УДК 517.9

Олександра Бевз,
студентка факультету математики, фізики
і комп'ютерних наук
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

СУЧАСНІ ПІДХОДИ ДО АНАЛІЗУ СТІЙКОСТІ В ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

Анотація. *У статті розглянуто сучасні підходи до аналізу стійкості динамічних систем із застосуванням новітніх методів, таких як робастна оптимізація, метод Монте-Карло та аналіз біфуркацій. Особлива увага приділяється стійкості моделей у випадкових середовищах, де параметри системи можуть змінюватися непередбачувано, що є критично важливим для забезпечення надійності систем у складних умовах. Представлено приклади практичного застосування нових методів, зокрема для економічних моделей попиту і пропозиції з випадковими збуреннями, а також описано математичні підходи до оцінки стійкості через функцію Ляпунова.*

Ключові слова: *стійкість, динамічні системи, робастна оптимізація, метод Монте-Карло, біфуркації, функція Ляпунова.*

Abstract. *The article discusses modern approaches to the stability analysis of dynamic systems using the latest methods, such as robust optimization, the Monte Carlo method, and bifurcation analysis. Special attention is paid to the stability of models in random environments, where system parameters can change unpredictably, which is critical for ensuring the reliability of systems in complex environments. Examples of the practical application of new methods are presented, in particular for economic models of demand and supply with random disturbances, and mathematical approaches to the assessment of stability through the Lyapunov function are also described.*

Key words: *stability, dynamic systems, robust optimization, Monte Carlo method, bifurcations, Lyapunov function.*

Вступ. В умовах зростання складності моделей, що описують природні, економічні та соціальні процеси, важливим залишається питання їх стійкості до змін середовища та початкових умов. Аналіз стійкості дозволяє передбачити, як моделі зберігають свою структуру і поведінку під дією зовнішніх та внутрішніх факторів, що критично для розвитку таких областей, як інженерія, біологія та економіка. Ця стаття фокусується на нових методах оцінки стійкості в умовах непередбачуваних змін, таких як метод біфуркацій, робастної стійкості та моделювання збурень.

Сучасні концепції стійкості

Інтеграційні характеристики стійкості. Стійкість моделей може розглядатися не тільки як повернення до рівноваги, але і як здатність зберігати важливі характеристики у процесі динамічних змін. Інтеграційні характеристики стійкості дозволяють оцінити, наскільки система зберігає ключові властивості під дією малих і середніх збурень, що важливо для складних біологічних та екологічних систем.

Стійкість у випадкових середовищах. Важливим напрямком є аналіз стійкості в умовах невизначеності, коли параметри системи зазнають випадкових змін. Наприклад, у фінансових моделях випадкові коливання впливають на стійкість ринку. Використання ймовірнісних методів дозволяє глибше зрозуміти вплив стохастичних факторів на поведінку системи.

Метод Монте-Карло для оцінки стійкості. Метод Монте-Карло є ефективним для моделювання поведінки систем за умов випадкових збурень. Він дозволяє оцінити ймовірність того, що система залишиться в стійкому стані при заданих варіаціях параметрів. Наприклад, для моделі виду:

$$x(t+1) = z \cdot x(m) \cdot \big(1 - x(t)\big) + \varepsilon,$$

де ε – випадковий фактор, можна провести симуляцію численних сценаріїв для різних значень параметра r і виявити діапазони, в яких система є стійкою.

Аналіз біфуркацій. Аналіз біфуркацій дозволяє досліджувати, як зміна параметра може спричинити кардинальну зміну поведінки системи, що особливо важливо для нелінійних систем. Для моделі хижак-жертва зі зростаючим впливом хижаків на жертв рівняння може виглядати як:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by),$$

де x — чисельність жертв, y — чисельність хижаків. Коли коефіцієнт b змінюється, система проходить точки біфуркацій, що може призвести до виникнення нових рівноважних станів.

Робастна оптимізація. Робастна оптимізація зосереджена на побудові моделей, стійких до невеликих змін параметрів. Наприклад, для диференціальної моделі з невизначеними параметрами:

$$\frac{dx}{dt} = ax + \delta,$$

де δ – невелика зміна, оптимізація може включати діапазон можливих значень для забезпечення стабільності.

Приклад застосування нових методів для економічної моделі

Економічна модель ринку з випадковими збуреннями. Розглянемо просту модель попиту і пропозиції, де попит x і пропозиція y взаємодіють з врахуванням випадкових збурень. Модель можна представити як систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = p(x) - d(y) + \eta_x(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = s(x) - c(y) + \eta_y(t) \end{cases}$$

де $\eta_x(t)$та $\eta_y(t)$— випадкові збурення, які описують непередбачувані зміни в економіці. Тут $p(x)$ $d(y)$, $s(x)$та $c(y)$ — функції попиту та пропозиції.

Застосування методу Монте-Карло для цієї системи дозволяє оцінити, чи буде ринок стабільним за різних умов попиту і пропозиції.

Розрахунок для стійкості при малих збуреннях. Розглянемо функцію Ляпунова V(x) для аналізу стійкості:

$$\frac{dv}{dt} = \nabla v \cdot f(x),$$

де f(x) — вектор функцій, що описують динаміку системи. Якщо похідна $\frac{dv}{dt}$< 0 для всіх x , крім рівноважного стану, то система вважається стійкою.

Робастна оптимізація з випадковими параметрами. Для диференціальної моделі з випадковими параметрами робастна оптимізація дозволяє врахувати збурення у вигляді малих додатків до параметрів. Для системи з випадковим параметром δ

$$\frac{dx}{dt} = ax + \mathrm{by} + \delta$$

можна оцінити, як зміни в δ впливають на стабільність системи, визначаючи оптимальні значення а та b для підтримки стійкості.

Висновки. Таким чином, сучасні методи аналізу стійкості, такі як метод Монте-Карло, аналіз біфуркацій та робастна оптимізація, дозволяють отримати глибші уявлення про поведінку динамічних систем в умовах невизначеності. Такий підхід є ефективним для дослідження стійкості в економічних, біологічних та інженерних моделях, де важливо забезпечити стабільність в умовах зміни параметрів та зовнішніх факторів.

Література:

1. Khalil H. K. Nonlinear Systems. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2002. 750 p.
2. Strogatz S. H. Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. Boca Raton: Westview Press, 2015. 532 p.
3. LaSalle J., Lefschetz S. Stability by Liapunov's Direct Method. New York–London: Academic Press, 1961. 134 p.
4. Бак С. М. Диференціальні та інтегральні рівняння. Навчальний посібник. 2-ге вид., випр. і доп. Вінниця: ФОП Рогальська І. О., 2018. 360 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Ковтонюк Галина Миколаївна.