

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет математики, фізики і комп'ютерних наук

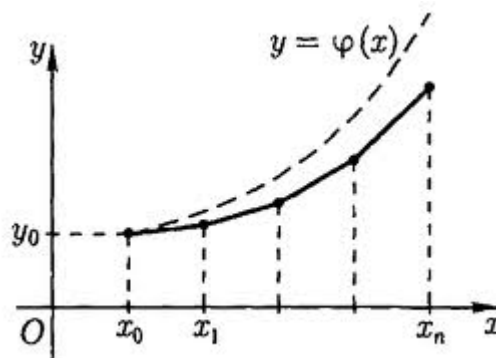
Кафедра математики та інформатики

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА

з диференціальних рівнянь

для студентів предметної спеціальності

А4.09 Середня освіта (Інформатика)



*Схвалено і рекомендовано до видання вченою радою факультету
математики фізики і комп'ютерних наук,
протокол №2 від 30.09.2026 року.*

Рецензенти: доктор педагогічних наук,
професор **Ковтонюк М. М.**,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Панасенко О. Б.**

Бак С. М. Робочий зошит студента з диференціальних рівнянь
(для студентів предметної спеціальності А4.09 Середня освіта
(Інформатика)) [Електронне видання]. Вінниця, 2026. 35 с.

Індивідуальний робочий зошит студента

Дисципліна: диференціальні рівняння

Розділи: Звичайні диференціальні рівняння 1-го порядку.
Звичайні диференціальні рівняння вищого порядку.
Математичні моделі і звичайні диференціальні рівняння

Автор-укладач: доктор фізико-математичних наук, професор
Бак Сергій Миколайович

Передмова

Робочий зошит з диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики призначений для використання студентами предметної спеціальності А4.09 Середня освіта (Інформатика) при вивченні розділів «Звичайні диференціальні рівняння 1-го порядку», «Звичайні диференціальні рівняння вищого порядку», «Математичні моделі і звичайні диференціальні рівняння».

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних розділів, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю.

Робочий зошит складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання та зразків текстів контрольних робіт. До кожного заняття подано запитання для самопідготовки.

Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

Робочий план студента

Робочий план студента складений на основі навчальної програми з диференціальних рівнянь.

Таблиця 1. Розподіл годин

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	денна форма здобуття освіти					
	усього	зокрема				
		ЛК	ПЗ	ЛЗ	ІЗ	СР
1	2	3	4	5	6	7
<i>Розділ 1. Звичайні диференціальні рівняння 1-го порядку</i>						
Тема 1. Диференціальні рівняння першого порядку	16	4	4	0	0	8
Тема 2. Наближені методи розв'язування задачі Коші	12	2	2	0	0	8
Разом за розділом 1	28	6	6	0	0	16
<i>Розділ 2. Звичайні диференціальні рівняння вищого порядку</i>						
Тема 1. Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку	11	2	1	0	0	8
Тема 2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	12	2	1	0	0	9
Тема 3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	13	2	2	0	0	9
Разом за розділом 2	36	6	4	0	0	26
<i>Розділ 3. Математичні моделі і звичайні диференціальні рівняння</i>						
Тема 1. Застосування звичайних диференціальних рівнянь до розв'язання задач геометрії	13	2	2	0	0	9
Тема 2. Застосування звичайних диференціальних рівнянь до розв'язування фізико-	13	2	2	0	0	9

технічних задач						
Разом за розділом 3	26	4	4	0	0	18
Усього годин	90	16	14	0	0	60

Таблиця 2. Теми лекцій

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Диференціальні рівняння першого порядку	4
2.	Наближені методи розв'язування задачі Коші	2
3.	Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку	2
4.	Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	2
5.	Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	2
6.	Застосування звичайних диференціальних рівнянь до розв'язання задач геометрії	2
7.	Застосування звичайних диференціальних рівнянь до розв'язування фізико-технічних задач	2
	Усього годин	16

Таблиця 3. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Звичайні диференціальні рівняння. Неповні диференціальні рівняння 1-го порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними	2
2.	Однорідні диференціальні рівняння. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку. Рівняння в повних диференціалах	2
3.	Наближені методи розв'язування задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку	2
4.	Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами	2
5.	Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами	2
6.	Застосування звичайних диференціальних рівнянь	2
7.	Контрольна робота	2
	Усього годин	14

Таблиця 4. Розподіл балів за видами контролю та самостійної роботи

№	Вид поточного контролю та самостійної роботи	Кількість балів
1.	Домашні завдання	10
2.	Конспект	10
3.	Контрольна робота	40
4.	Колоквіум	20
5.	Підсумковий тест	20
Загальна кількість балів		100

Таблиця 3. Шкала оцінювання: сто балова, ECTS, розширена

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за розширеною шкалою
		<i>Для екзамену, заліку, курсової роботи, практики</i>
90-100	A	ВІДМІННО
80-89	B	ДУЖЕ ДОБРЕ
75-79	C	ДОБРЕ
60-74	D	ЗАДОВІЛЬНО
50-59	E	ДОСТАТНЬО
35-49	FX	НЕЗАДОВІЛЬНО З МОЖЛИВІСТЮ ПОВТОРНОГО СКЛАДАННЯ
1-34	F	НЕПРИЙНЯТНО З ОBOB'ЯЗКОВИМ ПОВТОРНИМ ВИВЧЕННЯМ ДИСЦИПЛІНИ

Практичне заняття № 1

Тема: Звичайні диференціальні рівняння. Неповні диференціальні рівняння 1-го порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними

Запитання для самопідготовки:

1. Яке рівняння називається диференціальним? Наведіть приклади.
2. У чому різниця між звичайними диференціальними рівняннями і рівняннями в частинних похідних?
3. Дайте означення розв'язку диференціального рівняння.
4. Що собою представляє інтегральна крива?
5. У чому полягає задача Коші для диференціального рівняння першого порядку?
6. Дайте означення загального розв'язку диференціального рівняння.
7. Як розв'язати неповне диференціальне рівняння $y' = f(x)$?
8. Дайте означення диференціального рівняння з відокремлюваними змінними. Як їх розв'язують?

№1. Перевірити, чи є задана функція розв'язком відповідного рівняння:

1.1. $yy' = x, y = x$.

1.2. $y' - 3y = 0, y = 5e^{3x}$.

1.3. $xy' + y = \cos x, y = \frac{\sin x}{x}$.

1.4. $y'' = 2y' - y, y = e^x$.

$$1.5. y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0, y = 2x + 3x^2.$$

$$1.6. a^2 yy' + b^2 x = 0, x = a \sin t, y = b \cos t.$$

$$1.7. (1 + xy)y' + y^2 = 0, x = te^t, y = e^{-t}.$$

2. Скласти диференціальне рівняння за даним його розв'язком. Знайти той розв'язок, який задовольняє задану початкову умову, та побудувати графік відповідної інтегральної кривої:

$$2.1. y = Cx^2, y(2) = 3.$$

$$2.2. y = Ce^x, y(0) = 1.$$

$$2.3. y = e^{2x}(C + x), y(0) = 0.$$

$$2.4. x^2 + 2y^2 = C^2, y(-1) = 5.$$

$$2.5. y = \sin(x + C), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$2.6. y = C \sin x + \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

3. Розв'язати неповне диференціальне рівняння 1-го порядку:

$$3.1. y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}.$$

$$3.2. y' = \cos(3x + 2).$$

$$3.3. y' = \sin 5x.$$

$$3.4. y' = e^{2x+4}.$$

$$3.5. y' = \frac{1}{2 + 3x}.$$

$$3.6. y' = \frac{1}{\sqrt{2 - 5x}}.$$

$$3.7. y' = \cos 3x, y(0) = 0$$

$$3.8. y' = \sin 2x, y(0) = 1$$

$$3.9. y' = \frac{1}{x^2 + 1}, y(0) = 0$$

$$3.10. y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, y(0) = 1$$

$$3.11. y' = 2^x, y(0) = \frac{1}{\ln 2}$$

$$3.12. y' = x^5 + x^3, y(0) = 0$$

$$3.13. y' = \operatorname{tg} x, y(0) = 1$$

$$3.14. y' = \cos^2 x \sin 2x.$$

$$3.15. y' = (\arcsin x)^2.$$

$$3.16. y' = \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

$$3.17. y' = \sqrt{x^2 + a^2}.$$

$$3.18. y' = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}.$$

$$3.19. y' = x^4 \cos x.$$

$$3.20. y' = \sin x \sin 2x \sin 4x.$$

$$3.21. y' = \frac{x}{(x^2 + 1)^3}.$$

$$3.22. y' = \frac{1 - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$3.23. y' = e^x \cos x.$$

4. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$4.1. y' = e^{ax+by}.$$

$$4.2. y' = \frac{1}{2y}.$$

$$4.3. y' = 1 + y^2.$$

$$4.4. x^2 y dx + x^3 dy = 0.$$

$$4.5. (y - x^2 y) dy = (x - xy^2) dx.$$

$$4.6. e^{-y^2} dx - y dx = 0.$$

$$4.7. y' = (2y + 1) \operatorname{ctg} x.$$

$$4.8. y' = \sqrt{4 - x^2}.$$

$$4.9. xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2.$$

$$4.10. x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0.$$

5. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову:

$$5.1. y' / \sin x = y \ln y, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$$

$$5.2. (1 + e^x)yy' = e^x, y(0) = 1.$$

$$5.3. y' \operatorname{tg} x = y + 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$5.4. \sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx, y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

$$5.5. y' = e^{x+y}, y(0) = 0.$$

$$5.6. (1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx, y(0) = 0.$$

$$5.7. \frac{yy'}{x} + e^y = 0, y(1) = 0.$$

$$5.8. y' = e^{x+y} + e^{x-y}, y(0) = 0.$$

Відповіді: 1.1.-1.7. Так. 2.2. $y' = y, y = e^x$. 2.4. $2x + 4yy' = 0,$

$$\frac{x^2}{51} + \frac{2y^2}{51} = 1. \quad 3.1. y = \ln|x + \sqrt{x^2 - 9}| + C. \quad 3.2. y = \frac{1}{3} \sin(3x + 2) + C. \quad 3.3.$$

$$y = -\frac{1}{5} \cos 5x + C. \quad 3.4. y = \frac{1}{2} e^{2x+4}. \quad 3.5. y = \frac{1}{3} \ln|2 + 3x| + C. \quad 3.6.$$

$$y = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} + C. \quad 3.10. \quad y = \arcsin x + 1. \quad 3.13. \quad y = -\ln|\cos x| + 1. \quad 4.2.$$

$$y^2 = x + C. \quad 4.4. \quad y = \frac{C}{x}. \quad 5.2. \quad y^2 = 2\ln\frac{1+e^x}{2} + 1. \quad 5.8. \quad \operatorname{arctg} e^y = e^x + \frac{\pi}{4} - 1.$$

📖 Практичне заняття № 2

Тема: Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.

Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку.

Рівняння в повних диференціалах

Запитання для самопідготовки:

1. Дайте означення однорідного диференціального рівняння 1-го порядку. Як їх розв'язують?
2. Яке рівняння називається лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку?
3. У чому полягає суть методу Бернуллі?
4. У чому полягає суть методу Лагранжа?
5. Дайте означення диференціального рівняння в повних диференціалах. Як їх розв'язують?

✎ 1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1.1. \quad y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}.$$

$$1.2. \quad y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}.$$

$$1.3. \quad xdy - ydx = ydy.$$

$$1.4. \quad y' = \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

$$1.5. \quad (x+y)dx - (x-y)dy = 0.$$

$$1.6. \quad (x^2 + 2xy)dx + xydy = 0.$$

$$1.7. \quad xy' = y^2 + 2x^2.$$

$$1.8. \quad y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}.$$

$$1.9. \quad xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

$$1.10. \quad x^2 - y^2 + 2xy' = 0.$$

2. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову:

$$2.1. \quad y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}, \quad y(1) = 0.$$

$$2.2. \quad y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1.$$

$$2.3. \quad \left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx = \left(\frac{x}{y} - 1\right) e^{\frac{x}{y}} dy, \quad y(0) = 2.$$

$$2.4. \quad xydy - y^2 dx = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}} dx, \quad y(1) = 0.$$

$$2.5. \quad xy' = x \sin \frac{y}{x} + y, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$2.6. \quad y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad y(1) = 2.$$

$$2.7. \quad xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$2.8. \quad xy' = x e^{\frac{y}{x}} + y, \quad y(1) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$3.1. \quad y' + y = x.$$

$$3.2. \quad y' - y = e^x.$$

$$3.3. \quad y' + 2y = x^2 + 2x.$$

$$3.4. \quad y' + 2xy = 2x e^{-x^2}.$$

$$3.5. \quad x^2 y' - xy = 1.$$

$$3.6. xy' - y = x^2 \cos x.$$

$$3.7. xy' - y = x^3 (3 \ln x - 1).$$

$$3.8. (x^2 + 1)y' + 4xy = 3.$$

$$3.9. xy' + 2y = x^2.$$

$$3.10. (x^2 + y)dx = xdy.$$

$$3.11. (x^2 + 2x + 1)y' - (x + 1)y = x - 1.$$

$$3.12. (x + 1)dy - (2y + (x + 1)^4)dx = 0.$$

$$3.13. (1 + y^2)dx + xydy = \sqrt{1 + y^2} \sin y dy.$$

$$3.14. (1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x.$$

$$3.15. y' \sin x - y \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

4. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову:

$$4.1. y' + xy = x^3, y(0) = -2.$$

$$4.2. x \ln x y' + y = 2 \ln x, y(e) = 0.$$

$$4.3. y' \cos x - y \sin x = 1, y(0) = 1.$$

$$4.4. y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1.$$

$$4.5. (x^2 + x)y' = y + x^2 + x, y(0) = 1.$$

$$4.6. y' + y \cos x = \sin x \cos x, y(0) = 1.$$

$$4.7. y' \sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x, y(0) = 0.$$

$$4.8. y' \sin x - y \cos x = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$4.9. x(x^3 + 1)y' + (2x^3 - 1)y = \frac{x^3 - 2}{x}, y(1) = 1.$$

$$4.10. (1+x^2)\ln(1+x^2)y' - 2xy = x\ln(1+x^2), y(\sqrt{e}-1) = 1.$$

5. Перевірити, чи є дане диференціальне рівняння рівнянням у повних диференціалах. Знайти його загальний розв'язок:

$$5.1. (x+y)dx + (x-y)dy = 0.$$

$$5.2. (x-y)dx - (x+y)dy = 0.$$

$$5.3. (2x-y+1)dx + (2y-x-1)dy = 0.$$

$$5.4. (x-y)dx + (2y-x+1)dy = 0.$$

$$5.5. (x+2y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0.$$

$$5.6. (x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0.$$

$$5.7. x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0.$$

$$5.8. 3x + y - 2 + y'(x-1) = 0.$$

$$5.9. 2x + 2y - 1 + y'(2x + y - 2) = 0.$$

$$5.10. (1 + x\sqrt{x^2 + y^2})dx + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)ydy = 0.$$

$$5.11. 3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0.$$

$$5.12. y' = \frac{2x - y - 4}{2y + x + 5}.$$

$$5.13. ydy = (xdy + ydx)\sqrt{1+y^2}.$$

$$5.14. y'(y+2x)^2 = 4(y+2)^2.$$

$$5.15. xy' \cos y + \sin y = 0.$$

6. Перевірити, чи є дане диференціальне рівняння рівнянням у повних диференціалах. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову:

$$6.1. (\sin xy + xy \cos xy)dx + x^2 \cos xy dy = 0, y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$6.2. \frac{xdy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx, y(1) = 1.$$

$$6.3. 2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0, y(0) = 1.$$

$$6.4. \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2} = 0, y(1) = 0.$$

$$6.5. \left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y} \right) dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2} dy, y(1) = 1.$$

$$6.6. \frac{2x-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y+x}{x^2 + y^2} dy = 0, y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$6.7. \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0, y(1) = 1.$$

$$6.8. (\cos(x+y^2) + 3y) dx + (2y \cos(x+y^2) + 3x) dy = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Відповіді: 1.2. $e^{\frac{y}{x}} + \ln|x| + C = 0$. 1.6. $\frac{x}{x+y} + \ln|x+y| = C$. 3.3.

$$y = \frac{1}{4}(2x^2 + 2x - 1) + Ce^{-2x}. 3.8. y = \frac{x^3 + 3x + C}{(x^2 + 1)^2}. 5.1. \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C.$$

$$5.3. x^2 + y^2 - xy + x - y = C. 5.6. \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} = C. 5.10.$$

$$x + \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3} - \frac{y^2}{2} = C. 6.3. x^2 \cos^2 y + y^2 = 1. 6.5. x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 1.$$

Практичне заняття № 3

Тема: Наближені методи розв'язування задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку

Запитання для самопідготовки:

1. Сформулюйте теореми існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної?
2. У чому полягає суть методу послідовних наближень Пікара?
3. Як наближено розв'язують задачу Коші для диференціального рівняння 1-го порядку з використанням розкладання розв'язку в степеневий ряд?
4. У чому полягає суть методу ламаних Ейлера?

№1. Методом послідовних наближень Пікара знайти n -е наближення до розв'язку задачі Коші:

1.1. $y' = 2x - y, y(0) = 2, n = 3.$

1.2. $y' = x - y, y(0) = 1, n = 3.$

1.3. $y' = 2y - 2x^2 - 3, y(0) = 2, n = 2.$

1.4. $y' = 2x^3 - y - 2x, y(0) = 1, n = 2.$

1.5. $y' = x^3 + y - e^x, y(0) = 1, n = 3.$

1.6. $xy' = 2x - y, y(1) = 2, n = 3.$

1.7. $y' = x^3 - y^2 - 2x, y(1) = 1, n = 2.$

1.8. $y' = \sin 2x + \cos y, y(0) = 0, n = 3.$

1.9. $y' = x^2 - y^2, y(-1) = 0, n = 3.$

1.10. $y' = x - y^2, y(0) = 0, n = 3.$

2. Побудувати оцінку розв'язку задачі Коші многочленом третього степеня:

2.1. $y' = \ln y, y(1) = e^2$.

2.2. $y' = x - 2y, y(0) = 1$.

2.3. $y' = 2x - y, y(0) = 2$.

2.4. $y' = x^2 - y^2, y(-1) = 0$.

2.5. $y' = x - y^2, y(0) = 1$.

2.6. $y' = 2x^3 - y^2 - 2x, y(0) = 1$.

2.7. $xy' = x - 2y, y(1) = 1$.

2.8. $y' = \sin x + \cos 2y, y(0) = 0$.

2.9. $y' = x^3 + y^2 - e^x, y(0) = 1$.

2.10. $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}, y(0) = 1$.

3. Знайти наближений розв'язок задачі Коші, скориставшись методом ламаних Ейлера з кроком $h = 0,1$. Побудувати ламану Ейлера:

3.1. $y' = 3x - y, y(1) = 1, [1; 2]$.

3.2. $y' = x + \cos y, y(2) = 3, [2; 3]$.

3.3. $y' = y, y(0) = 1, [0; 1]$.

3.4. $y' = \frac{1}{2}xy, y(0) = 1, [0; 1]$.

3.5. $y' = \frac{x}{y}, y(1) = 2, [1; 2]$.

3.6. $y' = x^2 + y^2, y(0) = 0, [0; 1]$.

3.7. $y' = x - y^2, y(0) = 1, [0; 1]$.

3.8. $y' = 2x + \cos y, y(1) = 2, [1; 2]$.

3.9. $y' = \sin 2x + \cos y, y(0) = 0, [0; 1]$.

3.10. $y' = \ln y$, $y(1) = e$, $[1; 2]$.

Відповіді: 1.1. $y_3(x) = 2 - 2x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{12}$. 1.5. $y_3(x) = \frac{x^6}{120} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} + x^2 + 3x + 4 - 3e^x$. 2.1. $P_3(x) = e^2 + 2(x-1) + \frac{(x-1)^2}{e^2} - \frac{(x-1)^3}{3e^4}$.
2.2. $P_3(x) = 1 - 2x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3$.

Практичне заняття № 4

Тема: Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

Запитання для самопідготовки:

1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння.
2. Знаходження загального розв'язку у випадку різних дійсних коренів характеристичного рівняння.
3. Знаходження загального розв'язку у випадку різних коренів характеристичного рівняння, серед яких є комплексні.
4. Знаходження загального розв'язку у випадку наявності кратних коренів характеристичного рівняння.

№1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1.1. $y'' - 8y' - 9y = 0$.

1.2. $y'' - 2y' - 3y = 0$.

1.3. $y'' - 4y' - 5y = 0$.

1.4. $y'' - 5y' + 6y = 0$.

- 1.5. $y'' - 3y' + 2y = 0$.
- 1.6. $y'' - 4y' + 3y = 0$.
- 1.7. $y'' - 5y' + 4y = 0$.
- 1.8. $y'' + 5y' + 6y = 0$.
- 1.9. $y'' + 5y' + 4y = 0$.
- 1.10. $y'' + 4y' + 3y = 0$.
- 1.11. $y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$.
- 1.12. $y''' + 9y'' + 23y' + 15y = 0$.
- 1.13. $y''' - 3y'' - 3y' + y = 0$.
- 1.14. $2y''' - 4y'' - 4y' + 2y = 0$.
- 1.15. $y''' - y'' - 16y' + 16y = 0$.
- 1.16. $y''' - 2y'' - 3y' + 6y = 0$.
- 1.17. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$.
- 1.18. $y^{IV} - 10y'' + 9y = 0$.
- 1.19. $y^{IV} - 4y''' + y'' + 6y' = 0$.
- 1.20. $y^{IV} + 9y''' + 23y'' + 15y' = 0$.

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

- 2.1. $y'' - 2y' + y = 0$.
- 2.2. $y'' + 4y' + 4y = 0$.
- 2.3. $y'' - 6y' + 9y = 0$.
- 2.4. $y'' + 2y' + y = 0$.
- 2.5. $y'' - 4y' + 4y = 0$.
- 2.6. $y''' - 2y'' + y' = 0$.
- 2.7. $y^{IV} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0$.
- 2.8. $y^{IV} + 2y''' - 3y'' - 4y' + 4y = 0$.
- 2.9. $y^{IV} - 2y'' + y = 0$.
- 2.10. $y^{IV} - 18y'' + 81y = 0$.

З3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3.1. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

3.2. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

3.3. $y'' - 4y' + 13y = 0$.

3.4. $y'' - 6y' + 25y = 0$.

3.5. $y'' - 6y' + 13y = 0$.

3.6. $y''' - 2y'' + 2y' = 0$.

3.7. $y''' - 4y'' + 13y' = 0$.

3.8. $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$.

3.9. $y^{IV} - 6y''' + 25y'' = 0$.

3.10. $y^{IV} + 8y'' - 9y = 0$.

З4. Знайти розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

4.1. $y'' - 2y' - 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$.

4.2. $y'' - 4y' - 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$.

4.3. $y'' + 5y' + 4y = 0, y(1) = 1, y'(1) = 0$.

4.4. $y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$.

4.5. $y'' + 4y' + 4y = 0, y(1) = 1, y'(1) = 0$.

4.6. $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3$.

4.7. $y'' - 2y' + y = 0, y(1) = 2, y'(1) = 3$.

4.8. $y'' - 4y' + 5y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$.

4.9. $y'' - 6y' + 25y = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

4.10. $y'' - 6y' + 13y = 0, y(\pi) = 1, y'(\pi) = 2$.

Відповіді: 1.4. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. 1.11. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$. 1.20.

$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-3x} + C_4 e^{-5x}$. 2.3. $y = (C_1 + C_2 x) e^{3x}$. 2.7.

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3)e^{-2x}. \quad 3.3. \quad y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x). \quad 3.6.$$

$$y = C_1 + e^x(C_2 \cos x + C_3 \sin x). \quad 3.8. \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x +$$

$$+ C_4 \sin 2x. \quad 3.9. \quad y = C_1 + C_2x + e^{3x}(C_3 \cos 4x + C_4 \sin 4x). \quad 4.6.$$

$$y = (x+1)e^{2x}.$$

Практичне заняття № 5

Тема: Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

Запитання для самопідготовки:

1. Як знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку, якщо відома фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння?
2. Інтегрування неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, права частина яких є многочленом.
3. Інтегрування неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, права частина яких має вигляд $e^{\alpha x} P_m(x)$.
4. Інтегрування неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, права частина яких має вигляд $P_m(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x$.
5. Інтегрування неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, права частина яких має вигляд $e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x)$.

З1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих:

1.1. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.

1.2. $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^{3x}$.

1.3. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

1.4. $y'' - 6y' + 13y = e^{3x} \cos 2x$.

1.5. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin x$.

1.6. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

1.7. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

1.8. $y'' - y = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

1.9. $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$.

1.10. $y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 1)e^{2x}$.

1.11. $y''' - 7y'' - 10y' + 16y = x^2$.

1.12. $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^3 e^x$.

1.13. $y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{x^4}$.

1.14. $y^{IV} - 18y'' + 81y = x^4$.

1.15. $y^{IV} + 2y'' + y = \sin x$.

З2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів:

2.1. $y'' - 2y' - 3y = x^2 + x + 1$.

2.2. $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$.

2.3. $y'' - y = x + 1$.

2.4. $y'' - 2y' = x^2 + 1$.

2.5. $y'' - 3y' + 2y = x^3$.

- 2.6. $y''' - 2y'' = x - 2$.
- 2.7. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3$.
- 2.8. $y''' + 3y'' = x$.
- 2.9. $y''' - 4y' = x^2$.
- 2.10. $y''' - 7y'' + 6y = x^2$.
- 2.11. $y^{IV} + y'' = x^2 + x$.
- 2.12. $y^{IV} - 4y''' = x^2 - 1$.
- 2.13. $y'' - 4y = e^{2x}$.
- 2.14. $y'' + y = 4e^x$.
- 2.15. $y'' + 7y' = e^{-7x}$.
- 2.16. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$.
- 2.17. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x$.
- 2.18. $y'' - 4y' + 4y = xe^x$.
- 2.19. $y'' + 2y' - 3y = x^2e^x$.
- 2.20. $y'' + 4y' + 4y = x^2e^{-2x}$.

З3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів:

- 3.1. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.
- 3.2. $y'' - 3y' + 2y = \cos x$.
- 3.3. $y'' + y = 4\sin x$.
- 3.4. $y'' - 2y' + 2y = 2\sin x$.
- 3.5. $y'' - 6y' + 13y = 4\sin x$.
- 3.6. $y'' - 4y' + 5y = 3\cos x$.
- 3.7. $y''' - y = \sin x$.
- 3.8. $y^{IV} + 8y'' + 16y = \cos x$.
- 3.9. $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$.
- 3.10. $y'' - 9y = e^{3x} \cos x$.

$$3.11. y'' - y' = e^x \sin x.$$

$$3.12. y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x} \cos x.$$

$$3.13. y''' - 2y' + 4y = e^x \sin x.$$

$$3.14. y'' - y = xe^x \sin x.$$

$$3.15. y'' - 4y' + 5y = xe^{2x} \cos x.$$

$$3.16. y^{IV} - y = 5e^x \sin x.$$

4. Знайти розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$4.1. y'' - 2y' - 3y = x^2 + x + 1, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$4.2. y'' - 4y' - 5y = x - 1, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

$$4.3. y'' + 5y' + 4y = 2x + 3, y(1) = 1, y'(1) = 0.$$

$$4.4. y'' - 6y' + 9y = e^x, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$4.5. y'' + 4y' + 4y = 2e^{2x}, y(1) = 1, y'(1) = 0.$$

$$4.6. y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}, y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

$$4.7. y'' - 2y' + y = xe^x, y(1) = 2, y'(1) = 3.$$

$$4.8. y'' - 4y' + 5y = \sin x, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$4.9. y'' - 6y' + 25y = \cos 4x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$4.10. y'' - 6y' + 13y = x \sin 2x, y(\pi) = 1, y'(\pi) = 2.$$

Відповіді: 1.2. $y = C_1 e^x + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} + C_2 \right) e^{3x}.$ 1.5.

$$y = e^{2x} \left(\left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{x}{2} + C_1 \right) \cos x + \left(C_2 - \frac{1}{4} \cos 2x \right) \sin x \right). \quad 1.8.$$

$$y = \left(C_1 - \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^x) \right) e^{-x} + \left(C_2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + e^x) \right) e^x. \quad 2.3.$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - x - 1. \quad 2.5. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{x^3}{2} + \frac{9}{4}x^2 + \frac{21}{4}x + \frac{45}{8}. \quad 2.19.$$

$$y = C_1 e^{-3x} + \left(\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16} + \frac{x}{32} + C_2 \right) e^x. \quad 3.2.$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x. \quad 3.5.$$

$$y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{4}{15} \sin x + \frac{2}{15} \cos x.$$

📖 Практичне заняття № 6

Тема: Застосування звичайних диференціальних рівнянь

✎1. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(2; 0)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці цієї кривої пропорційний квадрату абсциси точки дотику з коефіцієнтом пропорційності $k = 3$.

✎2. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 4)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці цієї кривої обернено пропорційний ординаті точки дотику з коефіцієнтом пропорційності $k = 2$.

✎3. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 2)$, якщо кожна дотична до неї перетинає пряму $y = 1$ в точці з абсцисою, що дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

✎4. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 2)$, якщо відрізок будь-якої її дотичної, який знаходиться між осями координат, ділиться в точці дотику у відношенні 2:1 (відраховуючи від осі Oy).

✎5. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(0; 1)$, якщо відрізок будь-якої її нормалі дорівнює 1.

✎6. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 0)$, якщо довжина відрізка осі абсцис, який відтинає її нормаль, на 2 більше абсциси точки дотику.

✎7. Знайти криву, яка проходить через точку M_0 , якщо відрізок її нормалі між осями координат ділиться точкою кривої у відношенні $m : n$:

7.1. $M_0(2; -1)$, $m : n = 1 : 2$.

7.2. $M_0(-2; 3)$, $m : n = 1 : 3$.

7.3. $M_0(0; 1)$, $m : n = 2 : 3$.

7.4. $M_0(1; 0)$, $m : n = 3 : 2$.

7.5. $M_0(2; -1)$, $m : n = 3 : 1$.

✎8. Знайти криву, яка проходить через точку M_0 , якщо відрізок її дотичної між точкою дотику та віссю Oy ділиться в точці перетину з віссю Ox у відношенні $m : n$ (відраховуючи від осі Oy):

8.1. $M_0(2; -1)$, $m : n = 1 : 1$.

8.2. $M_0(1; 2)$, $m : n = 2 : 1$.

8.3. $M_0(1; -1)$, $m : n = 3 : 1$.

8.4. $M_0(2; 1)$, $m : n = 1 : 2$.

8.5. $M_0(1; -1)$, $m : n = 1 : 3$.

✎9. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 3)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці цієї кривої обернено пропорційний абсцисі точки дотику з коефіцієнтом пропорційності $k = 5$.

✎10. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(0; 3)$, якщо в кожній її точці тангенс кута нахилу дотичної до неї

пропорційний добутку координат точки дотику з коефіцієнтом пропорційності $k = -2$.

✎11. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 2)$, якщо площа трикутника, утвореного радіус-вектором будь-якої точки кривої, дотичною в цій точці та віссю абсцис, дорівнює 2.

✎12. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 0)$, якщо площа трапеції, утвореної дотичною, осями координат і ординатою точки дотику, дорівнює $\frac{3}{2}$.

✎13. Знайти ортогональні траєкторії ліній сім'ї гіпербол $xy = a$.

✎14. Знайти ортогональні траєкторії ліній сім'ї кіл $x^2 + y^2 = 2ax$.

✎15. Знайти ортогональні траєкторії ліній сім'ї кіл $x^2 + y^2 = 2ay$.

✎16. Знайти ортогональні траєкторії ліній сім'ї парабол $y^2 + 2ax = 0, a > 0$.

✎17. Знайти ізогональні траєкторії ліній сім'ї гіпербол $xy = a$, $\alpha = 45^\circ$.

✎18. Знайти ізогональні траєкторії ліній сім'ї кіл $x^2 + y^2 = 2ax$, $\alpha = 60^\circ$.

✎19. Знайти ізогональні траєкторії ліній сім'ї парабол $y^2 = 4ax, a > 0, \alpha = 30^\circ$.

✎20. Знайти ізогональні траєкторії ліній сім'ї еліпсів $3x^2 + y^2 = a, a > 0, \alpha = 45^\circ$.

✎21. В електронагрівальну піч з температурою середовища $T_c = 1000^\circ\text{C}$ помістили заготовку з температурою $T_0 = 200^\circ\text{C}$. Через дві години температура заготовки підвищилася до $T_1 = 500^\circ\text{C}$. Знайти температуру заготовки через 4 години, якщо відомо, що швидкість зміни температури заготовки

пропорційна різниці температури середовища і температури заготовки.

✎22. Температура тіла впродовж 20 хвилин знизилася від 100°C до 60°C . Температура повітря $T_n = 20^{\circ}\text{C}$. Знайти час, за який температура тіла знизиться до 25°C , якщо швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і повітря.

✎23. Охоронець заповідника виявив тушу вбитого зубра. Для доведення вини затриманого бракон'єра треба уточнити час, коли було вбито тварину. Відомо, що в момент виявлення злочину температура туші зубра становила 31°C , а через годину після цього – 29°C . Температура повітря того дня становила 21°C . Швидкість охолодження туші пропорційна різниці температур туші і повітря. Як слід діяти охоронцю, якщо відомо, що нормальна температура тіла живої тварини 37°C .

✎24. Посудина об'ємом 20 л містить повітря (80% азоту і 20% кисню). У посудину втікає 0,1 л азоту за секунду, який неперервно перемішується, і витікає така ж кількість суміші. Через який час у посудині буде 99% азоту?

✎25. В кімнаті об'ємом 200 м^3 міститься 0,15% вуглекислого газу. Вентилятор подає за хвилину 20 м^3 повітря, яке містить 0,04% вуглекислого газу. Через який час кількість вуглекислого газу в повітрі кімнати зменшиться втричі?

✎26. Експериментально підтверджено, що швидкість радіоактивного розпаду речовини пропорційна її кількості з деяким коефіцієнтом $-k < 0$ (закон радіоактивного розпаду). Визначити півперіод розпаду речовини – час, за який розпадається половина речовини.

✎27. Використовуючи закон радіоактивного розпаду, визначити, через який час залишиться 1% радіоактивної речовини від її початкової кількості, якщо за 30 днів розпалося 50% початкової кількості.

✎28. Використовуючи закон радіоактивного розпаду, визначити, через скільки років розпадеться половина кількості радію, якщо впродовж року з кожного граму радію розпадається 0,44 мг.

✎29. Матеріальна точка рухається по прямій зі швидкістю, обернено пропорційною пройденому шляху. В початковий момент руху точка була на відстані 5 м від початку відліку шляху й мала швидкість 20 м/с. Знайти шлях, який пройшла точка, та її швидкість через 10 с після початку руху.

✎30. Рух човна сповільнюється під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна становить 2м/с, а його швидкість через 4 с становить 1м/с. визначити, через скільки секунд швидкість човна дорівнюватиме 0,25 м/с і який шлях він може пройти до зупинки.

✎31. Тіло масою m ковзає по горизонтальній площині під дією поштовху, який надав йому початкової швидкості v_0 . Визначити закон руху тіла залежно від часу і знайти відстань, яку тіло здатне пройти до повної зупинки, якщо на нього діє сила тертя, пропорційна масі тіла.

✎32. Тіло падає у повітрі без початкової швидкості ($v_0 = 0$). Опір повітря пропорційний квадрату швидкості руху тіла. Визначити закон руху тіла залежно від часу.

✎33. Тіло кинуто вертикально вгору з початковою швидкістю v_0 . Визначити закон руху тіла залежно від часу, вважаючи, що воно рухається тільки під дією сили тяжіння.

✎34. Електрон рухається в однорідному електричному полі з напруженістю E . Знайти траєкторію руху електрона, якщо в початковий момент часу відомі швидкість v_0 і напрям його руху.

✎35. Частина (ступінь) масою m багатоступінчастої космічної ракети падає з великої висоти H на Землю з початковою швидкістю $v_0 = 0$. Нехтуючи опором повітря, знайти швидкість і час падіння ступеня ракети на Землю.

✎36. Тіло опускається в рідину. Сила опору пропорційна швидкості. Знайти закон руху тіла залежно від часу, якщо воно опускається в рідину без початкової швидкості.

✎37. Підводний човен масою m , що перебував у стані спокою, одержав невелику від'ємну плавучість P і занурюється на глибину. Опір води пропорційний швидкості занурення і дорівнює kSv , де k – коефіцієнт пропорційності, S – площа горизонтальної проекції човна, v – швидкість занурення. Визначити швидкість занурення і шлях, пройдений човном за час t .

✎38. Снаряд вилітає з гармати зі швидкістю 800 м/с під кутом 45° до горизонту. Нехтуючи опором повітря, знайти найбільшу висоту, на яку підніметься снаряд, і місце його падіння.

✎39. Снаряд вилітає з гармати зі швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Знайти рівняння руху снаряда, припускаючи, що опір повітря дорівнює kv , де k – коефіцієнт опору, v – швидкість руху.

40. Знайти закон руху і визначити період T коливань математичного маятника довжиною нитки l і масою кульки m з амплітудою коливань A при малих відхиленнях.

Відповіді: 1. $y = x^3 - 8$. 2. $y^2 = 4x + 12$. 3. $y = \frac{1}{x} + 1$. 4. $y = \frac{2}{x^2}$. 5.

$x^2 + y^2 = 1$. 6. $y^2 = 4x - 4$. 9. $y = 5 \ln x + 3$. 10. $y = 3e^{-x^2}$. 11. $xy = 2$. 12.

$y = \frac{1}{x} - x^2$. 13. $y^2 - x^2 = C$. 14. $y = C(x^2 + y^2)$. 20.

$y^2 + 2xy + 3x^2 = Ce^{-2\sqrt{2}\arctg\frac{x+y}{\sqrt{2}x}}$. 21. $687,5^\circ C$. 22. 80 хв. 23.

$T(t) = 21 + 10e^{t \ln 0,8}$; $T(t) = 37^\circ C$ при $t = \frac{\ln 1,6}{\ln 0,8} \approx -2,1$ год. 24.

$x(t) = 20 - 4e^{-0,005t}$; $x(t) = 19,8$ при $t = 200 \ln 20$ с. 25.

$x(t) = 0,08 + 0,22e^{-\frac{t}{10}}$; $x(t) = 0,1$ при $t = 10 \ln 11 \approx 24$ хв. 26.

$x(t) = x(0)e^{-kt}$; $x(t) = \frac{1}{2}x(0)$ при $t = \frac{\ln 2}{k}$. 27. $x(t) = x(0)2^{-\frac{t}{30}}$;

$x(t) = 0,01x(0)$ при $t = \frac{60}{\lg 2} \approx 200$ днів. 28. $x(t) = x(0)(1 - 0,00044)^t$;

$x(t) = \frac{1}{2}x(0)$ при $t = \frac{\ln 0,5}{\ln(1 - 0,00044)} \approx 1600$ років. 29.

$s(t) = \sqrt{25 + 200t}$; $s(10) - s(0) = 40$ м; $v(10) = \frac{20}{9}$ м/с. 10. $v(t) = 2^{1-\frac{t}{4}}$;

$s(+\infty) = \frac{8}{\ln 2}$. 31. $s(t) = v_0 t - \frac{k}{2}t^2$; $s = \frac{v_0^2}{2k}$ при $t = \frac{v_0}{k}$. 32.

$s(t) = \frac{m}{k} \ln ch \left(\sqrt{\frac{kg}{m}} t \right)$. 33. $s(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. 34.

$x = \frac{eE}{2mv_0^2 \sin^2 \alpha} y^2 + y \operatorname{ctg} \alpha$. 35. $v = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+H-s} - \frac{2gR^2}{R+H}}$;

$$t_k = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{R+H}{2g}} \left(\sqrt{RH} + (R+H) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{H}{R}} \right). \quad 36.$$

$$s(t) = \frac{m^2 g}{k^2} \left(e^{\frac{k}{m} t} - 1 \right) + \frac{mg}{k} t. \quad 37. \quad v(t) = \frac{P}{kS} \left(1 - e^{\frac{kS}{m} t} \right);$$

$$x(t) = \frac{P}{kS} \left(t - \frac{m}{kS} \left(1 - e^{\frac{kS}{m} t} \right) \right). \quad 38. \quad y_{\max} = \frac{400^2}{g} \approx 16,3 \quad \text{KM};$$

$$x_{\text{надіння}} = \frac{800^2}{g} \approx 65 \quad \text{KM}. \quad 39. \quad x(t) = \frac{mv_0}{k} \cos \alpha \left(1 - e^{\frac{k}{m} t} \right),$$

$$y(t) = \frac{m}{k^2} (kv \sin \alpha + mg) \left(1 - e^{\frac{k}{m} t} \right) - \frac{mg}{k} t. \quad 40. \quad s(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right);$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

📖 Практичне заняття № 7

⌘ Контрольна робота

(зразок)

✎1. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову:

$$(1 + e^x)yy' = e^x, y(0) = 1.$$

✎2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
 $y'' - 5y' - 6y = 3x + 1.$

✎3. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(2; 0)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці цієї кривої пропорційний квадрату абсциси точки дотику з коефіцієнтом пропорційності $k = 3$.

✎4. В електронагрівальну піч з температурою середовища $T_c = 1000^\circ C$ помістили заготовку з температурою $T_0 = 200^\circ C$. Через дві години температура заготовки підвищилася до $T_1 = 500^\circ C$. Знайти температуру заготовки через 4 години, якщо відомо, що швидкість зміни температури заготовки пропорційна різниці температури середовища і температури заготовки.

Рекомендована література

Основна

1. Бак С. М. Диференціальні та інтегральні рівняння: Навч. посіб. 2-ге вид., випр. і доп. Вінниця: ФОП Рогальська І. О., 2018. 360 с.
2. Бак С. М. Робочий зошит студента з диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики (для студентів предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика)). Вінниця, 2024. 33 с. URL: <https://dspace.vspu.edu.ua/handle/123456789/16620>
3. Килимник І. М., Яримбаш Д. С. Диференціальні рівняння: навч. посіб. Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2024. 212 с.
4. Ляшенко В. П., Набок Т. А., Скотнікова Л. М. Диференціальні рівняння: навч. посіб. Кременчук: КрНУ ім. М. Остроградського, 2025. 166 с.

Додаткова

1. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах: Навч. посіб. Київ: Либідь, 2003. 504 с.
2. Томусяк А.А., Ковтонюк М.М. Диференціальні рівняння: У 2-х ч.: Навч. посіб. Вінниця: ПП «ТД «Едельвейс і К»», 2009. Ч. 1. 248 с.
3. Томусяк А.А., Ковтонюк М.М. Диференціальні рівняння: У 2-х ч.: Навч. посіб. Вінниця: ТОВ «фірма «Планер»», 2012. Ч. 2. 388 с.
4. Хохлова Л. Г., Хома Н. Г. Диференціальні рівняння: навч. посіб. Тернопіль: ТНПУ ім. В. Гнатюка, 2023. 71 с.

Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Бібліотечний фонд кафедри математики та інформатики в університетському репозиторії. URL: <https://dspace.vspu.edu.ua/collections/860ee2c1-610e-4cd9-babf-0fe65f1b1ab2>
2. Сайт «Математичний аналіз і диференціальні рівняння вивчаю сам». URL: <https://kovtonyuk.com/>

Електронне навчальне видання

Бак Сергій Миколайович

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

для студентів предметної спеціальності
А4.09 Середня освіта (Інформатика)

21001, м. Вінниця, вул. Острозького, 32