

УДК 517.97

**Сергій Бак,**  
докт. фіз.-мат. наук, професор,  
професор кафедри математики та інформатики  
Вінницького державного педагогічного університету  
імені Михайла Коцюбинського,  
**Галина Ковтонюк,**  
канд. пед. наук, доцент,  
доцент кафедри математики та інформатики  
Вінницького державного педагогічного університету  
імені Михайла Коцюбинського,  
**Сергій Шацовний,**  
студент факультету математики, фізики  
і комп'ютерних наук  
Вінницького державного педагогічного університету  
імені Михайла Коцюбинського

## БІФУРКАЦІЇ КВАЗІПЕРІОДИЧНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В ДИСКРЕТНИХ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯННЯХ ТИПУ ШРЕДІНГЕРА

**Анотація.** У статті досліджуються біфуркації розв'язків у вигляді біжучих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера. Встановлено умови існування квазіперіодичних розв'язків у випадку, коли резонансні умови не виконуються.

**Ключові слова:** біфуркації, дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера, квазіперіодичні біжучі хвилі.

**Abstract.** The article investigates the bifurcations of traveling wave solutions for discrete nonlinear Schrödinger-type equations. Conditions for the existence of quasi-periodic solutions are established in cases where resonance conditions fail.

**Keywords:** bifurcations, discrete nonlinear Schrödinger-type equations, quasi-periodic waves.

**Вступ.** У цій статті вивчаються дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера з нелокальною взаємодією:

$$i\psi_n = \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \Delta_j \psi_n + f(|\psi_n|^{2p}) \psi_n, \quad n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

де  $\psi_n = \psi_n(t) \in \mathbb{C}$  – хвильова функція,  $\Delta_j \psi_n := \psi_{n+j} + \psi_{n-j} - 2\psi_n$  є одновимірними дискретними операторами Лапласа. Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь 1-го порядку.

Зауважимо, що в системі (1) розглядається більш загальна нелінійність, ніж в [10].

Зауважимо, що дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера належать до широкого класу дискретних нескінченновимірних гамільтонових систем. До таких систем також належать дискретні рівняння типу Клейна-Гордона та системи типу Фермі-Пасти-Улама. Важливими класами розв'язків таких систем є біжучі і стоячі хвилі. В працях [1-4; 7-9; 11-13; 16] вивчалися біжучі і стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Гордона та системах типу Фермі-Пасти-Улама з локальною взаємодією. Біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама з нелокальною взаємодією вивчалися в працях [5; 6; 17]. В статтях [14; 15; 18-20] вивчалися стоячі хвилі в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера з локальною взаємодією, а в статті [10] – біжучі хвилі в дискретних рівняннях типу Шредінгера з нелокальною взаємодією з кубічною нелінійністю та її узагальненням.

**Постановка задачі.** Рівняння (1) можна переписати в стандартній формі:

$$i\psi_n = \sum_{m \neq n} a_{|m-n|} |\psi_m - \psi_n|^2 + f(|\psi_n|^{2p}) \psi_n, \quad n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Нас цікавлять розв'язки системи (2) у вигляді біжучих хвиль:

$$\psi_n(t) = u(n - ct), \quad (3)$$

де функція  $u(z)$  називається профілем хвилі ( $z = n - ct$ ), а стала  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  – її швидкістю, з квазіперіодичною профільною функцією  $u(z)$ , тобто такою, що задовольняє умову

$$u(z + T) = e^{2\pi r i} u(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Підставляючи біжучу хвилю (3) в систему (2), одержуємо рівняння:

$$c i u' + \sum_{j \in \mathbb{N}} a_j \Delta_j u(z) + f(|u(z)|^{2p}) u(z) = 0, \quad p \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

де  $\Delta_j u(z) := u(z + j) + u(z - j) - 2u(z)$ .

**Основний результат.** В статті [21] встановлено умови існування квазіперіодичних біжучих хвиль (теорема 1):

$$(i) \quad f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \text{ для } \mathbb{R}^+ := [0, \infty), f(0) = 0 \text{ і } a_j \in \mathbb{R} \text{ з } \sum_{j \in \mathbb{N}} |a_j| < \infty;$$

(ii) існують сталі  $s > 0, \mu > 1, c_1 > 0, c_2 > 0$  і  $\bar{r} > 0$  такі, що

$$|f(r)| \leq c_1(r^s + 1), \quad c_2(r^{s+1} - 1) \leq F(r), \quad \mu F(r) - \bar{r} < f'(r)r$$

для будь-якого  $r \geq 0$ , де  $F(r) = \int_0^r f(z) dz$ . Крім того,  $\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{f(r)}{r^{\tilde{s}}} < \infty$  для деякої сталої  $\tilde{s} > 0$ .

У цій статті ми продовжуємо вивчення рівняння, яке розглядалося в статті [21], у випадку, коли умова нерезонансності з Теорема 1 не виконується, тобто  $r \in \{\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_m\}$ . У цьому випадку одержано такий біфуркаційний результат:

**Теорема 1.** Нехай виконується умова (i). Тоді якщо існують  $\bar{r}_1 \in (0, 1)$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  і  $T > 0$  такі, що всі розв'язки  $k_1, k_2, \dots, k_{m_1} \in \mathbb{Z}$  рівняння

$$-c = \Phi\left(\frac{2\pi}{T}(\bar{r}_1 + k)\right)$$

є невід'ємними або від'ємними, і  $m_1 > 0$ . Тоді для будь-якого малого  $\varepsilon > 0$  рівняння (2) має  $m_1$  відгалужень ненульових розв'язків у вигляді квазіперіодичних біжучих хвиль  $\psi_{n,j,\varepsilon}(t) = u_{j,\varepsilon}(n - c_\varepsilon t)$  з  $u_{j,\varepsilon} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $j = 1, 2, \dots, m_1$ , та ненульовою швидкістю, які задовольняють умову  $u_{j,\varepsilon}(z + T) = e^{2\pi \bar{r}_1 i} u_{j,\varepsilon}(z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{R}$ , разом з  $c_\varepsilon \rightarrow c$  та  $u_{j,\varepsilon} \rightarrow 0$  рівномірно на  $\mathbb{R}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Таким чином, у цій статті встановлено існування біфуркацій розв'язків у вигляді біжучих хвиль квазіперіодичних в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера з нелокальною взаємодією у випадку, коли основні резонансні умови не виконуються.

#### Література:

1. Bak S. M. Periodic traveling waves in chains of oscillators. Communications in Mathematical Analysis. 2007. Vol. 3, № 1. P. 19–26.
2. Bak S. Periodic traveling waves in a system of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. Acta Mathematica Universitatis Comenianae. 2022. Vol. 91, № 3. P. 225–234.

3. Bak S. Periodic traveling waves in the system of linearly coupled nonlinear oscillators on 2D lattice. *Archivum Mathematicum*. 2022. Vol. 58, № 1. P. 1–13.
4. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Periodic traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam type systems with nonlocal interaction on 2d-lattice. *Mat. Stud.* 2023. Vol. 60, № 2. P. 180–190.
5. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam type systems with nonlocal interaction on 2D-lattice. *Український математичний вісник*. 2024. Т. 21, № 1. С. 1–15.
6. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.
7. Bates P.W., Zhang C. Traveling pulses for the Klein-Gordon equation on a lattice or continuum with long-range interaction. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2006. Vol. 16, № 1. P. 235–252.
8. Braun O.M., Kivshar Y.S. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model. *Physics Repts.* 1998. Vol. 306. P. 1–108.
9. Braun O.M., Kivshar Y.S. The Frenkel-Kontorova model. Berlin: Springer, 2004. 427 p.
10. Fečkan M., Rothos V. Traveling Waves of Discrete Nonlinear Schrödinger Equations with Nonlocal Interactions. *Applicable Analysis*. 2010. Vol. 89, № 9. P. 1387–1411.
11. Ghimenti M., Le Coz S., Squassina M. On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. *Discr. Cont. Dyn. Sys.*, 2013. Vol. 33, №6. P. 2389–2401.
12. Iooss G., Pelinovsky D. Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices. *Physica D*, 2006. Vol. 216. P. 327–345.
13. Morgante A. M., Johansson M., Kopidakis G., Aubry S. Standing waves in 1D nonlinear lattices. *Nonlinear and Disorder: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 205–211.
14. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations. *Nonlinearity*, 2006. Vol. 19. P. 27–40.
15. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete nonlinear Schrödinger equation, II: Generalized Nehari manifold approach. *Discr. Cont. Dyn. Syst. A*. 2007. Vol. 19, № 2. P. 419–430.
16. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices. London-Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.
17. Pankov A. Traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam chains with nonlocal interaction. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2019. Vol. 12, № 7. P. 2097–2113.
18. Pankov A., Rothos V. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity. *Proc. Royal Society A*, 2008. Vol. 464. P. 3219–3236.
19. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць, 2017. Вип. 16. С. 21–29.
20. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю. *Математичні студії*, 2010. Т. 33, №1. С. 78–84. 76.
21. Бак С., Ковтонюк Г., Шацовний С. Існуванні квазіперіодичних біжучих хвиль в дискретних нелінійних рівняннях типу Шредінгера. *Актуальні проблеми математики, фізики і комп'ютерних наук: зб. наук. пр. [Електронне мережне наукове видання]*. Вінниця, 2024. Вип. 21. С. 3–7.