здебільшого для технічних потреб. Але незабаром помітили, що у тих, хто все ж таки пив воду, поліпшувалася робота шлунка і кишківника; а у тих, хто приймав ванни в солоній воді, перестали боліти суглоби.

Отже, на нашу думку, варто періодично проводити такі інтегровані уроки з метою зацікавлення учнів до таких наук як математика, географія, фізика, біологія та інших, щоб показати, наскільки всі вони є пов'язаними, і що окремо вони існувати не можуть.

Список використаних джерел

1. Паралель [Електронний ресурс] – режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D1%80%D0%B0%D0%BB%D0%B5%D0%BB%D1%8C
2. Меридіан [Електронний ресурс] – режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%80%D0%B8%D0%B4%D1%96%D0%B0%D0%BD
3. Географічні координати [Електронний ресурс] – режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B5%D0%BE%D0%B3%D1%80%D0%B0%D1%84%D1%96%D1%87%D0%BD%D1%96_%D0%BA%D0%BE%D0%BE%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%B8
4. Місто Хуст [Електронний ресурс] – режим доступу: https://we.org.ua/malovnychi-kutochky-ukrayiny/zakarpatska-oblast/misto-hust/
5. Цікаві факти про Хмельницький [Електронний ресурс] – режим доступу: http://bazaropt.com/p13.html
6. Миргород [Електронний ресурс] – режим доступу: https://www.telegraf.in.ua/topnews/10064469-mirgorod-kraschiy-kurort-svtu820182018203poruch-z-nami.html

GEOGRAPHIC MERIDIANA AND PARALLELS IN MATHEMATICS

Abstract*. In this article a fragment of the lesson on geometry for the 9th class of generalization and systematization of knowledge is proposed. This is an integrated geography lesson in geometry that contains applied tasks. With the help of these tasks, students repeat the formulas for finding the length of the vector, the coordinates of the mean of the vector, the scalar product through the angle between the vectors. In addition, thanks to this lesson, students will better understand the concept of geographical meridians, parallels and geographic coordinates.*

Keywords*: geographic meridians, geographical parallels, geographic coordinates, vector, vector coordinates, vector length.*

Віта Ігнатко

ОПЕРАЦІЯ ДІЛЕННЯ В МАТРИЧНІЙ АЛГЕБРІ M_4

Анотація. *У статті розглядається алгебра скінченного рангу 4. Матричну алгебру M_4 наділено операцією ділення. Це вдалося зробити через обернену і узагальнено обернену матриці.*

Ключові слова: *матриця, множина, алгебра скінченного рангу.*

В алгебрі M_4 виду $M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a-b & 0 \\ c & d & a-c-d \end{pmatrix} \middle| \, \mathrm{a, b, c, d} \in \mathrm{R} \right\}$ визначено операцію множення, постає питання про операцію, обернену до неї. Те що алгебра M_4 не може бути алгеброю з діленням, випливає з теореми Фробеніуса [5, с.270], у якій стверджується, що поле дійсних і поле комплексних чисел є єдиними скінченновимірними асоціативно-комунікативними алгебрами над полем дійсних чисел рангу 1 і 2, у яких немає дільників нуля. Кожна скінченно вимірна алгебра без дільників нуля над довільним полем є алгеброю з однозначним діленням.

Питання ділення розв'язується для неособливих елементів алгебри M_4

Теорема 1. Якщо матриця $A \in M_4$ *неособлива, то* $A^{-1} \in M_4$, причому

$$ch\left(A^{-1}\right)=ch(A)^{-1}. \tag{1}$$

Доведення. Маємо матрицю $A\in M_4$ виду:

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a-b & 0 \\ c & d & a-c-d \end{pmatrix},\ ch(A)=a.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*;$$

$$A^*=\begin{pmatrix} a^2-ac-ad-ab+bc+bd & 0 & 0 \\ -ab+bc+bd & a^2-ac-ad & 0 \\ bd-ac+cb & -ad & a^2-ab \end{pmatrix}.$$

$$|A|=a\left(a^2-ac-ad-ab+bc+bd\right).$$

$$A^{-1}=\frac{1}{a\left(a^2-ac-ad-ab+bc+bd\right)}\begin{pmatrix} a^2-ac-ad-ab+bc+bd & 0 & 0 \\ -ab+bc+bd & a^2-ac-ad & 0 \\ bd-ac+cb & -ad & a^2-ab \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{-ab+bc+bd}{a\left(a^2-ac-ad-ab+bc+bd\right)} & \frac{a^2-ac-ad}{a\left(a^2-ac-ad-ab+bc+bd\right)} & 0 \\ \frac{bd-ac+cb}{a\left(a^2-ac-ad-ab+bc+bd\right)} & \frac{-ad}{a\left(a^2-ac-ad-ab+bc+bd\right)} & \frac{a^2-ab}{a\left(a^2-ac-ad-ab+bc+bd\right)} \end{pmatrix}$$

Додавши елементи кожного рядка, ми переконуємося $ch\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{a}$.

Оскільки $ch\left(A^{-1}\right)=a^{-1}\frac{1}{a}$, то $ch\left(A^{-1}\right)=(chA)^{-1}$

Що і треба було довести. ■

Отже, якщо A_2 – неособлива, то $\frac{A_1}{A_2}:=A_1A_2^{-1}$.

Нехай матриця A особлива. Існують різні способи узагальненого обертання особливих матриць. Наприклад [6, с.34], матриця A^t розмірності $n\times m$ називається псевдооберненою до матриці A розмірності $m\times n$, якщо

$$AA^tA=A,$$

Та існують матриці U та V такі, що

$$A^t=UA^t=A^tV.$$

Побудуємо матрицю A^t для матриці

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & -b & 0 \\ c & d & -c-d \end{pmatrix}$$

де $b\neq 0, c+d\neq 0$.

Скелетний розклад заданої матриці має вигляд

$$A = BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & -b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A^t = C^t K B^t,$$

де

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},\ B^t = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & b & d \end{pmatrix},\ K = \left(CC^t\right)^{-1}\left(B^t B\right)^{-1}.$$

У нашому випадку

$$B^t B = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & -b^2 + cd \\ -b^2 + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix},\ \left(B^t B\right)^{-1} = \frac{1}{b^2 (c+d)^2} \begin{pmatrix} b^2 + d^2 & b^2 - cd \\ b^2 - cd & b^2 + c^2 \end{pmatrix},$$

$$CC^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \left(CC^t\right)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

А тому

$$A^t = \frac{1}{3b^2 (c+d)^2} \begin{pmatrix} 0 & bc^2 + 3bcd + 2bd^2 & bc^2 + bd^2 \\ 0 & -2bc^2 - 3bcd - bd^2 & bc^2 + b^2 d \\ 0 & bc^2 - bd^2 & 2b^2 c - 2b^2 d \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що хоча $A \in M_4$, однак $A^t \notin M_4$.

Зауважимо, що $\left(A^t\right)^t \in M_4$.

Розглянемо інший спосіб узагальненого обертання матриці. А саме, побудуємо проектор матриці A, що відповідає власному значенню нуль, і розглянемо матрицю $A + \Pi(A)$.

1. Нехай матриця A має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & -b & 0 \\ c & d & -c-d \end{pmatrix},$$

де $b \neq 0, c + d \neq 0$. Її характеристична матриця $A(\lambda)$ має вигляд

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -b & \lambda + b & 0 \\ -c & -d & \lambda + c + d \end{pmatrix},$$

а резольвентою матриці A буде матриця

$$R_A(\lambda) = A^{-1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda(\lambda + b)(\lambda + c + d)} = \begin{pmatrix} (\lambda + b)(\lambda + c + d) & 0 & 0 \\ b(\lambda + c + d) & \lambda(\lambda + c + d) & 0 \\ bd + c(\lambda + b) & d\lambda & \lambda(\lambda + b) \end{pmatrix} =$$

$$
= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ \dfrac{b}{\lambda(\lambda+b)} & \dfrac{1}{\lambda+b} & 0 \\ \dfrac{3d+c(\lambda+b)}{\lambda(\lambda+b)(\lambda+c+d)} & \dfrac{d}{(\lambda+b)(\lambda+c+d)} & \dfrac{1}{\lambda+c+d} \end{pmatrix}.
$$

Тоді

$$
\Pi(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} R_A(\lambda)d\lambda =
$$

$$
= \frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\Gamma_0}\frac{d\lambda}{\lambda} & 0 & 0 \\ \displaystyle\int_{\Gamma_0}\frac{bd\lambda}{\lambda(\lambda+b)} & \displaystyle\int_{\Gamma_0}\frac{d\lambda}{\lambda+b} & 0 \\ \displaystyle\int_{\Gamma_0}\frac{db+c(\lambda+b)}{\lambda(\lambda+b)(\lambda+c+d)}d\lambda & \displaystyle\int_{\Gamma_0}\frac{d\cdot d\lambda}{(\lambda+b)(\lambda+c+d)} & \displaystyle\int_{\Gamma_0}\frac{d\lambda}{\lambda+c+d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

зовні цього кола.

Звідси дістаємо, що

$$
A + \Pi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+b & -b & 0 \\ 1+c & d & -c-d \end{pmatrix}
$$

і

$$
(A+\Pi(A))^{-1} = \frac{1}{b(c+d)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+\dfrac{1}{b} & -\dfrac{1}{b} & 0 \\ \dfrac{b+d}{b(c+d)}+1 & -\dfrac{d}{b(c+d)} & -\dfrac{b}{b(c+d)} \end{pmatrix}.
$$

Матрицю $(A+\Pi(A))^{-1} - \Pi(A)$ будемо називати *узагальненою обернено* і позначати A^g. Таким чином,

$$
A^g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{b} & -\dfrac{1}{b} & 0 \\ \dfrac{b+d}{b(c+d)} & -\dfrac{d}{b(c+d)} & -\dfrac{b}{b(c+d)} \end{pmatrix}.
$$

Тобто $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{A_1 A_2{}^g}{A_2 A_2{}^g}$.

Висновки. Отже ми розглянули операцію ділення в матричній алгебрі M_4. Довели що обернена матриця належить множині алгебри M_4. Знайшли узагальнено обернену матрицю.

Список використаних джерел

1. Вотякова Л. А. Матрична алгебра М2 / Л. А. Вотякова // Наукові записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. – 2003. – №4. – С. 14–17.

2. Гантмахер Ф. Р. Теорія матриць / Ф.Р. Гантмахер. – М: Наука, 1966. – 576 с.
3. Літнарович Р.М. Алгебра матриць. Курс лекцій/ Р.М.Літнарович. – Р.: МЕГУ, 2007. – 112 с.
4. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре / А. Г. Курош. – М: Наука, 1973. – 399 с.
5. Хорн Р. Матричный анализ: Перевод с англ. / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М: Мир, 1989. – 655 с.

DIVISION IN MATRIX ALGEBRA M_4

Abstract. *The article deals with the algebra of finite rank 4. The property of dividing the set of matrices of the third order is investigated.*

Keywords: *matrix, set, algebra of finite rank.*

Юлія Каштельян, Олена Соя

ТЕХНОЛОГІЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ЗА ДОДОМОГОЮ ПРИКЛАДНОГО ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНОГО СПРЯМУВАННЯ

Анотація. *У статті розглянуто технологію дослідження функцій за допомогою програмного засобу GRAN1. Описано можливості використання даного програмного засобу на уроках алгебри і початків аналізу. Оцінено переваги використання прикладного програмного забезпечення на уроках математики у старших класах. У статті наводиться приклад розв'язання завдання, на знаходження екстремальних значень функції, за допомогою програмного засобу GRAN1.*

Ключові слова: *прикладне програмне забезпечення, навчання математики, дослідження функцій, похідна, GRAN1.*

Постановка проблеми. Процес інформатизації освіти, що є основним із напрямків її розвитку в XXI столітті в Україні та світі, сприяє створенню та впровадженню в навчальний процес нових форм, засобів та технологій навчання, які ґрунтуються на використанні комп'ютера.

Застосування прикладного програмного забезпечення (ППЗ) на уроках математики сприяє активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів, швидкому та ефективному засвоєнню навчального матеріалу, формуванню ключових компетентностей. Розв'язування задачі за допомогою програмного засобу дає наочні уявлення про поняття, що вивчається, розвиває в учнів образне мислення, просторову уяву, розкриває сутність досліджуваного явища в різних аспектах, створює умови для пошуку нестандартних методів знаходження розв'язку.

Основним напрямком психолого-педагогічних досліджень багатьох вчених є визначення та обґрунтування ефективності використання комп'ютера в навчальному процесі. Використання ІКТ в навчальній діяльності досліджується в працях таких вітчизняних науковців, як М. І. Жалдак, В. І. Клочко, Н. В. Морзе, В. П. Горох, Ю. В. Горошко, Т. Г. Крамаренко, С. А. Раков, О. В. Співаковський, Ю. В. Триус, Є. Ф. Вінниченко, С. О. Семеріков, О. В. Семеніхіна та ін. Результати їхніх досліджень свідчать про позитивні наслідки використання комп'ютерних технологій у навчальному процесі.

Мета статті - навести приклади розв'язань задач на дослідження функцій з використанням програмного засобу Gran1, надати методичні коментарі щодо застосування прикладного програмного забезпечення.

Виклад основного матеріалу. Основним математичним апаратом, що описує різноманітні процеси, явища та об'єкти, є функція. Задачі на дослідження властивостей функції є одними з найважливіших задач курсу початків математичного аналізу в старшій школі. Під час вивчення цієї теми виникає необхідність побудови графіка