi$. Тоді після непарного числа $2j+1$ кроків ми отримаємо $T_{2j+1} = +\infty$. Звідси $(j+1)2\pi \le |\{u_0(s) :\ s \in \mathbb{R}\}| < (j+2)2\pi$, де $|\{u_0(s) :\ s \in \mathbb{R}\}|$ — міра множини $\{u_0(s) :\ s \in \mathbb{R}\}$.

Тепер маємо

$$J(u_0) \ge I_{\frac{1}{2}(c^2-c_0^2)}(u_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2-c_0^2}{2}(u'(s))^2 + K(1+\cos u(s))\right] ds =$$

$$= \sum_{i=0}^{2j} \int\limits_{T_i}^{T_{i+1}} \left[\frac{c^2-c_0^2}{2}(u'(s))^2 + K(1+\cos u(s))\right] ds.$$

З нерівності (5.15) випливає, що ліва нерівність в (5.16) виконується при заміні середнього члена на будь-який з інтегралів в останній сумі, тобто

$$8\sqrt{(c^2-c_0^2)K} \le \int\limits_{T_i}^{T_{i+1}} \left[\frac{c^2-c_0^2}{2}(u'(s))^2 + K(1+\cos u(s))\right] ds.$$

Звідси, враховуючи (5.16), одержуємо

$$8(2j+1)\sqrt{(c^2-c_0^2)K} \le J(u_0) \le 8c\sqrt{K}$$

і

$$j \le k = \max\left\{j \in \mathbb{N}_0 :\ (2j+1) \le \sqrt{\frac{c^2}{c^2-c_0^2}}\right\}.$$

Отже, $|\{u_0(s) :\ s \in \mathbb{R}\}| < (k+2)2\pi$. Оскільки $(-\pi,\pi) \subseteq \{u_0(s) :\ s \in \mathbb{R}\}$, то $\sup\limits_{s\in\mathbb{R}} |u_0(s)| < (k+2)2\pi - \pi = (2k+3)\pi$. Лему доведено. $\square$

Для параметрів $T > 1$ і $\eta \in \mathbb{R}$ введемо скорочену (зрізану) версію функціоналу J

$$J_T(u;\eta) = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int\limits_{\eta-T+\frac{1}{2}+\tau}^{\eta+T-\frac{1}{2}+\tau} \frac{c^2}{2}(u'(s))^2 ds d\tau -$$

$$- \int\limits_{\eta-T+\frac{1}{2}}^{\eta+T-\frac{1}{2}} \frac{c_1^2}{2} \left[u\left(s+\cos\varphi-\frac{1}{2}\right) - u\left(s-\frac{1}{2}\right)\right]^2 ds -$$

$$- \int\limits_{\eta-T+\frac{1}{2}}^{\eta+T-\frac{1}{2}} \frac{c_2^2}{2} \left[u\left(s+\sin\varphi-\frac{1}{2}\right) - u\left(s-\frac{1}{2}\right)\right]^2 ds +$$

$$+ \int\limits_{\eta-T+\frac{1}{2}}^{\eta+T-\frac{1}{2}} K\left[1+\cos u(s)\right] ds.$$

Для одержання основного результату нам знадобиться наступний варіант принципу концентрованої компактності (див. [72], Лема 4.1; також Додаток B).

Лема 5.11. *Нехай* $c^2 > c_0^2$, $\inf\limits_{u\in M_{-\pi,\pi}} J(u) \le \theta < \infty$ *і послідовність* $\{u_n\} \subset M_{-\pi,\pi}$ *така, що*

$$\lim_{n\to\infty} J(u_n) = \theta. \tag{5.17}$$

Тоді існує підпослідовність послідовності $\{u_n\}$ *(як і раніше позначається* $\{u_n\}$*), для якої виконується одна з таких трьох можливостей:*

(i) (концентрація) існує така послідовність $\{\eta_n\} \in \mathbb{R}$*, що для будь-якого достатньо малого* $\varepsilon > 0$ *знайдеться таке* $T > 0$*, що для всіх* $T > T_0$

$$J(u_n) - J_T(u_n;\eta_n) < \varepsilon \text{ для всіх } n \in \mathbb{N};$$

(ii) (розпливання) для всіх $T > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\eta\in\mathbb{R}} J_T(u_n;\eta) = 0; \tag{5.18}$$

(iii) (розщеплення) знайдеться $\varepsilon_1 > 0$ *таке, що для кожного* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$ *існують* $f_n, g_n \in X$ *такі, що*

$$\operatorname{dist}\left[\operatorname{supp}\{f_n'\}, \operatorname{supp}\{g_n'\}\right] \to \infty, \text{ при } n \to \infty,$$

$$|u_n - (f_n + g_n - \pi)| \le \varepsilon,$$

$$|J(u_n) - (J(f_n) - J(g_n))| \le \varepsilon,$$

$$\lim_{n\to\infty} J(f_n) = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} J(g_n) = \beta$$

для деяких $0 < \alpha, \beta < \theta$ *(*π *необхідне в першій нерівності, щоб забезпечити умови* $J(f_n) < +\infty$ *та* $J(g_n) < +\infty$*).*

Доведення. Крок 1. Нехай послідовність $\{u_n\} \subset M_{-\pi,\pi}$ задовольняє (5.17). Для цієї послідовності і параметра $\eta \in \mathbb{R}$ означимо послідовність функцій $P_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$P_n(T;\eta) := J_{T+\frac{1}{2}}(u_n;\eta). \tag{5.19}$$

Зазначимо, що для всіх фіксованих $n \in \mathbb{N}$ і $\eta \in \mathbb{R}$ функція $P_n(T;\eta)$ неспадна за змінною T. Справді, для всіх $\varepsilon > 0$ і $\eta \in \mathbb{R}$, враховуючи, що $c > c_0$, маємо

$$\int\limits_{\eta+T}^{\eta+T+\varepsilon} \frac{c_1^2}{2}\left[u\left(s+\cos\varphi-\frac{1}{2}\right)-u\left(s-\frac{1}{2}\right)\right]^2 ds+$$

$$+\int\limits_{\eta+T}^{\eta+T+\varepsilon} \frac{c_2^2}{2}\left[u\left(s+\sin\varphi-\frac{1}{2}\right)-u\left(s-\frac{1}{2}\right)\right]^2 ds =$$

$$= \frac{c_1^2}{2}\|Au_n\|^2_{L^2\left(\eta+T-\frac{1}{2},\eta+T-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)} + \frac{c_2^2}{2}\|Bu_n\|^2_{L^2\left(\eta+T-\frac{1}{2},\eta+T-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)} \le$$

$$\le \frac{c_0^2}{2}\int\limits_0^1 \int\limits_{\eta+T-\frac{1}{2}}^{\eta+T-\frac{1}{2}+\varepsilon} (u'(s))^2 ds d\tau \le \frac{c^2}{2}\int\limits_0^1 \int\limits_{\eta+T-\frac{1}{2}+\tau}^{\eta+T-\frac{1}{2}+\varepsilon+\tau} (u'(s))^2 ds d\tau =$$

$$= \frac{c^2}{2}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int\limits_{\eta+T+\tau}^{\eta+T+\varepsilon+\tau} (u'(s))^2 ds d\tau.$$

Аналогічно на $[\eta - T - \varepsilon, \eta - T]$. Оскільки $1 + \cos r \ge 0$, то останнє означає, що для будь-яких $T, \varepsilon > 0$ і $\eta \in \mathbb{R}$

$$P_n(T+\varepsilon;\eta) \ge P_n(T;\eta).$$

Тепер для кожного натурального n введемо функцію концентрації

$$Q_n(T) := \sup_{\eta\in\mathbb{R}} P_n(T;\eta). \tag{5.20}$$

Оскільки $\lim_{T\to+\infty} Q_n(T) = J(u_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $Q_n(T)$ обмежена на $(0,+\infty)$. Згідно (5.18), $J(u_n) \to \theta$, а отже, послідовність $\{J(u_n)\}$ обмежена на $\mathbb{R}$. Таким чином, $\{J(u_n)\}$ обмежена зверху в $L^\infty(0,\infty)$. Отже, за лемою Хеллі-Брея (див. [130, с. 183]) її підпослідовність (для якої збережемо те ж саме позначення) збігається поточково майже скрізь до монотонно неспадної функції $Q : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ і

$$\lim_{T\to+\infty} Q(T) =: l \in [0,\theta]. \tag{5.21}$$

Очевидно мають місце (i) при $l=\theta$ та (ii) при $l=0$. Тому випадок $l \in (0,\theta)$ відповідає (iii).

Крок 2. Нехай $\varepsilon > 0$. За означенням l існує $T_0 \in \mathbb{R}$ таке, що $Q(T_0) \geq l - \frac{\varepsilon}{3}$. Оскільки $Q_n(T) \to Q(T)$ при $n \to \infty$ для майже всіх T, то можна вважати, можливо після збільшення T_0, що $Q_n(T_0) \to Q(T_0)$. Таким чином, $Q_n(T_0) \geq l - \frac{2\varepsilon}{3}$ для досить великих n. Рівність (5.20) означає, що можна знайти $\eta_n \in \mathbb{R}$ таке, що для всіх досить великих n: $P_n(T_0;\eta) \geq l - \varepsilon$. Також існує послідовність $\{T_n\}$, $T_n \to \infty$ при $n \to \infty$ (і, зокрема, $T_n \gg T_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$) така, що $Q_n(T_0) \leq l + \varepsilon$. Це випливає з того, що $Q_n(T) \to Q(T)$ при $n \to \infty$ для майже всіх T і $T \to +\infty$. Оскільки в (5.20) $Q_n(T)$ означено як супремум, то послідовність $\{T_n\}$ задовольняє нерівність $P_n(T;\eta_n) \leq l + \varepsilon$. В силу монотонності P_n по T для всіх натуральних n маємо

$$|P_n(T;\eta_n) - l| \leq \varepsilon \text{ для всіх } T \in [T_0, T_n]. \tag{5.22}$$

Тепер проаналізуємо поведінку $u_n(s)$ при $|s - \eta_n| \in [T_0, T_n]$. Покажемо, що існують $k_n^\pm \in \mathbb{Z}$ такі, що

$$|u_n(s) - (2k_n^+)\pi| \leq \delta(\varepsilon) \text{ при } s \in \left[\eta_n + T_0 + \frac{1}{2}, \eta_n + T_n - \frac{1}{2}\right],$$
$$|u_n(s) - (2k_n^-)\pi| \leq \delta(\varepsilon) \text{ при } s \in \left[\eta_n - T_n + \frac{1}{2}, \eta_n - T_0 - \frac{1}{2}\right]. \tag{5.23}$$

Справді, враховуючи (5.22) і розглядаючи спочатку тільки відрізок $[\eta_n + T_0, \eta_n + T_n]$, одержуємо

$$2\varepsilon \geq P_n(T_n;\eta_n) - P_n(T_0;\eta_n) \geq$$

$$\geq \frac{c^2-c_0^2}{2}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int\limits_{\eta_n+T_0+\tau}^{\eta_n+T_n+\tau}(u_n'(s))^2dsd\tau + K\int\limits_{\eta_n+T_0}^{\eta_n+T_n}(1+\cos u_n(s))ds \geq$$

$$\geq \int\limits_{\eta_n+T_0+\frac{1}{2}}^{\eta_n+T_n-\frac{1}{2}}\left[\frac{c^2-c_0^2}{2}(u_n'(s))^2+K(1+\cos u_n(s))\right]ds \geq \tag{5.24}$$

$$\left[\forall T', T'' \in \mathbb{R}:\ T_0+\frac{1}{2} \leq T' \leq T'' \leq T_n - \frac{1}{2}\ \text{маємо}\right]$$

$$\geq \int\limits_{\eta_n+T'}^{\eta_n+T''}\left[\frac{c^2-c_0^2}{2}(u_n'(s))^2+K(1+\cos u_n(s))\right]ds \geq$$

$$\left[x^2+y^2 \geq 2xy\right]$$

$$\geq \int\limits_{\eta_n+T'}^{\eta_n+T''}\left[\sqrt{\frac{c^2-c_0^2}{2}}|u_n'(s)|\cdot\sqrt{K(1+\cos u_n(s))}\right]ds =$$

$$\left[z = u_n(s)\right]$$

$$= \sqrt{2K(c^2-c_0^2)}\left|\int\limits_{u_n(\eta_n+T')}^{u_n(\eta_n+T'')}\sqrt{1+\cos z}dz\right|.$$

Останнє означає, що $|u_n(\eta_n+T')-u_n(\eta_n+T'')| \leq \delta_1$, де $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)$ визначається співвідношенням

$$\int\limits_{\pi-\frac{\delta_1}{2}}^{\pi+\frac{\delta_1}{2}}\sqrt{1+\cos t}dt = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2K(c^2-c_0^2)}}.$$

Відзначимо, що (5.24) означає також, що

$$2\varepsilon \geq K(T_n-T_0-1)\cdot\min_{s\in\left[\eta_n+T_0+\frac{1}{2},\eta_n+T_n-\frac{1}{2}\right]}(1+\cos u_n(s)).$$

Нехай цей мінімум досягається при $s=s_{0,n}$. Тоді

$$\frac{2\varepsilon}{K(T_n-T_0-1)} \geq 1+\cos u_n(s_{0,n}).$$

Оскільки можна прийняти, що $\varepsilon \ll 1$ та $T_n \gg T_0$, то знайдеться таке k_n^+, що

$$|u_n(s_{0,n})-(2k_n^++1)\pi| \leq \pi - \arccos\left(\frac{2\varepsilon}{K(T_n-T_0-1)}-1\right) =: \delta_2.$$

Отже, при $\delta=\delta_1+\delta_2$ для всіх $s\in\left[\eta_n+T_0+\frac{1}{2},\eta_n+T_n-\frac{1}{2}\right]$:

$$|u_n(s)-(2k_n^++1)\pi| \leq \delta$$

і $\delta \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Аналогічно одержується (5.23) для k_n^-.

Крок 3. Виберемо тепер $f_n(s)$. Нехай

$$f_n(s) = \begin{cases} (2k_n^- + 1)\pi, & s < -T_0 - 2, \\ u_n(\eta_n + s), & s \in [-T_0 - 1, T_0 + 1], \\ (2k_n^+ + 1)\pi, & s > T_0 + 2, \end{cases} \tag{5.25}$$

і $f_n(s)$ лінійна на $[-T_0 - 2, -T_0 - 1]$ та $[T_0 + 1, T_0 + 2]$. За аналогією до P_n, замінюючи в (5.19) u_n на f_n, введемо

$$\tilde{P}_n(T) := \frac{c^2}{2} \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int\limits_{-T+\tau}^{T+\tau} (f_n'(s))^2 ds -$$

$$- \int\limits_{-T}^{T} \frac{c_1^2}{2} \left[f_n\left(s + \cos\varphi - \frac{1}{2}\right) - f_n\left(s - \frac{1}{2}\right)\right]^2 ds -$$

$$- \int\limits_{-T}^{T} \frac{c_2^2}{2} \left[f_n\left(s + \sin\varphi - \frac{1}{2}\right) - f_n\left(s - \frac{1}{2}\right)\right]^2 ds +$$

$$+ \int\limits_{-T}^{T} K\left[1 + \cos f_n(s)\right] ds. \tag{5.26}$$

При $|s| > T_0 + \frac{5}{2}$ кожна підінтегральна функція перетворюється на нуль, оскільки згідно (5.25) $f_n(s)$ стала при $|s| > T_0 + 2$. Тому

$$\tilde{P}_n\left(T_0 + \frac{5}{2}\right) = \tilde{P}_n(T) = \tilde{P}_n(\infty) = J(f_n) \tag{5.27}$$

для всіх $T > T_0 + \frac{5}{2}$.

Покажемо, що переходячи до підпослідовності, $J(f_n) \to \alpha \in (0, \theta)$ при $n \to \infty$. Справді, подамо модуль різниці у вигляді

$$\left|\tilde{P}_n(T_n) - l\right| = \left|\left(\tilde{P}_n(T_n) - P_n(T_n; \eta_n)\right) + (P_n(T_n; \eta_n) - l)\right|.$$

Зауважимо, що $P_n\left(T_0 + \frac{1}{2}; \eta_n\right) = \tilde{P}\left(T_0 + \frac{1}{2}\right)$, оскільки за означенням $f_n(s) = u_n(\eta_n + s)$ для всіх $|s| \le T_0 + 1$. Звідси, використовуючи нерівність трикутника, одержуємо

$$\left|P_n(T_n; \eta_n) - \tilde{P}_n(T_n)\right| \le$$

$$\le \left| P_n(T_n;\eta_n) - P_n\left(T_0+\frac{1}{2};\eta_n\right)\right| + \left|\tilde{P}_n\left(T_0+\frac{1}{2}\right) - \tilde{P}_n(T_n)\right|. \tag{5.28}$$

Застосовуючи (5.22) до першого доданка правої частини (5.28), маємо

$$\left| P_n(T_n;\eta_n) - P_n\left(T_0+\frac{1}{2};\eta_n\right)\right| \le 2\varepsilon. \tag{5.29}$$

Для другого доданка (аналогічно як в [72], Лема 4.1), одержуємо оцінку

$$\left|\tilde{P}_n\left(T_0+\frac{1}{2}\right) - \tilde{P}_n(T_n)\right| \le c^2\left(\frac{4\varepsilon}{c^2-c_0^2}+\delta^2\right) + 3K(1-\cos\delta). \tag{5.30}$$

З нерівностей (5.28), (5.29) і (5.30), враховуючи, що $\tilde{P}_n(T_n) = J(f_n)$ (з (5.27)), маємо

$$\begin{aligned} |P_n(T_n;\eta_n) - J(f_n)| &= \left|P_n(T_n;\eta_n) - \tilde{P}_n(T_n)\right| \le \\ &\le 2\varepsilon + c^2\left(\frac{4\varepsilon}{c^2-c_0^2}+\delta^2\right) + 3K(1-\cos\delta) =: \tilde{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Таким чином, враховуючи (5.22), одержуємо

$$|J(f_n) - l| \le |P_n(T_n;\eta_n) - J(f_n)| + |P_n(T_n;\eta_n) - l| \le \tilde{\varepsilon} + \varepsilon.$$

Виберемо тепер $\varepsilon_0 > 0$ таке, що

$$l + 2(\tilde{\varepsilon}+\varepsilon) < \theta \text{ і } l - 2(\tilde{\varepsilon}+\varepsilon) > 0 \tag{5.32}$$

для всіх $\varepsilon < \varepsilon_0$. Останнє можливо, оскільки $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ і $l \in (0,\theta)$. Тоді існує підпослідовність послідовності $\{f_n\}$ (для якої збережемо те ж саме позначення) така, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty} J(f_n) = \alpha$$

для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$ з $|l-\alpha| \le \tilde{\varepsilon}$, і, згідно вибору ε_0, $0 < \alpha < \theta$.

Покладемо тепер

$$g_n(s) = \begin{cases} u_n(\eta_n+s) - 2k_n^-\pi, & s < -T_n+1, \\ \pi, & s \in [-T_n+2, T_n-2], \\ u_n(\eta_n+s) - 2k_n^+\pi, & s > T_n-1, \end{cases} \tag{5.33}$$

і $g_n(s)$ лінійна на $[-T_n+1, -T_n+2]$ та $[T_n-2, T_n-1]$. Легко бачити, що

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}\left[\operatorname{supp}\{f_n'\}, \operatorname{supp}\{g_n'\}\right] \ge \lim_{n\to\infty}(T_n - T_0 - 4) = \infty.$$

Міркуючи аналогічно, як і вище, одержуємо

$$|J(u_n) - J(f_n) - J(g_n)| \le$$

$$\leq |J(u_n) - J(g_n) - P_n(T_n - 1; \eta_n)| + 2\varepsilon + \tilde{\varepsilon}, \tag{5.34}$$

$$|J(u_n) - P_n(T_0; \eta_n) - J(g_n)| \leq$$

$$\leq c^2 \left(\frac{4\varepsilon}{c^2 - c_0^2} + \delta^2 \right) + 3K(1 - \cos\delta) = \tilde{\varepsilon} - 2\varepsilon. \tag{5.35}$$

З (5.34) і (5.35) випливає

$$|J(u_n) - J(f_n) - J(g_n)| \leq 2\tilde{\varepsilon}.$$

Таким чином, для достатньо великих n

$$|J(u_n) - (\theta - \alpha)| \leq 2\tilde{\varepsilon} + \varepsilon.$$

Переходячи до підпослідовності, якщо необхідно, маємо, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty} J(g_n) = \beta$$

і, згідно вибору ε_0 в (5.32), $\beta \in (0, \theta)$. Лему доведено. □

Наступні дві леми виключають можливість розпливання і розщеплення мінімізуючої послідовності функціоналу J.

Лема 5.12. *Нехай $c^2 > c_0^2$ і $\{u_n\} \subset M_{-\pi,\pi}$ мінімізуюча послідовність функціоналу J. Тоді (ii) не виконується.*

Доведення. Доведемо лему методом від супротивного. Припустимо, що (5.18) виконується. Зафіксуємо $T \gg 1$, $\varepsilon > 0$ і візьмемо $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх u_n при $n > n_0$:

$$\sup_{\eta\in\mathbb{R}} \left[\int\limits_{\eta-T}^{\eta+T} \frac{c^2}{2}(u_n'(s))^2 ds - \int\limits_{\eta-T}^{\eta+T} \left(\frac{c_1^2}{2}(Au_n(s))^2 + \frac{c_2^2}{2}(Bu_n(s))^2 \right) ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\eta-T}^{\eta+T} K(1 + \cos u_n(s)) ds \right] \leq \frac{\varepsilon}{T}.$$

Зауважимо, що оскільки $c^2 > c_0^2$, то величина в лівій частині завжди невід'ємна. Зокрема,

$$\frac{c^2 - c_0^2}{2} |u'\|^2_{L^2(-T,T)} \leq \frac{c^2}{2} \|u'\|^2_{L^2(-T,T)} - \frac{c_1^2}{2} \|Au\|^2_{L^2(-T,T)} - \frac{c_2^2}{2} \|Bu\|^2_{L^2(-T,T)} \leq \frac{\varepsilon}{T},$$

звідки $\|u'\|_{L^2(-T,T)} \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon}{T(c^2-c_0^2)}}$. Останнє означає, зокрема, що

$$|u(T) - u(-T)| = \left|\int\limits_{-T}^{T} u'(s)ds\right| \leq \int\limits_{-T}^{T} |u'(s)|ds \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{-T}^{T} ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{-T}^{T} (u'(s))^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2T}\|u'\|_{L^2(-T,T)} \leq \sqrt{\frac{4\varepsilon}{c^2 - c_0^2}} =: \varepsilon_1.$$

Оскільки функціонал J інваріантний відносно перетворення $s \mapsto s + s_0$ для будь-якого $s_0 \in \mathbb{R}$, то без обмеження загальності приймемо, що $u_n(0) = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\int\limits_{-T}^{T} K(1 + \cos u_n(s))ds \geq 2TK(1 + \cos \varepsilon_1),$$

а це суперечить тому, що для достатньо малих ε,

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}} \int\limits_{\eta-T}^{\eta+T} K(1 + \cos u_n(s))ds < \varepsilon.$$

Лему доведено. $\square$

Лема 5.13. *Нехай $c^2 > \frac{9}{8}c_0^2$ і $\{u_n\} \subset M_{-\pi,\pi}$ мінімізуюча послідовність функціоналу J. Тоді (iii) не виконується.*

Доведення. Спочатку зауважимо, що умова $c^2 > \frac{9}{8}c_0^2$ забезпечує виконання нерівності $\sqrt{\frac{c^2}{c^2-c_0^2}} < 3$ і отже, $k \in \{0, 1\}$ в лемі 5.10. Таким чином, точка мінімуму u_0 функціоналу J на $M_{-\pi,\pi}$ задовольняє нерівність $\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < 3\pi$.

Доведемо лему також методом від супротивного. Припустимо, що для мінімізуючої послідовності $\{u_n\} \subset M_{-\pi,\pi}$ (iii) виконується. Нехай $\varepsilon > 0$ і виберемо, як у доведенні леми 5.11, f_n і g_n такі, що $|u_n - (f_n + g_n - \pi)| < \varepsilon$. Тоді оцінка $\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < 3\pi$ означає, що $k_n^\pm \in \{0, -1\}$ (див. (5.23)). Для даних k_n^+ і k_n^-, можна визначити значення $f_n(+\infty) - f_n(-\infty)$ і $g_n(+\infty) - g_n(-\infty)$ відповідно з (5.25) і (5.26). Нагадаємо, що $u_n(+\infty) - u_n(-\infty) = 2\pi$. Безпосереднім обчисленням одержуємо

$$f_n(+\infty) - f_n(-\infty) = 0,\ g_n(+\infty) - g_n(-\infty) = 2\pi$$

$$\text{при } k_n^+ = k_n^- \in \{0, 1\};$$

$$f_n(+\infty) - f_n(-\infty) = 2\pi,\ g_n(+\infty) - g_n(-\infty) = 0$$

$$\text{при } k_n^+ = 0, k_n^- = -1;$$

$$f_n(+\infty) - f_n(-\infty) = -2\pi,\ g_n(+\infty) - g_n(-\infty) = 4\pi$$

$$\text{при } k_n^+ = -1, k_n^- = 0.$$

Позначимо через $\tilde{f}_n(s) := f_n(-s)$. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ одна з трьох функцій f_n, g_n або $\tilde{f}_n$ належить $M_{-\pi,\pi}$. Позначимо цю функцію через $\tilde{u}_n$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} J(f_n) < \inf\limits_{u\in M_{-\pi,\pi}} J(u)$, $\lim\limits_{n\to\infty} J(g_n) < \inf\limits_{u\in M_{-\pi,\pi}} J(u)$, то існує підпослідовність послідовності $\{\tilde{u}_n\}$ (з тим самим позначенням) така, що

$$\lim_{n\to\infty} J(\tilde{u}) < \inf_{u\in M_{-\pi,\pi}} J(u) = \lim_{n\to\infty} J(u_n).$$

Останнє суперечить тому, що послідовність $\{u_n\}$ мінімізуюча. Лему доведено.

□

Першим результатом цього підрозділу є наступна теорема:

Теорема 5.3. *Нехай $c^2 > \frac{9}{8}c_0^2$. Тоді рівняння (5.10) має розв'язок $u \in X$, який задовольняє крайові умови (5.5), а отже, існують дві гетероклінічні біжучі хвилі з профілем u і швидкостями $\pm c$.*

Доведення. Нерівності (5.16) означають, що функціонал J є обмеженим знизу на X. Нехай $\{u_n\} \subset M_{-\pi,\pi}$ мінімізуюча послідовність функціоналу J. За лемою 5.11 для $\{u_n\}$ виконується одна з трьох можливостей (i)—(iii). З лем 5.12 і 5.13 випливає, що має місце (i) (концентрація). Отже, для фіксованого $\varepsilon > 0$ можна вибрати послідовність $\{\eta_n\} \subset \mathbb{R}$ і $T_0 > 0$ такі, що

$$J(u_n) - J_T(u_n; \eta_n) < \varepsilon$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Позначимо через $v_n(s) := u_n(\eta_n + s)$. Послідовність $\{v_n\}$ є обмеженою в просторі X, оскільки

$$\|v_n'\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_n'\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{2}{c^2 - c_0^2} J(u_n)$$

і

$$|v(0)| < 3\pi$$

згідно (5.13) і леми 5.10. Оскільки X гільбертів простір, то існує підпослідовність (як і раніше позначається $\{v_n\}$), яка збігається слабко. На відрізку $[-T_0, T_0]$ слабка збіжність $\{v_n\}$ означає сильну збіжність в $L^2(-T_0, T_0)$ і $C^0([-T_0, T_0])$ до деякої границі u. Отже, для всіх $n > n_0$ з достатньо великим n_0:

$$\left| \int_{-T_0}^{T_0 - 1} \left[(Av_n(s))^2 - (Au_n(s))^2 \right] ds \right| < \varepsilon,$$

$$\left| \int_{-T_0}^{T_0 - 1} \left[(Bv_n(s))^2 - (Bu_n(s))^2 \right] ds \right| < \varepsilon$$

і

$$\left| \int_{-T_0}^{T_0} \left[\cos v_n(s) - \cos u_n(s) \right] ds \right| < \varepsilon.$$

Оскільки слабка збіжність означає, що

$$\|u'\|^2_{L^2(-T_0,T_0)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|v'\|^2_{L^2(-T_0,T_0)},$$

то

$$J_{T_0}(u; 0) \leq \liminf_{n\to\infty} J_{T_0}(v_n; 0).$$

Розширимо тепер область визначення u до $\mathbb{R}$. Візьмемо довільну монотонну послідовність T_k з $k \in \mathbb{N}_0$ і припустимо, що u вже визначено як рівномірну границю послідовності $\{v_n\}$ на відрізку $[-T_k, T_k]$. Оскільки $\{v_n\}$ все ще обмежена в X, то ми можемо знову вибрати підпослідовність (з тим самим позначенням), яка збігається рівномірно в $C^0([-T_{k+1}, T_{k+1}])$ до деякої границі $\tilde{u}$, яка за побудовою співпадає з u на $C^0([-T_k, T_k])$. Звідси слідує, що функція u на $\mathbb{R}$ задовольняє умови (5.5) і

$$J(u) = \lim_{T\to\infty} J_T(u; 0) \leq \lim_{T\to\infty} \liminf_{n\to\infty} J_T(v_n; 0) \leq$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} J(v_n) + C\varepsilon = \lim_{n\to\infty} J(u_n) + C\varepsilon$$

зі сталою $C = C(c, c_0, K)$, причому $u' \in L^2(\mathbb{R})$. Таким чином, $u \in M_{-\pi,\pi}$. В силу довільності ε, з останньої нерівності випливає, що

$$J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n).$$

А це означає, що u є точкою мінімуму функціоналу J на $M_{-\pi,\pi}$. За лемою 5.9 ця точка мінімуму і є розв'язком рівняння (5.10), який задовольняє умови (5.5). Теорему доведено. □

Далі в цьому підрозділі поширимо одержаний вище результат на випадок суперквадратичних потенціалів (які ростуть на нескінченності вище другого степеня). Розглянемо рівняння (5.2) з гетероклінічними крайовими умовами (5.5), для якого побудуємо функціонал

$$J(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - W_1(Au(s)) - W_2(Bu(s)) + \right.$$
$$\left. + K(1 + \cos u(s)) \right] ds. \tag{5.36}$$

Надалі припускаємо, що виконуються такі умови:

(i_5) *$W_i \in C^1(\mathbb{R})$, $W_i(0) = 0$ та $W_i(r) \geq 0$ для всіх $r \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$);*

(ii_5) *$\lim\limits_{r \to \pm\infty} W_i(r) = +\infty$;*

(iii_5) *існує скінченна границя $\lim\limits_{r \to 0} \frac{W_i(r)}{r^2}$.*

Нехай $v_0 : \mathbb{R}^2 \to [-\pi, \pi]$ є монотонною функцією на $C^\infty(\mathbb{R})$ такою, що $v_0(s) = -\pi$ при $s < -1$ та $v_0(s) = \pi$ при $s > 1$. Означимо функціонал $\Psi : H^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$\Psi(v) := J(v_0 + v).$$

Далі нам знадобиться наступна лема, яка одержується безпосереднім обчисленням (див. [73], Лема 2.3).

Лема 5.14. *За зроблених припущень виконуються такі твердження:*

(a) *$\Psi(v) < \infty$ для всіх $v \in H^1(\mathbb{R})$ (еквівалентно, $J(u) < \infty$ для всіх u вигляду $u = v_0 + v$ для деякого $v \in H^1(\mathbb{R})$);*

(b) *$J(u) = \infty$ для всіх $u \in M_{-\pi,\pi}$, які не мають вигляд $u = v_0 + v$ для деякого $v \in H^1(\mathbb{R})$. Зокрема, точка мінімуму u функціоналу J на $M_{-\pi,\pi}$ може бути записана у вигляді $u = v_0 + v$ для деякого $v \in H^1(\mathbb{R})$;*

(c) $\Psi \in C^1$ *на* $H^1(\mathbb{R})$*;*

(d) якщо $v \in H^1(\mathbb{R})$ *критична точка функціоналу* Ψ *і* $u = v_0 + v$*, то* $u, v \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *і* u *є розв'язком рівняння (5.2), що задовольняє умови (5.5).*

Використовуючи підхід, реалізований в [73], розглянемо невід'ємну функцію F в $C^\infty(\mathbb{R})$ таку, що

$$\begin{cases} F(r) = 0, & |r| \le \frac{5\pi}{2}, \\ F(r) \ge 4\left(\left|\int\limits_0^{2r} |W_1'(x)|dx\right| + \left|\int\limits_0^{2r} |W_2'(x)|dx\right|\right) \text{ і } F(r) \ge 2K, & |r| \ge 3\pi, \\ \frac{1}{2} \le 1 + \cos r + \frac{1}{2K}F(r), & |r| \in \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right). \end{cases} \tag{5.37}$$

Очевидно, що для всіх $\lambda > 0$, $1 + \cos r + \lambda F(r) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $|r| = \pi$.

Тепер означимо модифікований функціонал $\tilde{J} : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$\tilde{J}(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - W_1(Au(s)) - W_2(Bu(s)) + \right.$$
$$\left. + K(1 + \cos u(s)) + F(u(s))\right] ds. \tag{5.38}$$

Зауваження 5.2. *Очевидно, що* $\tilde{J}(u) = J(u)$ *для всіх* $u \in X$ *з* $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \frac{5\pi}{2}$*.*

Далі позначимо модифіковані потенціали взаємодії

$$\tilde{W}_1(r) := \left|\int\limits_0^r |W_1'(x)|dx\right|, \ \tilde{W}_2(r) := \left|\int\limits_0^r |W_2'(x)|dx\right|.$$

Тоді з (5.37) випливає, що для всіх $|r| \ge 3\pi$

$$W_1(2r) + W_2(2r) \le \tilde{W}_1(2r) + \tilde{W}_2(2r) \le \frac{1}{4}F(r) \tag{5.39}$$

і, отже, за умовою (ii_5), $F(r) \to +\infty$ при $r \to \pm\infty$.

Наступну лему можна знати в [73] (Лема 2.5).

Лема 5.15. *Нехай* $I(u) := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[(u'(s))^2 + W(u(s))\right] ds$*, де* $W \in C^1(\mathbb{R})$ *така функція, що* $W(\pm\pi) = 0$ *та* $W(r) > 0$ *при* $|r| < \pi$*. Тоді мінімум функціоналу*

I на $M_{-\pi,\pi}$ досягається, причому

$$\min_{u\in M_{-\pi,\pi}} I(u) = \nu := 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{W(x)}dx.$$

Крім того,

$$\inf_{T>0}\inf_{u\in H^1(-T,T)}\left\{\int\limits_{-T}^{T}\left[(u'(s))^2 + W(u(s))\right]ds:\ u(-T)=-\pi, u(T)=\pi\right\} = \nu.$$

Далі нам знадобиться наступна величина:

$$\tilde{c}_0^2 := 2\sup_{|r|<6\pi}\left|\frac{W_1(r)}{r^2}\right| + 2\sup_{|r|<6\pi}\left|\frac{W_2(r)}{r^2}\right|.$$

Лема 5.16. *Нехай виконуються умови (i_5)–(iii_5) і $c^2 > \tilde{c}_0^2$. Тоді для всіх $u \in X$*

$$\tilde{J}(u) \geq \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{c^2-\tilde{c}_0^2}{2}(u'(s))^2 + K\left(1+\cos u(s)\right) + \frac{1}{2}F(u(s))\right]ds, \tag{5.40}$$

і функціонал $\tilde{J}$ обмежений знизу на $M_{-\pi,\pi}$, причому

$$b^- := 8\sqrt{(c^2-\tilde{c}_0^2)K} < \inf_{u\in M_{-\pi,\pi}} \tilde{J}(u) < b^+ := 8c\sqrt{K}. \tag{5.41}$$

Доведення. Оскільки

$$|Au(s)| \leq |u(s+\cos\varphi)| + |u(s)| \leq 2\max\{|u(s+\cos\varphi)|, |u(s)|\},$$

$$|Bu(s)| \leq |u(s+\sin\varphi)| + |u(s)| \leq 2\max\{|u(s+\sin\varphi)|, |u(s)|\},$$

то для будь-якого $k > 0$

$$\{s\in\mathbb{R}:\ |Au(s)|>k\} \subseteq \left\{s\in\mathbb{R}:\ \max\{|u(s+\cos\varphi)|, |u(s)|\} > \frac{k}{2}\right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{s\in\mathbb{R}:\ |u(s+\cos\varphi)| > \frac{k}{2}\right\} \cup \left\{s\in\mathbb{R}:\ |u(s)| > \frac{k}{2}\right\};$$

$$\{s\in\mathbb{R}:\ |Bu(s)|>k\} \subseteq \left\{s\in\mathbb{R}:\ \max\{|u(s+\sin\varphi)|, |u(s)|\} > \frac{k}{2}\right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{s\in\mathbb{R}:\ |u(s+\sin\varphi)| > \frac{k}{2}\right\} \cup \left\{s\in\mathbb{R}:\ |u(s)| > \frac{k}{2}\right\}.$$

Тому, використовуючи (5.40) і монотонність потенціалів $\tilde{W}_1$ і $\tilde{W}_2$ на проміжках $(-\infty, 0)$ і $(0, +\infty)$, маємо

$$\int\limits_{\{s\in\mathbb{R}:\ |Au(s)|>6\pi}} W_1(Au(s))ds + \int\limits_{\{s\in\mathbb{R}:\ |Bu(s)|>6\pi}} W_2(Bu(s))ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{\{s\in\mathbb{R}\colon |Au(s)|>6\pi} \tilde{W}_1(Au(s))ds + \int\limits_{\{s\in\mathbb{R}\colon |Bu(s)|>6\pi} \tilde{W}_2(Bu(s))ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{\{s\in\mathbb{R}\colon |Au(s)|>6\pi} \tilde{W}_1\left(2\max\{|u(s+\cos\varphi)|, |u(s)|\}\right) ds+$$

$$+ \int\limits_{\{s\in\mathbb{R}\colon |Bu(s)|>6\pi} \tilde{W}_2\left(2\max\{|u(s+\sin\varphi)|, |u(s)|\}\right) ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{\{s\in\mathbb{R}\colon \max\{|u(s+\cos\varphi)|,|u(s+\sin\varphi)|,|u(s)|\}>3\pi} \frac{1}{4}F\left(\max\{|u(s+\cos\varphi)|, |u(s+\sin\varphi)|,\right.$$

$$\left.|u(s)|\}\right)ds \leq 2 \int\limits_{\{s\in\mathbb{R}\colon |u(s)|>6\pi} \frac{1}{4}F(u(s))ds \leq \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(u(s))ds. \qquad (5.42)$$

За означенням $\tilde{c}_0$, маємо

$$\int\limits_{\{s\in\mathbb{R}\colon |Au(s)|\leq 6\pi} W_1(Au(s))ds + \int\limits_{\{s\in\mathbb{R}\colon |Bu(s)|\leq 6\pi} W_2(Bu(s))ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{\{s\in\mathbb{R}\colon |Au(s)|\leq 6\pi} \frac{\tilde{c}_0^2}{2}(Au(s))^2 ds + \int\limits_{\{s\in\mathbb{R}\colon |Bu(s)|\leq 6\pi} \frac{\tilde{c}_0^2}{2}(Bu(s))^2 ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{c}_0^2}{2}\left[(Au(s))^2 + (Bu(s))^2\right] ds. \qquad (5.43)$$

Таким чином, з (5.42) і (5.43) для всіх $u \in X$

$$\tilde{J}(u) \geq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - \frac{\tilde{c}_0^2}{2}(Au(s))^2 - \frac{\tilde{c}_0^2}{2}(Bu(s))^2 + \right.$$

$$\left. + K(1+\cos u(s)) + F(u(s))\right] ds -$$

$$- \int\limits_{\{s\in\mathbb{R}\colon |Au(s)|>6\pi} W_1(Au(s))ds - \int\limits_{\{s\in\mathbb{R}\colon |Bu(s)|>6\pi} W_2(Bu(s))ds \geq$$

$$\geq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2 - \tilde{c}_0^2}{2}(u'(s))^2 + K(1+\cos u(s)) + \frac{1}{2}F(u(s))\right] ds,$$

і нерівність (5.40) доведено.

Застосовуючи лему 5.15 до функціоналу

$$I_1(u) = \frac{c^2 - \tilde{c}_0^2}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[(u'(s))^2 + V_1(u(s))\right] ds,$$

де

$$V_1(x) = \frac{2K}{c^2 - \tilde{c}_0^2}\left[(1+\cos x) + \frac{1}{2K}F(x)\right],$$

та враховуючи (5.40), одержуємо

$$\inf_{u\in M_{-\pi,\pi}} \tilde{J}(u) \geq (c^2 - \tilde{c}_0^2)\left|\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{V_1(x)}dx\right| =$$

$$= \sqrt{2(c^2-\tilde{c}_0^2)K}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+\cos x}dx\right| = 8\sqrt{(c^2-\tilde{c}_0^2)K}.$$

З іншого боку, враховуючи, що $W_i \geq 0$, маємо

$$\tilde{J}(u) \leq \frac{c^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(u'(s))^2 + \frac{2}{c^2}\left(K(1+\cos u(s)) + F(u(s))\right)\right]ds.$$

Далі, застосовуючи лему 5.15 до функціоналу

$$I_2(u) = \frac{c^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[(u'(s))^2 + V_2(u(s))\right]ds,$$

де

$$V_2(x) = \frac{2K}{c^2}\left[(1+\cos x) + \frac{1}{K}F(x)\right],$$

отримуємо

$$\inf_{u\in M_{-\pi,\pi}} \tilde{J}(u) \leq c^2\left|\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{V_2(x)}dx\right| < 8c\sqrt{K},$$

і нерівність (5.41) також доведено. □

Зауважимо, що якщо $\tilde{u} \in M_{-\pi,\pi}$ точка мінімуму функціоналу $\tilde{J}$ на $M_{-\pi,\pi}$, то величини b^+ та b^- задовольняють нерівність (див. [73], доведення леми 2.7):

$$b^+ - b^- \geq 2\sqrt{(c^2-\tilde{c}_0^2)K}\left(\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} - \frac{3\pi}{2}\right).$$

Тоді

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{3\pi}{2} + \frac{b^+ - b^-}{2\sqrt{(c^2-\tilde{c}_0^2)K}} = \frac{3\pi}{2} + \delta,$$

де

$$\delta := \frac{b^+ - b^-}{2\sqrt{(c^2-\tilde{c}_0^2)K}} = \frac{8\tilde{c}_0^2\sqrt{K}}{\left(c+\sqrt{c^2-\tilde{c}_0^2}\right)2\sqrt{(c^2-\tilde{c}_0^2)K}} =$$

$$= \frac{4\tilde{c}_0^2}{c^2 - \tilde{c}_0^2 + c\sqrt{c^2 - \tilde{c}_0^2}}.$$

Таким чином, має місце лема:

Лема 5.17. *Нехай виконуються умови* (i_5)*—*(iii_5) *і* $c^2 > \tilde{c}_0^2$*. Тоді, якщо* $\tilde{u} \in M_{-\pi,\pi}$ *точка мінімуму функціоналу* $\tilde{J}$ *на* $M_{-\pi,\pi}$*, то*

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{3\pi}{2} + \delta,$$

де

$$\delta := \frac{4\tilde{c}_0^2}{c^2 - \tilde{c}_0^2 + c\sqrt{c^2 - \tilde{c}_0^2}}. \tag{5.44}$$

Якщо при цьому швидкість c *така достатньо велика, що* $\delta < \pi$*, то*

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \frac{5\pi}{2}.$$

Як і вище, для даних параметрів $T > 1$ і $\eta \in \mathbb{R}$, введемо скорочену версію функціоналу $\tilde{J}$:

$$\tilde{J}_T(u;\eta) = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int\limits_{\eta-T+\frac{1}{2}+\tau}^{\eta+T-\frac{1}{2}+\tau} \frac{c^2}{2}(u'(s))^2 ds d\tau - \int\limits_{\eta-T+\frac{1}{2}}^{\eta+T-\frac{1}{2}} W_1(Au(s))ds -$$

$$- \int\limits_{\eta-T+\frac{1}{2}}^{\eta+T-\frac{1}{2}} W_2(Bu(s))ds + \int\limits_{\eta-T+\frac{1}{2}}^{\eta+T-\frac{1}{2}} \left[K(1+\cos u(s)) + F(u(s))\right] ds. \tag{5.45}$$

Наступна лема доводиться аналогічно до леми 5.11.

Лема 5.18. *Нехай виконуються умови* (i_5)*—*(iii_5) *та* $\{u_n\} \subset M_{-\pi,\pi}$ *мінімізуюча послідовність функціоналу* $\tilde{J}$ *на* $M_{-\pi,\pi}$*. І нехай* c *таке досить велике, що* $\delta < \pi$*. Тоді існує підпослідовність послідовності* $\{u_n\}$ *(як і раніше позначається* $\{u_n\}$*), для якої виконується одна з таких трьох можливостей:*

(i') *(концентрація) існує послідовність* $\{\eta_n\} \in \mathbb{R}$*, що для будь-якого достатньо малого* $\varepsilon > 0$ *знайдеться таке* $T > 0$*, що*

$$|\tilde{J}(u_n) - \tilde{J}_T(u_n;\eta_n)| < \varepsilon \text{ для всіх } n \in \mathbb{N};$$

(ii') *(розпливання) для всіх* $T > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\eta\in\mathbb{R}} \tilde{J}_T(u_n;\eta_n) = 0;$$

(iii′) (розщеплення) знайдеться $\varepsilon_1 > 0$ *таке, що для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ *існують* $f_n, g_n \in X$ *такі, що*

$$\operatorname{dist}\left[\operatorname{supp}\{f_n'\}, \operatorname{supp}\{g_n'\}\right] \to \infty, \ \textit{при}\ n \to \infty,$$

$$|u_n - (f_n + g_n - \pi)| \le \varepsilon,$$

$$|\tilde{J}(u_n) - (\tilde{J}(f_n) - \tilde{J}(g_n))| \le \varepsilon,$$

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{J}(f_n) = \alpha, \ \lim_{n\to\infty} \tilde{J}(g_n) = \beta$$

для деяких $0 < \alpha, \beta < \inf\limits_{u \in M_{-\pi,\pi}} \tilde{J}(u)$ *(π необхідне в першій нерівності, щоб забезпечити умови* $\tilde{J}(f_n) < +\infty$ *та* $\tilde{J}(g_n) < +\infty$*).*

Лема 5.19. *Нехай виконуються умови* (i_5)*—*(iii_5) *і швидкість c така достатньо велика, що* $\delta < \pi$ *для* δ *з (5.44). Тоді функціонал* $\tilde{J}$ *має точку мінімуму на* $M_{-\pi,\pi}$.

Доведення. За лемою 5.16 функціонал $\tilde{J}$ обмежений знизу на $M_{-\pi,\pi}$. Нехай $\{u_n\} \subset M_{-\pi,\pi}$ мінімізуюча послідовність функціоналу $\tilde{J}$. З леми 5.18 випливає, що для підпослідовності $\{u_n\}$ виконується одна з трьох можливостей (i')—(iii').

Покажемо, що розщеплення неможливе. Справді, якщо $f_n, g_n \in X$ і $\tilde{J}(f_n), \tilde{J}(g_n) < \infty$, то за лемою 5.14 (із заміною J на $\tilde{J}$), маємо, що $f_n(\pm\infty) \in \{\pm\pi\}$ і $g_n(\pm\infty) \in \{\pm\pi\}$. Оскільки $f_n + g_n - \pi \in M_{-\pi,\pi}$, то можливий тільки один з двох варіантів:

$$f_n(-\infty) = f_n(+\infty)$$

або

$$g_n(-\infty) = g_n(+\infty).$$

В першому випадку покладемо $\tilde{u}_n := g_n$, а в другому — $\tilde{u}_n := f_n$. Тоді $\{\tilde{u}\} \subset M_{-\pi,\pi}$ і за умовою (iii'), можливо після переходу до підпослідовності, маємо

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{J}(\tilde{u}_n) < \inf_{u \in M_{-\pi,\pi}} \tilde{J}(u) = \lim_{n\to\infty} \tilde{J}(u_n),$$

що суперечить тому, що $\{u_n\} \subset M_{-\pi,\pi}$ мінімізуюча послідовність.

Розпливання теж неможливе (див. лему 5.12).

Таким чином, виконується (i'). Отже, для фіксованого $\varepsilon > 0$, можна вибрати послідовність $\{\eta_n\} \subset \mathbb{R}$ і T_0 такі, що

$$\left|\tilde{J}(u_n) - \tilde{J}_{T_0}(u_n; \eta_n)\right| < \varepsilon.$$

Позначимо через $w_n(s) = u_n(\eta_n + s)$. Послідовність $\{w_n\}$ обмежена в X. Справді, за нерівністю (5.40)

$$\|w_n'\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{2}{c^2 - \tilde{c}_0^2}$$

та

$$|w_n(0)| \leq \frac{3\pi}{2} + \delta$$

за лемою 5.17. Отже, послідовність $\{w_n\}$ містить підпослідовність, яка слабко збігається до деякої границі $u \in X$. Збіжність є рівномірною на $[-T_0, T_0]$ і

$$\|u'\|_{L^2(-T_0,T_0)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|w_n'\|_{L^2(-T_0,T_0)}.$$

Оскільки $W_1(r)$, $W_2(r)$, $1 + \cos r$ та $F(r)$ є неперервно диференційовними і, отже, неперервними за Ліпшицем при $|r| \leq \frac{3\pi}{2} + \delta$, то існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n > n_0$

$$\left|\left(\tilde{J}(u) - \frac{c^2}{2}\|u'\|_{L^2(\mathbb{R})}\right) - \left(\tilde{J}_{T_0}(w_n; 0) - \frac{c^2}{2}\|u'\|_{L^2(-T_0,T_0)}\right)\right| \leq \varepsilon.$$

Оскільки ця нерівність виконується для всіх $T > T_0$, то за лемою 5.14, $u \in M_{-\pi,\pi}$. Крім того, оскільки функція $T \mapsto \tilde{J}_T(w_n; 0)$ неспадна для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $\tilde{J}_T(w_n; 0) \leq \tilde{J}(w_n)$. Звідси

$$\tilde{J}(u) = \lim_{T\to\infty} \tilde{J}_T(u; 0) \leq$$
$$\leq \lim_{T\to\infty} \liminf_{n\to\infty} \tilde{J}_T(w_n; 0) \leq \lim_{T\to\infty} \lim_{n\to\infty} \tilde{J}(w_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \tilde{J}(w_n) = \lim_{n\to\infty} \tilde{J}(u_n).$$

А це означає, що u точка мінімуму функціоналу $\tilde{J}$ на $M_{-\pi,\pi}$. □

Останнім результатом цього підрозділу є наступна теорема.

Теорема 5.4. *Нехай виконуються умови (i_5)—(iii_5). Тоді існує $c_0 > 0$ таке, що для всіх $c > c_0$ рівняння (5.2) має розв'язок u, який задовольняє крайові умови (5.5), а отже, існують дві гетероклінічні біжучі хвилі з профілем u і швидкостями $\pm c$.*

Доведення. Легко бачити, що існує $c_0 > 0$ таке, що $c_0^2 > \tilde{c}_0^2$ і для всіх $c > c_0$ виконується нерівність

$$\delta := \frac{4\tilde{c}_0^2}{c^2 - \tilde{c}_0^2 + c\sqrt{c^2 - \tilde{c}_0^2}} < \pi.$$

За лемою 5.19 модифікований функціонал $\tilde{J}$ має точку мінімуму $u_* \in M_{-\pi,\pi}$. Покажемо, що u_* — розв'язок рівняння (5.2), який задовольняє крайові умови (5.5). Для цього, означимо для функціоналу $\tilde{J}$ функціонал $\tilde{\Psi}$, аналогічно до Ψ, як у лемі 5.14. Тоді функція $v_* := u_* - v_0$ є точкою мінімуму функціоналу $\tilde{\Psi}$ на $H^1(\mathbb{R})$. Оскільки вкладення $H^1(\mathbb{R})$ в $L^\infty(\mathbb{R})$ неперервне і

$$\|u_*\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \|v_0 + v_*\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \frac{5\pi}{2}$$

за лемою 5.17, то

$$\|v_0 + v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \frac{5\pi}{2}$$

для всіх v в околі $\Delta \subset H^1(\mathbb{R})$ точки v_*. Тоді за зауваженням 5.2, для всіх $v \in \Delta$,

$$\Psi(v) = J(v_0 + v) = \tilde{J}(v_0 + v) = \tilde{\Psi}(v),$$

а тому v_* є точкою мінімуму функціоналу Ψ, як і функціоналу $\tilde{\Psi}$ в Δ. Зокрема, v_* є точкою локального мінімуму функціоналу Ψ на $H^1(\mathbb{R})$, тобто v_* — критична точка функціоналу Ψ. Отже, за лемою 5.14 (твердження (d)), $u_* = v_0 + v_*$ є розв'язком рівняння (5.2), який задовольняє крайові умови (5.5). Теорему доведено. □

Результати цього підрозділу поширюють результати про існування гетероклінічних біжучих хвиль, одержані в статтях [72, 73], на випадок систем на двовимірних ґратках з різними потенціалами взаємодії відносно просторових координат n і m.

Висновки до розділу 5

П'ятий розділ дисертації присвячений питанню існування біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус–Ґордона, які описують нескінченні системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці із зовнішнім потенціалом вигляду $V(r) = K(1 - \cos r)$. Він складається з чотирьох підрозділів.

У першому підрозділі наводиться формулювання задачі про біжучі хвилі для таких рівнянь. Розглядаються біжучі хвилі трьох типів: періодичні, гомоклінічні та гетероклінічні. Профіль $u(s)$ періодичної біжучої хвилі є періодичною функцією з періодом $2k$, профіль гомоклінічної хвилі збігається до π на нескінченності, а профіль гетероклінічної хвилі задовольняє крайові умови $\lim\limits_{s\to-\infty} u(s) = -\pi$ та $\lim\limits_{s\to-\infty} u(s) = -\pi$.

Другий підрозділ присвячений питанню існування несталих періодичних біжучих хвиль. Для цього, як і в розділі 4, використано варіаційний метод із використанням теореми про гірський перевал. Зокрема, побудовано функціонал J_k, критичні точки якого є періодичними розв'язками. Проте для даного функціоналу, в силу особливості його нелінійної частини, довести умову Пале–Смейла аналогічно до того, як це зроблено в розділі 4, неможливо. Тому для цього побудовано спеціальний допоміжний функціонал $\tilde{J}_k$, який збігається з J_k для всіх u при $\|u\|_{L^\infty([-k,k])} < \frac{\pi}{2}$. За допомогою цього функціоналу встановлено обмеженість послідовності Пале–Смейла функціоналу J_k.

У третьому підрозділі доведено існування несталих гомоклінічних біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу синус–Ґордона, що розглядаються. Тут також побудовано спеціальний функціонал J, критичні точки якого є шуканими розв'язками. Проте, на відміну від попереднього підрозділу, довести існування гомоклінічних хвиль аналогічно до періодичних не можна, оскільки тут немає компактності соболєвського вкладення. Застосувати метод періодичних апроксимацій також не можна, оскільки немає рівномірних оцінок для профілів періодичних хвиль. Тому для одержання основного результату було побудовано допоміжний функціонал $\tilde{J}$, який співпадає з J для всіх u з нормою $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < \frac{\pi}{2}$. Доведено, що він має обмежену послідовність Пале–Смейла, яка не збігається до нуля за мірою. Границя деякої її підпослідовності і є гомоклінічною хвилею.

Четвертий підрозділ присвячений питанню існування гетероклінічних біжучих хвиль в таких рівняннях. В силу особливості крайових умов для профілю таких хвиль, використати підхід, реалізований для періодичних і гомоклінічних хвиль неможливо. Зокрема, тут неможливо використати ні як теорему про гірський перевал, так і теорему про зачеплення, що застосовувалися у попередньому розділі. В даному випадку для доведення існування розв'язків також використано варіаційний метод, проте замість згаданих теорем використано принцип концентрованої компактності. Зокрема, розглянуто функціонали J і Ψ. Точки глобального мінімуму з множини $M_{-\pi,\pi}$ першого функціоналу виражаються через критичні точки другого, і є розв'язками даного рівняння з гетероклінічними крайовими умовами. Показано, що для функціоналу J і відповідної мінімізуючої послідовності з $M_{-\pi,\pi}$ виконується можливість (i) (концентрація) принципу концентрованої компактності, що дає обмеженість мінімізуючої послідовності, а отже, слабку збіжність до деякої функції. Ця функція і є розв'язком вихідної задачі.

Результати даного розділу опубліковано в працях [11, 13, 145, 153] і додатково висвітлено в [16–18, 160, 173, 175].

РОЗДІЛ 6

БІЖУЧІ ХВИЛІ В СИСТЕМАХ ТИПУ ФЕРМІ-ПАСТИ-УЛАМА НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

У цьому розділі вивчається система типу Фермі–Пасти–Улама на двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — координата (n,m)-ї частинки в момент часу t. Передбачається, що кожна частинка нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,m}(t) = W_1'(q_{n+1,m}(t) - q_{n,m}(t)) - W_1'(q_{n,m}(t) - q_{n-1,m}(t)) +$$
$$+W_2'(q_{n,m+1}(t) - q_{n,m}(t)) - W_2'(q_{n,m}(t) - q_{n,m-1}(t)),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \qquad (6.1)$$

де $W_1, W_2 \in C^1(\mathbb{R})$.

Зауважимо, що система (6.1) має вигляд системи (4.32) без зовнішнього потенціалу ($U(r) \equiv 0$).

6.1. Формулювання задачі про біжучі хвилі

Підставляючи (4.3) в систему (6.1), для профілю $u(s)$ біжучої хвилі маємо рівняння

$$c^2 u''(s) = W_1'(u(s+\cos\varphi) - u(s)) - W_1'(u(s) - u(s-\cos\varphi)) +$$
$$+W_2'(u(s+\sin\varphi) - u(s)) - W_2'(u(s) - u(s-\sin\varphi)), \qquad (6.2)$$

де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$.

Всюди далі під розв'язком рівняння (6.2) розуміється функція $u \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$, яка задовольняє це рівняння.

Зауважимо, що в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці, як і у одновимірному випадку, мають зміст монотонні хвилі. Проте монотонні хвилі не можуть задовольняти умову періодичності (4.5) та крайові умови (4.6). Тому, як і в четвертому розділі, будемо вивчати два види біжучих хвиль. Але у першому випадку на профіль хвилі накладемо таку умову періодичності:

$$u'(s+2k) = u'(s),\ s \in \mathbb{R}, \tag{6.3}$$

де $k > 0$ — деяке число. Зауважимо, що профіль такої хвилі не обов'язково періодичний. Проте періодичними є його профілі відносних зміщень $r_i^{\pm}$, які є аргументами W_1' та W_2' в рівнянні (6.2):

$$r_1^+(s) = \int\limits_s^{s+\cos\varphi} u'(\tau)d\tau,\ r_2^+(s) = \int\limits_s^{s+\sin\varphi} u'(\tau)d\tau,$$

$$r_1^-(s) = \int\limits_{s-\cos\varphi}^{s} u'(\tau)d\tau,\ r_2^-(s) = \int\limits_{s-\sin\varphi}^{s} u'(\tau)d\tau.$$

Тому такі хвилі також називають періодичними (див. [95]).

А в другому випадку профіль біжучої хвилі є розв'язком рівняння (6.2) з крайовими умовами на нескінченності:

$$\lim_{s\to\pm\infty} u'(s) = u'(\pm\infty) = 0. \tag{6.4}$$

6.2. Існування біжучих хвиль з профілем, який має періодичну похідну

Позначимо через E_k гільбертів простір

$$E_k = \left\{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}):\ u'(s+2k) = u'(s),\ u(0) = 0\right\}$$

зі скалярним добутком

$$(u,v)_k = \int\limits_{-k}^{k} u'(s)v'(s)ds$$

і відповідною нормою $\|u\|_k = (u,u)^{\frac{1}{2}}$. Нагадаємо, що за теоремою вкладення $E_k \subset C([-k,k])$, де $C([-k,k])$ — простір неперервних функцій на $[-k,k]$. Через $\|\cdot\|_{k,*}$ позначимо норму на просторі E_k^*, який є спряженим (дуальним) до простору E_k. Фактично E_k є 1-ковимірним підпростором гільбертового простору

$$\tilde{E}_k = \left\{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : \; u'(s+2k) = u'(s)\right\}$$

із

$$\int\limits_{-k}^{k} u'(s)v'(s)ds + u(0)v(0)$$

у якості скалярного добутку. На цьому просторі, як і в розділі 4, означимо оператори

$$(Au)(s) := u(s+\cos\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\cos\varphi} u'(\tau)d\tau,$$

$$(Bu)(s) := u(s+\sin\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\sin\varphi} u'(\tau)d\tau.$$

Наступне твердження випливає з леми 4.1.

Лема 6.1. *Оператори A та B є обмеженими лінійними операторами, що задовольняють нерівності*

$$\|Au\|_{L^\infty(-k,k)} \le l_1(k)\cdot\|u\|_k, \; \|Au\|_{L^2(-k,k)} \le |\cos\varphi|\cdot\|u\|_k,$$

$$\|Bu\|_{L^\infty(-k,k)} \le l_2(k)\cdot\|u\|_k, \; \|Bu\|_{L^2(-k,k)} \le |\sin\varphi|\cdot\|u\|_k.$$

Всюди далі передбачається, що потенціали задовольняють умову:

(h_6) *функції $W_i(r)$ неперервно диференційовні, $W_i(0) = W_i'(0) = 0$ і $W_i'(r) = o(r)$ при $r \to 0$, $i = 1, 2$.*

На просторі E_k розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} \left\{\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - W_1(Au(s)) - W_2(Bu(s))\right\} ds.$$

Лема 6.2. *Нехай виконується умова (h_6). Тоді J_k — функціонал класу C^1 на E_k, а його похідна визначається формулою*

$$\langle J_k'(u), h\rangle = \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2u'(s)h'(s) - W_1'(Au(s))Ah(s) - W_2'(Bu(s))Bh(s)\right] ds$$

для $u, h \in E_k$.

Доведення. Подамо функціонал J_k у вигляді
$$J_k(u) = \frac{c^2}{2}(u,u)_k - \Phi_k(u),$$
де
$$\Phi_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} [W_1(Au(s)) + W_2(Bu(s))]ds.$$
Таким чином, достатньо розглянути тільки функціонал Φ_k, оскільки для квадратичної частини твердження очевидне.

Оскільки для будь-якого $u \in E_k$ функції Au і Bu неперервні, то $\Phi_k < \infty$. Безпосереднім обчисленням неважко показати, що похідна функціоналу Φ_k існує і обчислюється за формулою
$$\langle \Phi_k'(u), h\rangle = \int\limits_{-k}^{k} \left[W_1'(Au(s))Ah(s) + W_2'(Bu(s))Bh(s)\right] ds.$$
Тому залишається перевірити неперервність цієї похідної.

Справді, нехай $\|h\|_k \le 1$ і $u_n \to u$ в E_k. Тоді $Au_n \to Au$ і $Bu_n \to Bu$ рівномірно на $[-k,k]$ і
$$|\langle \Phi_k'(u_n) - \Phi_k'(u), h| \le$$
$$\le \|Ah\|_{L^1(-k,k)} \cdot \|W_1'(Au_n) - W_1'(Au)\|_{L^\infty(-k,k)} +$$
$$+ \|Bh\|_{L^1(-k,k)} \cdot \|W_2'(Bu_n) - W_2'(Bu)\|_{L^\infty(-k,k)} \le$$
$$\le (2k)^{\frac{1}{2}} \left[\|Ah\|_{L^1(-k,k)} \cdot \|W_1'(Au_n) - W_1'(Au)\|_{L^\infty(-k,k)} +\right.$$
$$\left. + \|Bh\|_{L^1(-k,k)} \cdot \|W_2'(Bu_n) - W_2'(Bu)\|_{L^\infty(-k,k)}\right] \le$$
$$\le (2k)^{\frac{1}{2}} \left[\|W_1'(Au_n) - W_1'(Au)\|_{L^\infty(-k,k)} + \|W_2'(Bu_n) - W_2'(Bu)\|_{L^\infty(-k,k)}\right].$$
Оскільки $W_1'(Au_n) \to W_1'(Au)$ і $W_2'(Bu_n) \to W_2'(Bu)$ рівномірно на $[-k,k]$, то лему доведено. □

Лема 6.3. *Нехай виконується умова (h_6). Тоді критичні точки функціоналу J_k є розв'язками рівняння (6.2), що задовольняють умову (6.3).*

Доведення. Нехай $g(s)$ функція класу C^∞, яка задовольняє умову (6.3). Тоді $h(s) = g(s) - g(0) \in E_k$. Якщо u є критичною точкою функціоналу J_k, то

$$0 = \langle J_k'(u), h\rangle = \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2 u'(s)h'(s) - W_1'(Au(s))Ah(s) - W_2'(Bu(s))Bh(s)\right] ds =$$

$$= \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2 u'(s)h'(s) - W_1'(u(s+\cos\varphi) - u(s))(g(s+\cos\varphi) - g(s)) -\right.$$

$$\left. -W_2'(u(s+\sin\varphi) - u(s))(g(s+\sin\varphi) - g(s))\right] ds = \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2 u'(s)h'(s) -\right.$$

$$-\{W_1'(u(s) - u(s-\cos\varphi)) - W_1'(u(s+\cos\varphi) - u(s))\}g(s) -$$

$$\left. -\{W_2'(u(s) - u(s-\sin\varphi)) - W_2'(u(s+\sin\varphi) - u(s))\}g(s)\right] ds =$$

$$= \int\limits_{-k}^{k} \left[-c^2 u''(s)g(s) - \{W_1'(u(s) - u(s-\cos\varphi)) -\right.$$

$$-W_1'(u(s+\cos\varphi) - u(s))\}g(s) - \{W_2'(u(s) - u(s-\sin\varphi)) -$$

$$\left. -W_2'(u(s+\sin\varphi) - u(s))\}g(s)\right] ds =$$

$$= \int\limits_{-k}^{k} \left[-c^2 u''(s) + W_1'(u(s+\cos\varphi) - u(s)) - W_1'(u(s) - u(s-\cos\varphi)) +\right.$$

$$\left. +W_2'(u(s+\sin\varphi) - u(s)) - W_2'(u(s) - u(s-\sin\varphi))\right] g(s) ds.$$

Звідси випливає, що u — слабкий розв'язок рівняння (6.2). Оскільки $W_1'(r)$ і $W_2'(r)$ неперервні функції, то права частина рівняння (6.2) є неперервною. Тому $u''(s)$ – неперервна функція, а отже, $u \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ — розв'язок рівняння (6.2) у звичайному смислі. Лему доведено. $\square$

Спочатку, за допомогою одного з варіантів теореми про гірський перевал, доведемо існування монотонних хвиль за виконання таких умов:

(i_6) *$W_i(r) = \frac{c_i^2}{2}r^2 + f_i(r)$, де $c_i \geq 0$, $f_i \in C^1(\mathbb{R})$, причому $f_i(0) = f_i'(0) = 0$ і $f_i'(r) = o(r)$ при $r \to 0$, $i = 1,2$;*

і також

(ii_6^+) *існують $r_0 > 0$ і $\mu > 2$ такі, що $f_i(r_0) > 0$ і для $r \geq 0$*

$$0 \leq \mu f_i(r) \leq r f_i'(r);$$

або

(ii_6^-) *існують* $r_0 < 0$ *і* $\mu > 2$ *такі, що* $f_i(r_0) > 0$ *і для* $r \le 0$

$$0 \le \mu f_i(r) \le r f_i'(r).$$

Зауважимо, що нерівність з умови (ii_6^+) можна записати у вигляді диференціальної нерівності

$$r^{\mu+1}\frac{d}{dr}\left(r^{-\mu}f_i(r)\right) \ge 0, \; r \ge 0.$$

Безпосереднє інтегрування показує, що

$$f_i(r) \ge a_0 r^{\mu},$$

для $r > r_0$ з $a_0 = r_0^{-\mu} f_i(r_0)$. Разом із умовою (i_6) це означає, що

$$f_i(r) \ge a_1(r^{\mu} - r^2), \; r \ge 0, \tag{6.5}$$

з деяким $a_1 > 0$. Аналогічно у випадку умови (ii_6^-) остання нерівність виконується для $r \le 0$.

Далі нам знадобиться така величина:

$$c_0 = c_0(\varphi) := \sqrt{c_1^2 \cos^2\varphi + c_2^2 \sin^2\varphi}.$$

Наступна теорема встановлює існування надзвукових біжучих хвиль, які мають неспадний або незростаючий профіль.

Теорема 6.1. *Нехай виконується умова* (i_6), $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $(\varphi \in [\pi, \frac{3\pi}{2}])$ *і* $k > 0$. *Тоді*

(a) *за виконання умови* (ii_6^+) *для будь-якого* $c > c_0$ *рівняння (6.2) має неспадний (незростаючий) несталий розв'язок* u, *що задовольняє умову (6.3);*

(b) *за виконання умови* (ii_6^-) *для будь-якого* $c > c_0$ *рівняння (6.2) має незростаючий (неспадний) несталий розв'язок* u, *що задовольняє умову (6.3).*

Більше того, в обох випадках існують сталі $\delta > 0$ *і* $C > 0$, *які не залежать від* k, *такі, що критичне значення* $J_k(u)$ *задовольняє нерівності*

$$\delta \le J_k(u) \le C.$$

Зауважимо, що з точки зору фізики, зростаючі хвилі є *хвилями розширення*, а спадні — *хвилями стиснення*.

Для доведення теореми буде використано спеціальну форму теореми про гірський перевал (теорема B.2). З цією метою покладемо

$$(Pu)(s) := \int_0^s |u'(t)|dt.$$

Неважко перевірити, що P неперервно відображає простір E_k в себе і PE_k складається із неспадних функцій.

Оскільки ми шукаємо монотонні хвилі, то можемо припустити, що $f_i(r) = 0$ для $r < 0$ у випадку (a) і $f_i(r) = 0$ для $r > 0$ у випадку (b) (з таким же успіхом можна припустити, що в обох випадках $f_i(r)$ є парними функціями). Зокрема, це означає, що модифіковані потенціали задовольняють нерівності

$$0 \le \mu f_i(r) \le r f_i'(r)$$

для всіх $r \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Надалі будемо розглядати тільки випадок (a), оскільки випадок (b) аналогічний.

Наступна лема показує, що функціонал J_k задовольняє геометрію гірського перевалу.

Лема 6.4. *За умов теореми 6.1 існують такі $\delta > 0$ і $r_0 > 0$, що $J_k(u) \ge \delta$ при $\|u\|_k = r_0$. Крім того, існує таке $e \in PE_k$, що $\|e\|_k > r_0$ і $J_k(e) \le 0$.*

Доведення. З умови (i_6) випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $r_0 > 0$, що $|f_i(r)| \le \varepsilon r^2$ при $r \le r_0$ $(i = 1, 2)$. Тоді, враховуючи лему 6.1, при $\|u\|_k \le r_0$, маємо

$$J_k(u) \ge \int_{-k}^{k} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - \frac{c_1^2}{2}(Au(s))^2 - \frac{c_2^2}{2}(Bu(s))^2 - \varepsilon(Au(s))^2 - \right.$$
$$\left. - \varepsilon(Bu(s))^2\right] ds \ge \frac{c^2}{2}\|u\|_k^2 - \frac{c_1^2}{2}\cos^2\varphi\|u\|_k^2 - \frac{c_2^2}{2}\sin^2\varphi\|u\|_k^2 -$$
$$-\varepsilon\cos^2\varphi\|u\|_k^2 - \varepsilon\sin^2\varphi\|u\|_k^2 = \frac{c^2 - c_0^2 - 2\varepsilon}{2}\|u\|_k^2.$$

Тепер вибираємо ε достатньо малим і першу частину твердження леми доведено.

Доведемо другу частину леми. Нехай $v \in E_k \setminus \{0\}$ і $\tau > 0$. Тоді, враховуючи нерівність (6.5), маємо

$$J_k(\tau v) \le \tau^2 \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{c^2}{2}(v'(s))^2 + \left(a_1 - \frac{c_1^2}{2}\right)(Av(s))^2 + \left(a_1 - \frac{c_2^2}{2}\right)(Bv(s))^2\right] ds -$$

$$-\tau^\mu a_1 \int\limits_{-k}^{k} \left[(Av(s))^\mu + (Bv(s))^\mu\right] ds \le$$

$$\le \tau^2 \left[\frac{c^2}{2}\|v\|_1^2 + a_1 \left(\|Av\|^2_{L^2(-k,k)} + \|Bv\|^2_{L^2(-k,k)}\right)\right] -$$

$$-\tau^\mu a_1 \left[\|Av\|^\mu_{L^\mu(-k,k)} + \|Bv\|^\mu_{L^\mu(-k,k)}\right].$$

Оскільки $\mu > 2$, то $J_k(\tau v) \to -\infty$ при $\tau \to +\infty$, а отже, існує таке $\tau_0 = \tau_0(u) > 0$, що $J_k(\tau v) \le 0$ для всіх $\tau > \tau_0$. Таким чином, можна зафіксувати $e = \tau v$, яке задовольняє умови $J_k(e) \le 0$ і $\|e\|_k > r_0$. Лему доведено. $\square$

Лема 6.5. *Нехай виконується умова* (i_6) *і* $c > c_0$. *Тоді якщо потенціали* f_1 *і* f_2 *задовольняють нерівності*

$$\mu f_i(r) \le r f_i'(r),\ r \in \mathbb{R},\ i = 1, 2,$$

з $\mu > 2$, *то функціонал* J_k *задовольняє умову Пале–Смейла.*

Доведення. Нехай $\{u_n\} \subset E_k$ послідовність Пале–Смейла J_k рівня b, тобто $J_k(u_n) \to b$ і $J_k'(u_n) \to 0$. Тоді, для достатньо великого n, $\|J_k'(u_n)\|_{k,*} \le 1$ і $|J_k(u_n)| \le b + 1$. Таким чином,

$$b + 1 + \frac{1}{\mu}\|u_n\|_k \ge J_k(u_n) - \frac{1}{\mu}\langle J_k'(u_n), u_n)\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\left[c^2(u_n'(s))^2 - c_1^2(Au_n(s))^2 - c_2^2(Bu_n(s))^2\right] ds +$$

$$+ \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{1}{\mu} f_1'(Au_n(s))Au_n(s) - f_1(Au_n(s))\right] ds +$$

$$+ \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{1}{\mu} f_2'(Bu_n(s))Bu_n(s) - f_2(Bu_n(s))\right] ds.$$

Відповідно до умови леми другий інтеграл є невід'ємним і тому, за лемою 6.1, маємо

$$b+1+\frac{1}{\mu}\|u_n\|_k \geq \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)(c^2-c_0^2)\|u\|_k^2.$$

Отже, послідовність $\{u_n\}$ є обмеженою у просторі E_k.

Обмеженість послідовності $\{u_n\}$ означає, що переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), $u_n \to u$ слабко в E_k, а отже, $Au_n \to Au$ і $Bu_n \to Bu$ слабко в E_k, і сильно в $L^2(-k,k)$ і $C([-k,k])$. Прямим обчисленням показується, що

$$\|u_n-u\|_k^2 = \int\limits_{-k}^{k}\left(c^2(u_n'(s)-u'(s))^2+c^2(u_n(s)-u(s))^2\right)ds =$$

$$= \langle J_k'(u_n)-J_k'(u), u_n-u\rangle + c_1^2\|Au_n-Au\|^2_{L^2(-k,k)} + c_2^2\|Bu_n-Bu\|^2_{L^2(-k,k)}+$$

$$+\int\limits_{-k}^{k}\left(f_1'(Au_n(s))-f_1'(Au(s))\right)\left(Au_n(s)-Au(s)\right)ds+$$

$$+\int\limits_{-k}^{k}\left(f_2'(Bu_n(s))-f_2'(Bu(s))\right)\left(Bu_n(s)-Bu(s)\right)ds.$$

Очевидно, що всі доданки в правій частині останньої рівності збігаються до нуля, а отже, $\|u_n-u\|_k \to 0$ при $n\to\infty$. Лему доведено. □

Доведення теореми 6.1. Розглянемо випадок (a) при $\varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Леми 6.4 та 6.5 показують, що для функціоналу J_k виконуються майже всі умови теореми B.2. Залишається тільки перевірити виконання нерівності $J_k(Pu) \leq J_k(u)$ для всіх $u \in E_k$.

Оскільки

$$(APu)(s) = \int\limits_{s}^{s+\cos\varphi}(Pu)'(\tau)d\tau = \int\limits_{s}^{s+\cos\varphi}|u'(\tau)|d\tau \geq \left|\int\limits_{s}^{s+\cos\varphi}u'(\tau)d\tau\right|$$

і

$$(BPu)(s) = \int\limits_{s}^{s+\sin\varphi}(Pu)'(\tau)d\tau = \int\limits_{s}^{s+\sin\varphi}|u'(\tau)|d\tau \geq \left|\int\limits_{s}^{s+\sin\varphi}u'(\tau)d\tau\right|,$$

то

$$(APu)(s) \geq |(APu)(s)| \geq (Au)(s)$$

і

$$(BPu)(s) \geq |(BPu)(s)| \geq (Bu)(s).$$

Оскільки модифіковані потенціали $f_i(r)$ є неспадними на $\mathbb{R}$, то

$$J_k(Pu) = \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2((Pu)'(s))^2 - c_1^2(APu(s))^2 - c_2^2(BPu(s))^2 - \right.$$

$$\left. -f_1(APu(s)) - f_2(BPu(s))\right] ds =$$

$$= \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2(u'(s))^2 - c_1^2(APu(s))^2 - c_2^2(BPu(s))^2 - \right.$$

$$\left. -f_1(APu(s)) - f_2(BPu(s))\right] ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2(u'(s))^2 - c_1^2(Au(s))^2 - c_2^2(Bu(s))^2 - \right.$$

$$\left. -f_1(Au(s)) - f_2(Bu(s))\right] ds = J_k(u).$$

Таким чином, за теоремою B.2 існує нетривіальна критична точка $u \in PE_k$ функціоналу J_k така, що $J_k(u) \geq \delta$ з $\delta > 0$ з леми 6.4, і $J_k(u) \leq \max\limits_{\tau\in[0,1]} J_k(\tau e)$. Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in PE_k \subset E_k$, яка за лемою 6.3, є розв'язком задачі (6.2), (6.3). Цей розв'язок не сталий в силу означення простору E_k.

Випадок (b) аналогічний (із заміною P на $-P$).

Легко бачити, що при $\varphi \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ у випадку (a) одержуються незростаючі хвилі, а у випадку (b) — неспадні. Теорему доведено. $\square$

Подамо тепер версію теореми 6.1 для необов'язково монотонних хвиль. Для цього замінимо умови, вказані вище, такими:

(i_6') *$W_i(r) = \frac{c_i}{2}r^2 + f_i(r)$, де $c_i \in \mathbb{R}$, $f_i \in C^1(\mathbb{R})$, причому $f_i(0) = f_i'(0) = 0$ і $f_i'(r) = o(r)$ при $r \to 0$, $i = 1, 2$;*

(ii_6') *існують $r_0 \in \mathbb{R}$ і $\mu > 2$ такі, що $f_i(r_0) > 0$ і*

$$\mu f_i(r) \leq r f_i'(r), \ r \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2.$$

Позначимо через

$$a := \max\{c_1, c_2, 0\}.$$

Наступна теорема доводиться аналогічно до теореми 6.1. Для цього достатньо використати теорему про гірський перевал (теорема B.1) замість теореми B.2.

Теорема 6.2. *Нехай виконуються умови* (i_6') *та* (ii_6'). *Тоді для будь-яких* $k > 0$ *і* $c^2 > a$ *рівняння (6.2) має несталий розв'язок* u, *що задовольняє умову (6.3). Більше того, існують сталі* $\delta > 0$ *і* $C > 0$, *які не залежать від* k, *такі, що критичне значення* $J_k(u)$ *задовольняє нерівності*

$$\delta \le J_k(u) \le C.$$

Далі, за допомогою теореми про зачеплення встановимо існування біжучих хвиль з довільною швидкістю $c > 0$, зокрема, дозвукових біжучих хвиль, які задовольняють умову (6.3). Для цього, згідно леми 6.3, достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k.

Теорема 6.3. *Нехай виконуються умови* (i_6), (ii_6^+) *та* (ii_6^-). *Тоді для будь-яких* $k > 0$ *і* $c > 0$ *рівняння (6.2) має несталий розв'язок* u, *що задовольняє умову (6.3).*

Правильна лема:

Лема 6.6. *За умов теореми 6.3 функціонал* J_k *задовольняє умову Пале-Смейла.*

Доведення. Нехай $\{u_n\} \subset E_k$ — послідовність Пале–Смейла на деякому рівні b. Виберемо $\beta \in (\mu^{-1}, 2^{-1})$. Тоді для достатньо великих n маємо

$$b + 1 + \beta \|u_n\|_k \ge J_k(u_n) - \beta \langle J_k'(u_n), u_n \rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \int_{-k}^{k} \left[c^2 (u_n'(s))^2 - c_1^2 (Au_n(s))^2 - c_2^2 (Bu_n(s))^2\right] ds +$$

$$= \int_{-k}^{k} [\beta (f_1'(Au_n(s)) Au_n(s) + f_2'(Bu_n(s)) Bu_n(s)) -$$

$$-f_1(Au_n(s)) - f_2(Bu_n(s))]\, ds \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) c^2 \|u_n\|_k^2 - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \left[c_1^2 \|Au_n\|^2_{L^2(-k,k)} + c_2^2 \|Bu_n\|^2_{L^2(-k,k)}\right] +$$

$$+(\beta\mu - 1) \int\limits_{-k}^{k} [f_1(Au_n(s)) + f_2(Bu_n(s))]\, ds \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) c^2 \|u_n\|_k^2 - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \left[c_1^2 \|Au_n\|^2_{L^2(-k,k)} + c_2^2 \|Bu_n\|^2_{L^2(-k,k)}\right] +$$

$$+C(\beta\mu - 1) \left[\|Au_n\|^\mu_{L^\mu(-k,k)} + \|Bu_n\|^\mu_{L^\mu(-k,k)}\right] - C_0.$$

Оскільки для $\mu > 2$ маємо

$$c_1^2 \|Au_n\|^2_{L^2(-k,k)} + c_2^2 \|Bu_n\|^2_{L^2(-k,k)} \leq C \left[\|Au_n\|^2_{L^\mu(-k,k)} + \|Bu_n\|^2_{L^\mu(-k,k)}\right] \leq$$

$$\leq K(\varepsilon) + \varepsilon \left[\|Au_n\|^\mu_{L^\mu(-k,k)} + \|Bu_n\|^\mu_{L^\mu(-k,k)}\right],$$

де $K(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, то

$$b + 1 + \beta \|u_n\|_k \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) c^2 \|u_n\|_k^2 - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) K(\varepsilon) -$$

$$-\left(\frac{1}{2} - \beta\right) \varepsilon \left[\|Au_n\|^\mu_{L^\mu(-k,k)} + \|Bu_n\|^\mu_{L^\mu(-k,k)}\right] +$$

$$+C(\beta\mu - 1) \left[\|Au_n\|^\mu_{L^\mu(-k,k)} + \|Bu_n\|^\mu_{L^\mu(-k,k)}\right] - C_0.$$

Вибираючи $\varepsilon > 0$ достатньо малим, отримаємо

$$b + 1 + \beta \|u_n\|_k \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) c^2 \|u_n\|_k^2 +$$

$$+C(\beta\mu - 1) \left[\|Au_n\|^\mu_{L^\mu(-k,k)} + \|Bu_n\|^\mu_{L^\mu(-k,k)}\right] - C_0.$$

Оскільки $\beta\mu - 1 > 0$, то

$$b + 1 + \beta \|u_n\|_k \geq \left(\frac{1}{2} - \beta\right) c^2 \|u_n\|_k^2 - C_0.$$

Остання нерівність і доводить обмеженість $\{u_n\}$. Аналогічно як і в доведенні леми 6.5, $\|u_n - u\|_k \to 0$, що і доводить лему. □

Наступна лема доводиться аналогічно до леми 4.23.

Лема 6.7. *За умов теореми 6.3 функціонал J_k задовольняє геометрію зачеплення.*

Доведення теореми 6.3. Леми 6.6 та 6.7 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про зачеплення. Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in E_k$. За лемою 6.3, u — розв'язок задачі (6.2), (6.3). Його несталість очевидна. Теорему доведено. $\square$

6.3. Існування біжучих хвиль з профілем, похідна якого збігається до нуля на нескінченності

У цьому підрозділі будемо розглядати випадок біжучих хвиль, профіль яких є розв'язком рівняння (6.2), що задовольняє крайові умови (6.4) на нескінченності («відокремлені хвилі»). Такі хвилі є в деякому сенсі граничним випадком розглянутих вище «періодичних» біжучих хвиль при $k \to \infty$. Тому, як і в розділі 4, їх буде побудовано за допомогою граничного переходу при $k \to \infty$ в критичних точках функціоналу J_k.

Позначимо через E гільбертів простір

$$E = \left\{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : \ u' \in L^2(\mathbb{R}), \ u(0) = 0\right\}$$

зі скалярним добутком

$$(u, v) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u'(s)v'(s)ds$$

і відповідною нормою $\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}$. Через $\|\cdot\|_*$ позначимо норму на просторі E^*, який є спряженим (дуальним) до простору E. Простір E є 1-ковимірним підпростором гільбертового простору

$$\tilde{E} = \left\{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : \ u' \in L^2(\mathbb{R})\right\}$$

зі скалярним добутком

$$(u, v)_{\tilde{E}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u'(s)v'(s)ds + u(0)v(0).$$

На цьому просторі означимо оператори

$$(Au)(s) := u(s + \cos\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\cos\varphi} u'(\tau)d\tau,$$

$$(Bu)(s) := u(s + \sin\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\sin\varphi} u'(\tau)d\tau.$$

Має місце лема:

Лема 6.8. *Оператори A та B є обмеженими лінійними операторами, що задовольняють нерівності*

$$\|Au\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq l_1(k) \cdot \|u\|, \ \|Au\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq |\cos\varphi| \cdot \|u\|,$$

$$\|Bu\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq l_2(k) \cdot \|u\|, \ \|Bu\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq |\sin\varphi| \cdot \|u\|,$$

причому

$$\lim_{s\to\pm\infty}(Au)(s) = (Au)(\pm\infty) = 0,$$

$$\lim_{s\to\pm\infty}(Bu)(s) = (Bu)(\pm\infty) = 0.$$

Доведення. Усі нерівності випливають з леми 4.1. Залишається показати, що $\lim\limits_{s\to\pm\infty}(Au)(s) = 0$, $\lim\limits_{s\to\pm\infty}(Bu)(s) = 0$.

Справді, нехай $\cos\varphi \geq 0$. Тоді оскільки за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца,

$$|(Au)(s)| \leq \int\limits_s^{s+\cos\varphi} |u'(t)|dt \leq \left(\int\limits_s^{s+\cos\varphi} dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_s^{s+\cos\varphi} |u'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\cos\varphi} \left(\int\limits_s^{s+\cos\varphi} |u'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|(Bu)(s)| \leq \int\limits_s^{s+\sin\varphi} |u'(t)|dt \leq \left(\int\limits_s^{s+\sin\varphi} dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_s^{s+\sin\varphi} |u'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\sin\varphi} \left(\int\limits_s^{s+\sin\varphi} |u'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

та $u' \in L^2(\mathbb{R})$, то $(Au)(\pm\infty) = 0$, $(Bu)(\pm\infty) = 0$. Випадок $\cos\varphi \leq 0$ аналогічний. Лему доведено. □

З цієї леми випливає, що для будь-якої біжучої хвилі з профілем $u \in E$, профілі відносних зміщень

$$r_1^+(s) = \int\limits_s^{s+\cos\varphi} u'(\tau)d\tau, \ r_2^+(s) = \int\limits_s^{s+\sin\varphi} u'(\tau)d\tau,$$

$$r_1^-(s) = \int\limits_{s-\cos\varphi}^{s} u'(\tau)d\tau, r_2^-(s) = \int\limits_{s-\sin\varphi}^{s} u'(\tau)d\tau$$

задовольняють крайові умови:

$$\lim_{s\to\pm\infty} r_i^{\pm}(s) = 0, \ i = 1, 2.$$

Неважко перевірити, що

$$(Pu)(s) := \int\limits_0^s |u'(t)|dt$$

неперервно відображає простір E в себе.

Зробимо таке припущення:

(h_6') *функції* $W_i(r)$ *неперервно диференційовні,* $W_i(0) = W_i'(0) = 0$*,* $i = 1, 2$*, та для деякого* $R > 0$

$$\sup_{|r|\le R} \left|\frac{W_i'(r)}{r}\right| < +\infty.$$

Зауважимо, що це припущення дещо сильніше, ніж (h_6).

На просторі E розглянемо функціонал

$$J(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - W_1(Au(s)) - W_2(Bu(s))\right] ds.$$

Лема 6.9. *Нехай виконується умова* (h_6')*. Тоді* J *— функціонал класу* C^1 *на* E*, а його похідна для будь-яких* $u, h \in E$ *виражається формулою*

$$\langle J'(u), h\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[c^2u'(s)h'(s) - W_1'(Au(s))Ah(s) - W_2'(Bu(s))Bh(s)\right] ds.$$

Доведення. Як і вище, подамо функціонал J у вигляді

$$J(u) = \frac{c^2}{2}(u, u)_k - \Phi(u),$$

де

$$\Phi(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [W_1(Au(s)) + W_2(Bu(s))]ds.$$

Оскільки для квадратичної частини твердження очевидне, то достатньо розглянути тільки функціонал Φ.

Згідно леми 6.8 та умови (h_6'), для будь-якої функції $u \in E$ функції Au та Bu неперервні та існують такі сталі $C_1 > 0$ і $C_2 > 0$, які залежать відповідно від $\|Au\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ і $\|Bu\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, а отже, від $\|u\|$, що $|W_1(Au(s))| \leq C_1|Au(s)|^2$ і $|W_2(Bu(s))| \leq C_2|Bu(s)|^2$. Звідси негайно слідує, що $\Phi_k(u) < \infty$. Безпосереднім обчисленням неважко показати, що похідна функціоналу Φ_k існує і обчислюється за формулою

$$\langle \Phi_k'(u), h\rangle = \int\limits_{-k}^{k} \left[W_1'(Au(s))Ah(s) + W_2'(Bu(s))Bh(s)\right] ds.$$

Тому залишається перевірити неперервність цієї похідної.

Нехай $\|h\| \leq 1$ і $u_n \to u$ в E. Тоді $Au_n \to Au$ і $Bu_n \to Bu$ в $L^2(\mathbb{R})$ і $L^\infty(\mathbb{R})$, причому

$$|\langle \Phi'(u_n) - \Phi'(u), h| \leq$$
$$\leq \|Ah\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \|W_1'(Au_n) - W_1'(Au)\|_{L^2(\mathbb{R})} +$$
$$+\|Bh\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \|W_2'(Bu_n) - W_2'(Bu)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq$$
$$\leq \|W_1'(Au_n) - W_1'(Au)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|W_2'(Bu_n) - W_2'(Bu)\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Умова (h_6') означає, що існують такі сталі $C_1 > 0$ і $C_2 > 0$, що

$$|W_1'(r)| \leq C_1|r| \text{ і } |W_2'(r)| \leq C_2|r| \text{ при } |r| \leq R,$$

де $R = \min\{R_1, R_2\}$, $R_1 = \max\{\|Au\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \|Au_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\}$, $R_2 = \max\{\|Bu\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \|Bu_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\}$. Тоді

$$\|W_1'(Au_n) - W_1'(Au)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq \int\limits_{-b}^{b} |W_1'(Au_n(s)) - W_1'(Au(s))|^2 ds +$$
$$+ \int\limits_{|s|\geq b} \left[|W_1'(Au_n(s))|^2 + |W_1'(Au(s))|^2\right] ds \leq$$
$$\leq \int\limits_{-b}^{b} |W_1'(Au_n(s)) - W_1'(Au(s))|^2 ds +$$
$$+C_1 \int\limits_{|s|\geq b} \left[|Au_n(s)|^2 + |Au(s)|^2\right] ds.$$

Оскільки $Au_n \to Au$ в $L^2(\mathbb{R})$, то для будь-якого як завгодно малого $\varepsilon_1 > 0$ можна вибрати $b > 0$, яке не залежить від n, так, щоб другий інтеграл в правій частині останньої нерівності був меншим за ε_1. Крім того, оскільки

$Au_n \to Au$ рівномірно на $[-b, b]$, то перший інтеграл буде також меншим за ε_1 для достатньо великих n. Отже, для достатньо великих n

$$\|W_1'(Au_n) - W_1'(Au)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \le \varepsilon_1 + C_1\varepsilon_1.$$

Аналогічно для будь-якого як завгодно малого $\varepsilon_2 > 0$ і для достатньо великих n,

$$\|W_2'(Bu_n) - W_2'(Bu)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \le \varepsilon_2 + C_2\varepsilon_2.$$

А це означає, що $|\langle \Phi'(u_n) - \Phi'(u), h| \to 0$ при $n \to \infty$, що й дає необхідне. Лему доведено. $\square$

Лема 6.10. *Нехай виконується умова (h_6'). Тоді критичні точки функціоналу J є розв'язками рівняння (6.2), що задовольняють умову (6.4).*

Доведення. Нехай $g(s)$ функція класу $C_0^\infty(\mathbb{R})$ та u є критичною точкою функціоналу J. Тоді $h(s) = g(s) - g(0) \in E$ та

$$0 = \langle J'(u), h\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[c^2u'(s)h'(s) - W_1'(Au(s)) - W_2'(Bu(s))\right] ds =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[c^2u'(s)g'(s) - W_1'(u(s+\cos\varphi) - u(s))(g(s+\cos\varphi) - g(s)) - \right.$$

$$\left. - W_2'(u(s+\sin\varphi) - u(s))(g(s+\sin\varphi) - g(s))\right] ds =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[-c^2u''(s)g(s) - \right.$$

$$-\{W_1'(u(s) - u(s-\cos\varphi)) - W_1'(u(s+\cos\varphi)u(s))\}g(s) -$$

$$\left. -\{W_2'(u(s) - u(s-\sin\varphi)) - W_2'(u(s+\sin\varphi) - u(s))\}g(s)\right] ds =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[-c^2u''(s) + W_1'(u(s+\cos\varphi) - u(s)) - W_1'(u(s) - u(s-\cos\varphi)) + \right.$$

$$\left. + W_2'(u(s+\sin\varphi) - u(s)) - W_2'(u(s) - u(s-\sin\varphi))\right] g(s)ds.$$

Це означає, що u — слабкий розв'язок рівняння (6.2). Оскільки $u(s)$, $W_1(r)$ і $W_2(r)$ неперервні функції, то права частина рівняння (6.2) є неперервною.

Звідси отримуємо, що $u''(s)$ — також неперервна, тобто $u \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ — розв'язок рівняння (6.2) у звичайному сенсі. Крім того, оскільки $Au(s)$, $Bu(s)$ $\in L^\infty(\mathbb{R})$, то умова (h_6') означає, що права частина рівняння (6.2) належить $L^2(\mathbb{R})$, а отже, $u'' \in L^2(\mathbb{R})$ і $u' \in H^1(\mathbb{R})$. Тоді, згідно компактності соболєвського вкладення, $u' \in C_0(\mathbb{R})$, тобто u задовольняє умову (6.4). Лему доведено. □

Як і вище, позначимо через

$$a := \max\{c_1, c_2, 0\}.$$

Для одержання основного результату цього підрозділу знадобляться наступні три леми.

Лема 6.11. *Нехай виконуються умови (i_6'), (ii_6') і $c^2 > a$. Тоді існують такі $\varepsilon_0 > 0$ і $\gamma > 0$ які не залежать від k, що для нетривіальних критичних точок функціоналів J_k та J правильні відповідно нерівності*

$$\varepsilon_0 \le \|u\|_k^2 \le \gamma J_k(u),$$

$$\varepsilon_0 \le \|u\|^2 \le \gamma J(u).$$

Доведення. Розглянемо функціонал J_k (доведення для функціоналу J аналогічне). Подамо його у вигляді

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\Psi_k(u) - \int\limits_{-k}^{k} [f_1(Au(s)) + f_2(Bu(s))]\, ds,$$

де

$$\Psi_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2(u'(s))^2 - c_1(Au(s))^2 - c_2(Bu(s))^2\right] ds.$$

Нехай $u \in E_k$ — критична точка функціоналу J_k. Тоді, за умовою (ii_6'), маємо

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{\mu}\langle J_k'(u), u\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\Psi_k -$$

$$-\int\limits_{-k}^{k} \left[f_1(Au(s)) - \frac{1}{\mu}f_1'(Au(s))Au(s)\right] ds -$$

$$-\int\limits_{-k}^{k}\left[f_2(Bu(s))-\frac{1}{\mu}f_2'(Bu(s))Bu(s)\right]ds\geq$$

$$\geq\frac{\mu-2}{2\mu}\Psi_k(u).$$

Якщо $c_1\leq 0$, $c_2\leq 0$, то $\Psi_k(u)\geq c^2\|u\|_k^2$. Звідки $\|u\|_k^2\leq\gamma J_k(u)$ з $\gamma=\frac{2\mu}{(\mu-2)c^2}>0$.

Якщо $c_1>0$, $c_2\leq 0$, то

$$\Psi_k(u)\geq\int\limits_{-k}^{k}\left[c^2(u'(s))^2-c_1(Au(s))^2\right]ds\geq(c^2-c_1\cos^2\varphi)\|u\|_k^2.$$

Звідки $\|u\|_k^2\leq\gamma J_k(u)$ з $\gamma=\frac{2\mu}{(\mu-2)(c^2-c_1\cos^2\varphi)}>0$.

Якщо $c_1\leq 0$, $c_2>0$, то

$$\Psi_k(u)\geq(c^2-c_2\sin^2\varphi)\|u\|_k^2.$$

Звідки $\|u\|_k^2\leq\gamma J_k(u)$ з $\gamma=\frac{2\mu}{(\mu-2)(c^2-c_2\sin^2\varphi)}>0$.

Якщо ж $c_1>0$, $c_2>0$, то

$$\Psi_k(u)\geq(c^2-c_1\cos^2\varphi-c_2\sin^2\varphi)\|u\|_k^2.$$

Звідки $\|u\|_k^2\leq\gamma J_k(u)$ з $\gamma=\frac{2\mu}{(\mu-2)(c^2-c_1\cos^2\varphi-c_2\sin^2\varphi)}>0$.

Для одержання нижньої межі припустимо від супротивного, що існує послідовність нетривіальних критичних точок $\{u_{k_n}\}\subset E_{k_n}$ така, що $\|u_{k_n}\|_{k_n}\to 0$. Тоді, за лемою 6.1, $\|Au_{k_n}\|_{L^\infty(-k_n,k_n)}\to 0$, $\|Bu_{k_n}\|_{L^\infty(-k_n,k_n)}\to 0$ і з умови (i_6') випливає, що

$$|f_1'(Au_{k_n})Au_{k_n}+f_2'(Bu_{k_n})Bu_{k_n}|\leq\varepsilon_n\left(|Au_{k_n}|^2+|Bu_{k_n}|^2\right),$$

де $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$. Оскільки $\langle J_{k_n}'(u_{k_n}),u_{k_n}\rangle=0$, то

$$c^2\|u_{k_n}\|_{k_n}^2=$$

$$=\int\limits_{-k_n}^{k_n}[c_1(Au_{k_n}(s))^2+c_2(Bu_{k_n}(s))^2+f_1'(Au_{k_n}(s))+f_2'(Bu_{k_n}(s))]ds\leq$$

$$\leq(a+\varepsilon_n)\|u_{k_n}\|_{k_n}^2.$$

А це суперечить тому, що $c^2>a$. Лему доведено. □

Якщо модифікувати $V(r)$ так, щоб модифікований потенціал співпадав з $V(r)$ для $r > 0$ (відповідно для $r < 0$) і дорівнював нулю для $r < 0$ (відповідно для $r > 0$), то з доведеної леми при $a = c_0^2 = c_0^2(\varphi)$ випливає наслідок.

Наслідок 6.1. *Нехай виконуються умови* (i_6), ii_6^+) *(відповідно* ii_6^-)*) і* $c > c_0$. *Тоді твердження леми 6.11 виконується для нетривіальних критичних точок* $u \in PE_k$ *(відповідно* $u \in -PE_k$*) функціоналу* J_k *та* $u \in PE$ *(відповідно* $u \in -PE$*) функціоналу* J *при* $a = c_0^2$.

Лема 6.12. *Нехай виконується умова* (i_6'), $c^2 > a$ *та* $\{u_k\} \subset E_k$ *така послідовність, що* $\|J_k'(u_k)\|_{k,*} \to 0$ *і* $\|u_k\|_k$ *обмежена. Тоді* $\|u_k\|_k \to 0$ *при* $k \to \infty$, *або для будь-якого* $r > 0$ *існують* $\theta > 0$, *підпослідовність послідовності* $\{u_k\}$ *(як і раніше позначатимемо через* $\{u_k\}$*) та* $\{\eta_k\} \subset \mathbb{R}$, *такі, що*

$$\int\limits_{\eta_k - r}^{\eta_k + r} \left[(Au_k(s))^2 + (Bu_k(s))^2\right] ds \geq \theta. \tag{6.6}$$

Доведення. Нехай

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\eta\in\mathbb{R}} \int\limits_{\eta-r}^{\eta+r} \left[(Au_k(s))^2 + (Bu_k(s))^2\right] ds = 0$$

і $g_k \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ така функція, що

$$0 \leq g_k(s) \leq 1,$$

$$g_k(s) = 1 \text{ при } |s| \leq k,$$

$$g_k(s) = 0 \text{ при } |s| \geq k+1,$$

$$|g_k'(s)| \leq C,$$

де $C > 0$ не залежить від k. Покладемо

$$h_k(s) = g_k(s)[Au_k(s) + Bu_k(s)].$$

Легко перевірити, що $h_k \in H^1(\mathbb{R})$, $\|h_k\|_{H^1(\mathbb{R})}$ обмежена і

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\zeta\in\mathbb{R}} \int\limits_{\zeta-r}^{\zeta+r} |h_k(s)|^2 ds = 0.$$

Тоді за лемою 4.1 з [94] (її частковим варіантом є лема 4.9 з розділу 4) маємо, що $\|h_k\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$ для всіх $p > 2$. Оскільки

$$\|Au_k\|_{L^p(-k,k)} + \|Bu_k\|_{L^p(-k,k)} \le C_1 \|h_k\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

з деяким $C_1 > 0$, то

$$\|Au_k\|_{L^p(-k,k)} + \|Bu_k\|_{L^p(-k,k)} \to 0$$

для всіх $p > 2$.

Нехай $\varepsilon_k := \|J_k'(u_k)\|_{k,*} \to 0$ при $k \to \infty$, тоді

$$\langle J_k'(u_k), u_k\rangle = \int\limits_{-k}^{k} [c^2(u_k'(s))^2 - c_1(Au_k(s))^2 - c_2(Bu_k(s))^2 -$$

$$-f_1'(Au_k(s))Au_k(s) - f_2'(Bu_k(s))Bu_k(s)]ds \le \varepsilon_k \|u\|_k.$$

За лемою 6.1,

$$\|Au_k\|_{L^\infty(-k,k)} + \|Bu_k\|_{L^\infty(-k,k)} \le C.$$

Зафіксуємо довільне $p > 2$. Тоді за умовою (i_6') для кожного $\varepsilon > 0$ існує $C_\varepsilon > 0$ таке, що

$$|f_1'(r)r + f_2'(r)r| \le \varepsilon r^2 + C_\varepsilon |r|^p,\ |r| \le C.$$

Таким чином, маємо

$$c^2\|u_k\|_k^2 \le \int\limits_{-k}^{k} \big[c_1(Au_k(s))^2 + c_2(Bu_k(s))^2 +$$

$$+f_1'(Au_k(s))Au_k(s) + f_2'(Bu_k(s))Bu_k(s)\big]\, ds + \varepsilon_k\|u_k\|_k \le$$

$$\le \int\limits_{-k}^{k} \big[(a+\varepsilon)\left(c_1(Au_k(s))^2 + c_2(Bu_k(s))^2\right) + \varepsilon_k\|u_k\|_k =$$

$$+C_\varepsilon\left(c_1(Au_k(s))^p + c_2(Bu_k(s))^p\right)\big]\, ds +$$

$$= (a+\varepsilon)\left(\|Au_k\|^2_{L^2(-k,k)} + \|Bu_k\|^2_{L^2(-k,k)}\right) +$$

$$+C_\varepsilon\left(\|Au_k\|^p_{L^p(-k,k)} + \|Bu_k\|^p_{L^p(-k,k)}\right) + \varepsilon_k\|u_k\|_k.$$

Використовуючи лему 6.1, маємо

$$(c^2 - a - \varepsilon)\|u_k\|_k^2 \le C_\varepsilon\left(\|Au_k\|^p_{L^p(-k,k)} + \|Bu_k\|^p_{L^p(-k,k)}\right) + \varepsilon_k\|u_k\|_k.$$

Тоді, оскільки $c^2 > a$, то можна вибрати таке достатньо мале $\varepsilon > 0$, що $c^2 - a - \varepsilon > 0$, і отже, $\|u_k\|_k \to 0$. Лему доведено. $\square$

Лема 6.13. *Нехай виконуються умови* (i_6'), (ii_6'), $c^2 > a$ *та* $\{u_k\} \subset E_k$ *така послідовність нетривіальних критичних точок функціоналу* J_k, *що послідовність критичних значень* $\{J_k(u_k)\}$ *рівномірно обмежена. Тоді існують нетривіальна критична точка* $u \in E$ *функціоналу* J *і послідовність* $\{\eta_k\} \subset \mathbb{R}$ *такі, що підпослідовність* $u_k(s+\eta_k) - u_k(\eta_k)$ *збігається до* u *рівномірно на відрізках разом зі своїми першою і другою похідними.*

Доведення. За лемою 6.11, $\|u_k\|_k \not\to 0$, а тому за лемою 6.12, для будь-якого $r > 0$ існують $\theta > 0$, підпослідовність послідовності $\{u_k\}$ (з тим самим позначенням) та $\{\eta_k\} \subset \mathbb{R}$, такі, що виконується нерівність (6.6).

Покладемо $v_k(s) := u_k(s+\eta_k) - u_k(\eta_k)$. Тоді $\|v_k\|_k = \|u_k\|_k$, $J_k(v_k) = J_k(u_k)$ та $J_k'(v_k) = 0$. Крім того, оскільки $\|v_k\|_k$ обмежена, то існує підпослідовність послідовності $\{v_k\}$ (як і раніше позначатимемо через $\{v_k\}$), яка слабко збігається в просторі $H^1_{loc}(\mathbb{R})$ до деякої функції $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R})$, тобто в просторі $H^1(a,b)$ для будь-якого скінченного інтервалу (a,b).

Покажемо, що $u \in \tilde{E}$. Справді, $v_k' \to u'$ слабко в $L^2_{loc}(\mathbb{R})$, а отже, для будь-яких $a < b$

$$\int\limits_a^b (u'(s))^2 ds \le \liminf_{k\to\infty} \int\limits_a^b (v_k'(s))^2 ds \le \liminf_{k\to\infty} \|v_k'\|_k^2 \le C.$$

Таким чином, переходячи в останній нерівності до границі при $a \to -\infty$ та $b \to +\infty$, одержуємо, що

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u'(s))^2 ds \le C < +\infty,$$

тобто $u \in \tilde{E}$.

Покажемо, що $u \ne 0$. Згідно компактності соболєвського вкладення, $Av_k \to Au$ та $Bv_k \to Bu$ сильно в просторі $L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ (тобто рівномірно на скінченних інтервалах), і в $L^2_{loc}(\mathbb{R})$. Звідси, враховуючи нерівність (6.6), одержуємо

$$\int\limits_{-r}^{r} \left[(Au(s))^2 + (Bu(s))^2\right] ds \ge \theta > 0.$$

А це й означає, що $u \neq 0$.

Зазначимо, що оскільки $Av_k \to Au$ та $Bv_k \to Bu$ сильно в просторі $L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, то $W_1'(Av_k) \to W_1'(Au)$ та $W_2'(Bv_k) \to W_2'(Bu)$ також сильно в цьому просторі.

Нехай функція $g \in C^\infty(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$ і $g' \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тоді для достатньо великих k: $[-k, k] \supset \mathrm{supp} Ag \cup \mathrm{supp} Bg =: S$. І для таких k позначимо через $g_k \in E_k$ первісну функцію для $2k$-періодичного продовження функції $g'_{[-k,k]}$. Тоді

$$\langle J'(u), g\rangle =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[c^2 u'(s) g'(s) - W_1'(Au(s))Ag(s) - W_2'(Bu(s))Bg(s)\right] ds =$$

$$= \int\limits_{S} \left[c^2 u'(s) g'(s) - W_1'(Au(s))Ag(s) - W_2'(Bu(s))Bg(s)\right] ds =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{S} \left[c^2 v_k'(s) g'(s) - W_1'(Av_k(s))Ag(s) - W_2'(Bv_k(s))Bg(s)\right] ds =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2 v_k'(s) g_k'(s) - W_1'(Av_k(s))Ag_k(s) - W_2'(Bv_k(s))Bg_k(s)\right] ds =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \langle J'(v_k), g_k\rangle = 0.$$

Отже, u — нетривіальний розв'язок рівняння (6.2).

І нарешті, права частина рівняння (6.2) для v_k збігається в $L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ до його правої частини для u. А тому $v_k'' \to u''$, і отже, $v_k' \to u'$ і $v_k \to u$ в $L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$. Причому $u(0) = 0$ і $u \in E$. Очевидно $u \neq const$. Лему доведено. □

Наступний наслідок випливає з доведеної леми при $a = c_0^2$, якщо модифікувати $V(r)$ так, щоб модифікований потенціал збігався з $V(r)$ для $r > 0$ (відповідно для $r < 0$) і дорівнював нулю для $r < 0$ (відповідно для $r > 0$), а також врахувати, що границя монотонної послідовності функцій є також монотонною функцією.

Наслідок 6.2. *Нехай виконуються умови* (i'), (ii^+) *(відповідно* (ii^-)*) і* $c >$

c_0. Тоді твердження леми 6.13 виконується для нетривіальних критичних точок $u \in PE_k$ (відповідно $u \in -PE_k$) функціоналу J_k та $u \in PE$ (відповідно $u \in -PE$) при $a = c_0^2$.

Зауважимо, що доведена лема залишається справедливою і у випадку, коли замість послідовності критичних точок взяти таку послідовність $\{u_k\} \subset E_k$, що $\|J_k'(u_k)\|_{k,*} \to 0$ і послідовність значень $\{J_k(u_k)\}$ обмежена.

Основними результатами цього підрозділу є наступні дві теореми, які безпосередньо випливають з леми 6.13 і теорем 6.1 та 6.2 відповідно.

Теорема 6.4. *Нехай виконується умова (i_6) та $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ($\varphi \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$)). Тоді*

(a) за виконання умови (ii_6^+) для будь-якого $c > c_0$ рівняння (6.2) має неспадний (незростаючий) несталий розв'язок u, що задовольняє умови (6.4);

(b) за виконання умови (ii_6^-) для будь-якого $c > c_0$ рівняння (6.2) має незростаючий (неспадний) несталий розв'язок u, що задовольняє умови (6.4).

Теорема 6.5. *Нехай виконуються умови (i_6'), (ii_6') та $c^2 > a$. Тоді рівняння (6.2) має несталий розв'язок u, що задовольняє умови (6.4).*

Приклад 6.1. *Розглянемо рівняння (6.1) з потенціалами*

$$W_1(r) = W_2(r) = \frac{c_0^2}{2} r^2 + \frac{c_1}{p} r^p =: W(r),$$

де $c_0 > 0$, $c_1 \neq 0$, $p \geq 3$.

Зауважимо, що при $p = 3$ рівняння (6.1) є двовимірним аналогом так званої α-моделі ФПУ, а при $p = 4$ — β-моделі.

Нехай p — непарне. Тоді, якщо $c > c_0$ і $c_1 > 0$, то за теоремою 6.1, для будь-якого $k > 0$ дане рівняння має несталий неспадний розв'язок $u \in E_k$, тобто існує дві несталі $2k$-«періодичні» біжучі хвилі з профілем, що задовольняє умову періодичності (6.3), і швидкостями $\pm c$, а за теоремою 6.4 — несталий неспадний розв'язок $u \in E$, тобто існує дві несталі «відокремлені» хвилі з профілем, що задовольняє умови (6.4), і швидкостями $\pm c$. Якщо ж $c > c_0$ і $c_1 < 0$, то дане рівняння має несталі незростаючі розв'язки $u \in E_k$ та $u \in E$.

Нехай p — парне (в цьому випадку потенціал $W(r)$ парний, а його похідна непарна). Тоді, якщо $c > c_0$, то дане рівняння має пару несталих розв'язків $\pm u \in E_k$, один з них неспадний, а інший незростаючий, а також пару монотонних несталих розв'язків $\pm u \in E$. Якщо ж $c \in (0, c_0]$, то за теоремою 6.3 дане рівняння має пару несталих розв'язків $\pm u \in E_k$, тобто існують дозвукові $2k$-«періодичні» хвилі.

Таким чином, у відрозділах 6.2 і 6.3 одержано результати про існування «періодичних» і «відокремлених» біжучих хвиль, які поширюють результати статті [98] (див. також [95]) на випадок систем на двовимірних ґратках з різними потенціалами взаємодії відносно просторових координатних осей n і m.

6.4. Існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах типу ФПУ

У цьому підрозділі будемо вивчати періодичні та відокремлені біжучі хвилі в рівнянні (6.2), які задовольняють умови з розділу 4. Зокрема, профіль періодичної хвилі задовольняє умову періодичності

$$u(s + 2k) = u(s), \; s \in \mathbb{R}, \tag{6.7}$$

де $k > 0$ — деяке число, а профіль відокремленої хвилі задовольняє крайові умови на нескінченності

$$\lim_{s \to \pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \tag{6.8}$$

Позначимо через X_k гільбертів простір

$$X_k = \left\{ u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : \; u(s + 2k) = u(s), \; u(0) = 0 \right\}$$

зі скалярним добутком (тим самим, що й в E_k з підрозділу 6.2)

$$(u, v)_k = \int\limits_{-k}^{k} u'(s) v'(s) ds$$

і відповідною нормою $\|u\|_k = (u,u)^{\frac{1}{2}}$. Цей простір є замкненим підпростором простору E_k. Більше того, $u \in E_k$ належить X_k тоді і тільки тоді, коли похідна $u'(s)$ має нульове середнє значення (див. [95]), тобто

$$\langle u' \rangle := \int\limits_{-k}^{k} u'(s)ds = 0.$$

Це означає, що X_k є 1-ковимірним підпростором простору E_k. А ортогональне доповнення є власне підпростір E_k, породжений функцією $h_0(s) = s$.

Нехай X замикання простору $C_0^\infty(\mathbb{R})$ по відношенню до норми (тієї ж, що й в E з підрозділу 6.3)

$$\|u\| = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u'(s))^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, що X є замкненим підпростором простору $\tilde{E}$, а тому функції з X задовольняють умову (6.8).

Припустимо, що виконуються умови (i_6') та (ii_6') з підрозділу 6.2.

На просторах X_k та X розглянемо відповідно функціонали

$$J_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - W_1(Au(s)) - W_2(Bu(s)) \right] ds,$$

$$J(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - W_1(Au(s)) - W_2(Bu(s)) \right] ds.$$

Легко бачити, що критичні точки цих функціоналів у просторах X_k та X є розв'язками рівняння (6.2), що задовольняють умови (6.7) та (6.8) відповідно.

Аналогічно, як і вище, одержуються наступні результати.

Теорема 6.6. *Нехай виконуються умови (i_6') та (ii_6'). Тоді для будь-яких $k > 0$ і $c^2 > a$ рівняння (6.2) має несталий розв'язок u, що задовольняє умову (6.7).*

Перевіримо виконання умов теореми про гірський перевал для функціоналу J_k.

Лема 6.14. *За виконання умов теореми 6.6 функціонал J_k задовольняє умову Пале–Смейла.*

Доведення. Нехай $\{u_n\} \subset X_k$ послідовність Пале–Смейла функціоналу J_k рівня b. Тоді для достатньо великих n,

$$b + 1 + \frac{1}{\mu}\|u_n\|_k \geq J_k(u_n) - \frac{1}{\mu}\langle J_k'(u_n), u_n\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\int\limits_{-k}^{k} \left[c^2(u_n'(s))^2 - c_1(Au_n(s))^2 - c_2(Bu_n(s))^2\right] ds +$$

$$+ \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{1}{\mu} f_1'(Au_n(s))Au_n(s) - f_1(Au_n(s)\right] ds +$$

$$+ \int\limits_{-k}^{k} \left[\frac{1}{\mu} f_2'(Bu_n(s))Bu_n(s) - f_2(Bu_n(s)\right] ds.$$

Відповідно до умови леми другий і третій інтеграли є невід'ємними і тому, за лемою 6.1, маємо

$$b + 1 + \frac{1}{\mu}\|u_n\|_k \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)(c^2 - a)\|u_n\|_k^2.$$

А це означає, що послідовність $\{u_n\}$ є обмеженою у просторі X_k.

Тоді, переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), $u_n \to u$ слабко в X_k, а отже, $Au_n \to Au$ і $Bu_n \to Bu$ слабко в X_k, і сильно в $L^2(-k, k)$ і $C([-k, k])$. Прямим обчисленням показується, що

$$c^2\|u_n - u\|_k^2 = \int\limits_{-k}^{k} c^2(u_n'(s) - u'(s))^2 ds =$$

$$= \langle J_k'(u_n) - J_k'(u), u_n - u\rangle + c_1\|Au_n - Au\|_{L^2(-k,k)}^2 + c_2\|Bu_n - Bu\|_{L^2(-k,k)}^2 +$$

$$+ \int\limits_{-k}^{k} \left(f_1'(Au_n(s)) - f_1'(Au(s)\right)\left(Au_n(s) - Au(s)\right) ds +$$

$$+ \int\limits_{-k}^{k} \left(f_2'(Bu_n(s)) - f_2'(Bu(s)\right)\left(Bu_n(s) - Bu(s)\right) ds.$$

Як і вище, всі доданки в правій частині останньої рівності збігаються до нуля. Таким чином, $\|u_n - u\|_k \to 0$ при $n \to \infty$, і лему доведено. □

Лема 6.15. *За виконання умов теореми 6.6 існують такі $r_0 > 0$ і $\alpha_0 > 0$, які не залежать від k, що $\inf\limits_{\|u\|_k = r_0} J_k(u) > \alpha_0$.*

Доведення. Подамо функціонал J_k у вигляді
$$J_k(u) = \frac{1}{2}\Psi_k(u) - S_k(u),$$
де
$$\Psi_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} \left[c^2(u'(s))^2 - c_1(Au(s))^2 - c_2(Bu(s))^2\right] ds,$$
$$S_k(u) = \int\limits_{-k}^{k} \left[f_1(Au(s)) + f_2(Bu(s))\right] ds.$$
Тоді за лемою 6.1 маємо
$$J_k(u) + S_k(u) = \frac{1}{2}\Psi_k(u) \geq \frac{c^2 - a}{2}\|u\|_k^2.$$
Покажемо, що $S_k(u) = o(\|u\|_k^2)$. Згідно умови (i_6'), для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $|r| \leq \delta$
$$\max\{f_1(r), f_2(r)\} \leq \frac{\varepsilon r^2}{2}.$$

Покладемо
$$r_0 = \frac{\delta}{\max\{l_1(k), l_2(k)\}},$$
де $l_1(k), l_2(k)$ з леми 4.1. І візьмемо $u \in X_k$ з нормою $\|u\|_k = r_0$. Тоді, враховуючи лему 6.1, для майже всіх s маємо
$$|Au(s)| \leq \|Au\|_{L^\infty(-k,k)} \leq l_1(k)\|u\|_k \leq \delta,$$
$$|Bu(s)| \leq \|Bu\|_{L^\infty(-k,k)} \leq l_2(k)\|u\|_k \leq \delta.$$
Отже,
$$S_k(u) \leq \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{-k}^{k} \left[(Au(s))^2 + (Bu(s))^2\right] ds \leq \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_k^2.$$
В силу довільності $\varepsilon > 0$, маємо
$$S_k(u) = o(\|u\|_k^2).$$
Зокрема, якщо вибрати ε так, щоб $0 < \varepsilon < c^2 - a$, то одержимо
$$J_k(u) \geq (c^2 - a - \varepsilon)\frac{r_0^2}{2} > 0$$

і лему доведено. $\square$

Лема 6.16. *За виконання умов теореми 6.6 існує елемент $e \in X_k$ з нормою $\|e\|_k > r_0$ такий, що $J_k(e) \le 0$.*

Доведення. За лемою 3.1 існують такі сталі $d > 0$ та $d_0 \ge 0$, які не залежать від i, що для всіх r

$$f_i(r) \ge d|r|^\mu - d_0.$$

Нехай $u \in X_k \setminus \{0\}$ та $r > 0$. Тоді маємо

$$J_k(ru) = \frac{1}{2}\int\limits_{-k}^{k} \left[c^2r^2(u'(s))^2 - c_1r^2(Au(s))^2 - c_2r^2(Bu(s))^2\right] ds-$$

$$-\int\limits_{-k}^{k} \left[f_1(A(ru(s))) + f_2(B(ru(s)))\right] ds \le$$

$$\le \frac{r^2}{2}\int\limits_{-k}^{k} \left[c^2r^2(u'(s))^2 - c_1r^2(Au(s))^2 - c_2r^2(Bu(s))^2\right] ds-$$

$$-dr^\mu \int\limits_{-k}^{k} \left[|Au(s)|^\mu + |Bu(s)|^\mu\right] ds + 4kd_0.$$

Оскільки $\mu > 2$, то $J_k(ru) \to -\infty$ при $r \to +\infty$, а отже, існує таке $r_0 = r_0(u) > 0$, що $J_k(ru) \le 0$ для всіх $r > r_0$ і лему доведено. $\square$

Доведення теореми 6.6. Леми 6.14 — 6.16 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал. Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in X_k$, яка є розв'язком задачі (6.2), (6.7). Несталість розв'язку очевидна. Теорему доведено. $\square$

Наступна теорема встановлює існування періодичних біжучих хвиль з довільною швидкістю $c > 0$.

Теорема 6.7. *Нехай виконуються умови (i_6), (ii_6^+) та (ii_6^-). Тоді для будь-яких $k > 0$ і $c > 0$ рівняння (6.2) має несталий розв'язок u, що задовольняє умову (6.7).*

Доводиться ця теорема аналогічно до теореми 6.3. Для цього достатньо використати теорему про зачеплення.

І на кінець доведемо існування відокремлених біжучих хвиль.

Теорема 6.8. *Нехай виконуються умови* (i_6'), (ii_6') *і* $c^2 > a$. *Тоді рівняння (6.2) має несталий розв'язок* u, *що задовольняє умови (6.8).*

Доведення. Міркуючи аналогічно, як у підрозділі 6.2, неважко довести, що функціонал J задовольняє геометрію гірського перевалу в просторі E. Оскільки існує такий елемент $e \in X$, що $J(e) < 0$, то функціонал J задовольняє геометрію гірського перевалу і в просторі X. Тоді за теоремою В.3, існує послідовність Пале-Смейла $\{u_n\} \subset X$ рівня b, тобто $J(u_n) \to b$ і $J'(u_n) \to 0$ у просторі X^*.

Як і вище, послідовність $\{u_n\}$ обмежена в X. Більше того, як і в лемі 6.11, маємо, що $\|u_n\|$ обмежена знизу додатною сталою, а отже, $\|u_n\| \not\to 0$. Тому можна вважати, що $u_n \to u$ слабко в X. Далі, як і в лемі 6.12, для будь-якого $r > 0$ існують $\theta > 0$, підпослідовність послідовності $\{u_n\}$ (як і раніше позначатимемо через $\{u_n\}$) та $\{\eta_n\} \subset \mathbb{R}$, такі, що

$$\int\limits_{\eta_n - r}^{\eta_n + r} \left[(Au_n(s))^2 + (Bu_n(s))^2\right] ds \geq \theta.$$

Замінюючи $u_n(s)$ на $u_n(s - \eta_n)$, одержуємо

$$\int\limits_{-r}^{r} \left[(Au_n(s))^2 + (Bu_n(s))^2\right] ds \geq \theta$$

і нова послідовність $\{u_n\}$ залишається послідовністю Пале-Смейла. Згідно теореми вкладення, $Au_n \to Au$ і $Bu_n \to Bu$ у просторі $L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, тобто рівномірно на відрізках і, отже,

$$\int\limits_{-r}^{r} \left[(Au(s))^2 + (Bu(s))^2\right] ds \geq \theta > 0.$$

А це означає, що $u \neq 0$.

Далі, як і в доведенні леми 6.13, беремо $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ і показуємо, що $\langle J'(u), g\rangle = 0$, тобто u — нетривіальна критична точка функціоналу J, а отже, розв'язок рівняння (6.2), що задовольняє умови (6.8). Несталість розв'язку очевидна. Теорему доведено. □

Висновки до розділу 6

Шостий розділ дисертації присвячений питанню існування біжучих хвиль в системах типу Фермі–Пасти–Улама на двовимірній ґратці. Такі системи мають вигляд систем, розглянутих у підрозділі 4.2, але без зовнішнього потенціалу. Він складається з чотирьох підрозділів.

У першому підрозділі наводиться формулювання задачі про біжучі хвилі для таких систем. Розглядаються біжучі хвилі двох типів. У першому випадку похідна профілю $u(s)$ є періодичною функцією з періодом $2k$, а в другому — профіль хвилі задовольняє крайові умови $\lim\limits_{s\to\pm\infty} u'(s) = 0$.

Другий підрозділ присвячений питанню існування несталих біжучих хвиль з періодичною похідною профілю. Для цього, як і в розділі 4, використано варіаційний метод. Зокрема, за допомогою теореми про гірський перевал встановлено існування несталих надзвукових монотонних і необов'язково монотонних біжучих хвиль. Крім того, за допомогою теореми про зачеплення доведено існування періодичних хвиль з довільною швидкістю $c > 0$, зокрема, дозвукових хвиль.

У третьому підрозділі, за допомогою методу періодичних апроксимацій встановлено існування несталих монотонних і необов'язково монотонних біжучих хвиль з профілем, похідна якого збігається до нуля на нескінченності.

Четвертий підрозділ присвячений питанню існування біжучих хвиль з аналогічними умовами, які накладаються на сам профіль хвилі, а не на його похідну. Тут доведено аналогічні теореми про існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль.

Результати даного розділу опубліковано в працях [14, 150] і додатково висвітлено в [164].

РОЗДІЛ 7

СТОЯЧІ ХВИЛІ В ДИСКРЕТНИХ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯННЯХ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

У сьому розділі досліджується питання існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на плоскій цілочисловій ґратці з кубічною та насичуваною нелінійностями.

7.1. Дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера з кубічною нелінійністю

У цьому підрозділі вивчаються дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера з кубічною нелінійністю на плоскій цілочисловій ґратці

$$i\dot{\psi}_{n,m}(t) + (\Delta\psi)_{n,m}(t) + \theta\mu_{n,m}|\psi_{n,m}(t)|^2\psi_{n,m}(t) = 0,\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{7.1}$$

де $\psi_{n,m}(t)$ — хвильова функція (n,m)-ї частинки, $\theta = \pm 1$, а

$$(\Delta\psi)_{n,m} = \psi_{n+1,m} + \psi_{n-1,m} + \psi_{n,m+1} + \psi_{n,m-1} - 4\psi_{n,m}$$

двовимірний дискретний оператор Лапласа, $\{\mu_{n,m}\} \subset \mathbb{R}$. Рівняння (7.1) представляють собою нескінченну (зліченну) систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Такі системи використовують, наприклад, для опису двовимірних систем зв'язаних волоконних світлодіодів (див. [65]).

Зазначимо, що в статті [196] вивчались двовимірні солітони в таких системах при $\theta\mu_{n,m} = 2$. Якщо ввести координату x вздовж осі n, а координату y вздовж осі m, то можна одержати континуальне наближення для цієї системи:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \psi_{yy} + 2|\psi|^2\psi = 0.$$

Це двовимірне нелінійне рівняння Шредінгера, яке описує, зокрема, стаціонарне самофокусування світлових пучків.

Зауважимо, що параметр θ введено для того, щоб розрізняти *самофокусований* ($\theta = 1$) та *розфокусований* ($\theta = -1$) випадки.

7.1.1. Формулювання задачі про стоячі хвилі

Стоячою хвилею в даному випадку є розв'язок вигляду

$$\psi_{n,m}(t) = u_{n,m} \exp(-i\omega t), \tag{7.2}$$

де $u_{n,m} \in \mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega \in \mathbb{R}$ — частотою. Такі розв'язки іноді називають бризерами або лакунарними солітонами (за аналогією до лакунарних солітонів у фотонних кристалах, див. [91, 92]).

Підставляючи стоячу хвилю (7.2) в систему (7.1) і враховуючи, що

$$|\exp(-i\omega t)| = 1,$$

одержуємо систему

$$-(\Delta u)_{n,m} - \omega u_{n,m} = \theta\mu_{n,m}|u_{n,m}|^2 u_{n,m},\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2. \tag{7.3}$$

Під розв'язком системи (7.3) розуміється послідовність $\{u_{n,m}\} \subset \mathbb{R}$, яка задовольняє цю систему.

Всюди далі припускається, що послідовність $\{\mu_{n,m}\} \subset \mathbb{R}$ є N-періодичною, тобто

$$\mu_{n+N,m} = \mu_{n,m+N} = \mu_{n,m},$$

де N — деяке натуральне число.

Позначимо через

$$(Lu)_{n,m} = a_{n,m}u_{n+1,m} + a_{n-1,m}u_{n-1,m} + b_{n,m}u_{n,m+1} + b_{n,m-1}u_{n,m-1} + c_{n,m}u_{n,m}$$

і розглянемо більш загальну систему

$$(Lu)_{n,m} - \omega u_{n,m} = \theta\mu_{n,m}|u_{n,m}|^2 u_{n,m},\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{7.4}$$

де послідовності дійсних чисел $\{a_{n,m}\}$, $\{b_{n,m}\}$, $\{c_{n,m}\}$ є N-періодичними:

$$a_{n+N,m} = a_{n,m+N} = a_{n,m},$$

$$b_{n+N,m} = b_{n,m+N} = b_{n,m}$$

і

$$c_{n+N,m} = c_{n,m+N} = c_{n,m}.$$

Зауважимо, що оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі l^2. Його спектр $\sigma(L)$ має групову структуру, тобто $\sigma(L)$ є об'єднанням скінченного числа відрізків (див. [119]). Доповнення $\mathbb{R} \setminus \sigma(L)$ складається зі скінченного числа інтервалів, які називаються *спектральними проміжками*. Два з них напівскінченні. Якщо $N = 1$, то скінченні проміжки не існують. Однак, у загальному випадку скінченні проміжки існують і найбільш цікавий випадок, коли частота ω належить скінченному проміжку.

Будемо вивчати стоячі хвилі двох видів: з kN-періодичною амплітудою (періодичні розв'язки) та амплітудою, яка на нескінченності збігається до нуля (локалізовані розв'язки), тобто

$$u_{n+kN,m} = u_{n,m+kN} = u_{n,m},\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{7.5}$$

де k — фіксоване натуральне число, та

$$\lim_{n,m\to\pm\infty} u_{n,m} = 0 \tag{7.6}$$

відповідно.

7.1.2. Варіаційне формулювання задачі. Попередні леми

З системою (7.4) пов'язується функціонал

$$J(u) = \frac{1}{2}(Lu - \omega u, u) - \frac{1}{4}\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \theta\mu_{n,m} u_{n,m}^4, \tag{7.7}$$

визначений на гільбертовому просторі $E = l^2$ зі скалярним добутком

$$(u, v) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} u_{n,m} v_{n,m}$$

та нормою

$$\|u\| = \left(\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} |u_{n,m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нагадаємо, що кожний елемент l^2 автоматично задовольняє умову (7.6).

Іноді ми будемо розглядати простори l^p $(p \geq 1)$ з нормою

$$\|u\|_{l^p} = \left(\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} |u_{n,m}|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Нагадаємо, що через l^∞ позначається простір всіх обмежених послідовностей з нормою

$$\|u\|_{l^\infty} = \sup_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} |u_{n,m}|$$

і при $1 \leq p \leq q \leq \infty$

$$\|u\|_{l^q} \leq \|u\|_{l^p}.$$

Позначимо через E_k простір всіх kN-періодичних послідовностей. Це скінченновимірний простір зі скалярним добутком

$$(u, v)_k = \sum_{(n,m) \in Q_k} u_{n,m} v_{n,m}$$

та нормою

$$\|u\|_k = \left(\sum_{(n,m) \in Q_k} |u_{n,m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

де

$$Q_k = \left\{ (n,m) \in \mathbb{Z}^2 : \, -\left[\frac{kN}{2}\right] \leq n, m \leq kN - \left[\frac{kN}{2}\right] - 1 \right\},$$

і $\left[\frac{kN}{2}\right]$ — ціла частина $\frac{kN}{2}$.

На просторі E_k розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2}(L_k u - \omega u, u)_k - \frac{1}{4} \sum_{(n,m) \in Q_k} \theta \mu_{n,m} u_{n,m}^4, \tag{7.8}$$

де L_k — оператор L, який діє в просторі E_k.

Лема 7.1. *За зроблених припущень функціонали J та J_k належать класу C^1, а їх похідні визначаються формулами*

$$\langle J'(u), h \rangle = (Lu - \omega u, h) - \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} \theta \mu_{n,m} u_{n,m}^3 h_{n,m},$$

$$\langle J_k'(u), h \rangle = (L_k u - \omega u, h)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} \theta \mu_{n,m} u_{n,m}^3 h_{n,m},$$

де $u, h \in E$ та $u, h \in E_k$ відповідно.

Крім того, критичні точки цих функціоналів є розв'язками системи

(7.4) відповідно з просторів E та E_k.

Доведення. Розглянемо функціонал J. Легко бачити, що $J \in C^1$. Знайдемо його похідну. Нехай $u, h \in E$ та $|\lambda| \leq 1$. Тоді

$$J(u+\lambda h) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(L(u+\lambda h) - \omega(u+\lambda h), u+\lambda h\right) -$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\theta\mu_{n,m}(u_{n,m}+\lambda h_{n,m})^4 = \frac{1}{2}\left((Lu-\omega u)+\lambda(Lh-\omega h), u+\lambda h\right) -$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\theta\mu_{n,m}(u_{n,m}+\lambda h_{n,m})^4 = \frac{1}{2}(Lu-\omega u, u) + \frac{\lambda}{2}(Lu-\omega u, h)+$$
$$+\frac{\lambda}{2}(Lh-\omega h, u) + \frac{\lambda^2}{2}(Lh-\omega h, h) - \frac{1}{4}\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\theta\mu_{n,m}(u_{n,m}+\lambda h_{n,m})^4 =$$
$$= \frac{1}{2}(Lu-\omega u, u) + \lambda(Lu-\omega u, h) + \frac{\lambda^2}{2}(Lh-\omega h, h) -$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\theta\mu_{n,m}(u_{n,m}+\lambda h_{n,m})^4.$$

Оскільки

$$J(u+\lambda h) - J(u) =$$
$$= \frac{1}{2}(Lu-\omega u, u) + \lambda(Lu-\omega u, h) + \frac{\lambda^2}{2}(Lh-\omega h, h) -$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\theta\mu_{n,m}(u_{n,m}+\lambda h_{n,m})^4 - \frac{1}{2}(Lu-\omega u, u) + \frac{1}{4}\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\theta\mu_{n,m}u_{n,m}^4 =$$
$$= \lambda(Lu-\omega u, h) + \frac{\lambda^2}{2}(Lh-\omega h, h) -$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\theta\mu_{n,m}\left((u_{n,m}+\lambda h_{n,m})^2 + u_{n,m}^2\right)\lambda h_{n,m}(2u_{n,m}+\lambda h_{n,m}),$$

то

$$\langle J'(u), h\rangle =$$
$$= \lim_{\lambda\to 0}\frac{J(u+\lambda h) - J(u)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\left[(Lu-\omega u, h) + \frac{\lambda}{2}(Lh-\omega h, h) -\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\theta\mu_{n,m}\left((u_{n,m}+\lambda h_{n,m})^2 + u_{n,m}^2\right)h_{n,m}(2u_{n,m}+\lambda h_{n,m})\right] =$$
$$= (Lu-\omega u, h) - \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\theta\mu_{n,m}u_{n,m}^3 h_{n,m}.$$

Легко бачити, що критичні точки $u \in E$ функціоналу J є розв'язками рівняння (7.4).

Доведення у випадку функціоналу J_k аналогічне. Лему доведено. $\square$

Таким чином, система (7.4) є системою рівняннь Ейлера-Лагранжа для функціоналів дії J та J_k у відповідних просторах. Ця система завжди має нульовий розв'язок, тому нас цікавлять нетривіальні критичні точки цих функціоналів.

Зі спектральної теорії диференціальних операторів (див. [119]) маємо, що $\sigma(L_k) \subset \sigma(L)$ і, отже, $\|L_k\| \leq \|L\|$.

Нехай E^+ — підпростір E, утворений додатною частиною спектру оператора $L - \omega$ (додатний спектральний підпростір оператора $L - \omega$ в E), E^- — підпростір E, утворений від'ємною частиною спектру (від'ємний спектральний підпростір оператора $L - \omega$ в E). Аналогічно введемо додатний та від'ємний спектральні підпростори $E_k^+ \subset E_k$ і $E_k^- \subset E_k$ для оператора $L_k - \omega$. Легко перевірити, що відповідні підпростори попарно ортогональні, причому $E = E^+ \oplus E^-$ та $E_k = E_k^+ \oplus E_k^-$. Тоді будь-яку функцію $u \in E$ ($u \in E_k$) можна подати у вигляді $u = u^+ + u^-$, де $u^+ \in E^+$ ($u^+ \in E_k^+$), $u^- \in E^-$ ($u^- \in E_k^-$). Причому $u^\pm = P^\pm u$ ($u^\pm = P_k^\pm u$), де $P^\pm$ і $P_k^\pm$ — відповідні ортогональні проектори.

Позначимо через $\delta := \min\{|a - \omega|, |b - \omega|\}$ — відстань від ω до спектру $\sigma(L)$, де (a, b) — довільний фіксований спектральний проміжок оператора L. Тоді

$$\pm(Lu - \omega u, u) \geq \delta \|u\|^2, \ u \in E^\pm, \tag{7.9}$$

$$\pm(L_k u - \omega u, u)_k \geq \delta \|u\|_k^2, \ u \in E_k^\pm. \tag{7.10}$$

Далі будемо розглядати самофокусований випадок ($\theta = 1$).

Наступна лема дає умови неіснування нетривіальних критичних точок.

Лема 7.2. *Нехай $\mu_{n,m} > 0$ для всіх $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $\omega \in (a, b)$, $\theta = 1$ та $b = +\infty$. Тоді $u = 0$ єдина критична точка функціоналів J та J_k відповідно у* *просторах E та E_k.*

Доведення. Нехай $u \in E$ критична точка функціоналу J. Тоді

$$0 = \langle J'(u), u\rangle =$$
$$= (Lu - \omega u, u) - \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \mu_{n,m} u_{n,m}^4 \leq (Lu - \omega u, u).$$

Оскільки $b = +\infty$, то $E^+ = \{0\}$ і згідно (7.9)

$$0 \leq (Lu - \omega u, u) \leq -\delta \|u\|^2.$$

А це означає, що $u = 0$.

Доведення у випадку функціоналу J_k аналогічне. Лему доведено. □

Далі знадобиться наступна лема.

Лема 7.3. *Для будь-яких нетривіальних критичних точок функціоналів J та J_k правильні відповідно нерівності*

$$\|u\|^{\frac{4}{3}} \leq \gamma J(u),$$
$$\|u\|_k^{\frac{4}{3}} \leq \gamma J_k(u),$$

де $\gamma = (4\delta^{-1} l)^{\frac{4}{3}} l_0^{-1}$, $l = \sup\{\mu_{n,m}\}$ і $l_0 = \inf\{\mu_{n,m}\}$.

Доведення. Нехай $u \in E$ критична точка функціоналу J, а $b = J(u)$ відповідне критичне значення. Тоді

$$b = J(u) - \frac{1}{2}\langle J'(u), u\rangle = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \mu_{n,m} u_{n,m}^4 \geq \frac{1}{4} l_0 \|u\|_{l^4}^4,$$

звідки

$$\|u\|_{l^4}^4 \leq \frac{4b}{l_0}.$$

Оскільки $u \in E$ можна подати у вигляді $u = u^+ + u^-$, де $u^+ \in E^+$ і $u^- \in E^-$, то

$$0 = \langle J'(u), u^+\rangle = (Lu - \omega u, u^+) - \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \mu_{n,m} u_{n,m}^3 u_{n,m}^+ =$$
$$= (Lu^+ - \omega u^+, u^+) - \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \mu_{n,m} u_{n,m}^3 u_{n,m}^+.$$

Тоді, використовуючи (7.9) і нерівність Коші-Буняковського-Шварца, маємо

$$\delta \|u^+\|^2 \leq (Lu^+ - \omega u^+, u^+) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \mu_{n,m} u_{n,m}^3 u_{n,m}^+ \leq$$

$$\leq l\left(\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} u_{n,m}^6\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}(u_{n,m}^+)^2\right)^{\frac{1}{2}} = l\|u\|_{l^6}^3\|u^+\| \leq l\|u\|_{l^4}^3\|u^+\|.$$

Звідси

$$\|u^+\|^2 \leq \delta^{-1}l\|u\|_{l^4}^3\|u^+\| \leq \delta^{-1}l\left(\frac{4b}{l_0}\right)^{\frac{3}{4}}\|u^+\| = 2^{\frac{3}{2}}\delta^{-1}ll_0^{-\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}\|u^+\|.$$

Аналогічно

$$\|u^-\|^2 \leq 2^{\frac{3}{2}}\delta^{-1}ll_0^{-\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}\|u^-\|.$$

І остаточно, оскільки

$$\|u\|^2 = \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2$$

і

$$\|u^+\| + \|u^-\| \leq 2^{\frac{1}{2}}\|u\|,$$

то

$$\|u\| = \left(\|u^+\|^2 + \|u^-\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(2^{\frac{3}{2}}\delta^{-1}ll_0^{-\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}(\|u^+\| + \|u^-\|)\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq 2\delta^{-\frac{1}{2}}l^{\frac{1}{2}}l_0^{-\frac{3}{8}}b^{\frac{3}{8}}\|u\|^{\frac{1}{2}},$$

звідки

$$\|u\| \leq 4\delta^{-1}ll_0^{-\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}},$$

що й дає необхідне.

Доведення у випадку функціоналу J_k аналогічне. Лему доведено. □

Наступна лема дає нижні оцінки для критичних точок і відповідних критичних значень.

Лема 7.4. *Для будь-яких нетривіальних критичних точок функціоналів J та J_k правильні відповідно нерівності*

$$\|u\|^2 \geq \varepsilon_0,\ J(u) \geq \varepsilon,$$

$$\|u\|_k^2 \geq \varepsilon_0,\ J_k(u) \geq \varepsilon,$$

де $\varepsilon_0 = 2^{-\frac{1}{2}}\delta l^{-1}$, $\varepsilon = 2^{-3}\delta^2 l^{-2} l_0$.

Доведення. Нехай $u = u^+ + u^- \in E$ ($u^\pm \in E^\pm$) критична точка функціоналу J, а $b = J(u)$ відповідне критичне значення. Тоді, як і в доведенні попередньої леми, маємо

$$\delta\|u^+\|^2 \le \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \mu_{n,m} u^3_{n,m} u^+_{n,m} \le l \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} u^3_{n,m} u^+_{n,m}.$$

Застосовуючи до правої частини останньої нерівності нерівність Гельдера:

$$|(x,y)| \le \|x\|_{l^p}\|y\|_{l^q},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

при $p=\frac{4}{3}$ і $q=4$, одержуємо

$$\delta\|u^+\|^2 \le l\|u^3\|_{l^{\frac{4}{3}}}\|u^+\|_{l^4} = l\left(\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} |u^3_{n,m}|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\|u^+\|_{l^4} =$$
$$= l\|u\|^3_{l^4}\|u^+\|_{l^4} \le \|u\|^3\|u^+\|.$$

Аналогічно

$$\delta\|u^-\|^2 \le l\|u\|^3_{l^4}\|u^+\|_{l^4} \le \|u\|^3\|u^+\|.$$

І остаточно, оскільки $\|u\|^2 = \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2$ і $\|u^+\| + \|u^-\| \le 2^{\frac{1}{2}}\|u\|$, то

$$\delta\|u\|^2 = \delta\left(\|u^+\|^2+\|u^-\|^2\right) \le l\|u\|^3(\|u^+\|+\|u^-\|) \le 2^{\frac{1}{2}} l\|u\|^4,$$

звідки

$$\|u\|^2 \ge 2^{-\frac{1}{2}}\delta l^{-1}.$$

Для оцінки критичного значення використаємо останню нерівність і верхню оцінку з попередньої леми

$$\|u\| \le 4\delta^{-1} l l_0^{-\frac{3}{4}} b^{\frac{3}{4}}.$$

Таким чином, маємо

$$b \ge \left(4^{-1}\delta l^{-1} l_0^{\frac{3}{4}}\|u\|\right)^{\frac{4}{3}} \ge \left(4^{-1}\delta l^{-1} l_0^{\frac{3}{4}} 2^{-\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} =$$
$$= \left(2^{-\frac{9}{4}}\delta^{\frac{3}{2}} l^{-\frac{3}{2}} l^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} = 2^{-3}\delta^2 l^{-2} l_0.$$

Доведення у випадку функціоналу J_k аналогічне. Лему доведено. □

7.1.3. Існування періодичних розв'язків: самофокусований випадок

За допомогою теореми про зачеплення (теорема B.4) встановимо існування нетривіальних kN-періодичних розв'язків системи (7.4). Для цього, згідно леми 7.1, достатньо встановити існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k.

Основним результатом цього пункту є наступна теорема.

Теорема 7.1. *Нехай $\mu_{n,m} > 0$ для всіх $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, $\theta = 1$, $\omega \in (a,b)$ та $b \neq +\infty$. Тоді для будь-якого $k \geq 1$ система (7.4) має нетривіальний kN-періодичний розв'язок $u \in E_k$. Більше того, існують такі додатні сталі ε_0, C_0, ε і C, які не залежать від k, що*

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C_0,$$

$$\varepsilon \leq J_k(u) \leq C.$$

Перевіримо виконання умов теореми про зачеплення для функціоналу J_k. Почнемо з умови Пале–Смейла.

Лема 7.5. *За умов теореми 7.1 функціонал J_k задовольняє умову Пале-Смейла.*

Доведення. Оскільки E_k є скінченновимірним простором, то для доведення леми достатньо показати, що будь-яка послідовність Пале–Смейла в просторі E_k є обмеженою.

Справді, нехай $\{u^{(j)}\}$ послідовність Пале–Смейла функціоналу J_k на деякому рівні b, тобто $J_k(u^{(j)}) \to b$ і $J'_k(u^{(j)}) \to 0$ при $j \to \infty$. Зауважимо, що замінивши L на $L + \omega_0$ та ω на $\omega + \omega_0$ з деяким ω_0 можна вважати, що $\|L\| \gg 1$, тобто

$$(Lu, u)_k \geq \|u\|_k^2,$$

де $u \in E_k$ та $\omega > 0$. Тоді, вибраши $\beta \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, для достатньо великих j маємо

$$b + 1 + \beta\|u^{(j)}\|_k \geq J_k(u^{(j)}) - \beta\langle J'_k(u^{(j)}), u^{(j)}\rangle =$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\left(Lu^{(j)} - \omega u^{(j)}, u^{(j)}\right)_k + \left(\beta - \frac{1}{4}\right) \sum_{(n,m)\in Q_k} \mu_{n,m}(u_{n,m}^{(j)})^4 =$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\left(Lu^{(j)}, u^{(j)}\right)_k - \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\omega\|u^{(j)}\|_k^2 +$$
$$+ \left(\beta - \frac{1}{4}\right) \sum_{(n,m)\in Q_k} \mu_{n,m}(u_{n,m}^{(j)})^4 \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\|u^{(j)}\|_k^2 - \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\omega\|u^{(j)}\|_k^2 + \left(\beta-\frac{1}{4}\right) l_0\|u^{(j)}\|_k^4.$$

Оскільки $r^2 \leq K(\varepsilon)+\varepsilon r^4$, де $K(\varepsilon)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$, та $\omega>0$, то

$$b+1+\beta\|u^{(j)}\|_k \geq \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\|u^{(j)}\|_k^2 - \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\omega K(\varepsilon) -$$

$$\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\omega\varepsilon\|u^{(j)}\|_k^4 + \left(\beta-\frac{1}{4}\right) l_0\|u^{(j)}\|_k^4.$$

Вибираючи достатньо мале $\varepsilon>0$, одержуємо

$$b+1+\beta\|u^{(j)}\|_k \geq \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\|u^{(j)}\|_k^2 + C\|u^{(j)}\|_k^4 - C_0$$

з деякими додатними сталими C і C_0. Остання нерівність і доводить обмеженість послідовності $\{u^{(j)}\}$. Лему доведено. $\square$

Покладемо $Y=E_k^-$ та $Z=E_k^+$. Нагадаємо, що функціонал J_k має нетривіальні критичні точки у випадку, коли $b\neq+\infty$, а отже, $Z\neq\{0\}$.

Введемо тепер так званий *оператор обрізки* (див. [91]). Покладемо для $u_{n,m}\in E$

$$R_k u_{n,m} = \begin{cases} u_{n,m}, & (n,m)\in Q_k, \\ 0, & (n,m)\notin Q_k. \end{cases}$$

І нехай $\{S_k u_{n,m}\}$ єдина послідовність з E_k така, що $S_k u_{n,m}=u_{n,m}$, якщо $(n,m)\in Q_k$ (оператор періодизації). Тоді $\|u\|_{l_k^p}=\|R_k u\|_{l^p}$. Очевидно, що

$$\|R_k u\|_{l^p}\leq\|u\|_{l^p},\ \|S_k u\|_{l_k^p}\leq\|u\|_{l^p}$$

для всіх $u\in l^p$. Більше того, для всіх $u\in l^p$, $1\leq p<\infty$

$$\lim_{k\to\infty}\|R_k u\|_{l^p}=\lim_{k\to\infty}\|S_k u\|_{l_k^p}=\|u\|_{l^p},$$
$$\lim_{k\to\infty}\|LR_k u\|_{l^p}=\lim_{k\to\infty}\|R_k Lu\|_{l_k^p}=\|Lu\|_{l^p},$$
$$\lim_{k\to\infty}\|LS_k u\|_{l_k^p}=\lim_{k\to\infty}\|S_k Lu\|_{l_k^p}=\|Lu\|_{l^p}.$$

Візьмемо довільний одиничний вектор $z\in E^+$ і покладемо

$$z^{(k)}=\frac{P_k^+S_k z}{\|P_k^+S_k z\|_k}\in Z.$$

Зафіксуємо дві сталі $\rho>r>0$ і позначимо через

$$N=\{u\in Z:\ \|u\|_k=r\},$$

$$M=\{u=y+\lambda z^{(k)}:\ y\in Y,\ \|u\|_k\leq\rho,\ \lambda\geq 0\},$$

$$M_0 = \{u = y + \lambda z^{(k)} :\ y \in Y,\ \|u\|_k = \rho,\ \text{і } \lambda \geq 0,\ \text{або } \|u\|_k \leq \rho,\ \text{і } \lambda = 0\}.$$

Наступна лема показує, що функціонал J_k задовольняє геометрію зачеплення (див. теорема B.4).

Лема 7.6. *При $r^2 \leq l^{-1}\delta$ маємо, що*

$$J_k(u) \geq \frac{\delta}{4} r^2,\ u \in N,$$

і

$$J_k(u) \leq 0,\ u \in M_0$$

для достатньо великих ρ. Більше того, існує стала $C > 0$, яка не залежить від k і така, що

$$J_k(u) \leq C,\ u \in M. \tag{7.11}$$

Доведення. Якщо $u \in Z$, то

$$J_k(u) = \frac{1}{2}(L_k u - \omega u, u)_k - \frac{1}{4} \sum_{(n,m)\in Q_k} \mu_{n,m} u_{n,m}^4 \geq \frac{\delta}{2}\|u\|_k^2 - \frac{l}{4}\|u\|_k^4.$$

Тоді якщо $u \in N$, то

$$J_k(u) \geq \frac{\delta}{2} r^2 - \frac{l}{4} r^4 \geq \frac{\delta}{4} r^2$$

при $r^2 \leq l^{-1}\delta$.

Нехай тепер $u = y + \lambda z^{(k)} \in M$. Тоді, оскільки Y та Z взаємно ортогональні спектральні підпростори оператора $L_k - \omega$, то

$$J_k(y + \lambda z^{(k)}) = \frac{1}{2}(L_k y - \omega y, y)_k + \frac{\lambda^2}{2}(L_k z^{(k)} - \omega z^{(k)}, z^{(k)})_k -$$
$$-\frac{1}{4} \sum_{(n,m)\in Q_k} \mu_{n,m} \left(y_{n,m} + \lambda z_{n,m}^{(k)}\right)^4 \leq$$
$$\leq -\frac{\delta}{2}\|y\|_k^2 + \frac{\lambda^2}{2}\left(L_k z^{(k)} - \omega z^{(k)}, z^{(k)}\right)_k - \frac{1}{4} l_0 \|y + \lambda z^{(k)}\|_{l_k^4}^4.$$

Розглянемо підпростір $X = Y \oplus \mathbb{R} z^{(k)} \subset E_k$, наділений нормою

$$\|u\|_{l_k^4} = \left(\sum_{(n,m)\in Q_k} |u_{n,m}|^4\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Відображення $y + \lambda z^{(k)} \mapsto \lambda z^{(k)}$ є обмеженим проектором на $\mathbb{R} z^{(k)}$. Оскільки його норма не менше 1, то

$$\|y + \lambda z^{(k)}\|_{l_k^4}^4 \geq \|\lambda z^{(k)}\|_{l_k^4}^4.$$

Таким чином,

$$J_k(y+\lambda z^{(k)}) \le -\frac{\delta}{2}\|y\|_k^2 + \frac{\lambda^2}{2}\left(L_k z^{(k)} - \omega z^{(k)}, z^{(k)}\right)_k - \frac{\lambda^4}{4} l_0 \|z^{(k)}\|_{l_k^4}^4. \qquad (7.12)$$

Крім того, оскільки

$$\left(L_k z^{(k)} - \omega z^{(k)}, z^{(k)}\right)_k \le \|L_k - \omega\| = a_0$$

та

$$\lim_{k\to\infty} \|z^{(k)}\|_{l_k^4}^4 = \|P^+ z\|_{l^4}^4,$$

то з нерівності (7.12) маємо

$$J_k(y+\lambda z^{(k)}) \le -\frac{\delta}{2}\|y\|_k^2 + \frac{a_0}{2}\lambda^2 - a_1\lambda^4 \le \frac{a_0}{2}\lambda^2 - a_1\lambda^4$$

з деяким $a_1 > 0$, яке не залежить від k. Отже, для всіх достатньо великих ρ

$$J_k(u) \le 0, \ u \in M_0.$$

Більше того,

$$\sup_{u\in M} J_k(u) \le C = \max_{\lambda>0}\left(\frac{a_0}{2}\lambda^2 - a_1\lambda^4\right)$$

з деяким $C > 0$, яке не залежить від k. Лему доведено. □

Доведення теореми 7.1. З лем 7.5 та 7.6 випливає, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про зачеплення (теорема B.4), а отже, він має нетривіальну критичну точку $u \in E_k$. Більше того, за цією ж теоремою відповідне критичне значення задовольняє нерівність

$$b = J_k(u) \le \sup_{u\in M} J_k(u).$$

Тепер оцінки для критичної точки і відповідного критичного значення випливають з лем 7.3, 7.4 та 7.6. Теорему доведено. □

7.1.4. Існування локалізованих розв'язків: самофокусований випадок

Тепер за допомогою методу періодичних апроксимацій можна довести існування нетривіальних локалізованих розв'язків системи (7.4). За лемою 7.1 ці розв'язки є критичними точками функціоналу J. Однак цей функціонал не задовольняє умову Пале–Смейла і тому скористатися в даному випадку теоремою про зачеплення не вийде. Проте, як і випадку систем осциляторів, критичні точки функціоналу J можна побудувати за допомогою переходу до границі при $k \to \infty$ в критичних точках функціоналу J_k.

Основним результатом цього підрозділу є наступна теорема:

Теорема 7.2. *Нехай $\mu_{n,m} > 0$ для всіх $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, $\theta = 1$, $\omega \in (a,b)$ та $b \neq +\infty$. Тоді система (7.4) має нетривіальний розв'язок $u \in E$.*

Доведення. Нехай $u^{(k)} = \{u^{(k)}_{n,m}\} \in E_k$ нетривіальний kN-періодичний розв'язок системи (7.4), який існує за теоремою 7.1.

Зазначимо, що існують $\delta_0 > 0$ та $(n_k, m_k) \in \mathbb{Z}^2$ такі, що
$$\left|u^{(k)}_{n_k,m_k}\right| \geq \delta_0. \tag{7.13}$$
Справді, у протилежному випадку $u^{(k)} \to 0$ в l^∞, а отже, $v^{(k)} = R_k u^{(k)} \to 0$ в l^∞. За теоремою 7.1, $\|v^{(k)}\| = \|u^{(k)}\|_k$ обмежена. Далі оскільки
$$\|v\|^p_{l^p} \leq \|v\|^{p-2}_{l^\infty} \|v\|^2_{l^2},\ p > 2,$$
то $v^{(k)} \to 0$ в l^p для всіх $p > 2$. А це означає, що $\|u^{(k)}\|_{l^p_k} \to 0$ для всіх $p > 2$. Тоді, як на початку доведення леми 7.3, для відповідного критичного значення $b_k = J_k(u^{(k)})$ маємо
$$0 < b_k = \frac{1}{4} \sum_{(n,m)\in Q_k} \mu_{n,m} (u^{(k)}_{n,m})^4 \leq \frac{l}{4} \|u^{(k)}\|^4_{l^4_k} \to 0,$$
що суперечить лемі 7.4.

В силу періодичності коефіцієнтів послідовність $\{u^{(k)}_{n+N,m+N}\}$ є також розв'язком системи (7.4). Тому можна вважати, що $0 \leq n_k, m_k \leq N-1$. Однак, таких значень скінченне число, тому, переходячи до підпослідовності (по k), можемо вважати, що всі ці номери співпадають, тобто $n_k = n_0$ і $m_k = m_0$.

В силу обмеженості $\{u^{(k)}\}$, переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), маємо $u^{(k)}_{n,m} \to u_{n,m}$ при $k \to \infty$ (для всіх $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$). Крім того, за нерівністю (7.13),
$$|u_{n_0,m_0}| \geq \delta_0,$$
а отже, $u = \{u_{n,m}\}$ ненульова послідовність. Використовуючи граничний пе-

рехід, неважко показати, що $u = \{u_{n,m}\}$ є розв'язком системи (7.4).

Залишається показати, що $u = \{u_{n,m}\} \in E$. Справді, оскільки для будь-яких фіксованих $\tilde{n}, \tilde{m} \in \mathbb{Z}$ і достатньо великого k,

$$\sum_{n=-\tilde{n}}^{\tilde{n}} \sum_{m=-\tilde{m}}^{\tilde{m}} |u_{n,m}^{(k)}|^2 \leq \|u^{(k)}\|_k^2 \leq C^2,$$

то переходячи до границі при $k \to \infty$, одержуємо

$$\sum_{n=-\tilde{n}}^{\tilde{n}} \sum_{m=-\tilde{m}}^{\tilde{m}} |u_{n,m}|^2 \leq C^2.$$

В силу довільності $\tilde{n}$ і $\tilde{m}$, маємо, що $u \in l^2 = E$. Теорему доведено. $\square$

Зауважимо, що якщо $b = +\infty$, то за лемою 7.2 система (7.4) має тільки тривіальний розв'язок.

7.1.5. Існування періодичних і локалізованих розв'язків: розфокусований випадок

У доведеннях, поданих вище, розглянуто тільки самофокусований випадок ($\theta = 1$). Доведення для розфокусованого випадку ($\theta = -1$) є аналогічними із заміною функціоналів J та J_k на $-J$ та $-J_k$, оператора L на $-L$ та ω на $-\omega$ відповідно. У цьому випадку умова $b \neq +\infty$ замінюється на $a \neq -\infty$. Таким чином, міркуючи абсолютно аналогічно, як і у самофокусовному випадку, одержуємо відповідні результати для розфокусованого випадку.

Теорема 7.3. *Нехай $\mu_{n,m} > 0$ для всіх $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, $\theta = -1$, $\omega \in (a,b)$ та $a \neq -\infty$. Тоді для будь-якого $k \geq 1$ система (7.4) має нетривіальний kN-періодичний розв'язок $u \in E_k$. Більше того, існують такі додатні сталі ε_0, C_0, ε і C, які не залежать від k, що*

$$\varepsilon_0 \leq \|u\|_k^2 \leq C_0,$$

$$\varepsilon \leq J_k(u) \leq C.$$

Теорема 7.4. *Нехай $\mu_{n,m} > 0$ для всіх $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, $\theta = -1$, $\omega \in (a,b)$ та $a \neq -\infty$. Тоді система (7.4) має нетривіальний розв'язок $u \in E$.*

З теорем 7.2 та 7.4 випливає основний результат підрозділу 7.1.

Теорема 7.5. *Нехай* $\mu_{n,m} > 0$ *для всіх* $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ *та* $\omega \in (a, b)$. *І нехай* $b \neq +\infty$, *якщо* $\theta = 1$, *або* $a \neq -\infty$, *якщо* $\theta = -1$. *Тоді система (7.4) має нетривіальний розв'язок* $u \in E$.

Оскільки спектр оператора $-\Delta$ є відрізком $[0, 8]$, то з теореми 7.5 одержуємо наслідок:

Наслідок 7.1. *Нехай* $\mu_{n,m} > 0$ *для всіх* $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. *І нехай* $\omega < 0$, *якщо* $\theta = 1$, *або* $\omega > 0$, *якщо* $\theta = -1$. *Тоді система (7.3) має нетривіальний розв'язок* $u \in E$.

Таким чином, у цьому підрозділі одержано результати про існування стоячих хвиль, які поширюють результати статті [91] на випадок двовимірної ґратки. Зауважимо, що в статті [196] з фізичної точки зору досліджена структура і динаміка двовимірних солітонів (стоячих хвиль вигляду $\psi_{n,m} = u_{n,m} \exp(i\lambda^2 t)$ з частотою $\omega = -\lambda^2$) в скінченних системах вигляду (7.1) при $\theta\mu_{n,m} = 2$.

7.2. Дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю

У цьому підрозділі вивчаються дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера вигляду

$$i\dot{\psi}_{n,m}(t) - a_1(\Delta_{(1)}\psi)_{n,m}(t) - a_2(\Delta_{(2)}\psi)_{n,m}(t) + \theta f(\psi_{n,m}(t)) = 0, \ (n, m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{7.14}$$

де $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$, $\theta = \pm 1$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — *калібровно інваріантна* функція, тобто

$$f(e^{i\omega t} z) = e^{i\omega t} f(z)$$

для всіх $\omega \in \mathbb{R}$, та

$$(\Delta_{(1)}\psi)_{n,m} = \psi_{n+1,m} + \psi_{n-1,m} - 2\psi_{n,m},$$

$$(\Delta_{(2)}\psi)_{n,m} = \psi_{n,m+1} + \psi_{n,m-1} - 2\psi_{n,m}$$

дискретні оператори Лапласа відповідно за змінними n і m.

Припустимо, що $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

Цей підрозділ присвячений *насичуваним* нелінійностям $f(z)$. Це означає, що на нескінченності $f(z)$ росте як $const \cdot |z|$. Важливими прикладами таких нелінійностей є

$$f(u) = \frac{\nu|u|^p}{1+\mu|u|^p}u,\ \mu > 0,\ \nu > 0,\ p > 1, \tag{7.15}$$

та

$$f(u) = \chi\left(1 - \exp(-a|u|^p)\right)u,\ \chi > 0,\ a > 0,\ p > 0. \tag{7.16}$$

Зазначимо, що нелінійність (7.15) з $1 < p \leq 2$ та нелінійності (7.15) з $p > 2$ і (7.16) з $p > 0$ мають різну природу стосовно нашого підходу.

7.2.1. Формулювання задачі про стоячі хвилі. Основні припущення

Підставляючи стоячу хвилю (7.2) в систему (7.14) і враховуючи, що $|\exp(-i\omega t)| = 1$, одержуємо систему

$$(Lu)_{n,m} - \omega u_{n,m} = \theta f(u_{n,m}),\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{7.17}$$

де

$$(Lu)_{n,m} = -a_1(\Delta_{(1)}u)_{n,m} - a_2(\Delta_{(2)}u)_{n,m}.$$

Як і вище, будемо вивчати стоячі хвилі двох видів: з k-періодичною амплітудою та амплітудою, яка збігається до нуля (локалізовані хвилі), тобто

$$u_{n+k,m} = u_{n,m+k} = u_{n,m},\ (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \tag{7.18}$$

де k — деяке натуральне число, та

$$\lim_{n,m\to\pm\infty} u_{n,m} = 0 \tag{7.19}$$

відповідно.

Нехай $F(r)$ первісна функція для функції $f(r)$, тобто

$$F(r) = \int\limits_0^r f(s)ds.$$

Тоді всюди далі припустимо, що виконуються такі умови:

(i_7) $f(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$*;*

(ii_7) $\lim\limits_{r\to\pm\infty} \frac{f(r)}{r} = l < +\infty$*;*

(iii_7) *$f \in C^1(\mathbb{R})$ і $f(r)r < f'(r)r^2$, $r \neq 0$;*

Крім того, приймемо одну з таких умов:

(iv_7) $\lim\limits_{r \to \pm\infty} \left(\frac{1}{2}f(r)r - F(r)\right) = +\infty$*;*

або

(v_7) *функція $g(r) = f(r) - lr$ обмежена.*

Легко перевірити, що нелінійності (7.15) і (7.16) задовольняють умови (i_7)—(iii_7). Крім того, (7.15) задовольняє (iv_7) при $1 < p \leq 2$ та (v_7) для всіх $p > 1$ (зокрема, при $p > 2$). А нелінійність (7.16) задовольняє (v_7) для всіх $p > 0$.

Позначимо через E_k простір всіх k-періодичних послідовностей $\{u_{n,m}\}$, які задовольняють умову (7.18). Це скінченновимірний простір зі скалярним добутком

$$(u, v)_k = \sum_{(n,m) \in Q_k} u_{n,m} v_{n,m}$$

та нормою

$$\|u\|_k = \left(\sum_{(n,m) \in Q_k} |u_{n,m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

де

$$Q_k = \left\{ (n, m) \in \mathbb{Z}^2 : \, -\left[\frac{k}{2}\right] \leq n, m \leq k - \left[\frac{k}{2}\right] - 1 \right\},$$

і $\left[\frac{k}{2}\right]$ — ціла частина $\frac{k}{2}$.

Як і вище, позначимо через E простір l^2.

Іноді ми також будемо розглядати простори l^p_k та l^p $(1 \leq p \leq \infty)$ з нормами

$$\|u\|_{l^p_k} = \left(\sum_{(n,m) \in Q_k} |u_{n,m}|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|u\|_{l^p} = \left(\sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} |u_{n,m}|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

з відомою зміною при $p = \infty$. Нагадаємо, що при $1 \le p \le \infty$

$$\|u\|_{l_k^q} \le \|u\|_{l_k^p}, \ \|u\|_{l^q} \le \|u\|_{l^p}. \tag{7.20}$$

Зауваження 7.1. *Оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі E, а його спектр збігається з відрізком $[0, 4(a_1 + a_2)]$ і є абсолютно неперервним. Зокрема, L не має власних векторів в E. Причому за виконання умови (iii_7) функція $\frac{f(t)}{|t|}$ строго зростаюча, тоді як функція $\frac{1}{2}f(t)t - F(t)$ строго зростає при $t \ge 0$ і строго спадає при $t \le 0$, а отже, є невід'ємною.*

7.2.2. Варіаційне формулювання задачі. Многовиди Нехарі

На просторах E_k та E розглянемо відповідно функціонали

$$J_k(u) = \frac{1}{2}(L_k u - \omega u, u)_k - \sum_{(n,m)\in Q_k} \theta F(u_{n,m}),$$

$$J(u) = \frac{1}{2}(Lu - \omega u, u) - \sum_{(n,m)\in \mathbb{Z}^2} \theta F(u_{n,m}),$$

де L_k — оператор L, який діє в просторі E_k.

Безпосереднім обчисленням одержуємо:

Лема 7.7. *За зроблених припущень функціонали J та J_k належать класу C^1, а їх похідні визначаються формулами*

$$\langle J_k'(u), h\rangle = (L_k u - \omega u, h)_k - \sum_{(n,m)\in Q_k} \theta f(u_{n,m}) h_{n,m}, \ u, h \in E_k, \tag{7.21}$$

$$\langle J'(u), h\rangle = (Lu - \omega u, h) - \sum_{(n,m)\in \mathbb{Z}^2} \theta f(u_{n,m}) h_{n,m}, \ u, h \in E. \tag{7.22}$$

Крім того, критичні точки функціоналів J_k та J є розв'язками системи (7.17), що задовольняють умови (7.18) та (7.19) відповідно.

Зауважимо, що оскільки функціонал J_k не задовольняє умову Пале-Смейла, то до нього не можна застосувати теорему про зачеплення (як це було зроблено вище). Тому в даному випадку для встановлення існування розв'язків буде використано підхід із використанням многовиду Нехарі (див. [86, 87]).

Для функціоналів J_k та J означимо відповідні многовиди Нехарі

$$N_k := \{u \in E_k | \ \langle J_k'(u), u\rangle = 0, \ u \neq 0\} \subset E_k$$

та

$$N := \{u \in E |\ \langle J'(u), u\rangle = 0,\ u \neq 0\} \subset E.$$

Далі будемо розглядати самофокусований випадок ($\theta = 1$).

Введемо позначення $I_k(u) := \langle J_k'(u), u\rangle$ та $I(u) := \langle J'(u), u\rangle$. Це C^1-функціонали, похідні яких визначаються формулами

$$\langle I_k'(u), h\rangle = 2(L_k u - \omega u, h)_k - \sum_{(n,m)\in Q_k} (f(u_{n,m}) + f'(u_{n,m})u_{n,m})\, h_{n,m}, \quad (7.23)$$

$$\langle I'(u), h\rangle = 2(Lu - \omega u, h) - \sum_{(n,m)\in \mathbb{Z}^2} (f(u_{n,m}) + f'(u_{n,m})u_{n,m})\, h_{n,m}. \quad (7.24)$$

Лема 7.8. *Нехай виконуються умови (i_7)—(iii_7), $\theta = 1$, $\omega < 0$ та $\omega + l > 0$. Тоді множини N_k та N є непорожніми замкненими C^1-підмноговидами відповідно у просторах E_k та E, на яких $I_k'(u) \neq 0$ та $I'(u) \neq 0$. Крім того, існує $\beta_0 > 0$, яке не залежить від k і таке, що $\|u\|_k \geq \beta_0$, $u \in N_k$, та $\|u\| \geq \beta_0$, $u \in N$.*

Доведення. Розглянемо випадок N_k (інший випадок аналогічний). Спочатку покажемо, що многовид N_k непорожній. Нехай $\delta \in (-\omega, l)$ і E_δ — спектральний підпростір оператора $L_k - \omega$ в просторі E_k, що відповідає відрізку $[0, \delta]$. Оскільки $-\omega \in \sigma(L_k - \omega)$, то $E_\delta \neq \{0\}$. Нехай $v \in E_\delta \setminus \{0\}$. За умовою (i_7)

$$\langle J_k'(tv), tv\rangle = t^2(L_k v - \omega v, v)_k - \sum_{(n,m)\in Q_k} f(tv_{n,m})tv_{n,m} =$$
$$= t^2(L_k v - \omega v, v)_k - o(t^2) > 0$$

для достатньо малих $t > 0$. З іншого боку,

$$\langle J_k'(tv), tv\rangle = t^2(L_k v - \omega v, v)_k - \sum_{(n,m)\in Q_k} f(tv_{n,m})tv_{n,m} \leq$$
$$\leq t^2 \left(\delta\|v\|_k^2 - \sum_{(n,m)\in Q_k} \frac{f(tv_{n,m})v_{n,m}^2}{tv_{n,m}} \right).$$

За умовою (ii_7) сума в дужках збігається до $l\|v\|_k^2$, а тому $\langle J_k'(tv), tv\rangle < 0$ для достатньо великих $t > 0$. Тоді існує таке $t^* > 0$, що $\langle J_k'(t^*v), t^*v\rangle = 0$ і $t^*v \in N_k$. Отже, $N_k \neq \varnothing$.

Нехай $u \in N_k$, тоді з рівностей (7.21), (7.23) та означення N_k, одержуємо

$$\langle I_k'(u), u\rangle = \langle I_k'(u), u\rangle - 2I_k(u) = \sum_{(n,m)\in Q_k} \left(f(u_{n,m})u_{n,m} - f'(u_{n,m})u_{n,m}^2\right).$$

За умовою (iii_7) ця сума є від'ємною. Тому $I_k'(u) \neq 0$ і за теоремою про неявну функцію (див. [34], Теорема 4.2.1), N_k є C^1-підмноговидом в просторі E_k. Замкненість N_k очевидна.

Перейдемо тепер до другої частини леми. Нехай

$$\varphi(r) = \sup_{|t|\leq r} \frac{f(t)}{t}.$$

Це зростаюча функція від $r \geq 0$ і, згідно (i_7), $\varphi(r) \to 0$ при $r \to 0$. Нехай $u \in N_k$. Зазначимо, що оператор $L_k - \omega$ додатно визначений. Тоді з означення многовиду Нехарі і нерівностей (7.20) маємо

$$|\omega| \cdot \|u\|_k^2 \leq (L_k u - \omega u, u)_k = \sum_{(n,m)\in Q_k} f(u_{n,m})u_{n,m} \leq$$

$$\leq \varphi(\|u\|_{l_k^\infty}) \cdot \|u\|_k^2 \leq \varphi(\|u\|_k) \cdot \|u\|_k^2.$$

А це означає, що $\varphi(\|u\|_k) \geq |\omega|$. Оскільки функція φ зростаюча, то знайдеться таке β_0, що $\|u\|_k \geq \beta_0$, $u \in N_k$. Лему доведено. □

З доведення леми 7.8 випливає наступне твердження.

Наслідок 7.2. *Якщо $I_k(v) \leq 0$ (відповідно $I(v) \leq 0$), то існує єдине $t^* \in (0,1]$ таке, що $t^*v \in N_k$ (відповідно $t^*v \in N$), а також існує таке $v \in E_k \setminus \{0\}$ (відповідно $v \in E \setminus \{0\}$), що $J_k(v) < 0$ (відповідно $J(v) < 0$).*

З означень J_k та I_k випливає, що на N_k

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{2}I_k(u) = \sum_{(n,m)\in Q_k} \left(\frac{1}{2}f(u_{n,m})u_{n,m} - F(u_{n,m})\right). \tag{7.25}$$

За умовою (iii_7), $J_k(u) \geq 0$, $u \in N_k$. Аналогічно, з означень J та I випливає, що на N

$$J(u) = J(u) - \frac{1}{2}I(u) = \sum_{(n,m)\in \mathbb{Z}^2} \left(\frac{1}{2}f(u_{n,m})u_{n,m} - F(u_{n,m})\right). \tag{7.26}$$

та $J(u) \geq 0$, $u \in N$.

Лема 7.9. *Нехай виконуються умови (i_7)–(iii_7), $\theta = 1$, $\omega < 0$ та $\omega + l > 0$. Тоді існує таке число $\alpha_0 = \alpha_0(k) > 0$, що $J_k(u) \geq \alpha_0$ для всіх $u \in N_k$.*

Доведення. Нехай $u \in N_k$, тоді має місце рівність (7.25). За лемою 7.8, $\|u\|_k \geq \beta_0$. Отже, існують $(n_0, m_0) \in Q_k$ (залежать від u) і $\delta_0 = \delta_0(k, \beta_0) > 0$ (незалежне від u) такі, що $|u_{n_0,m_0}| \geq \delta_0$. Тоді, поклавши

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} f(\delta_0)\delta_0 - F(\delta_0),$$

за зауваженням 7.1 маємо, що $J_k(u) \geq \alpha_0$ для $u \in N_k$. Лему доведено. $\square$

Тепер розглянемо наступні задачі мінімізації

$$\textit{знайти } v \in N_k, \textit{ для якого існує } \inf\{J_k(u) : \ u \in N_k\} =: \mathrm{m}_k, \tag{7.27}$$

$$\textit{знайти } v \in N, \textit{ для якого існує } \inf\{J(u) : \ u \in N\} =: \mathrm{m}. \tag{7.28}$$

Виявляється, що розв'язки цих задач є розв'язками системи (7.17) у відповідних просторах.

Лема 7.10. *Нехай виконуються умови (i_7)–(iii_7), $\theta = 1$, $\omega < 0$ та $\omega + l > 0$. Тоді розв'язки задач (7.27) і (7.28) є розв'язками системи (7.17) у просторах E_k та E відповідно.*

Доведення. Розглянемо випадок задачі (7.28), інший випадок аналогічний. Нехай $u \in N$ — розв'язок задачі мінімізації (7.28). Згідно методу множників Лагранжа (див. [34]), існує $\lambda \in \mathbb{R}$ таке, що

$$J'(u) + \lambda I'(u) = 0.$$

Оскільки $\langle J'(u), u\rangle = I(u) = 0$, то, враховуючи рівність (7.24), одержуємо

$$0 = \lambda \langle J'(u), u\rangle = \lambda \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \left(\frac{1}{2} f(u_{n,m})u_{n,m} - F(u_{n,m}) \right).$$

За умовою (iii_7) сума в правій частині останньої рівності від'ємна і, отже, $\lambda = 0$, що й доводить лему. $\square$

7.2.3. Існування періодичних розв'язків: самофокусований випадок

Правильна лема:

Лема 7.11. *Нехай виконуються умови (i_7)–(iv_7), $\theta = 1$, $\omega < 0$ та $\omega + l > 0$. Тоді задача (7.27) має розв'язок.*

Доведення. Нехай $\{u^j\} \subset N_k$ — мінімізуюча послідовність для J_k, тобто $J_k(u^j) \to \mathrm{m}_k$. З рівності (7.25) маємо

$$J_k(u^j) = \sum_{(n,m)\in Q_k} \left(\frac{1}{2}f(u_{n,m})u_{n,m} - F(u_{n,m})\right). \tag{7.29}$$

Покажемо, що послідовність $\{u^j\}$ обмежена в E_k. Припустимо протилежне. Оскільки простір E_k скінченновимірний, а l^∞-норма еквівалентна евклідовій нормі на E_k, то, переходячи до підпослідовності, маємо, що $\|u^j\|_{l^\infty} \to \infty$. Тоді, для наступної підпослідовності, для якої збережемо теж саме позначення $\{u^j\}$, існує пара $(n_0, m_0) \in Q_k$ така, що $u^j_{n_0,m_0} \to \infty$. Тоді за рівністю (7.29), враховуючи умову (iv_7), це означає, що $J_k(u^j) \to \infty$. Отримали суперечність, оскільки $J_k(u^j) \to \mathrm{m}_k$ і, отже, послідовність $\{u^j\}$ обмежена.

Оскільки E_k скінченновимірний простір та $\{u^j\}$ обмежена послідовність, то, переходячи до підпослідовності, ми можемо вважати, що $\{u^j\}$ збігається до $u \in E_k$. Але многовид Нехарі N_k замкнений і J_k неперервний функціонал, тому $u \in N_k$ і $J_k(u) = \mathrm{m}_k$. Лему доведено. □

Основним результатом цього пункту є наступна теорема.

Теорема 7.6. *Нехай виконуються умови (i_7)–(iv_7), $\theta = 1$, $\omega < 0$ та $\omega + l > 0$. Тоді для будь-якого $k \geq 1$ система (7.17) має нетривіальний k-періодичний розв'язок $u \in E_k$. Більше того, якщо функція f непарна, то система (7.17) має два нетривіальні розв'язки $\pm u \in E_k$, один з яких невід'ємний.*

Доведення. Існування нетривіального k-періодичного розв'язку $u \in E_k$ випливає з леми 7.11.

Нехай f непарна функція. Тоді F парна і очевидно, що система (7.17) має два нетривіальні розв'язки $\pm u \in E_k$. Легко бачити, що

$$(L|u|, |u|)_k \leq (Lu, u)_k.$$

Крім того, $f(|t|)|t| = f(t)t$ та $F(|t|) = F(t)$. А це означає, що

$$I_k(|u|) \leq I_k(u) = 0.$$

З іншого боку,

$$\sum_{(n,m)\in Q_k}\left(\frac{1}{2}f(|u_{n,m}|)|u_{n,m}|-F(|u_{n,m}|)\right)=$$
$$=\sum_{(n,m)\in Q_k}\left(\frac{1}{2}f(u_{n,m})u_{n,m}-F(u_{n,m})\right)=\mathrm{m}_k.$$

За наслідком 7.2, існує $t^*\in(0,1]$ таке, що $u^*=t^*|u|\in N_k$. Тоді за зауваженням 7.1 та рівністю (7.25), маємо

$$J_k(u^*)\le\sum_{(n,m)\in Q_k}\left(\frac{1}{2}f(u_{n,m})u_{n,m}-F(u_{n,m})\right)=\mathrm{m}_k.$$

Таким чином, $J_k(u^*)=\mathrm{m}_k$ та u^* невід'ємний розв'язок, і, отже, можна взяти $u=u^*$. Теорему доведено. □

Наслідок 7.3. *Нехай $\theta=1$, $\omega<0$ та $\omega+l>0$. Тоді для будь-якого $k\ge 1$ система (7.17) з нелінійністю (7.15), де $1<p\le 2$, має два нетривіальні розв'язки $\pm u\in E_k$, один з яких невід'ємний.*

7.2.4. Існування локалізованих розв'язків: самофокусований випадок

Аналогічну лему до леми 7.11 для задачі (7.28) довести складно. Тому для одержання l^2-розв'язку системи (7.17) ми перейдемо до границі при $k\to\infty$. Для цього знадобиться наступна лема.

Лема 7.12. *Нехай виконуються умови (i_7)–(iv_7), $\theta=1$, $\omega<0$ та $\omega+l>0$. І нехай u^k – k-періодичний розв'язок задачі (7.27). Тоді послідовності $\{\mathrm{m}_k\}=\{J_k(u^k)\}$ та $\{\|u^k\|_k\}$ обмежені.*

Доведення. Крок 1. Спочатку нагадаємо, що спектр оператора L абсолютно неперервний і збігається з відрізком $[0,4(a_1+a_2)]$. А отже, для будь-якого $\delta\in(-\omega,l)$ спектральний підпростір оператора $L-\omega$ в просторі E, що відповідає відрізку $[0,\delta]$, ненульовий. Нехай $w\ne 0$ довільний вектор з цього підпростору. Тоді маємо

$$I(tw)=\langle J'(tw),tw\rangle=t^2(Lw-\omega w,w)-\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}f(tw_{n,m})tw_{n,m}\le$$

$$\leq t^2\left(\delta\|w\|^2 - \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\frac{f(tw_{n,m})}{tw_{n,m}}w_{n,m}^2\right). \tag{7.30}$$

За умовами (i_7) та (ii_7) існує стала $C > 0$, яка не залежить від n, m і t, і така, що

$$\left|\frac{f(tw_{n,m})}{tw_{n,m}}\right| \leq C$$

для всіх $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ і $t \in \mathbb{R}$. Отже, ряд в правій частині нерівності (7.30) збігається рівномірно по відношенню до $t \in \mathbb{R}$. Тому, згідно умови (ii_7), сума цього ряду збігається до $l\|w\|^2$, і нерівність (7.30) означає, що $I(tw) < 0$ для всіх достатньо великих $t > 0$. Зафіксуємо довільне t з такою властивістю. Оскільки послідовності зі скінченним носієм щільні в E, то існує вектор $\tilde{w} \in E$ зі скінченним носієм достатньо близький до tw і такий, що $I(\tilde{w}) < 0$. За наслідком 7.2 існує $t^* \in (0, 1)$ таке, що $I(v) = 0$, де $v = t^*\tilde{w}$. Оскільки v має скінченний носій, то $\mathrm{supp} v \subset Q_k$ для всіх достатньо великих k. Тоді для будь-якого такого k нехай $v^k \in E_k$ єдиний елемент такий, що $v^k_{n,m} = v_{n,m}$ для $(n, m) \in Q_k$. Легко бачити, що $I_k(v^k) = I(v) = 0$ та $\mathrm{m}_k \leq J_k(v^k) = J(v)$. Отже, послідовність $\{\mathrm{m}_k\}$ обмежена.

Крок 2. Методом від супротивного доведемо, що $\{\|u^k\|_k\}$ також обмежена. Припустимо, що $\{\|u^k\|_k\}$ необмежена. Тоді, переходячи до підпослідовності (яку будемо так само позначати), можна вважати, що $\|u^k\|_k \to \infty$. Візьмемо

$$v^k = \frac{u^k}{\|u^k\|_k},$$

тоді $\|v^k\|_k = 1$ та виконується одна з таких умов:

(vi_7) *послідовність $\{v^k\}$ задовольняє умову $\|v^k\|_{l^\infty_k} = \|u^k\|_{l^\infty} \to 0$ при $k \to \infty$;*

(vii_7) *існують такі $\delta > 0$ та $(x_k, y_k) \in \mathbb{Z}^2$, що $|v^k_{x_k,y_k}| \geq \delta$ для всіх k.*

Розглянемо перший випадок (умова (vi_7)). Оскільки оператор L невід'ємний та

$$0 = \frac{1}{\|u^k\|_k^2} I_k(u^k) = (L_k v^k - \omega v^k, v^k)_k - \sum_{(n,m)\in Q_k} \frac{f(u^k_{n,m})}{u^k_{n,m}} (v^k_{n,m})^2,$$

то

$$|\omega| = |\omega| \cdot \|v^k\|_k^2 \le (L_k v^k - \omega v^k, v^k)_k = \sum_{(n,m)\in Q_k} \frac{f(u^k_{n,m})}{u^k_{n,m}} (v^k_{n,m})^2 \tag{7.31}$$

За умовою (i_7) існує $t_0 > 0$ таке, що $\frac{f(t)}{t} \le \frac{|\omega|}{2}$ при $t < |t_0|$. Нехай

$$A_k = \left\{(n,m) \in Q_k : \ |u^k_{n,m}| < t_0\right\},$$

$$B_k = \left\{(n,m) \in Q_k : \ |u^k_{n,m}| \ge t_0\right\},$$

тоді

$$\sum_{(n,m)\in A_k} \frac{f(u^k_{n,m})}{u^k_{n,m}} (v^k_{n,m})^2 \le \frac{|\omega|}{2} \sum_{(n,m)\in A_k} (v^k_{n,m})^2 \le \frac{|\omega|}{2} \|v^k\|_k^2 = \frac{|\omega|}{2}.$$

Звідси, враховуючи нерівність (7.31), одержуємо

$$\liminf_{k\to\infty} \sum_{(n,m)\in B_k} \frac{f(u^k_{n,m})}{u^k_{n,m}} (v^k_{n,m})^2 \ge \frac{|\omega|}{2}. \tag{7.32}$$

З іншого боку, $|f(t)| \le C_0|u|$ з деякою сталою $C_0 > 0$ і за нерівністю Гельдера

$$\sum_{(n,m)\in B_k} \frac{f(u^k_{n,m})}{u^k_{n,m}} (v^k_{n,m})^2 \le C_0 |B_k|^{\frac{p-2}{p}} \|v^k\|^{\frac{2}{p}}_{l^p_k} \tag{7.33}$$

для будь-якого $p > 2$, де $|B_k|$ — кількість елементів множини B_k. Легко перевірити, що

$$\|w\|_{l^p_k} \le \|w\|^{\frac{p-2}{p}}_{l^\infty_k} \|w\|^{\frac{2}{p}}_k. \tag{7.34}$$

Тоді оскільки $\|v^k\|_{l^\infty_k} \to 0$, то нерівності (7.32), (7.33) і (7.34) показують, що $|B_k| \to \infty$. Нехай

$$\alpha_0 = \min\left\{\frac{1}{2} f(\pm t_0)(\pm t_0) - F(\pm t_0)\right\}.$$

Тоді з рівності (7.26) та зауваження 7.1 маємо

$$\mathrm{m}_k = \sum_{(n,m)\in Q_k} \left(\frac{1}{2} f(u_{n,m}) u_{n,m} - F(u_{n,m})\right) \ge$$

$$\ge \sum_{(n,m)\in B_k} \left(\frac{1}{2} f(u_{n,m}) u_{n,m} - F(u_{n,m})\right) \ge \alpha_0 |B_k| \to \infty.$$

Отримали суперечність.

Розглянемо другий випадок (умова (vii_7)). Згідно інваріантності системи (7.17) відносно дискретних зсувів, кратних k, можна вважати, що $(x_k, y_k) = (0,0)$. Оскільки $\|v^k\|_k = 1$, то можна також вважати, що знайдеться елемент $v = \{v_{n,m}\}$ такий, що $v^k_{n,m} \to v_{n,m}$ для всіх $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ (переходячи до підпослідовності, якщо потрібно). Крім того, очевидно, що $v \in E$, $\|v\| \le 1$ і $|v_{0,0}| \ge \delta$. Отже, $v \neq 0$.

Оскільки u^k — k-періодичний розв'язок системи (7.17), то

$$Lv^k_{n,m} - (\omega + l)v^k_{n,m} = \frac{g(u^k_{n,m})}{\|u^k\|_k}, \tag{7.35}$$

де $g(t) = f(t) - lt$ і за умовою (ii_7), $\lim\limits_{t\to\pm\infty} \frac{g(t)}{t} = 0$. Якщо $v_{n,m} \neq 0$ для деяких $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$, то $|u^k_{n,m}| \to \infty$. Переходячи до границі в рівності (7.35) при $k \to \infty$, маємо

$$Lv_{n,m} - (\omega + l)v_{n,m} = 0,$$

тобто $v \in E$ — ненульовий власний вектор оператора L з власним значенням $\omega + l$. Але спектр оператора L в просторі E є абсолютно неперервним. Знову отримали суперечність. Отже, послідовність $\{\|u^k\|_k\}$ обмежена. Лему доведено. $\square$

Основним результатом цього пункту є наступна теорема.

Теорема 7.7. *Нехай виконуються умови (i_7)–(iv_7), $\theta = 1$, $\omega < 0$ та $\omega + l > 0$. Тоді система (7.17) має нетривіальний розв'язок $u \in E$. Більше того, якщо функція f непарна, то система (7.17) має два нетривіальні розв'язки $\pm u \in E$, один з яких невід'ємний.*

Доведення. Нехай $u^k \in E_k$ розв'язок системи (7.17). Тоді за лемою 7.12 послідовність $\{\|u^k\|_k\}$ обмежена та $\{u^k\}$ задовольняє одну з двох умов (vi_7) або (vii_7). В першому випадку нерівність (7.34) означає, що $\|u^k\|_{l^p_k} \to 0$ при $k \to \infty$ для будь-якого $p > 2$. За умовою (i_7) для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $C_\varepsilon > 0$, що

$$|f(t)| \le \varepsilon|t| + C_\varepsilon |t|^{p-1}.$$

Оскільки u^k — k-періодичний розв'язок системи (7.17), то

$$|\omega|\cdot\|u^k\|_k^2 \le (L_k u^k - \omega u^k, u^k)_k =$$
$$= \sum_{(n,m)\in Q_k} f(u^k_{n,m})u^k_{n,m} \le \varepsilon\|u^k\|_k^2 + C_\varepsilon\|u^k\|^p_{l^p_k}.$$

Поклавши $\varepsilon = \frac{|\omega|}{2}$, одержуємо

$$\frac{|\omega|}{2}\|u^k\|_k^2 \le C_\varepsilon\|u^k\|^p_{l^p_k} \to 0$$

при $k\to\infty$. А це суперечить лемі 7.8 і, отже, виконання умови (vi_7) неможливе.

Таким чином, виконується умова (vii_7). Переходячи до підпослідовності і використовуючи інваріантність дискретних зсувів можна вважати, що $|u^k_{0,0}| \ge \delta$ з деяким $\delta > 0$. Переходячи знову до підпослідовності, ми також можемо вважати, що існує послідовність $u = \{u_{n,m}\}$ така, що $u^k_{n,m} \to u_{n,m}$ для всіх $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$. Легко бачити, що $u\in E$ та $u\neq 0$. Крім того, для системи (7.17) маємо поточкову збіжність і, отже, $u\in E$ — його нетривіальний розв'язок.

Друга частина теореми випливає з теореми 7.6. Теорему доведено. □

Доповнимо теорему 7.7 наступним результатом.

Теорема 7.8. *За виконання умов теореми 4.5* $\mathrm{m}_k \to \mathrm{m}$. *Крім того, розв'язок* $u\in E$, *одержаний у цій теоремі, є розв'язком задачі мінімізації (7.28), тобто* $J(u) = \mathrm{m}$.

Доведення. Нехай $k_j\to\infty$ послідовність натуральних чисел та $u^{k_j}\in E_{k_j}$ розв'язок задачі (7.27) при $k = k_j$. З доведення теореми 7.7 випливає, що, переходячи до підпослідовності і роблячи відповідні зсуви, можна вважати, що $u_{k_j}\to u\neq 0$ поточково, де $u\in E$ розв'язок системи (7.17).

Нехай $(\tilde n,\tilde m)\in\mathbb{Z}^2_+$, тоді, згідно зауваження 7.1, маємо

$$\liminf_{j\to\infty} J_{k_j}(u^{k_j}) = \liminf_{j\to\infty}\sum_{(n,m)\in Q_k}\left(\frac{1}{2}f(u^{k_j}_{n,m})u^{k_j}_{n,m} - F(u^{k_j}_{n,m})\right) \ge$$
$$\ge \liminf_{j\to\infty}\sum_{n=-\tilde n}^{\tilde n}\sum_{m=-\tilde m}^{\tilde m}\left(\frac{1}{2}f(u^{k_j}_{n,m})u^{k_j}_{n,m} - F(u^{k_j}_{n,m})\right) =$$

$$= \sum_{n=-\tilde{n}}^{\tilde{n}} \sum_{m=-\tilde{m}}^{\tilde{m}} \left(\frac{1}{2} f(u_{n,m}) u_{n,m} - F(u_{n,m}) \right).$$

Звідси, переходячи до границі при $\tilde{n} \to \infty$ та $\tilde{m} \to \infty$, одержуємо

$$\liminf_{j\to\infty} J_{k_j}(u^{k_j}) \geq J(u) \geq \mathrm{m}.$$

Тому

$$\liminf_{k\to\infty} \mathrm{m}_k \geq J(u) \geq \mathrm{m}. \tag{7.36}$$

З іншого боку, для даного $\varepsilon > 0$ нехай елемент $w \in N$ такий, що

$$J(w) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \left(\frac{1}{2} f(w_{n,m}) w_{n,m} - F(w_{n,m}) \right) < \mathrm{m} + \varepsilon.$$

Виберемо $t_1 > 1$ достатньо близьке до 1 і таке, що

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \left(\frac{1}{2} f(t_1 w_{n,m}) t_1 w_{n,m} - F(t_1 w_{n,m}) \right) < \mathrm{m} + \varepsilon.$$

Зазначимо, що $I(t_1 w) < 0$. Оскільки будь-яка послідовність зі скінченним носієм щільна в E, то існує послідовність $v = \{v_{n,m}\}$ зі скінченним носієм достатньо близька до $t_1 w$ в E і така, що $I(v) < 0$ та

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \left(\frac{1}{2} f(v_{n,m}) v_{n,m} - F(v_{n,m}) \right) < \mathrm{m} + \varepsilon.$$

Тоді знайдеться $t_2 \in (0, 1)$ таке, що $I(t_2 v) = 0$, і за зауваженням 7.1 маємо

$$J(t_2 v) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \left(\frac{1}{2} f(t_2 v_{n,m}) t_2 v_{n,m} - F(t_2 v_{n,m}) \right) \leq$$

$$\leq \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \left(\frac{1}{2} f(v_{n,m}) v_{n,m} - F(v_{n,m}) \right) < \mathrm{m} + \varepsilon.$$

Нехай елемент $v^k \in E_k$ такий, що $v^k_{n,m} = v_{n,m}$ при $(n, m) \in Q_k$. Тоді для всіх достатньо великих k

$$I_k(t_2 v^k) = I(t_2 v) = 0$$

та

$$J_k(t_2 v^k) = J(t_2 v) < \mathrm{m} + \varepsilon.$$

Таким чином, маємо

$$\liminf_{k\to\infty} \mathrm{m}_k \leq J(u) \leq \mathrm{m}. \tag{7.37}$$

Тепер з нерівностей (7.36) та (7.37) одержуємо необхідне. Теорему доведено.

□

7.2.5. Існування періодичних і локалізованих розв'язків: умова (v_7) та розфокусований випадок

У цьому пункті ми замінимо умову (iv_7) на (v_7).

Нехай σ_k спектр оператора L_k в просторі E_k, який складається з власних значень

$$4\left(a_1 \sin^2 \frac{\pi j}{k} + a_2 \sin^2 \frac{\pi l}{k}\right),$$

де $j, l = 0, 1, ..., k-1$. Легко бачити, що $\bigcup\limits_k \sigma_k$ зліченна, щільна підмножина спектру $\sigma(L) = [0, 4(a_1 + a_2)]$ оператора L в E. Тоді $\sigma(L) \setminus \bigcup\limits_k \sigma_k$ щільна множина в $\sigma(L)$.

Далі нам знадобиться наступна лема.

Лема 7.13. *Нехай виконуються умови (i_7)–(iii_7) та (v_7). І нехай $\theta = 1$, $\omega < 0$, $\omega + l > 0$ та $\omega + l \notin \sigma_k$. Тоді функціонал J_k задовольняє умову Пале–Смейла.*

Доведення. Оскільки простір E_k скінченновимірний, то для доведення леми достатньо показати, що будь-яка послідовність Пале–Смейла $\{u^j\} \subset E_k$ обмежена.

Нехай E_k^+ та E_k^- спектральні підпростори оператора $L_k - \omega$, що відповідають власним значенням $\lambda > l$ та $\lambda < l$ відповідно. Оскільки $\omega + l$ не є власним значенням оператора L_k, то l не є власним значенням оператора $L_k - \omega$ і ми маємо ортогональну суму $E_k = E_k^+ \oplus E_k^-$. Кожен елемент $u \in E_k$ має єдине подання $u = u^+ + u^-$, де $u^\pm \in E_k^\pm$. Відповідно послідовність Пале–Смейла розщеплюється на суму $u^j = u^{j+} + u^{j-}$. Тоді маємо

$$\langle J_k'(u), v\rangle = ((L_k - \omega - l)u, v)_k - \sum_{(n,m)\in Q_k} g(u_{n,m})v_{n,m}.$$

Взявши $u = u^j$ і $v = u^{j+}$, враховуючи ортогональність E_k^+ та E_k^-, одержуємо

$$\langle J_k'(u^j), u^{j+}\rangle = \left((L_k - \omega - l)u^j, u^{j+}\right)_k - \sum_{(n,m)\in Q_k} g(u^j_{n,m})u^{j+}_{n,m} =$$

$$= \big((L_k - \omega - l)u^{j+}, u^{j+}\big)_k - \sum_{(n,m)\in Q_k} g(u^j_{n,m})u^{j+}_{n,m}.$$

На E_k^+

$$((L_k - \omega - l)v, v)_k \geq \alpha \|v\|_k^2,$$

де $\alpha > 0$. Оскільки $\|J_k'(u^j)\| \leq 1$ для всіх достатньо великих j та всі норми на скінченновимірному просторі еквівалентні, то умова (v_7) означає, що

$$\alpha \|u^{j+}\|_k^2 \leq \langle J_k'(u^j, u^{j+}\rangle + \left| \sum_{(n,m)\in Q_k} g(u^j_{n,m})u^{j+}_{n,m} \right| \leq \|u^{j+}\|_k + c\|u^{j+}\|_k.$$

Звідки випливає, що послідовність $\{u^{j+}\}$ обмежена.

Аналогічно, використовуючи нерівність

$$((L_k - \omega - l)v, v)_k \leq -\alpha \|v\|_k^2, \ v \in E_k^-,$$

де $\alpha > 0$, отримуємо

$$\alpha \|u^{j-}\|_k^2 \leq \|u^{j-}\|_k + c\|u^{j+}\|_k.$$

Оскільки $\{u^{j+}\}$ обмежена, то $\{u^{j-}\}$ також обмежена. Отже, $\{u^j\}$ обмежена, і лему доведено. □

Використовуючи теорему про гірський перевал доведемо наступний аналог теореми 7.6.

Теорема 7.9. *Нехай виконуються умови (i_7)—(iii_7) та (v_7). І нехай $\theta = 1$, $\omega < 0$, $\omega + l > 0$ та $\omega + l \notin \sigma_k$. Тоді для будь-якого $k \geq 1$ система (7.17) має нетривіальний k-періодичний розв'язок $u \in E_k$. Більше того, якщо функція f непарна, то система (7.17) має два нетривіальні розв'язки $\pm u \in E_k$, один з яких невід'ємний.*

Доведення. Нехай

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]; E_k) : \ \gamma(0) = 0, \ J_k(\gamma(1)) < 0\}$$

і

$$b_k = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_k(\gamma(t)).$$

Як і в доведенні леми 7.9 маємо, що $J_k(u) \geq \alpha_0 > 0$ на сфері $\|u\|_k = \beta_0 > 0$ (тут потрібна тільки умова (i_7)). З іншого боку, за наслідком 7.2 існує елемент

$v \in E_k \setminus \{0\}$ такий, що $J_k(v) < 0$. А це означає, що функціонал J_k задовольняє геометрію гірського перевалу. Крім того, за лемою 7.13 він задовольняє умову Пале–Смейла. Таким чином, функціонал J_k задовольняє всі умови теореми про гірський перевал (теорема B.1).). Отже, $b_k > 0$ — критичне значення функціоналу J_k та існує відповідна критична точка $u^k \in E_k \setminus \{0\}$, тобто $J_k(u^k) = b_k$. За лемою 7.7 u^k — розв'язок системи (7.17), який задовольняє умову (7.18).

Друга частина теореми доводиться аналогічно як у доведенні теореми 7.6. Теорему доведено. □

Наслідок 7.4. *Нехай $\theta = 1$, $\omega < 0$, $\omega + l > 0$ та $\omega + l \notin \sigma_k$. Тоді система (7.17) з нелінійністю (7.15), де $p > 1$, або (7.16), де $p > 0$, має два нетривіальні розв'язки $\pm u \in E_k$, один з яких невід'ємний.*

Наступний результат є аналогом теореми 7.7.

Теорема 7.10. *Нехай виконуються умови (i_7)–(iii_7) та (v_7). І нехай $\theta = 1$, $\omega < 0$ та $\omega + l > 0$. Тоді система (7.17) має нетривіальний розв'язок $u \in E$. Більше того, якщо функція f непарна, то система (7.17) має два нетривіальні розв'язки $\pm u \in E$, один з яких невід'ємний.*

Доведення. Для кожного k існує ω_k таке, що $\omega_k \to \omega$ та $\omega_k + l \notin \sigma_k$. Тоді за теоремою 7.9 існує періодичний розв'язок $u^k \in E_k$ із заміною ω на ω_k. Далі міркуємо аналогічно, як у доведеннях леми 7.12 і теореми 7.7 для одержання обмеженості $\|u^k\|_k$, і переходимо до границі при $k \to \infty$. Теорему доведено. □

У доведеннях, поданих вище, розглянуто тільки самофокусований випадок ($\theta = 1$). Доведення для розфокусованого випадку ($\theta = -1$) є аналогічними із заміною функціоналів J та J_k на $-J$ та $-J_k$ відповідно. У цьому випадку умови $\omega < 0$ та $\omega + l > 0$ замінюються на $\omega > 4(a_1 + a_2)$ та $\omega - l < 4(a_1 + a_2)$ відповідно. Таким чином, міркуючи абсолютно аналогічно, як і у самофокусовному випадку, одержуємо аналогічні результати для розфокусованого випадку.

Теорема 7.11. *Нехай виконуються умови* (i_7)*—*(iii_7) *та* (iv_7) *або* (v_7)*. І нехай* $\theta = -1$, $\omega > 4(a_1+a_2)$ *та* $\omega-l < 4(a_1+a_2)$*. Крім того, у випадку умови* (v_7) $\omega - l \notin \sigma_k$*. Тоді для будь-якого* $k \geq 1$ *система (7.17) має нетривіальний* k*-періодичний розв'язок* $u \in E_k$*. Більше того, якщо функція* f *непарна, то система (7.17) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in E_k$*.*

Теорема 7.12. *Нехай виконуються умови* (i_7)*—*(iii_7) *та* (iv_7) *або* (v_7)*. І нехай* $\theta = -1$, $\omega > 4(a_1 + a_2)$ *та* $\omega - l < 4(a_1 + a_2)$*. Тоді система (7.17) має нетривіальний розв'язок* $u \in E$*. Більше того, якщо функція* f *непарна, то система (7.17) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in E$*.*

З теорем 7.7, 7.10 та 7.12 випливає основний результат підрозділу 7.2.

Теорема 7.13. *Нехай виконуються умови* (i_7)*—*(iii_7) *та* (iv_7) *або* (v_7)*. І нехай* $\omega < 0$ *та* $\omega + l > 0$*, якщо* $\theta = 1$*, або* $\omega > 4(a_1 + a_2)$ *та* $\omega - l < 4(a_1 + a_2)$*, якщо* $\theta = -1$*. Тоді система (7.17) має нетривіальний розв'язок* $u \in E$*. Більше того, якщо функція* f *непарна, то система (7.17) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in E$*, один з яких при* $\theta = 1$ *невід'ємний.*

Наслідок 7.5. *Нехай* $\omega < 0$ *та* $\omega + l > 0$*, якщо* $\theta = 1$*, або* $\omega > 4(a_1 + a_2)$ *та* $\omega - l < 4(a_1 + a_2)$*, якщо* $\theta = -1$*. Тоді система (7.17) з нелінійностями (7.15) та (7.16) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in E_k$*, один з яких при* $\theta = 1$ *невід'ємний.*

Таким чином, у цьому підрозділі одержано результати про існування стоячих хвиль, які поширюють результати статей [99, 139] на випадок двовимірної ґратки. Крім того, тут розширено клас нелінійностей, для яких існують стоячі хвилі.

Висновки до розділу 7

Сьомий розділ дисертації присвячений питанню існування стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці. Він складається з двох підрозділів, які в свою чергу складаються з чотирьох та трьох пунктів відповідно.

Розглядаються стоячі хвилі двох типів: з періодичною амплітудою (періодичні розв'язки) та амплітудою, яка збігається до нуля (локалізовані розв'язки).

Перший підрозділ присвячений питанню існування нетривіальних стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці з кубічною нелінійністю. В перших двох пунктах цього підрозділу розглядається формулювання задачі про стоячі хвилі та варіаційне формулювання задачі, доводяться попередні леми. Вивчаються стоячі хвилі двох видів: з N-періодичною амплітудою (періодичні розв'язки) та амплітудою, яка на нескінченності збігається до нуля (локалізовані розв'язки). Залежно від типу стоячої хвилі, розглядаються функціонали J_k та J. Показано, що критичні точки цих функціоналів є розв'язками відповідних задач. В третьому та четвертому пунктах встановлено існування нетривіальних періодичних та локалізованих розв'язків для самофокусовного випадку. Тут також, як і в попередніх розділах, використано теорему про зачеплення для періодичних розв'язків та метод періодичних апроксимацій для локалізованих розв'язків. У п'ятому пункті наведено аналогічні результати до одержаних вище для розфокусованого випадку, які одержуються аналогічними методами.

Другий підрозділ присвячений питанню існування нетривіальних стоячих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера на двовимірній ґратці із насичуваною нелінійністю. Прикладами таких нелінійностей є $f(u) = \frac{\nu|u|^p}{1+\mu|u|^p}u$, $\mu > 0, \nu > 0, p > 1$, та $f(u) = \chi\left(1 - \exp(-a|u|^p)\right)u$, $\chi > 0, a > 0, p > 0$. В першому пункті цього підрозділу розглядається формулювання задачі та основні припущення. В другому пункті наводиться варіаційне формулювання задачі та означаються відповідні многовиди Нехарі. В третьому пункті за допомогою методу критичних точок і многовиду Нехарі встановлено існування періодичних розв'язків для самофокусовного випадку.

Зауважимо, що в даному випадку не можна було використати теорему про зачеплення, оскільки в зроблених припущеннях побудований функціонал J_k не задовольняє умову Пале–Смейла. Тому для цього було використано варіаційний підхід із використанням многовиду Нехарі. В четвертому пункті для самофокусовного випадку доведено існування локалізованих розв'язків за допомогою многовиду Нехарі і методу періодичних апроксимацій. Однією з умов існування періодичних і локалізованих розв'язків є умова (iv_7), яку задовольняє нелінійність $f(u) = \frac{\nu|u|^p}{1+\mu|u|^p}u$ при $1 < p \leq 2$. В п'ятому пункті умову (iv_7) замінено на (v_7), яка дозволяє довести виконання умови Пале–Смейла. Тому для встановлення існування періодичних розв'язків використано теорему про гірський перевал. Тут також за допомогою граничного переходу одержано результат про існування локалізованих розв'язків. Зауважимо, що умову (v_7) нелінійність $f(u) = \frac{\nu|u|^p}{1+\mu|u|^p}u$ задовольняє для для всіх $p > 1$ (зокрема, при $p > 2$), а нелінійність $f(u) = \chi\left(1 - \exp(-a|u|^p)\right)u$ — для будь-яких $p > 0$. Крім того, в цьому пункті наведено аналогічні результати до одержаних вище для розфокусованого випадку.

Результати даного розділу опубліковано в працях [15, 151, 156] і додатково висвітлено в [161, 166, 172, 176].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертація присвячена побудові класів існування розв'язків таких дискретних нескінченновимірних гамільтонових систем як: нескінченні системи нелінійних осциляторів, дискретні рівняння типу синус-Ґордона, системи типу Фермі-Пасти-Улама та дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера на двовимірній ґратці. Враховуючи специфіку таких систем, в роботі набули розвитку і були застосовані методи функціонального аналізу та теорії критичних точок гладких функціоналів.

Відповідно до поставлених завдань у дисертації зроблено огляд відомих результатів з теми дослідження та одержано такі нові результати:

1) Встановлено умови існування та єдиності локальних і глобальних розв'язків задачі Коші для рівнянь, що описують динаміку нескінченних систем лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Встановлено умови обмеженості глобального розв'язку. Окремо досліджено випадок степеневих потенціалів, які у загальному випадку не задовольняють одержані умови. Для таких потенціалів встановлено умови існування та неіснування глобальних розв'язків відповідної задачі Коші.

2) Досліджено умови існування періодичних за часовою змінною розв'язків у нескінченних системах лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. За допомогою методу критичних точок встановлено існування нетривіальних періодичних розв'язків. Доведено, що для достатньо великих періодів ці розв'язки не сталі. Показано, що у випадку степеневих потенціалів періодичні розв'язки можна побудувати за допомогою методу умовної мінімізації.

3) Встановлено умови існування нетривіальних періодичних і відокремлених біжучих хвиль в нескінченних системах лінійно та нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. Досліджено існування несталих надзвукових і дозвукових біжучих хвиль.

4) Доведено існування несталих періодичних, гомоклінічних і гетероклінічних біжучих хвиль для дискретних рівнянь типу синус-Ґордона на двовимірній ґратці з нелінійним зв'язком.

5) Знайдено умови існування несталих періодичних і відокремлених біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. Окремо досліджено існування біжучих хвиль з профілем, похідна якого є періодичною та збігається до нуля на нескінченності. У цьому випадку, зокрема, встановлено умови існування монотонних хвиль.

6) Досліджено існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера з кубічною та насичуваною нелінійностями на двовимірній ґратці. Встановлено умови існування стоячих хвиль з періодичною амплітудою та амплітудою, яка збігається до нуля на нескінченності. Досліджено самофокусований та розфокусований випадки рівняння.

Одержані в дисертації результати є поширенням вже відомих для подібних систем, мають теоретичний характер і можуть бути застосованими в теорії звичайних диференціальних рівнянь та у нелінійній фізиці.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Ambrosetti A., Rabinowitz P. Dual variational methods in critical point theory and applications. *J. Funct. Anal.* 1973. Vol. 14. P. 349–381.

[2] Arioli G., Chabrowski J. Periodic motions of a dynamical systems consisting of an infinite lattice of particles. *Dyn. Syst. Appl.* 1997. Vol. 6. P. 387–395.

[3] Arioli G., Gazzola F. Existence and nummerical approximation of periodic motions of an infinite lattice of particles. *Z. Angew. Math. Phys.* 1995. Vol. 46. P. 898–912.

[4] Arioli G., Gazzola F. Periodic motion of an infinite lattice of particles with nearest neighbor interaction. *Nonlin. Anal.* 1996. Vol. 26, № 6. P.1103–1114.

[5] Arioli G., Gazzola F., Terracini S. Multibump periodic motion of an infinite lattice of particles. *Math. Z.* 1996. Vol. 223. P. 627–642.

[6] Arioli G., Szulkin A. Periodic motions of an infinite lattice of particles: the strongly indefinite case. *Ann. Sci. Appl.* 1997. Vol. 22. P.97–119.

[7] Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization. *Physica D.* 1997. Vol. 103. P. 201–250.

[8] Aubry S. Discrete breathers in anharmonic models with acoustic phonons. *Ann. Inst. H. Poincare, Phys. theorique.* 1998. Vol. 68. P. 381–420.

[9] Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators. *Communications in Mathematical Analysis.* 2007. Vol. 3, № 1. P. 19–26.

[10] Bak S., N'Guerekata G., Pankov A. Well-posedness of initial value problem for discrete nonlinear wave equations. *Communications in Mathematical Analysis.* 2010. Vol. 8, № 1. P. 79–86.

[11] Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice. *Journal of mathematical physics, analysis, geometry.* 2018. Vol. 14, № 1. P. 16–26.

[12] Bak S. M. Global well-posedness of the Cauchy problem for system of oscillators on 2D-lattice with power potentials. *Український математичний вісник.* 2019. Т.16, №4. С. 465–476. Engl. transl.: *Journal of Mathematical Sciences.* 2020. Vol. 246, № 5 (May). P. 593–601.

[13] Bak S. M. Homoclinic traveling waves in discrete sine–Gordon equation with nonlinear interaction on 2D lattice. *Matematychni Studii.* 2019. Vol. 52, № 2. P. 176–184.

[14] Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii.* 2018. Vol. 50, № 1. P.75–87.

[15] Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis.* 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.

[16] Bak S. M. Existence of heteroclinic travelling waves for the discrete sine-Gordon equation on 2d-lattice with nonlinear interaction. *International Conference on Differential Equations Dedicated to the 110th Anniversary of Ya. B. Lopatynsky* : book of abstracts. (Lviv, 2016 September 20–24). Lviv, 2016. P. 23.

[17] Bak S. Existence of the periodic and heteroclinic travelling waves for the discrete sine-Gordon equation on 2d-lattice. *X International V. Skorobohatko*

Mathematical Conference : book of abstracts. (Drohobych, 2015 August 25–28). Lviv : Lviv Politech., 2015. P. 9.

[18] Bak S. M. About heteroclinic travelling waves in discrete sine-Gordon type equation. *Асимптотичні методи в теорії диференціальних рівнянь* : матеріали Міжнар. наук. конфер. (Київ, 13–14 грудня 2017 р.). Київ : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2017. С. 24–25.

[19] Bak S. M. Existence of the periodic and solitary travelling waves in the systems of oscillators on 2d-lattices. *5th International Conference for Young Scientists on Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatynsky* : book of abstracts. (Kyiv, 2016 November 09–11). Vinnytsia, 2016. P. 41.

[20] Bartsch T., Pankov A., Wang Z.-Q. Nonlinear Schrödinger equations with steep potential well. *Commun. Contemp. Math.* 2001. Vol. 3, № 4. P. 549–569.

[21] Benjamin T. B., Feir J. E. The Disintegration of Wa-vetrains on Deep Water. Part 1: Theory. *J. Fluid Mech.* 1967. Vol. 27. P. 417–430.

[22] Berestycki H., Capuzzo-Dolcetta I., Nirenberg L. Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems. *Nonlin. Diff. Eq. and Appl.* 1995. Vol. 2. P. 553–572.

[23] Braun O. M., Kivshar Y. S. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model. *Physics Repts.* 1998. Vol. 306. P. 1–108.

[24] Braun O. M., Kivshar Y. S. The Frenkel–Kontorova model. Berlin : Springer, 2004. 427 p.

[25] Brezis H. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. New York – Dordrecht – Heidelberg – London : Springer. 2011. 600 p.

[26] Buffoni B., Schwetlick H., Zimmer J. Travelling waves for a Frenkel–Kontorova chain. *J. Differ. Equations.* 2017. Vol. 263. P. 2317–2342.

[27] Butt I. A., Wattis J. A. D. Discrete breathers in a two-dimensional hexagonal Fermi–Pasta–Ulam lattice. *J. Phys. A. Math. Gen.* 2007. Vol. 40. P. 1239–1264.

[28] Butt I. A., Wattis J. A. D. Discrete breathers in a two-dimensional Fermi–Pasta–Ulam lattice. *J. Phys. A. Math. Gen.* 2006. Vol. 39. P. 4955–4984.

[29] Chabrowski J. Variational Methods for Potential Operator Equations. Berlin : de Gruyter. 1997. 290 p.

[30] Cheng M., Pankov A. Gap solitons in periodic Shrödinger lattice system with nonlinear hopping. *El. J. Diff. Eq.* 2016. Vol. 287. P. 1–14.

[31] Chernoff P. R., Marsden J. E. Properties of infinite dimensional Hamiltonian systems, Lecture Notes Math. Berlin : Springer–Verlag, 1974. Vol. 425.–160 p.

[32] Chow S. N. Lattice dynamical systems. Lect. Notes Math. Berlin : Springer, 2003. Vol. 1822. P. 1–102.

[33] Doi Y., Nakatani A. Structures of discrete breathers in two-dimensional Fermi–Pasta–Ulam lattices. *Theor. Appl. Mech. Jpn.* 2006. Vol. 55 P. 103–110.

[34] Drabek P., Milota J. Methods of nonlinear analysis. Applications to differential equations. Basel : Birkhäuser, 2007. 568 p.

[35] Duncan D. B., Wattis J. A. D. Approximations of solitary waves on lattices using weak and variational formulations. *Chaos, Solitons and Fractals.* 1992. Vol. 2. P. 505–518.

[36] Dunford N., Schwartz J. T. Linear Operators. Part I. General Theory. New York : Wiley. 1988. 872 p.

[37] Dunford N., Schwartz J. T. Linear Operators. Part II. Spectral Theory. Selfadjoint Operators in Hilbert Space. New York : Wiley. 1988. 1088 p.

[38] Eilbeck J. C., Flesch R. Calculation of families of solitary waves on discrete lattices. *CPhys. Lett. A.* 1990. Vol. 149. P. 200–202.

[39] Ekeland I. Convexity Methods in Hamiltonian Mechanics. Berlin : Springer–Verlag, 1990. 247 p.

[40] Fečkan M. Dynamics of chains of coupled oscillators. *APLIMAT* : abstracts of 4-th Intern. Confer. Bratislava, 2005. P. 109–118.

[41] Fečkan M., Rothos V. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions. *Nonlinearity.* 2007. Vol. 20. P. 319–341.

[42] Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonliniear problems. *Los Alamos Sci. Lab. Rept.* LA-1940. 1955. Reprinted in *Lect. Appl. Math.* 1974. Vol. 15. 156 p.

[43] Filip, A.-M., Venakides S. Existence and modulation of traveling waves in particle chains. *Commun. Pure Appl. Math.* 1999. Vol. 52. P. 693–735.

[44] Fischer F. Self-localized single-anharmonic vibrational modes in two-dimensional lattices. *Ann. Physik.* 1993. Vol. 505, № 3. P. 296–307.

[45] Flach F., Kladko K., Takeno S. Acoustic breathers in two-dimensional lattices. *Phys. Rev. Lett.* 1997 Vol. 78. P. 4838–4841.

[46] Flach S., Kladko K., MacKay R. S. Energy thresholds for discrete breathers in one-, two- and three-dimensional lattices. *Phys. Rev. Lett.* 1997. Vol. 78. P. 1207–1221.

[47] Flach S., Willis C. R. Discrete breathers. *Phys. Repts.* 1998. Vol. 295. P. 181–264.

[48] Friesecke G., Matthies K. Atomic scale localization of high-energy solitary waves on lattices. *Physica D.* 2002. Vol. 171. P. 211–220.

[49] Friesecke G., Matthies K. Geometric solitary waves in a 2D math–spring lattice. *Discrete and continuous dynamical systems.* 2003. Vol. 3, № 1 (February). P. 105–114.

[50] Friesecke G., Pego R. L. Solitary waves on FPU lattices, II. Linear implies nonlinear stability. *Nonlinearity.* 2002. Vol.15. P. 1343–1359.

[51] Friesecke G., Pego R. L. Solitary waves on FPU lattices, III. Howlandtype Floquet Theory. *Nonlinearity.* 2004. Vol. 17. P. 207–227.

[52] Friesecke G., Pego R. L. Solitary waves on FPU lattices, IV. Proof of stability at low energy. *Nonlinearity.* 2004. Vol. 17. P. 229–251.

[53] Friesecke G., Wattis J. A. D. Existence theorem for solitary waves on lattices. *Commun. Math. Phys.* 1994. Vol. 161. P. 391–418.

[54] Galavotti G. The Fermi–Pasta–Ulam problem. A status report. *Lect. Notes Phys.* Berlin : Springer, 2008. 302 p.

[55] Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Method for solving the Korteweg–de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.* 1967. Vol. 19. P. 1095–1097.

[56] Henning D., Tsironis G. Wave transmission in nonliniear lattices. *Physics Repts.* 1999. Vol. 309. P. 333–432.

[57] Herrmann M. Action minimizing fronts in general FPU-type chains. *J. Nonlin. Sci.* 2011. Vol. 21. P. 33–55.

[58] Herrmann M., Rademacher J. D. M. Heteroclinic traveling waves in convex FPU-type chains. *Siam J. Math. Anal.* 2010. Vol. 42, № 4. P. 1483–1504.

[59] Hochstrasser D., Mertens F. G., Buttner H. An iterative method for the calculation narrow solitary excitations on atomic chains. *Physica D.* 1989. Vol. 35. P. 259–266.

[60] Iooss G. Traveling waves in the Fermi–Pasta–Ulam lattice. *Nonlin.* 2000. Vol. 13. P. 471–494.

[61] Iooss G., Kirschgässner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. *Commun. Math. Phys.* 2000. Vol. 211. P. 439–464.

[62] Jabri Y. The mountain pass theorem. Variants, generalizations and some applications. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2011. 382 p.

[63] James G. Existence of breathers on FPU lattices. *C.R. Acad. Sci. Paris.* 2001. Vol. 332. P. 581–586.

[64] James G., Noble P. Breathers on diatomic Fermi–Pasta–Ulam lattices. *Physica D.* 2004. Vol. 196. P. 124–171.

[65] Kevrekidis P. G. The discrete nonliniear Shrödinger equation: mathematical anaysis, numerical computations and physical perspectives. Berlin-Heidelberg : Springer-Verlag, 2009. 416 p.

[66] Kevrekidis P. G., Rasmussen K. O., Bishop A. R. The discrete nonliniear Shrödinger equation: a survey of recent results. *Intern. J. Modern Phys. B.* 2001. Vol. 15. P. 2833–2900.

[67] Kevrekidis P. G., Rasmussen K. O., Bishop A. R. Two-dimensional discrete breathers: Construction, stability, and bifurcations. *Intern. Phys. Rev. E.* 2000. Vol. 61. P. 2006–2009.

[68] Kevrekidis P. G., Weinstein M. I. Breathers on a background: periodic and quasiperiodic solutions of extended discrete nonlinear wave systems. *Math. Comp. Simul.* 2003. Vol. 62. P. 65–78.

[69] Korteweg D. J., de Vries G. On the change in form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.* 1895. № 39. P. 422–433.

[70] Kreiner C. F. A Variational Approach to Travelling Waves in Particle Chains with On-Site Potential : PhD thesis / Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences. Leipzig, 2007. 95 p.

[71] Kreiner C. F., Zimmer J. Existence of subsonic heteroclinic waves for the Frenkel–Kontorova model with piecewise quadratic on-site potential. *Nonlinearity.* 2011. Vol. 24, № 4. P. 1137–1163.

[72] Kreiner C. F., Zimmer J. Heteroclinic travelling waves for the lattice sine–Gordon equation with linear pair interaction. *Discrete and continuous dynamical systems.* 2009. Vol. 25, № 3 (November). P. 915–931.

[73] Kreiner C. F., Zimmer J. Travelling wave solutions for the discrete sine–Gordon equation with nonlinear pair interaction. *Nonlinear Analysis: Theory Methods & Applications.* 2009. Vol. 70, № 9. P. 3146–3158.

[74] Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. *Mathematical Problems in Theoretical Physics: Lect. Notes Phys.* 1975. Vol. 39. P. 420–422.

[75] Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. *Communs Pure and Appl. Math.* 1968. Vol. 21, № 15. P. 467–490.

[76] Lieb E. H. On the lowest eigenvalue of the Laplacian for the intersection of two domains. *Invent. Math.* 1983. Vol. 74, № 3. P. 441–448.

[77] Lions P. L. The concentration–compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case, part I. *Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire.* 1984. Vol. 1, № 2. P. 109–145.

[78] Lions P. L. The concentration–compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case, part II. *Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire.* 1984. Vol. 1, № 2. P. 223–283.

[79] Liu Z., Guo S., Zhang Z. Existence of homoclinic traveling waves in infinite lattices. *Bull. Malaysian Math. Soc. Ser. 2.* 2013. Vol. 36, № 4. P. 965–983.

[80] Livi R., Spicci M, MacKay R. Breathers in a diatomic FPU chain. *Nonlinearity.* 1997. Vol. 10. P. 1421–1434.

[81] MacKay R. S., Aubry S. Proof of existence of breathers for time–reversible a Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators. *Nonlinearity.* 1994. Vol. 7. P. 1623–1643.

[82] Makita P. D. Periodic and homoclinic travelling waves in infinite lattices. *Nonlinear Analysis.* 2011. Vol. 74. P. 2071–2086.

[83] Marsden J., Ratiu T. S. Introduction to Mechanics and symmetry. New York : Springer–Verlag, 1989. 567 p.

[84] Mawhin J., Willem M. Critical Point Theory and Hamiltonian Systems. New York : Springer–Verlag. 1989. 326 p.

[85] Morgante A. M., Johansson M., Kopidakis G., Aubry S. Standing waves instability in a chain of nonlinear coupled oscillators. *Physica D.* 2002. Vol. 162. P. 53–94.

[86] Nehari Z. Characteristic values associated with a class of non-linear second-order differential equations. *Acta Math.* 1961. Vol. 105. P. 141–175.

[87] Nehari Z. On a class of nonlinear second-order differential equations. *Amer. Math. Soc.* 1960. Vol. 95. P. 101–123.

[88] Onorato M., Vozella L., Proment D., Lvov Y. Route to Thermalization in the α–Fermi–Pasta–Ulam System. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 2015. Vol. 112. P. 1–6.

[89] Pacciani P., Konotop V. V., Menzala G. P. On localized solutions of discrete nonlinear Schrödinger equation: An exact result. *Physica D.* 2005. Vol. 204. P. 122–133.

[90] Palais R. S., Smale S. A Generalized Morse theory. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1964. Vol. 70. P. 165–171.

[91] Pankov A. Gap solitons in periodic discrete nonlinear Shrödinger equation. *Nonlinearity.* 2006. Vol. 19. P. 27–40.

[92] Pankov A. Gap solitons in periodic discrete nonlinear Shrödinger equation, II: Generalized Nehari manifold approach. *Discr. Cont. Dyn. Syst. A.* 2007. Vol. 19, № 2. P. 419–430.

[93] Pankov A. Global well-posedness for discrete non-linear Schrödinger equation. *Applicable Analysis.* 2010. Vol. 89, № 9. P. 1513–1521.

[94] Pankov A. Periodic Nonlinear Schrödinger Equation with an Application to Photonic Crystals. *Milan J. Math.* 2005. Vol. 73, № 1. P. 259–287.

[95] Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi–Pasta–Ulam Lattices. London–Singapore : Imperial College Press, 2005. 196 p.

[96] Pankov A. Traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam chains with nonlocal interaction. *Disr. Cont. Dyn. Syst. Ser. S.* 2019. Vol. 12, № 7 (November). P. 2097–2113.

[97] Pankov A., Pflüger K. On a semilinear Schrödinger equation with periodic potential. *Nonlin. Anal.* 1998. Vol. 33, № 6. P. 593–609.

[98] Pankov A., Pflüger K. Traveling waves in lattice dynamical systems. *Math. Meth. Appl. Sci.* 2000. Vol. 23. P.1223–1235.

[99] Pankov A., Rothos V. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity. *Proc. Royal Society A.* 2008. Vol. 464. P. 3219–3236.

[100] Pankov A., Rothos V. Traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam lattices with saturable nonlinearities. *Discr. Cont. Dyn. Syst.* 2011. Vol. 30, № 3 (July). P. 835–840.

[101] Pankov A., Zakharchenko N. On some discrete variational problems. *Acta Appl. Math.* 2001. Vol. 65. P. 295–303.

[102] Poggi P., Ruffo S. Exact solutions in the FPU oscillator chain. *Physica D.* 1997. Vol. 103. P. 251–272.

[103] Rabinowitz P. H. Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.* 1990. Vol. 114. P. 33–38.

[104] Rabinowitz P. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. Providence, R. I. : American Math. Soc. 1986. 100 p.

[105] Rabinowitz P. H. Multibump solutions of differential equations: an overview. *Chinese J. Math.* 1996. Vol. 24. P. 1–36.

[106] Ruf B., Srikanth P. N. On periodic motions of lattices of Toda type via critical point theory. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1994. Vol. 126. P. 369–385.

[107] Samoilenko A. M., Teplinskii Yu. V. Countable Sistems of Differential Equations. Utrecht-Boston : VSP, 2003. 287 p.

[108] Sattinger D. On global solutions non linear hyperbolic equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1968. Vol. 30. P. 148–172.

[109] Schechter M. Linking Methods in Critical Point Theory. Boston : Birkhäuser, 1999. 296 p.

[110] Schwetlick H., Zimmer J. Existence of dynamic phase transition in a one-dimensional lattice model with piecewise quadratic interaction potential. *Siam J. Math. Anal.* 2009. Vol. 41, № 3. P. 1231–1271.

[111] Scott-Russel J. Report on waves. *Rept. fourteenth meeting of the British Association Adv. Sci.* London : John Murray, 1845. P. 311–390.

[112] Smets D. Traveling waves for an infinite lattice: multibump type solutions. *Topol. Meth. Nonlin. Anal.* 1998. Vol. 12. P. 79–90.

[113] Smets D., Willem M. Solitary waves with prescribed speed on infinite lattices. *J. Funct. Anal.* 1997. Vol. 149. P. 266–275.

[114] Smoller J. Shock waves and reaction-diffusion equations. Berlin : Springer-Verlag, 1983. 581 p.

[115] Srikanth P. On periodic motions of two–dimensional lattices. *Functional analysis with current applications in science, technology and industry.* 1998. Vol. 377. P. 118–122.

[116] Struwe M. Variational Methods. 3rd Ed. Berlin : Springer–Verlag. 1997. 245 p.

[117] Tamga J. M., Remoissenet M., Pouget J. Breathing solitary waves in a sine–Gordon two-dimensional lattice. *Phys. Rev. Lett.* 1995. Vol. 75. P. 357–361.

[118] Tarallo M., Terracini S. On the existence of periodic and solitary travelling waves in some nonlinear lattices. *Dynam. Syst. Appl.* 1995. Vol. 4. P. 429–458.

[119] Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices. Providence, R. I. : American Math. Soc. 2000. 251 p.

[120] Toda M. Waves in nonlinear lattice. *Suppl. Theory Phys.* 1970. № 45. P. 174–200.

[121] Treschev D. Travelling waves in FPU lattices. *Discr. Cont. Dynam. Syst. A.* 2004. Vol. 11. P. 867–880.

[122] Valkering T. P. Periodic permanent waves in an anharmonic chain with nearest neighbour interaction. *J. Phys. A.* 1978. Vol. 11. P. 1885–1897.

[123] Volpert A. I., Volpert V. A. Travelling Wave Solutions of Parabolic Systems. Providence, R. I. : American Math. Soc. 1994. 455 p.

[124] Wattis J. A. D. Approximations to solitary waves on lattices, II: Quasicontinuum methods for fast and slow waves. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1993. Vol. 26. P. 1193–1209.

[125] Wattis J. A. D. Approximations to solitary waves on lattices, III: the monatomic lattice with second-neighbour interactions. *J. Phys. A: Math. Gen.* 1996. Vol. 29. P. 8139–8157.

[126] Wattis J. A. D. Solitary waves on a two-dimentional lattice. *Phys. Scr.* 1993. Vol. 5. P. 238–242.

[127] Weinstein M. Excitation threshold for nonliniear localized modes on lattices. *Nonlinearity.* 1999. Vol. 12. P.673–691.

[128] Weinstein M. I. Extended Hamiltonian Systems. *Handbook of Dyn. Syst.* 2006. Vol. 1B. P. 1135–1153.

[129] Willem M. Minimax theorems. Boston : Birkhäuser. 1996. 162 p.

[130] Williams D. Probability with Martingales. Cambridge : Cambridge University Press. 1991. 252 p.

[131] Xiang Y., Wattis J. A. D., Susanto H., Cummings L. J. Discrete breathers in a two-dimensional spring-mass lattice. *J. Phys. A: Math. And Theor.* 2009. Vol. 42. P. 1–26.

[132] Zabusky N. J., Kruskal M. D. Interaction of "solutions"in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.* 1965. Vol. 15. P. 240–243.

[133] Zeidler E. Nonlinear Functional Analysis and its Applications. III. Variational Methods and Optimization. New York : Springer–Verlag, 1985. 664 p.

[134] Zhang L., Guo S. Existence and multiplicity of wave trains in 2D lattices. *J. Differential Equations.* 2014. Vol. 257. P. 759–783.

[135] Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи : Пер. с англ. Москва : Мир, 1987. 479 с.

[136] Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматулина Л. Ф. Введение в теорию функционально–дифференциальных уравнений. Москва : Наука, 1991. 277 с.

[137] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. Москва : Наука, 1989. 472 с.

[138] Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів. *Математичні студії.* 2006. Т. 26, № 2. С. 140–153.

[139] Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю. *Математичні студії.* 2010. Т.33, №1. С.78–84.

[140] Бак С. Н. Метод условной минимизации в задаче о колебаниях цепочки нелинейных осцилляторов. *Математическая физика, анализ, геометрия.* 2004. Т. 11, № 3. С. 263–273.

[141] Бак С. Н., Панков А. А. О динамических уравнениях системы линейно связанных нелинейных осцилляторов. *Український математичний журнал.* 2006. Т. 58, № 6. С. 723–729. Engl. transl.: *Ukr. Math. J.* 2006. Vol. 58, № 6. P. 815–822.

[142] Бак С. Н., Панков А. А. О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов. *Доповіді НАН України.* 2004. № 9. С.13–16.

[143] Бак С. М. Рівняння нескінченних ланцюгів нелінійних осциляторів: задача Коші, періодичні розв'язки, біжучі хвилі : дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.02. Вінниця, 2007. 142 с.

[144] Бак С. М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці. *Український математичний журнал.* 2017. Т. 69, № 4. С. 435–444. Engl. transl.: *Ukr. Math. J.* 2017. Vol. 69, № 4. P. 509–520.

[145] Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичні методи та фізико-механічні поля.* 2014. Т. 57, № 3. С. 45-52. Engl. transl.: *J. Math. Sc.* 2016. Vol. 217, № 2 (August). P. 187-197.

[146] Бак С. М. Існування періодичних за часом розв'язків системи осциляторів на двовимірній гратці. *Карпатські математичні публікації.* 2012. Т. 4, № 2. С. 175–196.

[147] Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. Вип. 10. С. 17–23.

[148] Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. Вип. 12. С. 5–12.

[149] Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці. *Математичні студії.* 2011. Т. 35, № 1. С. 60–65.

[150] Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. *Математичні студії.* 2012. Т. 37, № 1. С. 76-88.

[151] Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2017. Вип. 16. С. 21–29.

[152] Бак С. М. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. Вип. 5. С. 3–9.

[153] Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні sin-Гордона на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. Вип. 9. С. 5–10.

[154] Бак С. М. Про обмеженість глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. Вип. 20. С. 5–12.

[155] Бак С. М., Баранова О. О., Білик Ю. П. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський :

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. Вип. 4. С. 18–24.

[156] Бак С. М., Ковтонюк Г. М., Печериця І. В. Стоячі хвилі з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. Вип. 18. С. 5–13.

[157] Бак С. М., Рум'янцева К. Є. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання.* Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. Вип. 6. С. 29–36.

[158] Бак С. М., Панков А. А. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках. *Український математичний вісник.* 2010. Т. 7, №2. С. 154-175. Engl. transl.: *J. Math. Sci.* 2011. Vol. 174, № 4 (April). P. 437–452.

[159] Бак С. М. Біжучі хвилі в моделі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації* : тези доповідей VII міжнар. наук. конфер. (Кам'янець-Подільський, 21–22 квітня 2016 р.). Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. С. 11–13.

[160] Бак С. М. Гетероклінічні біжучі хвилі в дискретному рівнянні синус-Ґордон з нелінійною взаємодією на двовимірній ґратці. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації* : тези

доповідей 8-ї Міжнар. наук. конфер., присвяч. 100-річчю Нац. Акад. наук України та 100-річчю КПНУ ім. І. Огієнка. (Кам'янець-Подільський, 18–20 квітня 2018 р.). Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. С. 91–92.

[161] Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю. *Український математичний конгрес — 2009* (до 100-річчя від дня народження Миколи М. Боголюбова). Інститут математики НАН України. (Київ, 27–29 серпня 2009 р.). URL: http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/Abstracts/Bak.pdf (дата звернення: 28.07.2020).

[162] Бак С. М. Метод умовної мінімізації в задачі про існування періодичних розв'язків в системах осциляторів на двовимірній ґратці. *Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності* : матеріали Міжнар. наук.-метод. Інтернет-конференції (Вінниця, 18–20 травня 2020 р.). Вінниця : ВНТУ, 2020. С. 93-96. URL: https://conferences.vntu.edu.ua/index.php/pmovc/pmovc20 (дата звернення: 28.07.2020).

[163] Бак С. М. Про біжучі хвилі для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Тринадцята Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука* : матеріали конференції. (Київ, 13–15 травня 2010 р.). Київ, 2010. Т. 1. С. 53.

[164] Бак С. М. Про біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації* : тези доповідей IX міжнар. наук. конфер. (Кам'янець-Подільський, 14–15 травня 2020 р.). Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієн-

ка, 2020. С. 25-26. URL: https://inf.kpnu.edu.ua/optima/ (дата звернення: 28.07.2020).

[165] Бак С. М. Про існування відокремлених біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності* : зб. наук. праць за матеріалами Всеукр. науково-практ. конфер. (Вінниця, 18–19 травня 2017 р.). Вінниця : ФОП Рогальська І. О., 2017. С. 42–44.

[166] Бак С. М. Про існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера на двовимірній ґратці. *Проблеми вищої математичної освіти: виклики сучасності* : матеріали Міжнар. наук.-метод. Інтернет-конференції (Вінниця, 17–18 травня 2018 р.). Вінниця : ВНТУ, 2018. С. 179–181.

[167] Бак С. М. Про періодичні біжучі хвилі для нескінченної системи нелінійних осциляторів. *Дванадцята Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука* : матеріали конференції. (Київ, 15–17 травня 2008 р.). Київ, 2008. С. 27.

[168] Бак С. М. Про періодичні розв'язки системи осциляторів на двовимірній ґратці. *Teoretyczne i praktyczne innowacje naukowe* : матеріали Міжнар. наук. конфер. (Krakow, 29–31 stycznia 2013 r.). Krakow: Wydawca Sp. z o.o. «Diamond traiding tour», 2013. T. 8. S. 72-74.

[169] Бак С. М., Баранова О. О. Існування та єдиність локального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 20–21 квітня 2011 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2011. С. 30–34.

[170] Бак С. М., Білик Ю. П. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 20–21 квітня 2011 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2011. С. 34–38.

[171] Бак С. М., Домбровська Д. М. Умови існування біжучих хвиль в системі осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 21–22 квітня 2010 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2010. С. 44–48.

[172] Бак С. М., Ковтонюк Г. М., Печериця І. В. Застосування многовиду Нехарі в задачі про існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологій* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 18–19 квітня 2019 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2019. С. 10–15.

[173] Бак С. М., Кудрич Ю. С. Застосування методу критичних точок в задачі про існування періодичних біжучих хвиль в дискретному рівнянні sin-Гордона на двовимірній ґратці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 16–17 квітня 2014 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2014. С. 12–15.

[174] Бак С. М., Магдич В. І. Існування гомоклінічних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за

матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 22–23 квітня 2015 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2015. С. 11–16.

[175] Бак С. М., Окопна Т. М. Застосування принципу концентрованої компактності в задачі про існування гетероклінічних біжучих хвиль в дискретному рівнянні sin-Гордона на двовимірній ґратці. *Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти* : зб. наук. пр. за матеріалами міжвуз. наук.-практ. конфер. (Вінниця, 17–18 квітня 2013 р.). Вінниця : ТОВ фірма «Планер», 2013. С. 10–13.

[176] Бак С., Ковтонюк Г., Печериця І. Про існування стоячих хвиль з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності* : матеріали II Всеукраїнської науково-практичної Інтернет-конференції (Вінниця, 15–16 травня 2019 р.). Вінниця, 2019. С. 13–16.

[177] Бебихов Ю. В. Дискретное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью, допускающее точные решения. *Ползуновский альманах.* 2008. № 3. С. 76.

[178] Безуглова Г. С., Гончаров П. П., Гуров Ю. В., Чечин Г. М. Дискретные бризеры в скалярных динамических моделях на квадратной решетке. *Известия вузов. ПНД.* 2011. Т. 19, № 3. С. 89–103.

[179] Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Київ : Наук. думка, 1965. 798 с.

[180] Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ. Київ : Вища школа, 1990. 600 с.

[181] Браун О. М., Кившарь Ю. С. Модель Френкеля–Конторовой. Концепции, методы, приложения. Пер. с англ. под ред. А. В. Савина. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. 536 с.

[182] Бурилко О. А. Колективна динаміка та біфуркакції у мережах зв'язаних фазових осциляторів : дис. ... докт. фіз.-мат. наук : 01.01.02. Київ, 2019. 462 с.

[183] Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. Москва : Мир, 1977. 232 с.

[184] Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху: Підручник. Київ : Вища школа, 2004. 525 с.

[185] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Москва : Наука, 1970. 534 с.

[186] Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. Москва : ИЛ, 1962. 896 с.

[187] Захаров В. Е. Устойчивость периодических волн на поверхности глубокой жидкости. *Прикл. механика и техн. Физика.* 1968. № 2. С. 86–94.

[188] Захаров В. Е., Шабат А. Б. Тонкая теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах. *ЖЭТФ.* 1971. Вып. 61, № 1. С. 118–134.

[189] Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. Пер. с англ. Москва : Мир, 1983. 301 с.

[190] Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Москва : Гостехиздат, 1956. 392 с.

[191] Кудряшов Н.А. Нелинейные волны и солитоны. *Соросовский образовательный журнал.* 1997. № 2. С. 85–91.

[192] Кузьмичев В.Е. Законы и формулы физики. Киев : Наукова думка, 1989. 864 с.

[193] Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Москва : Мир, 1972. 735 с.

[194] Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. Москва : Мир, 1971. 371 с.

[195] Мартинс Н. Теорема о горном перевале без условий Пале–Смейла. *Соврем. матем. и её прилож.* 2009. Т. 63. С. 3–12.

[196] Мезенцев В. К., Мушер С. Л., Рыженкова И. В., Турицын С. К. Двумерные солитоны в дискретных системах. *Письма в ЖЭТФ.* 1994. Т. 60. Вып. 11. С. 815–821.

[197] Мельник Т. А., Креневич А. П. Теорія просторів Соболєва та узагальнені розв'язки крайових задач: підручник. Київ : ВПЦ «Київський Університет», 2017. 164 с.

[198] Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. Киев : Наук. думка, 1987. 296 с.

[199] Михайлов В. П., Гущин А. К. Дополнительные главы курса «Уравнения математической физики». Лекционные курсы НОЦ. Вып.7. Москва : МИАН, 2007. 146 с.

[200] Мышкис А. Д. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. *Успехи математических наук.* 1977. Т. 32, Вып. 2 (194). С. 173–202.

[201] Нижник И. Л. Устойчивая численная разностная схема для нелинейного уравнения Клейна–Гордона. *Український математичний журнал.* 1997. Т. 49, № 6. С. 857–859.

[202] Новокшенов В. Ю. Введение в теорию солитонов: учеб. пособ. Ижевск : Ин–т компьютерных исследований, 2002. 96 с.

[203] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. Москва : Мир, 1989. 324 с.

[204] Обен Ж. П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. Москва : Мир, 1988. 510 с.

[205] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики : в 4–х т. Москва : Мир, 1977. Т. 1. 357 с.

[206] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики : в 4–х т. Москва : Мир, 1978. Т. 2. 395 с.

[207] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: в 4–х т.–Москва : Мир, 1982. Т. 3. 443 с.

[208] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: в 4–х т.–Москва : Мир, 1982. Т. 4. 428 с.

[209] Самойленко А. М., Самойленко В. Г., Собчук В. В. Про періодичні розв'язки рівняння нелінійного осцилятора з імпульсною дією. *Укр. мат. журн.* 1999. Т. 51, № 6. С. 827–834.

[210] Самойленко А. М., Теплинский Ю. В. Счетные системы дифференциальных уравнений. Киев : Ин-т математики НАН Украины, 1993. 308 с.

[211] Свирежев Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. Москва : Наука, 1987. 368 с.

[212] Тода М. Теория нелинейных решеток. Москва : Мир, 1984. 262 с.

[213] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. Москва : Мир, 1997. 622 с.

[214] Ферми Э., Паста Дж., Улам С. Изучение нелинейных задач. Научные труды. В 2-х т. Москва : Наука, 1972. Т.2. 256 с.

[215] Филиппов А. Т. Многоликий солитон. Москва : Наука, 1986. 288 с.

[216] Френкель Я. И., Конторова Т. А. К теории пластической деформации. *ЖЭТФ.* 1938. Ч. I, Т. 8. Вып. 1. С. 89–95.

[217] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва : Мир, 1970. 720 с.

[218] Хейл Дж. Теория функционально–дифференциальных уравнений. Москва : Мир, 1984. 421 с.

[219] Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Москва : Наука, 1971. 296 с.

[220] Эредеро Р. Э., Леви Д., Винтерниц П. Симметрии дискретного нелинейного уравенния Шредингера. *Теор. Мат. Физика.* 2001. Т. 127, № 3. С. 379–387.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А
ДЕЯКІ ОЗНАЧЕННЯ ТА ПОЗНАЧЕННЯ

Для $p \in [1;\infty)$ позначимо через $l^p = l^p\left(\mathbb{Z}^2;\mathbb{R}\right)$ банахів простір усіх p-сумовних нескінченних в обидві сторони послідовностей $u = \{u_{n,m}\}_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ з нормою

$$\|u\|_{l^p} = \left(\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} |u_{n,m}|^p\right)^{1/p}.$$

Простір $l^2 = l^2\left(\mathbb{Z}^2;\mathbb{R}\right)$ є гільбертів простір зі скалярним добутком

$$\left(u^{(1)}, u^{(2)}\right) = \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} u^{(1)}_{n,m} u^{(2)}_{n,m}.$$

Через $l^\infty = l^\infty\left(\mathbb{Z}^2;\mathbb{R}\right)$ позначається банахів простір в обидві сторони обмежених послідовностей з нормою

$$\|u\|_{l^\infty} = \sup_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} |u_{n,m}|.$$

При $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ простір l^{p_1} неперервно вкладений в l^{p_2}, $l^{p_1} \subseteq l^{p_2}$, причому

$$\|u\|_{l^{p_2}} \le \|u\|_{l^{p_1}},\ u \in l^{p_1}.$$

Через l_0 позначається простір *фінітних* послідовностей $\{u_{n,m}\}$ (рівних нулю всюди, за винятком скінченного числа номерів), тобто таких послідовностей $\{u_{n,m}\}$, що множина $\operatorname{supp}\{u_{n,m}\} := \{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 | u_{n,m} \ne 0\}$ скінченна.

Через $C\left([a,b]\right)$ позначається банахів простір усіх неперервних на $[a,b]$ функцій f з рівномірною нормою

$$\|f\|_{C([a,b])} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Для $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $C^n([a,b])$ банахів простір усіх n разів неперервно диференційовних на $[a,b]$ функцій f з нормою

$$\|f\|_{C^n([a,b])} = \sum_{k=0}^{n} \|f^{(k)}\|_{C([a,b])}.$$

Простір усіх нескінченно диференційовних на $[a,b]$ функцій позначимо через

$$C^\infty([a,b]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n([a,b]).$$

Аналогічно означаються відповідні простори на інтервалі (a,b).

Нагадаємо, що функція f називається *фінітною* на множині X, якщо її носій $\mathrm{supp} f := \overline{\{x \in X | f(x) \neq 0\}}$ компактний.

Через $C_0^0((a,b))$ позначається простір усіх *фінітних* неперервних на (a,b) функцій. Простір усіх фінітних на (a,b) функцій з $C^n((a,b))$ будемо позначати через $C_0^n((a,b))$, а перетин усіх таких просторів — $C_0^\infty((a,b))$.

Через $C_b(\mathbb{R})$ позначається банахів простір усіх обмежених неперервних на $\mathbb{R}$ функцій f з нормою

$$\|f\|_{C_b(\mathbb{R})} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

А через $C_0(\mathbb{R})$ — замкнений підпростір $C_b(\mathbb{R})$, що складається з усіх функцій, які збігаються до нуля на нескінченності:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Через $L^p(a,b)$, $1 \le p \le \infty$, позначається банахів простір вимірних за Лебегом p-сумовних функцій f на інтервалі (a,b) з нормою

$$\|f\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

а через $L^\infty(a,b)$ — банахів простір усіх істотно обмежених вимірних функцій з нормою

$$\|f\|_{L^\infty(a,b)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in (a,b)} |f(x)|,$$

де $\operatorname*{ess\,sup}_{x \in (a,b)} |f(x)| := \inf\{c \in \mathbb{R} : |\{x \in (a,b) : |f(x)| > c\}| = 0\}$ — істотний супремум $|f(x)|$.

Зауважимо, що простір $L^2(a,b)$ є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(f,g)_{L^2(a,b)} = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx,$$

а простір $L^2(\mathbb{R})$ є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(f,g)_{L^2(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx.$$

Через $L^p_{loc}(\mathbb{R})$ позначається простір таких вимірних функцій f на $\mathbb{R}$, що звуження f на будь-який скінчений інтервал (a,b) належить $L^p(a,b)$.

Через $H^1(a,b)$ позначається простір усіх функцій $f \in L^2(a,b)$ таких, що слабка похідна $f' \in L^2(a,b)$. Нагадаємо, що функція g називається *слабкою похідною* функції f, якщо

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi'(x)dx = -\int\limits_a^b g(x)\varphi(x)dx$$

для всіх $\varphi \in C_0^\infty((a,b))$. Простір $H^1(a,b)$ є гільбертовим зі скалярним добутком

$$(f,g)_{H^1(a,b)} = (f,g)_{L^2(a,b)} + (f',g')_{L^2(a,b)}$$

та відповідною нормою

$$\|f\|_{H^1(a,b)} = \left(\|f\|^2_{L^2(a,b)} + \|f'\|^2_{L^2(a,b)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Якщо $(a,b) \subset \mathbb{R}$ — скінчений інтервал, то $H^1(a,b)$ збігається із замиканням $C^1([a,b])$ відносно H^1-норми. А замикання $C_0^\infty((a,b))$ відносно H^1-норми позначається через $H^1_0(a,b)$. Це замкнений лінійний підпростір $H^1(a,b)$. Якщо ж $(a,b) = \mathbb{R}$, то $H^1_0(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R})$.

Через $H^1_{loc}(\mathbb{R})$ позначається простір таких функцій $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$, що звуження f на будь-який скінченний інтервал (a,b) належить $H^1(a,b)$.

Простір H^1 є одним із представників родини просторів Соболєва. Відомо (див. [25,194,197]), що для будь-якого скінченного інтервалу (a,b) вкладення $H^1(a,b) \subset C([a,b])$ неперервне. Тобто для будь-якої функції $f \in H^1(a,b)$ існує єдина функція $f_0 \in C([a,b])$ така, що $f(x) = f_0(x)$ майже скрізь на $[a,b]$, та існує стала $c > 0$, яка не залежить від f та f_0, що $\|f_0\|_{C([a,b])} \leq c\|f\|_{H^1(a,b)}$.

Крім того, це вкладення ще й компактне, тобто з довільної обмеженої послідовності $\{f_n\} \subset H^1(a,b)$ можна виділити збіжну підпослідовність в $C([a,b])$. Компактним є також і вкладення $H^1(a,b) \subset L^p(a,b)$, $1 \le p \le \infty$.

Вкладення $H^1(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R})$ та $H^1(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$, $2 \le p \le \infty$, також неперервні (але не компактні), причому

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

для будь-якої функції $f \in H^1(\mathbb{R})$.

Нехай E — банахів простір і $(a,b) \subset \mathbb{R}$ — інтервал. Тоді через $L^p(a,b;E)$, $1 \le p \le \infty$, позначається банахів простір вимірних p-сумовних функцій f на (a,b) зі значенням в E з нормою

$$\|f\|_{L^p} = \left[\int_a^b \|f(t)\|_E^p dt \right]^{1/p}.$$

Якщо E — гільбертів простір, то $L^p(a,b;E)$ також гільбертів.

Через $L^\infty(a,b;E)$ позначається банахів простір дійсних обмежених вимірних функцій на (a,b) зі значенням в E з нормою

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in (a,b)} \|f(t)\|_E,$$

де $\operatorname*{ess\,sup}_{t \in (a,b)} \|f(t)\|_E := \inf\{c \in \mathbb{R} : |\{t \in (a,b) : \|f(t)\|_E > c\}| = 0\}$ — істотний супремум $\|f(t)\|_E$.

Якщо інтервал (a,b) скінченний, то при $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$ простір $L^{p_2}(a,b;E) \subseteq L^{p_1}(a,b;E)$.

Через $L^p_{loc}(\mathbb{R};E)$ позначається простір таких вимірних функцій f на $\mathbb{R}$ зі значеннями в E, що звуження f на будь-який скінчений інтервал (a,b) належить $L^p(a,b;E)$.

Для відрізка $[a,b]$ через $C(a,b;E)$ позначається банахів простір усіх неперервних на $[a,b]$ функцій зі значеннями в E.

Нехай тепер E — гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_E$ та (a,b) — довільний інтервал. Через $H^1(a,b;E)$ позначається простір таких функцій u на (a,b) зі значеннями в E, що $u \in L^2(a,b;E)$ та її слабка похідна $u' \in L^2(a,b;E)$. Це гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(u,v)_{H^1} = \int\limits_a^b \left[(u(t),v(t))_E + (u'(t),v'(t))_E\right] dt$$

та нормою

$$\|u\|_{H^1} = \left[(u,u)_{H^1}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Через $H^1_{loc}(\mathbb{R};E)$ позначимо простір таких функцій u на $\mathbb{R}$ зі значеннями в E, що обмеження u на кожний скінченний інтервал (a,b) належить $H^1(a,b;E)$. Відомо (див. [194]), що $H^1(a,b;E) \subset C(a,b;E)$ для будь-якого скінченного інтервалу (a,b). Зокрема, функції з $H^1_{loc}(\mathbb{R};E)$ неперервні на $\mathbb{R}$.

Для лінійного неперервного функціоналу f на банаховому просторі через $\langle f,u\rangle$ позначається значення функціоналу f на елементі u. Нехай Φ функціонал на банаховому просторі E. *Похідною Гато* функціоналу Φ в точці $u \in E$ називається такий лінійний неперервний функціонал f на E, що для будь-якого $h \in E$

$$\lim_{\lambda\to 0}\left[\frac{1}{\lambda}\left(\Phi(u+\lambda h)-\Phi(u)\right) - \langle f,h\rangle\right] = 0.$$

Похідна Гато функціоналу Φ позначається $\Phi'(u)$ та є елементом спряженого простору E^* (простір всіх лінійних функціоналів, визначених на E). Якщо $\Phi'(u)$ існує для будь-якого $u \in E$ і відображення $\Phi' : E \to E^*$ неперервне, то кажуть, що функціонал Φ належить класу C^1.

Означення та основні властивості класичних банахових просторів можна знайти в [180, 186]. Диференціальне числення для функціоналів на банахових просторах викладено в [183, 204]. Основи теорії просторів Соболєва можна знайти в [197, 199]. Стосовно загальної теорії просторів Соболєва зі значеннями в гільбертовому просторі див. [194].

ДОДАТОК Б
ДЕЯКІ ТЕОРЕМИ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ

Розглянемо в банаховому просторі E нелінійне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{Б.1}$$

Наступні дві теореми є наслідками зі стандартних результатів про існування та єдиність локального і глобального розв'язків задачі Коші (див. [185, с. 391]), теореми 1.1, 1.2).

Теорема Б.1. ***(Локальна)***. *Нехай для будь-якого $R > 0$ існують $M_1 = M_1(R) > 0$ і $M_2 = M_2(R) > 0$ такі, що*

$$\|f(x)\| \leq M_1 \text{ при } \|x\| \leq R$$

і

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M_2\|x_1 - x_2\| \text{ при } \|x_1\|, \|x_2\| \leq R.$$

Тоді для будь-якого $x_0 \in E$ існує t_0 таке, що рівняння (Б.1) має один і тільки один розв'язок $x = x(t)$ в інтервалі $(-t_0; t_0)$, який задовольняє початкову умову $x(0) = x_0$.

Теорема Б.2. ***(Глобальна)***. *Нехай існують $M_0 > 0$, $M_1 > 0$ і $M_2 > 0$ такі, що*

$$\|f(x)\| \leq M_1 + M_0\|x\|$$

і

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M_2\|x_1 - x_2\|.$$

Тоді для будь-якого $x_0 \in E$ рівняння (Б.1) має один і тільки один розв'язок $x = x(t)$, визначений при всіх $t \in \mathbb{R}$, який задовольняє початкову умову $x(0) = x_0$.

ДОДАТОК В
ТЕОРЕМИ ПРО ГІРСЬКИЙ ПЕРЕВАЛ І ЗАЧЕПЛЕННЯ

Однією із найпростіших і найпопулярніших мінімаксних теорем є теорема про гірський перевал.

Нехай на гільбертовому просторі H заданий функціонал $I : H \to \mathbb{R}$ класу C^1. Кажуть, що I задовольняє *умову Пале–Смейла*, якщо виконується наступна умова:

(PS) *якщо* $\{u_n\} \subset H$ *така послідовність, що* $\{I(u_n)\}$ *обмежена та* $I'(u_n) \to 0$, $n \to \infty$, *то* $\{u_n\}$ *містить збіжну підпослідовність.*

Зауважимо, що при перевірці цієї умови можна, без обмеження загальності, вважати, що числова послідовність $\{I(u_n)\}$ збігається, оскільки з обмеженої числової послідовності можна виділити збіжну підпослідовність.

Послідовність $\{u_n\}$ точок гільбертового простору H називається *послідовністю Пале-Смейла* функціоналу I на деякому рівні b, якщо $I(u_n) \to b$ та $I'(u_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Тоді, враховуючи сказане вище, умову Пале-Смейла можна переформулювати наступним чином:

(PS) *будь-яка послідовність Пале-Смейла* $\{u_n\} \subset H$ *містить збіжну підпослідовність.*

Зазаначимо, що умову Пале-Смейла часто називають умовою компактності Пале-Смейла.

Сформулюємо тепер теорему про гірський перевал (див. [62, 92, 95, 104, 108, 129].

Теорема В.1. ***(Про гірський перевал).*** *Нехай на гільбертовому просторі* H *з нормою* $\|\cdot\|$ *заданий функціонал* $I : H \to \mathbb{R}$ *класу* C^1, *який задовольняє* *умову Пале–Смейла. Припустимо, що існують* $e \in H$ *і* $r > 0$ *такі, що* $\|e\| > r$ *і*

$$\beta := \inf_{\|u\|=r} I(u) > I(0) \geq I(e).$$

Тоді існує критична точка $u \in H$ *функціоналу* I *така, що критичне значення*

$$I(u) = b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)) \geq \beta,$$

де $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$. *При цьому*

$$I(u) \leq \sup_{\tau \geq 0} I(\tau e).$$

Якщо функціонал задовольняє всі умови цієї теореми, крім умови Пале-Смейла, то кажуть, що він задовольняє *геометрію гірського перевалу.*

Наступну теорему типу теореми про гірський перевал можна знайти в [22] (Теорема 10).

Теорема В.2. *Нехай виконуються умови теореми про гірський перевал і* $P : H \to H$ *таке неперервне відображення, що*

$$I(Pu) \leq I(u)$$

для всіх $u \in H$, *причому* $P(0) = 0$ *і* $P(e) = e$. *Тоді існує критична точка* $u \in \overline{PH}$ *(замикання* PH*) функціоналу* I *з критичним значенням* $b = I(u)$.

Є також версія теореми про гірський перевал без умови Пале-Смейла (див. [95], Теорема С.3).

Теорема В.3. *Нехай на гільбертовому просторі* H *з нормою* $\|\cdot\|$ *заданий функціонал* $I : H \to \mathbb{R}$ *класу* C^1 *та існують* $e \in H$ *і* $r > 0$ *такі, що* $\|e\| > r$ *і* $\beta := \inf_{\|u\|=r} I(u) > I(0) \geq I(e)$. *І нехай*

$$b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

де $\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$. *Тоді існує послідовність* $\{u_n\} \subset H$ *така, що* $I(u_n) \to b$ *та* $I'(u_n) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *тобто* $\{u_n\}$ *послідовність Пале-Смейла рівня* b.

Ще однією популярною мінімаксною теоремою є теорема про зачеплення.

Нехай H — гільбертів простір, $H = Y \oplus Z$. Нехай також $\rho > r > 0$ і $z \in Z$ такий елемент, що $\|z\| = r$. Позначимо

$$M := \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| \leq \rho, \lambda \geq 0\}$$

і

$$M_0 := \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| = \rho \ i \ \lambda \geq 0, \ \textit{або} \ \|u\| \leq \rho, \lambda = 0\},$$

тобто M_0 — межа M. Нехай

$$N := \{u \in Z : \|u\| = r\}.$$

Розглянемо C^1-функціонал I на H і припустимо, що

$$\beta := \inf_{u \in N} I(u) > \alpha := \sup_{u \in M_0} I(u).$$

В такому випадку кажуть, що функціонал I задовольняє *геометрію зачеплення.*

Сформулюємо тепер теорему про зачеплення (див. [95, 104, 129]).

Теорема В.4. ***(Про зачеплення).*** *Нехай на гільбертовому просторі H заданий функціонал $I : H \to \mathbb{R}$ класу C^1, який задовольняє умову Пале–Смейла та геометрію зачеплення. Тоді існує критична точка $u \in H$ функціоналу I така, що критичне значення*

$$I(u) = b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in M} I(\gamma(u)) \geq \beta,$$

де $\Gamma := \{\gamma \in C(M, H) : \gamma|_{M_0} = id\}$. При цьому

$$I(u) \leq \sup_{u \in M} I(u).$$

Зауважимо, що теорема про гірський перевал є частковим випадком теореми про зачеплення.

ДОДАТОК Г
ПРИНЦИП КОНЦЕНТРОВАНОЇ КОМПАКТНОСТІ

Потужною технікою для дослідження варіаційних задач є використання принципу концентрованої компактності, представленого в [29, 77, 78].

Лема Г.1. *Нехай $\{f_k\}$ така послідовність невід'ємних функцій простору $L^1(\mathbb{R})$, що $\|f_k\|_{L^1} = \theta > 0$. Тоді, після переходу до підпослідовності, виконується одна з таких трьох можливостей:*

(*i*) *(концентрація) існує послідовність $\{y_k\} \subset \mathbb{R}$ така, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $r > 0$ таке, що*

$$\int\limits_{y_k-r}^{y_k+r} f_k(x)dx \geq \theta - \varepsilon;$$

(*ii*) *(розпливання)*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}} \int\limits_{y-r}^{y+r} f_k(x)dx = 0$$

для всіх $r > 0$;

(*iii*) *(розщеплення) знайдуться $\alpha \in (0, \theta)$ і послідовності невід'ємних функцій $\{f_k^{(1)}\}, \{f_k^{(2)}\} \subset L^1(\mathbb{R})$ з компактними носіями, такі, що*

$$\operatorname{dist}\left[\operatorname{supp}\{f_k^{(1)}\}, \operatorname{supp}\{f_k^{(1)}\}\right] \to \infty, \text{ при } k \to \infty,$$

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - (f_k^{(1)} + f_k^{(2)})\|_{L^1} = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k^{(1)}\|_{L^1} = \alpha$$

і

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k^{(2)}\|_{L^1} = \theta - \alpha.$$

Зауважимо, що можливість (*i*) часто також називають компактністю (іноді жорсткістю).

Наведемо дискретний варіант цього принципу у потрібному нам вигляді (див. [101], Лема 1).

Лема Г.2. *Нехай* $v^{(j)} = \{v^{(j)}_{n,m}\}$ *така послідовність невід'ємних елементів простору* l^1, *що* $\|v^{(j)}\|_{l^1} = \theta > 0$. *Тоді існує така її підпослідовність (як і раніше позначаєтьcя* $\{v^{(j)}\}$*), що виконуєтьcя одна з таких трьох можливостей:*

(i) *(концентрація) існує* $(n_j, m_j) \in \mathbb{Z}^2$, *що для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *знайдеться таке* $r > 0$, *що*

$$\sum_{|n-n_j|^2+|m-m_j|^2\leq r^2} v^{(j)}_{n,m} \geq \theta - \varepsilon;$$

(ii) *(розпливання)*

$$\lim_{j\to\infty} \|v^j\|_{l^\infty} = 0;$$

(iii) *(розщеплення) знайдеться* $\alpha \in (0, \theta)$ *з наступною властивістю:*

для будь-якого $\varepsilon > 0$ *існують такі дві невід'ємні послідовності* $\{v^{(j,1)}\}$, $\{v^{(j,2)}\} \subset l_0$, *що*

$$\operatorname{dist}\left[\operatorname{supp}\{v^{(j,1)}\}, \operatorname{supp}\{v^{(j,2)}\}\right] \to \infty, \ \textit{при}\ j \to \infty,$$

$$\|v^{(j)} - (v^{(j,1)} + v^{(j,2)})\|_{l^1} \leq \varepsilon,$$

$$|\|v^{(j,1)}\|_{l^1} - \alpha| \leq \varepsilon$$

і

$$|\|v^{(j,2)}\|_{l^1} - (\theta - \alpha)| \leq \varepsilon$$

для всіх достатньо великих j.