

ЗАСТОСУВАННЯ МНОГОВИДУ НЕХАРІ В ЗАДАЧІ ПРО ІСНУВАННЯ СТОЯЧИХ ХВИЛЬ В ДИСКРЕТНОМУ НЕЛІНІЙНОМУ РІВНЯННІ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА

Анотація. Вивчається дискретне нелінійне рівняння типу Шредінгера на двовимірній ґратці. За допомогою методу критичних точок із використанням многовиду Нехарі одержано результат про існування розв'язків у вигляді стоячих хвиль з періодичною амплітудою.

Ключові слова: дискретне нелінійне рівняння Шредінгера, двовимірна ґратка, стоячі хвилі, критичні точки, многовид Нехарі.

Універсальні моделі, які здатні описати велику різноманітність фізичних явищ, зустрічаються рідко. Серед рівнянь, які описують дискретні моделі, найбільш відомими є рівняння ланцюгів осциляторів, дискретне рівняння \sin -Гордона, система Фермі–Пасти–Улама, дискретне нелінійне рівняння Шредінгера. В статтях [1; 2; 7; 8; 15; 16; 19; 20] досліджено питання існування біжучих хвиль в системах осциляторів на двовимірній ґратці. В той же час для систем Фермі–Пасти–Улама на двовимірній ґратці відомі декілька праць [3; 17], в яких отримано умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль. В статтях [6; 9; 18] вивчались біжучі хвилі для дискретного рівняння \sin -Гордона на двовимірній ґратці. В статтях [4; 5; 14; 21; 22] досліджувалось питання існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера.

Метою цієї статті є отримання достатніх умов існування стоячих хвиль з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінгера.

В даній роботі вивчається дискретне нелінійне рівняння типу Шредінгера на плоскій цілочисловій ґратці

$$i\dot{\psi}_{n,m}(t) - a_{n,m}\psi_{n+1,m}(t) - a_{n-1,m}\psi_{n-1,m}(t) - b_{n,m}\psi_{n,m+1}(t) - b_{n,m-1}\psi_{n,m-1}(t) - c_{n,m}\psi_{n,m}(t) + \frac{\mu|\psi_{n,m}(t)|^2}{1+|\psi_{n,m}(t)|^2}\psi_{n,m}(t) = 0, \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (1)$$

де $\psi_{n,m}(t)$ – хвильова функція (n, m) -ї частинки, $(a_{n,m}), (b_{n,m}) \subset \mathbb{R}, \mu \neq 0$.

Стоячі хвилі в цьому випадку мають вигляд

$$\psi_{n,m}(t) = u_{n,m} \exp(-i\omega t), \quad (2)$$

де $(u_{n,m}) \subset \mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega \in \mathbb{R}$ – частотою. Будемо вивчати стоячі хвилі з k -періодичною амплітудою, тобто відповідно

$$u_{n+k,m} = u_{n,m+k} = u_{n,m}. \quad (3)$$

Підставляючи стоячу хвилю (2) в рівняння (Помилка! Джерело посилання не знайдено.), одержимо рівняння

$$\omega u_{n,m} - a_{n,m}u_{n+1,m} - a_{n-1,m}u_{n-1,m} - b_{n,m}u_{n,m+1} - b_{n,m-1}u_{n,m-1} - c_{n,m}u_{n,m} + \frac{\mu u_{n,m}^3}{1+u_{n,m}^2} = 0. \quad (4)$$

Позначимо через

$$(Lu)_{n,m} = a_{n,m}u_{n+1,m} + a_{n-1,m}u_{n-1,m} + b_{n,m}u_{n,m+1} + b_{n,m-1}u_{n,m-1} + c_{n,m}u_{n,m}.$$

Надалі будемо розглядати більш загальне рівняння

$$Lu_{n,m} - \omega u_{n,m} = f(u_{n,m}) \quad (5)$$

з деякою нелінійністю $f(u_{n,m})$. Нехай $F(t)$ первісна функція для функції $f(t)$, тобто

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds. \text{ Тоді всюди далі припустимо, що виконуються наступні умови:}$$

(i_1) послідовності $(a_{n,m})$ і $(b_{n,m})$ періодичні, тобто $a_{n+k,m} = a_{n,m+k} = a_{n,m}$,
 $b_{n+k,m} = b_{n,m+k} = b_{n,m}$, $c_{n+k,m} = c_{n,m+k} = c_{n,m}$ і нижньою межею спектра оператора L
 є число 0;

$$(i_2) \quad f(t) = o(t), t \rightarrow 0 \text{ і } \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{f(t)}{t} = l < \infty;$$

$$(i_3) \quad f \in C^1(\square) \text{ і } f(t)t < f'(t)t^2, t \neq 0;$$

$$(i_4) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{2} f(t)t - F(t) \right) = \infty.$$

Нехай $k \geq 2$ – ціле число. Тоді через E_k позначимо простір всіх k -періодичних послідовностей $(u_{n,m})$, які задовольняють умову (3). Це скінченновимірний простір зі

скалярним добутком $(u, v)_k = \sum_{(n,m) \in Q_k} u_{n,m} v_{n,m}$ та нормою $\|u\|_k = \left(\sum_{(n,m) \in Q_k} |u_{n,m}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, де

$$Q_k = \left\{ (n, m) \in \square^2 : -\left[\frac{k}{2} \right] \leq n, m \leq k - \left[\frac{k}{2} \right] - 1 \right\}, [x] - \text{ціла частина } x.$$

На цьому просторі розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2} (L_k u - \omega u, u)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} F(u_{n,m}), \quad (6)$$

де L_k — оператор L , який діє в просторі E_k . Безпосереднім обчисленням одержуємо:

Лема 1. Похідна Гато функціоналу J_k визначається за формулою

$$\langle J'_k(u), h \rangle = (L_k u - \omega u, h)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} f(u_{n,m}) h_{n,m}, \quad u, h \in E_k,$$

а його критичні точки є розв'язками рівняння (5) з простору E_k .

Для функціоналу J_k означимо многовид Нехарі

$$N_k := \{ u \in E_k \mid \langle J'_k(u), u \rangle = 0, u \neq 0 \} \subset E_k.$$

Введемо позначення $I_k(u) := \langle J'_k(u), u \rangle$. Це C^1 -функціонал, похідна Гато якого визначається формулою

$$\langle I'_k(u), h \rangle = 2(L_k u - \omega u, h)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} (f(u_{n,m}) + f'(u_{n,m})u_{n,m}) h_{n,m}.$$

Лема 2. Нехай виконуються умови $(i_1) - (i_4)$, $\omega + l > 0$, $\omega < 0$. Тоді множина N_k є непорожнім замкненим C^1 -підмноговином у просторі E_k , на якому $I'_k(u) \neq 0$. Крім того, існує $\beta_0 > 0$ таке, що $\|u\|_k \geq \beta_0$ та $u \in N_k$.

Доведення. Нехай $\delta \in (-\omega, l)$ і E_δ — спектральний підпростір оператора $L_k - \omega$ в просторі E_k , що відповідає відрізку $[0, \delta]$. Оскільки $-\omega \in \sigma(L_k - \omega)$, то $E_\delta \neq \{0\}$. Нехай $v \in E_\delta \setminus \{0\}$. За умовою (i_2)

$$\begin{aligned} \langle J'_k(tv), tv \rangle &= t^2 (L_k v - \omega v, v)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} f(tv_{n,m}) tv_{n,m} = \\ &= t^2 (L_k v - \omega v, v)_k - o(t^2) > 0 \end{aligned}$$

для достатньо малих $t > 0$. З іншого боку,

$$\begin{aligned} \langle J'_k(tv), tv \rangle &= t^2 (L_k v - \omega v, v)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} f(tv_{n,m}) tv_{n,m} \leq \\ &\leq t^2 \left(\delta \|v\|_k^2 - \sum_{(n,m) \in Q_k} \frac{f(tv_{n,m}) v_{n,m}^2}{tv_{n,m}} \right). \end{aligned}$$

За умовою (i_2) сума в дужках збігається до $l \|v\|_k^2$, а тому $\langle J'_k(tv), tv \rangle < 0$ для достатньо великих $t > 0$. Тоді існує $t^* > 0$ таке, що $\langle J'_k(t^*v), t^*v \rangle = 0$ і $t^*v \in N_k$. Отже, $N_k \neq \emptyset$.

Нехай $u \in N_k$, тоді

$$\langle I'_k(u), u \rangle = \langle I'_k(u), u \rangle - 2I_k(u) = \sum_{(n,m) \in Q_k} (f(u_{n,m}) u_{n,m} - f'(u_{n,m}) u_{n,m}^2).$$

За умовою (i_3) ця сума є від'ємною. Тому $I'_k(u) \neq 0$ і за теоремою про неявну функцію $N_k \in C^1$ -підмноговином в просторі E_k . Замкненість E_k очевидна.

Перейдемо тепер до другої частини лема. Нехай $\varphi(r) = \sup_{|t| \leq r} \frac{f(t)}{t}$. Це зростаюча функція при $r \geq 0$ і згідно (i_2) $\varphi(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Нехай $u \in N_k$. Зазначимо, що оператор $L_k - \omega$ додатно визначений. Тоді з означення многовиду Нехарі

$$\begin{aligned} |\omega| \|u\|_k^2 &\leq (L_k u - \omega u, u)_k = \sum_{(n,m) \in Q_k} f(u_{n,m}) u_{n,m} \leq \\ &\leq \varphi(\|u\|_k) \cdot \|u\|_k^2 \leq \varphi(\|u\|_k) \cdot \|u\|_k^2. \end{aligned}$$

А це означає, що $\varphi(\|u\|_k) \geq |\omega|$. Оскільки функція φ зростаюча, то знайдеться $\beta_0 > 0$ таке, що $\|u\|_k \geq \beta_0$, $u \in N_k$. \square

З рівності (6) випливає, що на N_k

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{2}I_k(u) = \sum_{(n,m) \in Q_k} \left(\frac{1}{2}f(u_{n,m})u_{n,m} - F(u_{n,m}) \right). \quad (7)$$

Лема 3. Якщо $u \in N_k$, то функція $\varphi(t) = J_k(tu)$, $t > 0$ має єдину критичну точку при $t = 1$.

Доведення. Знайдемо похідну

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \left(\frac{1}{2}(L_k(tu) - \omega tu, tu)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} F(tu_{n,m}) \right)' = \\ &= \left(\frac{1}{2}t^2(L_k(u) - \omega u, u)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} F(tu_{n,m}) \right)' = \\ &= t(L_k(u) - \omega u, u)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} f(tu_{n,m})u_{n,m} = \\ &= t \left((L_k(u) - \omega u, u)_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} \frac{f(tu_{n,m})}{tu_{n,m}} u_{n,m}^2 \right). \end{aligned}$$

Оскільки на N_k

$$\varphi'(1) = (L_k u_{n,m} - \omega u_{n,m}, u_{n,m})_k - \sum_{(n,m) \in Q_k} f(u_{n,m})u_{n,m} = \langle J'_k(u), u \rangle = 0,$$

то $t = 1$ є критичною точкою функції $\varphi(t)$. Її єдиність випливає зі строгої монотонності функції $\frac{f(t)}{t}$. \square

За лемою 3 точки мінімуму функціоналу J_k на N_k є розв'язками рівняння (5). Тому природно розглянути наступну задачу мінімізації

$$m_k = \inf \{ J_k(u) : u \in N_k \}. \quad (8)$$

Лема 4. Нехай виконуються умови $(i_1) - (i_4)$, $\omega + l > 0$, $\omega < 0$. Тоді задача (8) має розв'язок.

Доведення. Нехай (u^j) , $u^j \in N_k$ — мінімізуючи послідовність для J_k , тобто $J_k(u^j) \rightarrow m_k$. З рівності (7) маємо

$$J_k(u^j) = \sum_{(n,m) \in Q_k} \left(\frac{1}{2}f(u_{n,m}^j)u_{n,m}^j - F(u_{n,m}^j) \right).$$

Тоді умова (i_4) означає, що $\|u^j\|_{l^\infty}$ обмежена. Оскільки простір E_k скінченновимірний, а l^∞ -норма еквівалентна евклідовій нормі на E_k , то послідовність (u^j) є обмеженою. Переходячи до підпослідовності, ми можемо вважати, що (u^j) збігається до $u \in N_k$ і $J_k(u) = m_k$. \square

З леми 4 випливає основний результат цієї статті:

Теорема. Нехай виконуються умови $(i_1) - (i_4)$, $\omega + l > 0$, $\omega < 0$. Тоді для будь-якого $k \geq 2$ рівняння (5) має нетривіальний k -періодичний розв'язок $u^{(k)} \in E_k$. Крім того, якщо функція f непарна, то рівняння (5) має два нетривіальні розв'язки $\pm u^{(k)} \in E_k$.

Список використаних джерел

1. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. – 2010. – Т. 7, №2. – С. 154–175.
2. Бак С. М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці // Український математичний журнал. – 2017. – Т. 69, №4. – С. 435–444.
3. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці // Математичні студії. – 2012. – Т. 37, №1. – С. 76–88.
4. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінґера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – 2017. – Вип. 16. – С. 21–29.
5. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінґера із насичуванню нелінійністю // Математичні студії. – 2010. – Т. 33, №1. – С. 78–84.
6. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні \sin -Гордона на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. – Вип. 9. – С. 5–10.
7. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. – Вип. 10. – С. 17–23.
8. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. – Вип. 12. – С. 5–12.
9. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2014. – Т. 57, №3. – С. 45–52.
10. Бак С.М. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С.М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. – Вип. 5. – С. 3–9.
11. Бак С.М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці / С.М. Бак, О.О. Баранова, Ю.П. Білик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. – Вип. 4. – С. 18–24.
12. Бак С.М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній ґратці / С.М. Бак, К.Є. Рум'янцева // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. – Вип. 6. – С. 29–36.
13. Бак С.М. Стоячі хвилі з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінґера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці / С.М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. – Вип. 18. – С. 5–14.
14. Мезенцев В. К. Двумерные солитоны в дискретных системах / В. К. Мезенцев, С. Л. Мушер, И. В. Рыженкова, С. К. Турицын // Письма в ЖЭТФ. – 1994. – Т. 60, вып. 11. – С. 815–821.
15. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice / S. M. Bak // Journal of Mathematical Sciences, 2016. – Vol. 217, №2 (August). – P. 187–197.
16. Bak S.M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice / S. M. Bak // Ukrainian mathematical Journal. – 2017. – Vol. 4 (69). – P.509–520.
17. Bak S.M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice / S. M. Bak, G. M. Kovtonyuk // Matematychni Studii. – 2018. – Vol. 50, No.1. – P.75–87.

18. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice / S. Bak // Journal of mathematical physics, analysis, geometry. – 2018. – Vol. 14, № 1. – P. 16-26.
19. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. – 2007. – 20. – P. 319–341.
20. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. – 2003. – Volume 3, №1 (February). – P. 105–114.
21. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations // Nonlinearity. – 2006. – 19. – P. 27–40.
22. Pankov A. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity / A. Pankov, V. Rothos // Proc. Royal Society A. – 2008. – 464. – P. 3219–3236.

APPLICATION OF NEHARI MANIFOLD IN THE PROBLEM OF THE EXISTENCE OF STANDARD WAVES IN THE DISCRETE NONLINEAR SCHRÖDINGER TYPE EQUATION

Abstract. A discrete nonlinear Schrödinger equation on a two-dimensional lattice is studied. Using the method of critical points using a variety of Nehari we obtain the result of the existence of solutions in the form of standing waves with periodic amplitude.

Keywords: discrete nonlinear Schrödinger equation, 2D-lattice, standing waves, critical points, Nehari manifold.

Тетяна Бех

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ З ЕКОНОМІКИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Анотація. У даній статті продемонстровано використання функцій, зокрема квадратичної функції, для розв'язування прикладних економічних задач.

Ключові слова: економічне мислення, прибуток, собівартість, відсоток, рентабельність функція попиту.

Однією з найважливіших задач сучасної школи є розвиток в учнів здібностей самостійно розв'язувати життєво важливі задачі. В умовах переходу до ринкової економіки особливо актуальним є формування в учнів економічного мислення, яке забезпечує розуміння сутності економічних процесів.

Економічна освіта є важливою складовою шкільної освіти в цілому. Взаємозв'язок економіки з різними шкільними дисциплінами, зокрема з математикою, дозволяє формувати всесторонньо розвинену особистість, яка здатна поєднувати особисті інтереси з інтересами суспільства. Економічна освіта повинна сформувати у школярів такий рівень економічного мислення, щоб вони могли самостійно й аргументовано пояснювати економічні явища й прогнозувати свої дії.

Одним із самих розповсюджених засобів виховання економічної грамотності на уроках математики є задачі, пов'язані з виробничою та іншими видами економічної діяльності [3].

У підручниках із математики є низка задач, у яких використовуються такі поняття як собівартість, прибуток, рентабельність, дохід, об'єм виробництва продукції (робіт і послуг) тощо. Але учні часто вбачають у задачі лише привід для виконання математичних дій. Її економічний зміст проходить повз увагою школярів. Тому вчителю бажано провести спеціальну бесіду, присвячену пізнавальному елементу задачі. Перед розв'язуванням задачі доцільно пояснити учням поняття про знаходження відсоткового відношення чисел, знаходження відсотків від даного числа, складного відсотку, поняття рентабельності, собівартості, витрат, тощо.