ГЛАВА 5
СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

5.1. Основні поняття математичної статистики [5, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 18]

Статистика (лат. **status** стан, нім. **Statistik** від італ. **Stataio** держава).

Математична статистика (mathema, Statistik) – наука про математичні методи систематизації та використання кількісних даних вимірювання, обстежень, спостережень для контролю за процесом і його результатами (в спорті та фізичному вихованні – за підготовкою спортсменів і фізкультурників), наукових і практичних висновків.

Статистичні дані – всі зібрані відомості (перемінні, варіанти, величини і т.ін.), які в подальшому підлягають статистичному опрацюванню.

Сучасна математична статистика розподіляється на *описову і аналітичну* статистику.

Описова статистика охоплює методи опису статистичних даних, що представлені в формі таблиць, рисунків, розподілень тощо.

Предметом **аналітичної статистики** або **теорії статистичних висновків** є опрацювання даних, отриманих в процесі експерименту, і формування висновків, що мають практичне значення для самих різних сфер людської діяльності. Теорія статистичних висновків тісно пов’язана з іншою математичною наукою – теорією ймовірностей і базується на її математичному апараті.

Статистична сукупність (status) – сукупність чисел, яка характеризує деяку ознаку об’єктів, що об’єднані за класифікаційними ознаками в сукупність об’єктів.

Іншими словами статистична сукупність – декілька статистичних даних, що об’єднані в групу за якою-небудь ознакою. Наприклад, 2,45; 2,44; 2,48 – результати стрибка в довжину (в метрах) одного спортсмена; 4,31; 4,01; 4,48; 4,32; 4,25; 4,11 – результати бігу на 30 м з високого старту (в секундах) [5].

Експериментальні дані в сфері фізичного виховання та спорту зазвичай представляють собою результати вимірювання деяких ознак (спортивний результат, рухові здібності тощо) об’єктів, які вибрані із великої сукупності, називається **вибіркою**, а вихідна сукупність, із якої взята вибірка, – **генеральною (основною) сукупністю.**

Дослідження в яких беруть участь всі без виключення об’єкти, що складають генеральну сукупність, називаються суцільними дослідженнями. Такі дослідження практично неможливі для фізичного виховання та спорту, де зазвичай використовується вибірковий метод.

Дуже важливою характеристикою вибірки є об’єм вибірки, тобто число елементів у ній. Об’єм вибірки позначається символом n (об’єм генеральної сукупності позначається символом N).

Окремі числові значення вибірки називаються варіантами, які прийнято позначати латинськими літерами із кінця алфавіту

Предметом вивчення в статистиці є варіаційні ознаки (статистичнім ознаки), які діляться на якісні та кількісні.

Якісні ознаки – це ознаки, якими об'єкт володіє**.** Вони не підлягають безпосередньому вимірюванню (спортивна спеціалізація, кваліфікація тощо).

Кількісні ознаки представляють собою результати підрахунку чи вимірювання у відповідності з цим вони розподіляються на дискретні та неперервні.

Дискретні ознаки можуть приймати лише окремі значення із деякого ряду чисел (число підтягувань на поперечині, число влучень при штрафних кидках в баскетболі тощо).

Неперервні ознаки можуть приймати будь-які значення в певному інтервалі. Наприклад, час подолання якої-небудь дистанції.

5.2. Визначення основних статистичних характеристик

Основними статистичними характеристиками варіаційного ряду є:

- середнє арифметичне ($\bar{x}$);
- дисперсія (S^2);
- середнє квадратичне відхилення (S);
- коефіцієнт варіації (V);
- мода (Мо);
- медіана (Ме).

Середнє арифметичне визначається за формулою:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{5.1}$$

де: $\sum\limits_{i=1}^{n}$ – знак підсумовування;

n – об'єм вибірки;

$i = 1, 2….$;

x_i – варіанти.

Якщо дані згруповані, тоді використовується формула:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{к} x_i\, n_i, \tag{5.2}$$

де: n_i – частота варіанти;

k – кількість різних варіант у варіаційному ряду.

Дисперсія – показник варіації (розсіювання) випадкової величини відносно середнього арифметичного, вимірюється в одиницях, що рівні квадрату відповідної величини.

Дисперсія варіаційного ряду визначається за формулою:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n-1}, \tag{5.3}$$

де x_i – варіанта;

n_i – частота варіанти;

n – обсяг вибірки;

$\sum_{i=1}^{n}$ – знак сумування.

Якщо обсяг вибірки $n \geq 30$, тоді використовується формула:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 n_i}{n} \tag{5.4}$$

Стандартним відхиленням (або *середнім квадратичним відхиленням*) називається позитивний корінь квадратний із дисперсії.

В основі середнього квадратичного відхилення лежить співставлення кожної варіанти із середнім арифметичним даної сукупності:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 n_i}{n-1}} \tag{5.5}$$

Властивості стандартного відхилення:

- стандартне відхилення завжди виражається в тих самих одиницях вимірювання, що і основні варіанти;
- чим більше стандартне відхилення, тим більша варіативність ознаки;
- стандартне відхилення визначається з точністю на один десятий знак більше, ніж точність яку використовують для визначення середнього арифметичного.

Коефіцієнт варіації. У випадку коли необхідно порівняти між собою ступінь варіювання, використовується коефіцієнт варіації. Наприклад, стандартне відхилення при стрибках у довжину з місця 0,141 м (середнє значення – 2,48 м), а стандартне відхилення в підтягувані на поперечині 1,05 разів (середнє значення 15,8 разів). Невідомо, яка з ознак має більший ступінь варіювання. Тому використовується відносний показник – *коефіцієнт варіації:*

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100\%. \tag{5.6}$$

Для наведеного прикладу:

$$V_1 = \frac{0{,}141}{2{,}48} \cdot 100\% = 5{,}7\,\%; \qquad V_2 = \frac{1{,}05}{15{,}8} \cdot 100\% = 6{,}6\,\%.$$

Коефіцієнт варіації дає уявлення про ступінь однорідності статистичної сукупності. Якщо коефіцієнт варіації не перевищує 10 %, то вибірку (сукупність) можна вважати однорідною, тобто отриману з однієї генеральної сукупності [16]. В біології група вважається однорідною, якщо коефіцієнт варіації не перевищує 10-15% [15]. Коефіцієнт варіації зазвичай не перевищує 15-50 % [5].

Модою (позначається символлом *Mo*) називається результат вибірки чи сукупності, що зустрічається найбільшу кількість разів.

Медіана (позначається символом *Me*) – результат вимірювання, який знаходиться в середині варіаційного ряду.

Мода і медіана використовується для оцінки середнього арифметичного в шкалі порядку (а мода також в номінальній шкалі).

Вибір статистичних характеристик визначається двома основними чинниками: шкалою вимірювання і законом розподілення результатів вимірювання.

5.3. Теоретичне та емпіричне розподілення результатів вимірювань

При аналізі розподілення результатів вимірювань, як правило, передбачається, яким могло б бути розподілення, коли число вимірювань було б дуже великим. Таке розподілення (дуже великої вибірки) називають розподіленням генеральної сукупності чи *теоретичним,* а розподілення експериментального ряду вимірювань – *емпіричним.*

Теоретичне розподілення більшості результатів вимірювань описується формулою нормального розподілення, яка вперше була знайдена англійським математиком Маувром в 1733 р [17].

$$t(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\cdot\sigma^2}}, \qquad (5.7)$$

де: π і e – математичні сталі (π =3,141, e =2,718); $\bar{x}$ і σ – відповідно середнє арифметичне і середнє квадратичне відхилення; x – результати вимірювань; $t\ (x)$ – так звана функція щільності розподілення.

Цей математичний вираз розподілення дозволяє отримати у вигляді графіку криву нормального розподілення (рис. 5.1), яка симетрично відносно центру групування (зазвичай це значення $\bar{x}$, моди, медіани). Ця крива може бути отримана із полігону розподілення при безкінцево великому числі спостережень та інтервалів. Заштрихована частина графіку на рис. 5.1 відображає відсоток результатів вимірювань, що знаходяться між значеннями x_1 та x_2.

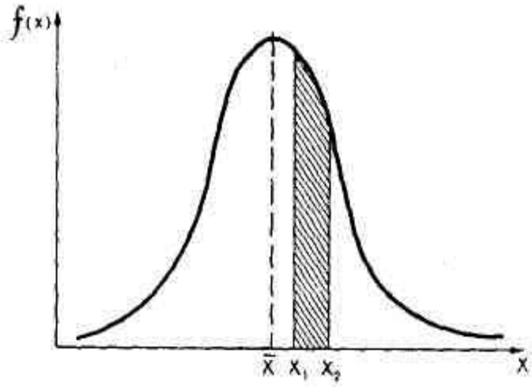

Рис. 5.1. Крива нормального розподілення

Нормоване стандартне відхилення має параметри $\bar{x}=0$ і $\sigma=1$. Це розподілення отримується, якщо пронормувати нормально розподілену величину х за формулою:

$$u = \frac{x-\bar{x}}{\sigma}, \qquad (5.8)$$

Теоретичний розподіл більшості результатів нормованого розподілу описується формулою:

$$t(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e \frac{-u^2}{2}, -\infty \angle u \angle \infty \qquad (5.9)$$

На рис. 5.2. представлений графік цього виразу. Вся площа, що обмежена кривою, дорівнює 1, тобто вона відображає всі 100% результатів вимірювань. Для теорії педагогічних оцінок і особливо для побудови шкал оцінок важливо знати інформацію про відсоток результатів, що лежить в різних діапазонах варіювання.

Для теорії вимірювання результатів вимірювань використовують такі співвідношення:

$\bar{x} \pm 1{,}96\sigma$ (u=±1,96) інтервал включає 95,0 % всіх результатів;

$\bar{x} \pm 2{,}58\sigma$ (u=±2,58) інтервал включає 99,0 % всіх результатів;

$\bar{x} \pm 3{,}29\sigma$ (u=±3,29) інтервал включає 99,9 % всіх результаті;

$\bar{x} \pm 1\sigma$ (u=±1) інтервал включає 68,27 % всіх результатів;

$\bar{x} \pm 2\sigma$ (u=±2) інтервал включає 95,45 % всіх результатів;

$\bar{x} \pm 3\sigma$ (u=±3) інтервал включає 99,73 % всіх результатів.

Тобто, відхилення, більшого ніж σ від $\bar{x}$ варто очікувати приблизно в одному випадку із трьох; відхилення, більшого, ніж на $2{,}5\sigma$, – в чотирьох – п'яти випадках із 100; відхилення, більшого, ніж 3 σ, – в трьох випадках із 1000. Останнє співвідношення для нормального розподілення називають «правилом трьох сігм», яке заключається в тому, що всі значення варіант, які відрізняються від $\bar{x}$ більше ніж на 3σ, розглядаються як відносності дуже малоймовірні, швидше за все помилкові і їх варто відкинути, після чого знову вираховують $\bar{x}$ і σ, знову проводиться перевірка за правилом 3σ – і так до тих пір, доти всі варіанти не будуть в інтервалі $1 = \bar{x} \pm 3\sigma$.

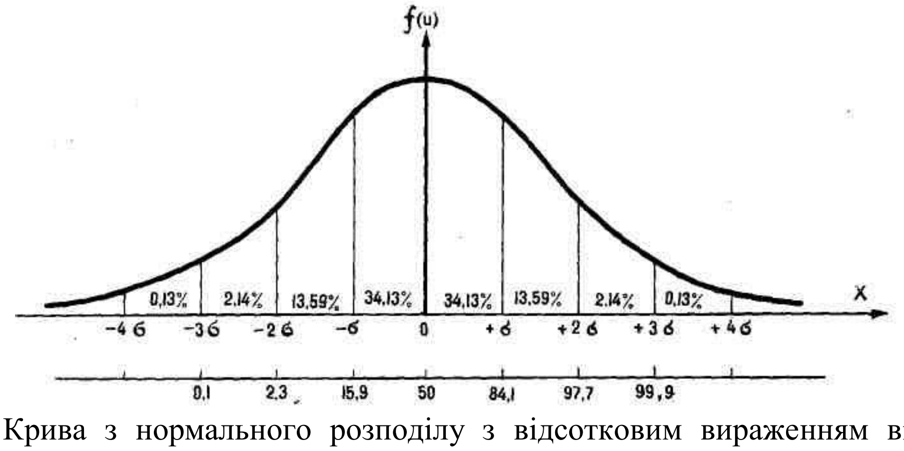

Рис. 5.2. Крива з нормального розподілу з відсотковим вираженням відносних і накопичуваних частостей; під першою віссю абсцис – середнє квадратичне відхилення, другою (нижньою) – накопичений відсоток результатів

Емпіричне розподілення (грец. *емпеrтео* досвід) – статистичне розподілення отримане в результаті реального вимірювання, спостереження, кваліметричних процедур тощо. Як правило, емпіричне розподілення намагаються представити як достатньо близьке до деякого теоретичного і розглядають як таке, що дозволяє краще теоретично осмислити явище і отримати більш точні характеристики його функцій та змін, а також статистично їх опрацьовувати.

Емпіричне розподілення передбачає розподілення елементів вибірки за значенням ознаки, що вивчається [5, 7, 13].

Побудова емпіричного розподілення починається з групування.

Групування представляє собою процес систематизації, чи упорядкування експериментальних даних з метою отримання відповідної інформації.

Найбільш часто групування зводиться до представлення експериментальних даних у вигляді статистичних таблиць (табл. 5.1).

Таблиця 5.1.

16,2	15,4	15,3	15,3	15,4	15,4	16,8	17,8	16,2	15,9
15,5	14,5	16,0	15,5	15,8	14,7	16,0	15,6	15,5	15,0
14,3	14,8	13,7	14,8	14,2	12,8	14,6	15,0	13,6	14,2
16,6	16,1	16,1	14,2	15,8	16,9	15,6	15,6	16,4	16,4
15,8	15,8	16,2	16,2	14,2	15,0	16,1	15,0	15,2	14,2

В табл. 5.1. представлена вибірка великого об’єму. В цьому випадку її варто розподілити на інтервали. В найпростішому вигляді таких інтервалів може бути два (кращі та гірші спортсмени). Але для отримання більш точних результатів повинно бути оптимальне число інтервалів, яке позначається літерою k і визначається за допомогою табл. 5.2.

Таблиця 5.2.

Вибірка числа інтервалів групування (В. М. Заціорський [17])

Об’єм вибірки, n	Число інтервалів
10-20	4
25-40	5-6
40-60	6-8
60-100	7-10
100-120	8-12
Більше 200	10-15

Число інтервалів також може визначатись за формулою Стерджеса:

$$k=1+3{,}32\cdot lg\cdot n \tag{5.10}$$

Для об’єму вибірки n=50 число інтервалів приймається $k=7$

Якщо число інтервалів вибрано, то ширина інтервалів визначається за формулою:

$$h=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{k}, \tag{5.11}$$

де: h – ширина інтервалів; x_{max} і x_{min} – максимальна і мінімальна варіанти вибірки.

Для прикладу, який розглядається в табл. 5.1.

$$h=\frac{17{,}8-12{,}8}{7}=0{,}714\ c$$

Округляється ширина інтервалів в бік збільшення і приймається $h=0{,}8$ *с.*

Наступним кроком відзначаються межі інтервалів групування. Нижня межа першого інтервалу вибирається так, щоб мінімальна варіанта вибірки x_{min}

попадала приблизно на середину цього інтервалу. Звідси нижня межа першого інтервалу визначається так:

$$x_{h1} = x_{\min} - \frac{h}{2} \qquad (5.12)$$

Для наведеного прикладу $x_{h1} = 12{,}8 - \frac{0{,}8}{2} = 12{,}4$

Додається до цієї величини ширина інтервалу і знаходиться нижня межа другого інтервалу $x_{h2} = 12{,}4 + 0{,}8 = 13{,}2$. Це є одночасно і верхня межа $x_{н1}$ попереднього (першого) інтервалу.

Аналогічно знаходиться $x_{h3} = 13{,}2 + 0{,}8 = 14{,}0$ і т.д. для всіх семи інтервалів.

Для того, щоб яка-небудь із варіант не вийшла за межі свого інтервалу, необхідно зменшити межі всіх інтервалів на величину, що дорівнює точності ознаки (в наведеному прикладі на 0,1 с).

Для зручності наступного опрацювання згрупованих даних вираховується середнє значення інтервалів групування x_i.

Наступним кроком є заповнення статистичної таблиці 5.3, яке здійснюється в наступній послідовності.[3]

Таблиця 5.3

Табличне представлення даних про результат бігу на 100 м (В. С. Іванов [16])

Номер інтер-валу, i	Межі інтервалів, $x_{hi} - x_{bi}$	Середні значення x_i	Розподі-лення даних	Частоти, n_i	Накопичувані частоти, n_{xi}	Частоти, f_i	Накопичувані частоти, Fi
1	12,4-13,1	12,8	/	1	1	0,02	0,02
2	13,2-13,9	13,6	//	2	3	0,04	0,06
3	14,0-14,7	14,4	/////////	9	12	0,18	0,24
4	14,8-15,5	15,2	///////////////	15	27	0,30	0,54
5	15,6-16,3	16,0	/////////////////	17	44	0,34	0,88
6	16,4-17,1	16,8	/////	5	49	0,10	0,98
7	17,2-17,9	17,6	/	1	50	0,02	1,00
	Сума			50		1,00	

Заповнюється три перших стовпці таблиці. В першому стовпці знаходиться номер інтервалу *(i)* групування, в другому – межі $(x_{hi}–x_{вi})$, а в третьому – середні значення інтервалів (x_i).

Заповнюється четвертий стовпець, в якому відображається повторюваність варіант в кожному інтервалі.

Заповнюємо п'ятий стовпець, який визначає *частоту* (n_i) варіант вибірки в кожному інтервалі.

Заповнюється шостий стовпець, який визначає *накопичувану частоту* (n_{xi}), що отримується простим додаванням частот попередніх інтервалів (1+2=3; 2+9*n* і т.ін).

[3] Основы математической статистики: учебное пособие для ин-тов физ. культ./ Под ред. В.С. Иванова. – М.: Физкультура и спорт, 1990. – С. 12 – 22

Заповнюється сьомий стовпець, який визначає відносну частоту або частотість (f_i). Кожне значення цього стовпця є число від ділення відповідної частоти на об'єм вибірки. Сума всіх частостей дорівнює 1.

Заповнюється восьмий стовпець, який отримується додаванням частостей попередніх інтервалів (0,02+0,04=0,06;0,04+0,18=0,22 і т. ін).

Статистична таблиця емпіричного розподілення результатів вимірювання необхідна для подальших математичних процедур (визначення дисперсії, розрахунку x^2 *– критерію, критерію* λ *Колмогорова – Смірнова* тощо).

Для аналізу емпіричного розподілення необхідне розуміння такого поняття, як варіаційний ряд.

Варіаційний ряд – це подвійний стовпець ранжованих чисел, в якому зліва представлені варіанти *(*x_i*),* а справа – їх частоти *(*n_i*).*

Приклад [15]: у 43 легкоатлетів при виконанні старту з наступним бігом на 6 м виміряна величина стартові реакції (с):

1,25	1,36	1,38	1,32	1,32	1,36	1,40	1,30
1,38	1,30	1,40	1,36	1,42	1,45	1,38	1,36
1,42	1,38	1,32	1,25	1,38	1,36	1,30	1,40
1,32	1,36	1,45	1,38	1,42	1,40	1,36	1,42
1,38	1,40	1,36	1,30	1,32	1,36	1,38	1,42
1,32	1,25	1,30					

Після ранжування (операція щодо розташування чисел у порядку збільшення чи зменшення) варіанти стартової реакції 43 легкоатлетів розташовуються в такому вигляді:

1,25	1,25	1,25						
1,30	1,30	1,30	1,30	1,30				
1,32	1,32	1,32	1,32	1,32	1,32			
1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36	1,36
1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	1,38	
1,40	1,40	1,40	1,40	1,40				
1,42	1,42	1,42	1,42					
1,45	1,45	1,45						

Таке розташування чисел дозволяє побудувати варіаційний ряд.

x_i	n_i
1,25	3
1,30	5
1,32	6
1,36	9
1,38	8
1,40	5
1,42	4
1,45	3

Символи варіаційного ряду. Показники варіаційного ряду прийнято позначити якою-небудь літерою (як правило, латинського алфавіту).

Індекс *і* (йота), що знаходиться біля неї показує безліч показників даної групи, кожний із яких у відповідності з ранжуванням займає певне місце. Так, варіанта 1,25 у варіаційному ряді стоїть на певному місці, а тому може бути позначена як x_1, варіанта 1,30 – x_2, варіанта1,32 – x_3 і т.ін., остання варіанта в ряді – 1,45, може бути позначена як x_n.

Інший варіаційний ряд позначається іншою літерою, наприклад, y_i.

Об'єм сукупності варіаційного ряду позначається літерою *n*.

5.4. Види варіаційних рядів і їх графічне представлення

Варіаційні ряди бувають трьох видів:

1) прості упорядковані; 2) дискретні; 3) інтервальні.

Простий упорядкований ряд зазвичай представляється тільки варіантами (табл.5.4) і має спрощену форму визначення параметрів ряду.

Визначаються параметри $\bar{x}$, S, S^2.

Таблиця 5.4

Опрацювання стартової реакції легкоатлетів (с) (С. В. Начинська [15])

№ з/п	x_i	$x_i - \bar{x}$	$x_i - \bar{x}^2$
1	1,25	-0,11	0,0121
2	1,30	-0,06	0,0036
3	1,32	-0,04	0,0016
4	1,36	0,00	0,0000
5	1,38	0,02	0,0004
6	1,40	0,04	0,0016
7	1,42	0,02	0,0036
8	1,45	0,09	0,0081
Усього	10,88	-	0,0310

$$\bar{x} = \frac{10,88}{8} = 1,36; \sigma^2 = \frac{0,0310}{8} = 0,0038; \ \sigma = \sqrt{0,0038 = 0,06};$$

$$V = \frac{0,06}{1,36} = 4,4\ \%; \bar{x} \pm \sigma = 1,36 \pm 0,06$$

У дискретних варіаційних рядах варіанти виражаються одним числом (табл. 5.5).

Таблиця 5.5

Величина стартової реакції (с) в 43 легкоатлетів (С. В. Начинська [15])

№ з/п	x_i	n_i
1	1,25	3
2	1,30	5
3	1,32	6
4	1,36	9
5	1,38	8
6	1,40	5
7	1,42	4
8	1,45	3
Усього	-	43

В **інтервальному ряду** кожна варіанта виражається інтервалом. Величина інтервалу може вибиратись довільно: чим більший інтервал, тим менша точність показників ряду, що представляють вихідні дані. Як правило, інтервальний ряд будують шляхом перетворення дискретного чи простого упорядкованого ряду. Наприклад, при ширині інтервалу h=0,05 перетворюються дискретний ряд (табл. 5.5) в інтервальний (табл. 5.6).

Таблиця 5.6

Інтервальний ряд при *h*=0,05

№ з/п	x_i	n_i
1	1,25-1,30	8
2	1,31-1,35	6
3	1,36-1,41	22
4	1,42-1,47	7
Усього	-	43

В залежності від обраної ширини інтервалу інтервальний рядів може бути декілька.

Графічне зображення варіаційних рядів. Для підвищення наочності емпіричних розподілень використовуються їх графічне представлення. Найбільш розповсюдженими способами графічного представлення є гістограма, полігон частот і полігон накопичуваних частот [16].

Гістограма використовується для графічного представлення розподілень ознак, що неперервно варіюють. Вона складається з дотичних один до одного прямокутників. Основа кожного прямокутника дорівнює ширині інтервалу групування, а висота його така, що площа прямокутника пропорційна частоті (чи частоті) попадання в даний інтервал. Тобто, висоти прямокутників повинні бути пропорційні величинам:

$$p_i = \frac{n_i}{h_i}, \tag{5.13}$$

де: n_i – частота i-го інтервалу групування; h_i – ширина i-го інтервалу групування.

На графіку гістограми основа прямокутника відкладається по осі абсцис (x), а висота – по осі ординат *(y)* прямокутної системи координат (рис.5.3).

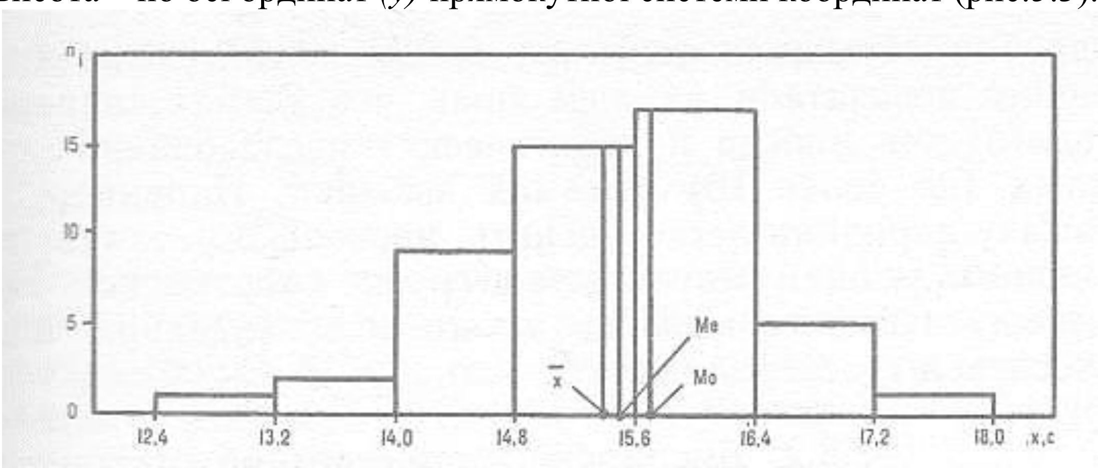

Рис. 5.3. Гістограма розподілення результатів бігу на 100 м (дані з табл. 5.3) (В. С. Іванов [16]).

Полігон частот утворюється ломаною лінією, яка з'єднує точки, що відповідають середнім значенням інтервалам групуванням та частотам цих інтервалів. Середні значення відкладаються на осі *x*, а частоти – по осі *y*.

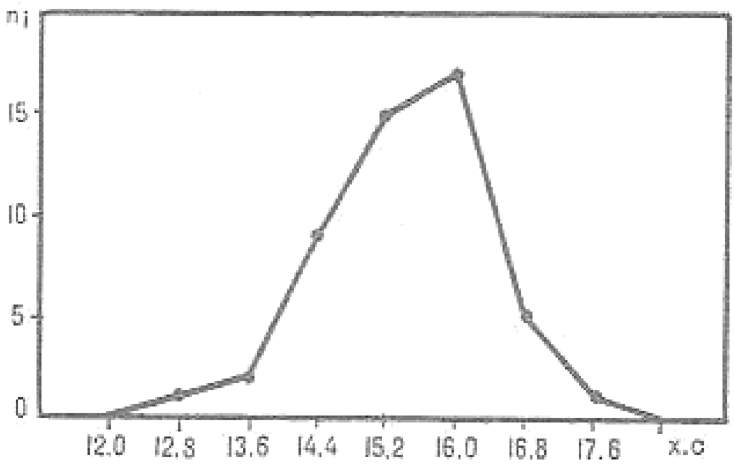

Рис. 5.4. полігон частот результатів бігу на 100 м (дані з табл. 5.3) (В. С. Іванов [16]).

Полігон накопичуваних частот (кумулята) отримується при з'єднані відрізками прямих точок, координати яких відповідають верхнім межам інтервалів групування та накопичуваним частотам (рис.5.5).

Якщо на осі ординат відкладаються накопичувані частості, то такий графік називається **полігоном накопичуваних частот.**

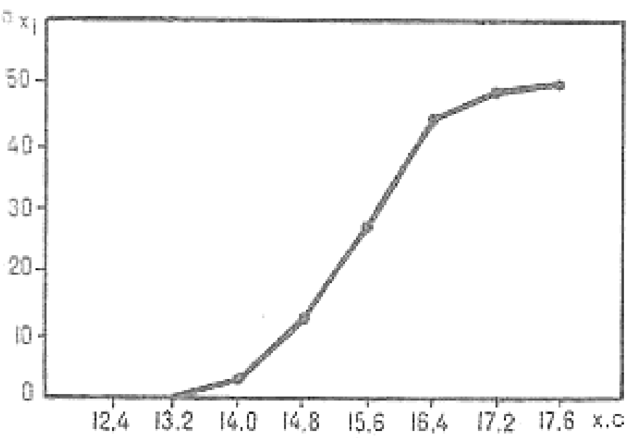

Рис. 5.5. Полігон накопичуваних частот результатів бігу на 100 м (дані табл. 5.3) (В. С. Іванов [16]).

Полігон накопичуваних частот в основному використовується для представлення дискретних даних (Заціорський, 1982; Іванов,1990; Начинська, 2005).

5.5. Визначення середньостатистичних показників генеральної сукупності [14, 15]

Середнє арифметичне генеральної сукупності $\bar{x}_{ген}$ знаходиться у відповідності з нижньою та верхньою довірливими межами.

$$\bar{x}_{виб}\ \sigma - mt \le \bar{x}_{ген} \le \bar{x}_{виб} + mt \qquad (5.14)$$

де: $\bar{x}_{виб}$ – середнє арифметичне вибіркової сукупності; m – помилка репрезентативності; t – критерій надійності, тобто, показник вибраної довірливої вірогідності.

Помилка репрезентативності показує, які відхилення параметрів вибірки, зокрема, середнього арифметичного, від відповідних параметрів генеральної сукупності. Про величину цієї помилки судять з певною вірогідністю, на величину якої вказує критерій надійності *t*.

Величина помилки репрезентативності знаходиться за формулами:

$$m = \frac{S_{виб}}{\sqrt{n}}, \tag{5.15}$$

Формула (5.15) використовується у випадку, коли число елементів генеральної сукупності невідомо (N=∞), а число елементів вибірки n≥20.

$$m = \frac{S_{виб}}{\sqrt{n-1}} \tag{5.16}$$

Формула (5.16) використовується у випадку, коли число елементів генеральної сукупності невідомо (№=∞), а число елементів вибірки n<20:

$$m = \frac{S_{виб}}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}} \tag{5.17}$$

Формула (5.17) використовується, якщо вибірка велика, тобто, n≥20, а число елементів N генеральної сукупності відомо:

$$m = \frac{S_{виб}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \tag{5.18}$$

Формула (5.18) використовується, якщо вибірка мала, тобто, n≥20, а число елементів генеральної сукупності відомо як N.

Для визначення довірливих інтервалів середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності ($\bar{x}_{ген}$) використовується метод порівняння

$$S_{виб}(1-q) \le S_{ген} \le S_{виб}(1+q) \tag{5.19}$$

де: $S_{виб}$ – середнє квадратичне відхилення вибірки; q – величина, що визначається за таблицею додатку 1.

При $q<0$ рівняння перетворюється таким чином:

$$0 \le S_{ген} \le S_{виб}(1+q).$$

Приклад. Група спортсменів (n=30) була досліджена на величину максимального споживання кисню під час тривалої роботи x_i (л·хв$^{-1}$). Ці спортсмени відібрані з 300 спортсменів N такої самої кваліфікації.

Необхідно оцінити середні показники 300 спортсменів. Вихідні дані наведені в табл. 5.7.

$$\bar{x}_{виб} = \frac{130,1}{30} = 4,33 = 4,3 л \cdot хв^{-1};$$

$$S^2 виб = \frac{1,51}{30} = 0,05 л \cdot хв^{-1};$$

$$S_{виб} = \sqrt{0,05} = 0,22 л \cdot хв^{-1}.$$

Характеристика вибірки із *30* спортсменів представляє

$$\bar{x}_{виб} \pm S_{виб} = (4{,}3 \pm 0{,}2)\,л \cdot хв^{-1}.$$

Таблиця 5.7

Опрацювання показників споживання кисню 30 спортсменів (С. В. Начинська [15])

№ з/п	x_i	n_i	$x_i\,n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
1	4,0	5	20,0	-0,3	0,09	0,45
2	4,2	6	25,2	-0,1	0,01	0,06
3	4,3	8	34,4	0,0	0,00	0,00
4	4,5	4	18,0	0,2	0,04	0,016
5	4,6	4	18,4	0,3	0,09	0,36
6	4,7	3	14,1	0,4	0,16	0,48
Усього	-	30	130,1	-	-	1,51

Для оцінки генеральних показників визначається величина помилки репрезентативності *m*. Так як об'єм генеральної сукупності *N*=300, а вибірка складається з *n*=30 тобто, *n*>20, для визначення помилки репрезентативності використовується формула (5.17):

$$m = \frac{S_{виб}}{\sqrt{n}}\sqrt{1 - \frac{n}{N}} = \frac{0{,}22}{\sqrt{30}}\sqrt{1 - \frac{30}{300}} = 0{,}03\,л \cdot хв^{-1}.$$

Показник *t* визначається за таблицею додатку 2.

Критерій *t* – це показник вірогідності (надійності), що різниця між середніми показниками генеральної та вибіркової сукупності не перевершує величину помилки *m*.

У практиці спортивних досліджень наперед вибирається рівень надійності (p).

Довірлива вірогідність (рівень надійності) p – це вірогідність з якою гарантується точність розрахунків при визначені середніх значень генеральної сукупності. Найбільш часто використовуються такі рівні надійності: p=0,95; p=0,99; p=0,999.

В математичній статистиці існує деяке мале число *a*, що називається рівнем значущості, значення якого передбачає вірогідність того, що виходить за межі довірчого інтервалу. У відповідності з прийнятими довірчими вірогідностями: $a_1=(1\text{-}0{,}95)=0{,}05;\ a_2^2(1\text{-}0{,}99)=0{,}01;\ a_3^2(1\text{-}0{,}999)=0{,}001$ [5].

Рівень значущості $a=0{,}05$ допускає ризик помилки у висновку, що в п'яти випадках із ста теоретично можливих таких самих експериментів при суворо випадковому відборі досліджуваних для кожного експерименту. Тобто, результати вибіркової сукупності на 95 % співпадуть з результатами генеральної сукупності.

Рівень значущості $a_2=0{,}01$ допускає ризик помилки тільки в одному випадку із ста.

Рівень значущості $a_3=0{,}001$ допускає ризик помилка тільки в одному випадку із тисячі [15].

Для прикладу (табл. 5.7) оцінка генеральних показників така:

$$\bar{x}_{виб} - mt \le x_{ген} \le x_{виб} + mt$$

При надійності p= 0,95 (рівень значущості *a=0,05*) і при числі ступенів свободи *k*=*n-1*=30-1=29, *t*=2,05 (табл. додатку 3)

$$4{,}3 - 0{,}03 \cdot 2{,}05 \le \bar{x}_{ген} \le 4{,}3 + 0{,}03 \cdot 2{,}05$$

$$4{,}3 - 0{,}06 \le \bar{x}_{ген} \le 4{,}3 + 0{,}06$$

$$4{,}24 \le \bar{x}_{ген} \le 4{,}36$$

Оцінка середнього квадратичного відхилення ($S_{ген}$) (табл. додатку 1):

p=0,95 (*a*=0,05); *q*=0,28

$$S_{виб}(1q) \le \sigma_{ген} \le S_{виб}(1+q);$$

$$0{,}22(1-0{,}28) \le \sigma_{ген} \le 0{,}22(1+0{,}28);$$

$$0{,}22 \cdot 0{,}72 \le \sigma_{ген} \le 0{,}22 \cdot 1{,}28;$$

$$0{,}16 \le \sigma_{ген} \le 0{,}28;$$

Отже, група із 30 спортсменів, які взяли участь в дослідженні, характеризується як $\bar{x}_{виб} + \sigma_{виб} = (4{,}3 \pm 0{,}22)\, л \cdot хв^{-1}$, дозволяє оцінити генеральну сукупність N із 300 спортсменів як:

$$4{,}24 \le \bar{x}_{ген} \le 4{,}36;$$

$$0{,}16 \le \sigma_{ген} \le 0{,}28.$$

Довірчиві інтервали визначаються у випадку коли оцінка середніх показників генеральної сукупності вимагає вираження одним числом, тобто:

$$\bar{x}_{ген} = \frac{4{,}24 + 4{,}36}{2} = 4{,}3\, л \cdot хв^{-1}$$

$$\sigma_{ген} = \frac{0{,}16 + 0{,}28}{2} = 0{,}22\, л \cdot хв^{-1}$$

В цьому випадку показники вибірки і генеральної сукупності співпали, що свідчить про коректний підбір вибірки.

В цілому при характеристиці генеральної сукупності зазвичай показує на величини $\bar{x}_{ген}$ може відрізнятись від $\bar{x}_{виб}$ при надійності p = 0,05 (*a*= 0,05).

Отже, отримані дані дозволяють зробити висновок, що 30 спортсменів, які брали участь в дослідженні, мають середню величину поглинання кисню під час тривалої роботи, яка дорівнює 4,3 л·хв$^{-1}$. Спортсмени в кількості 300 осіб, із числа яких були вибрані 30 спортсмені, також покажуть середню величину поглинання кисню під час тривалої роботи, яка дорівнює 4,3 л·хв$^{-1}$. Однак, стверджуючи це, допускається похибка на 0,03 л·хв$^{-1}$ із вірогідністю 0,95 [15].

5.6. Визначення необхідного об'єму вибірки для отримання оцінок заданої точності [16]

Як в правило, в процес дослідження необхідно визначити мінімальний об'єм вибірки, для того, щоб середнє арифметичне вибіркової сукупності відрізнялось від середнього значення генеральної сукупності не більше ніж на задану величину. Для цього вводиться довірчива довірчива вірогідність і вибирається об'єм вибірки *n* таким чином, щоб довірчивий інтервал мав заданий розмір.

Якщо генеральна сукупність передбачає нормальне розподілення, а її дисперсія σ^2 для середнього значення M записується таким чином:

$$\bar{x} - U_a \le M \le \bar{x} + U_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (5.20)$$

де U_a – значення нормального відхилення для даного рівня a (табл. 5.8).

Таблиця 5.8

Значення U_a для стандартних довірювальних вірогідностей

a	*1-a*	U_a
0,05	0,95	1,96
0,01	0,99	2,58
0,001	0,999	3,28

Коли необхідно, щоб вибіркове середнє $\bar{x}$ відзначалось від генерального *M* не більше ніж на задану величину *d*. В цьому випадку, половина ширини довірчого інтервалу повинна бути рівна *d*, тобто половина від

$$(\bar{x} + U_a \frac{\sigma_{ген}}{\sqrt{n}}) - (\bar{x} - U_a \frac{\sigma_{ген}}{\sqrt{a}}) = 2U_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

повинна рівнятись *d:*

$$U_a \frac{\sigma_{ген}}{\sqrt{n}} = d.$$

Звідси необхідний об’єм вибірки визначається за формулою:

$$n = \left(\frac{U_a \, \sigma_{ген}}{d} \right)^2 \qquad (5.21)$$

Істинне значення параметру генеральної сукупності ($\sigma_{ген}$) зазвичай не відомо, але при великих об’ємах вибірки ($n \geq 30$) використовується його вибіркова оцінка ($S_{виб}$). Для даної ситуації використовується формула (5.21).

Приклад (табл. 5.9).

Завдання: визначити мінімальний об’єм вибіркової сукупності для того, щоб вибіркове середнє арифметичне не відрізнялось від істинного значення середнього значення генеральної сукупності не більше ніж на задану величину (похибку репрезентативності *m*).

Таблиця 5.9

Опрацювання результатів висоти стрибка учнів у віці 14 років (С. В. Начинська [15])

№ з/п	x_i	n_i	$x_i\, n_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
1.	30,2	5	151,0	-5,9	34,8	174,0
2.	32,4	7	226,8	-3,7	13,7	95,9
3.	35,0	9	315,0	-1,1	1,2	10,8
4.	38,0	8	304,0	1,9	3,6	15,2
5.	40,0	4	160,0	3,9	15,2	60,8
6.	41,2	7	288,4	5,1	26,0	182,0
Всього	-	40	1445,2	-	-	538,7

Визначення мінімального об’єму вибіркової сукупності здійснюється у такій послідовності [15, 16].

Визначаються основні характеристики вибіркової сукупності *(табл. 5.8).*

$$\bar{x} = \frac{1445,2}{40} = 36,13 \approx 36,1 см;$$

$$S^2 = \frac{538,7}{40} = 13,47 см^2;$$

$$S = \sqrt{13,47} = 3,7 см;$$

$$V = \frac{3,7}{36,1} \cdot 100\% = 10,2\%;$$

$$\bar{x} \pm S = (36,1 \pm 3,7) см.$$

Визначається середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності ($\sigma_{ген}$):

$$S_{виб}(1-q) \le \sigma_{ген} \le S_{виб}(1+q)$$

Значення *q* при *n=40* дорівнює *0,24* (табл. додатку 1).

$$3,7(1-0,24) \le \sigma_{ген} \le 3,7(1+0,24)$$

$$2,8 \le \sigma_{ген} \le 4,6$$

Визначається необхідний об'єм вибірки з урахуванням одного із крайніх значень середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності. Попередньо вибирається рівень значущості довірчого інтервалу *а*=0,05 [14].

$$n = \left(\frac{U_a \cdot \sigma}{d}\right)^2$$

$$d = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \cdot U_a = \frac{2,8}{\sqrt{40}} \cdot 1,96 = 0,87$$

$$n = \left(\frac{1,96 \cdot 2,8}{0,87}\right)^2 = 39,7 \approx 40$$

Отже мінімальний об'єм вибіркової сукупності для наведених даних табл. 5.9 має бути n≈40. Варто зазначити, що саме такий об'єм вибірки представлений в табл. 5.9, що дозволяє зробити висновок репрезентативність даної вибірки.

Для наведеного прикладу мінімальний необхідний об'єм вибіркової сукупності з урахуванням вибіркового середнього квадратичного відхилення похибки вибіркового середнього арифметичного, визначається наступним чином [5, 16]:

Визначається похибка вибіркового середнього арифметичного m за формулою (5.15)

$$m = \frac{S_{виб}}{\sqrt{n}} = \frac{3,7}{\sqrt{40}} = 0,6$$

Тобто, передбачається, що вибіркове середнє значення висоти стрибка учнів 14 років, буде різнитись від істинного значення середнього результату на величину *а*=0,6 см.

Обирається рівень значущості довірчого інтервалу *а*=0,05.

Визначається необхідний об'єм вибірки за формулою (5.21).

$$n = \left(\frac{U_a \cdot \sigma}{d}\right)^2 = \left(\frac{1,96 \cdot 3,7}{0,6}\right)^2 = 146,4 \approx 146$$

Отже при об'ємі вибірки n=146 існує 95 % вірогідність того, що вибіркове середнє арифметичне буде відрізнятись від генерального середнього значення не більше ніж на величину 0,6 см.

5.7. Перевірка статистичних гіпотез [5, 8, 13, 15, 16]

Статистичні гіпотези (statistik; грецьк. **Hipothesis** основа, передбачення) – передбачення про відсутність значущої (невипадкової) різниці між статистичними об'єктами, що порівнюються. Як правило завжди висувається дві гіпотези: нульова і альтернативна.

Гіпотеза у відповідності з якою відсутня різниця між сукупностями, що порівнюються, називається **нульовою** H_0. Ця гіпотеза – описується як: $\boldsymbol{H_0}$**:** $\bar{x}_1 = \bar{x}_0$.

Альтернативна гіпотеза (H_1) – гіпотеза із утвердженням про те, що в дійсності між генеральними сукупностями є різниця, тобто $\bar{x}_1 > \bar{x}_o$ або $\bar{x}_1 < \bar{x}_o$.

При перевірці статистичної гіпотези рішення експериментатора ніколи не приймається з певністю, тобто завжди є деякий ризик прийняти неправильне рішення. В цьому плані можливі помилки двох видів:

- помилка першого роду, коли нульова гіпотеза **(*H₀*)** відхиляється, а вона вірна;
- помилка другого роду, коли $\boldsymbol{H_0}$ приймається, а вірна альтернативна гіпотеза **($\boldsymbol{H_1}$)**.

Вірогідність помилки першого роду позначається символом *а* і називається рівнем значущості, а р=*1–а* довірчою вірогідністю і означає вірогідність прийняття нульової гіпотези H_0, коли вона вірна.

Рівень значущості – значення вірогідності, при якій різниця між вибірками вважається випадковою та несуттєвою. Самими розповсюдженими рівняннями значущості є*: 0,001; 0,01; 0,05.* Рівень *0,05* означає, що вибіркове значення може зустрітись в середньому не частіше ніж 5 разів у 100 спостереженнях.

Як прийняття так і відхилення гіпотези здійснюється на основі певного статистичного критерію.

Статистичним критерієм називають правило, що забезпечує прийняття істинної та відхилення хибної гіпотези із наперед заданою вірогідністю.

Перевірка гіпотези здійснюється в такій послідовності [17, 18]:

1. Формування гіпотези (H_0), яку в подальшому необхідно прийняти чи відхилити.
2. Вибір рівня значущості.
3. Визначення вибіркового значення статистичних характеристик.
4. Вибір критерію для перевірки статистичної гіпотези.
5. Порівняння вибіркового значення з критичним значенням критерію для вибраного рівня значущості з метою прийняття чи відхилення гіпотези.

Види статистичних критеріїв. Критерії перевірки статистичних гіпотез розподіляються на три класи [5, 13, 17]:

- параметричні критерії, які не потребують інформації про параметри розподілення генеральної сукупності. До них відноситься *F-критерій Фішера, t-критерій Стьюдента;*
- непараметричні критерії, які не потребують інформації про параметри розподілення і використовуються до даних, що виражені в шкалах найменування чи порядку. До непараметричних критеріїв відноситься *критерій Уілкоксона, критерій Уайта, критерій Ван-деh-Вардена (критерій знаків);*
- критерії згоди, які служать для перевірки гіпотез про згоду при розподіленні генеральної сукупності за раніше прийнятою теоретичною моделлю. За допомогою цих критеріїв перевіряється передбачення про нормальне розподілення генеральної сукупності.

Вибір між параметричними і непараметричними критеріями залежить від закону розподілення генеральної сукупності, з якої організована вибірка, а також від шкал вимірювання вихідних даних.

5.7.1. Параметричні критерії

Одним із основних параметричних критеріїв є **критерій Стьюдента (t-критерій) (kriterion[4])** – критерій, що дозволяє при вибраному рівні значущості (вірогідності помилки) підтвердити чи заперечити висунуту статистичну гіпотезу (0 – гіпотезу чи альтернативу її) стосовно незв'язаних (незалежних) вибірок, або попарно зв'язаних вибірок.

Порівняння двох вибіркових середніх арифметичних (незв'язані вибірки) [13, 17].

При порівнянні двох вибіркових середніх арифметичних зазвичай перевіряється передбачення, що і перша, і друга вибірки належать до однієї генеральної сукупності, тобто, не відрізняються одна від одної суттєво. В цьому випадку бувають відомі такі статистичні характеристики: $\bar{x}_1, \bar{x}_2, S_1, S_2, n_1, n_2.$

Спочатку записується нульова гіпотеза як Н$_o$: $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Потім вираховують значення *t–критерія* (розрахункове).

1. У випадку рівних об'ємів вибірок і нерівних дисперсій:

$$n=n_1=n_2,\ S_1^2 \neq S_2^2:$$

$$t_p = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{S_1^{\,2} + S_2^{\,2}}} \cdot \sqrt{n}, \tag{5.22}$$

Число ступенів свободи $V = 2n–2$.

2. У випадку нерівних об'ємів вибірок і нерівних дисперсій:

$n_1 \neq n_2,\ S_1^2 \neq S_2^2$:

$$t_p = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{S_1^{\,2}}{n_1} + \frac{S_2^{\,2}}{n_2}}}, \tag{5.23}$$

число ступенів свободи $V=n_1+n_2–2$.

---

[4] Відповідність нормальному закону розподілення є обов'язковою.

3. У випадку керівних об’ємів вибірок і рівних дисперсій:

$$t_p = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \qquad (5.24)$$

Число ступенів свободи $V=n_1+n_2-2$.

Після того як визначений критерій і вирахувано t_p, порівнюють його критичним значенням $t_{a,V}$. Для цього використовується таблиця теоретичного розподілення Стьюдента і для рівня значущості a і числа ступенів свободи V виписується відповідне значення $t_{a,V}$.

Під числом ступенів свободи розуміють різницю між числом значень, що вимірюються і числом лінійних відношень (зв’язків), що виникають між ними.

Порівнюючи значення t_p і $t_{a,V}$, поступають таким чином [16]:

- якщо $t_p > t_{a,V}$, гіпотеза H_0:($\overline{x_1} = \overline{x_2}$) приймається з вірогідністю $q=1-a$;
- якщо $t_p \geq t_{a,V}$, гіпотеза H_0:($\overline{x_1} = \overline{x_2}$) відхиляється з вірогідністю $q=1-a$;

Отже, у першому випадку між середніми значеннями двох вибірок немає статистично достовірної різниці (р>0,05 або р>0,01 чи р>0,001). У другому випадку між середніми значеннями двох вибірок є статистично достовірна різниця (р>0,05 або р>0,01 чи р>0,001).[5]

Порівняння двох середніх даних зв’язаних вибірок [13, 16, 17]

В практиці спорту досить часто доводиться проводити вимірювання на одних і тих самих спортсменах (наприклад, до і після змагального періоду в річному тренувальному циклі). Як правило, визначається чи змінився рівень підготовленості спортсменів. В цьому випадку вибірки завжди рівночисельні, а всі вимірювання можуть бути об’єднані в пари (кожна пара це результат вимірювання на одному спортсменові на початку і в кінці експерименту). Такі вибірки називаються зв’язаними.

Для порівняння середніх значень тут використовується модифікація *t-критерію* для зв’язаних вибірок. Особливість його в тому, що гіпотеза формулюється відносно різниць d_i *споріднених пар спостережень*.

Умови використання: $d_i=x_i-y_i$ – різниця зв’язаних пар результатів вимірювання. Передбачається нормальний розподіл цих різниць в генеральній сукупності з параметрами Md, σd.

Гіпотеза H_0: $Md=0$. Альтернативна гіпотеза H_1: $Md \neq 0$. Рівень значущості: *а*.

Приклад: 10 футболістів групи спортивного удосконалення (16-17 років) виконували удари на дальність правою і лівою ногами. Результати до експерименту (x_i, *м*): *66, 64, 68, 65, 70, 71, 65, 63, 59*; після експерименту (y_i, *м*) *69, 65, 70, 66, 68, 72, 70,68,64,63*.

[5] Приклад статистичного порівнювання двох середніх арифметичних за t- критерієм Стьюдента наведений в 2-му розділі посібника.

Де: x_i – показник певного футболіста до експерименту; y_i – після експерименту.

Послідовність порівняння середніх значень зв'язаних вибірок:

1. Приймається гіпотеза про нормальний розподіл різниць $d_i=x_i–y_i$. Вибирається рівень значущості: $a = 0,05$.

2. Для кожного футболіста визначається різниця між результатами першого та другого вимірювань – d_i.

$d_1=x_1–y_1=66\text{-}69=\text{-}3$; $d_2=64\text{-}65=\text{-}1$; $d_3=68\text{-}70=\text{-}2$; $d_4=65\text{-}66=\text{-}1$; $d_5=69\text{-}68=+1$; $d_6=70\text{-}72=\text{-}2$; $d_7=71\text{-}70=+1$; $d_8=65\text{-}68=\text{-}3$; $d_9=63\text{-}64=\text{-}1$; $d_{10}=59\text{-}63=\text{-}4$.

3. Розраховується середнє арифметичне різниць (всі значення додаються і діляться на число футболістів):

$$\bar{x}_d = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = 1{,}9 \qquad (5.25)$$

4. Розраховується середнє квадратичне відхилення різниць:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{x}_d)^2}{n-1}} = 0{,}95 \qquad (5.26)$$

5. Розраховується стандартна похибка середнього арифметичного різниць:

$$S_d = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}95}{\sqrt{10}} = 0{,}30 \qquad (5.27)$$

6. Визначається t-критерій:

$$t_p = \frac{\bar{x}_d}{S_d} = \frac{1{,}9}{0{,}30} = 6{,}33 \qquad (5.28)$$

7. За таблицею критичних значень *t*-критерію Стьюдента.

Для $a=0,05$ і $V\text{-}n\text{-}1=9$ знаходиться $t_{a,V}=2{,}26$.

8. Оскільки $t_p > t_{a,V}$ то можна зробити висновок про те, що різниця у показниках ударів по м‘ячу на дальність до і після експерименту статистично достовірна (вірогідність похибки р<0,05).

Критерій Фішера (*F-критерій*) (kriterion) – критерій оснований на співвідношенні дисперсій вибірок, що порівнюються [9, 15]. Цей критерій використовується у випадках коли необхідно оцінити стабільність спортивної форми чи стабільність показників підготовленості спортсменів. Вибірки можуть бути різними за об'ємом.

Критерій Фішера визначається в такій послідовності:

1. Знаходиться критерій Фішера F за формулою:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}, \qquad (5.29)$$

де: S_1^2, S_2^2 – дисперсії вибірок, що порівнюються.

Умовами критерію Фішера передбачено, що в чисельнику формули (5.29) знаходиться більша дисперсія, тобто, число F завжди більше одиниці.

2. Задається надійність розрахунку: р=0,95 – і визначається число ступенів свободи для обох вибірок: $k_1=n_1–1$; $k_2=n_2–1$.

3. За таблицею додатку 4 знаходиться граничне значення критерію $F_{гр.}$

4. Порівняння критеріїв F і $F_{гр}$ дозволяє зробити висновки:

- якщо $F \geq F_{гр}$, то різниця між вибірками статистично достовірна;
- якщо $F < F_{гр}$, то різниця між вибірками статистично не достовірна.

5.7.2. Непараметричні критерії. Критерій Уілкоксона (Т-критерій) (kriterion) – ранговий критерій значущості для порівняння попарно зв'язаних вибірок (W-критерій) дозволяє при вибраному рівні значущості (вірогідності похибки) підтвердити чи заперечити О – гіпотезу чи альтернативу їй.

Критерій Уілкоксона визначається в такій послідовності [15].

1. Задається надійність розрахунку: p=0,95**,** визначається число ступенів свободи як k=n–1, де: k – кількість пар елементів обох груп.
2. За табл. додатку 5 знаходиться граничне значення W.
3. Порівняння критеріїв W і $W_{гр}$ дозволяє зробити висновки:

- якщо $W \geq W_{гр}$ різниця між вибірками статистично недостовірна;
- якщо $W < W_{гр}$ різниця між вибірками статистично достовірна.

Для знаходження критерію Уілкоксона W використовується порядковий номер (ранг) різниці кожної пари елементів вибірок.

Приклад: група футболістів показала час (с) з бігу на 30 м: x_i – на початку і y_i – в кінці серії тренувань.

Вихідні дані представленні в табл. 5.10.

Таблиця 5.10

Визначення ефективності тренування футболістів (С. В. Начинська [14])

№ з/п	x_i	y_i	x_i–y_i	W	$W (+)$	$W (–)$
1	4,15	4,12	0,03	3,5	3,5	-
2	4,17	4,20	-0,03	3,5	-	3,5
3	4,20	4,15	0,05	6,0	6,0	-
4	4,22	4,25	-0,03	3,5	-	3,5
5	4,24	4,26	-0,02	1,0	-	1,0
6	4,25	4,22	0,03	3,5	3,5	-
Усього	-	-	-	-	13,0	8,0

Для знаходження W здійснюються такі дії:

1. Визначається різниця кожної пари вихідних значень з уточненням її знаку, тобто x_i–y_i.

2. Всім різницям присвоюються ранги, тобто призначаються номери в порядку їх збільшення. При цьому знак різниці не враховується.

В наведеному прикладі найменше значення має різниця *0,02*, так її ранг дорівнює одиниці. Так, як значення різниць 1, 2, 4 і 6 однакові, то їх ранг дорівнює (2+3+4+5) 14=3,5.

Величині 0,05 присвоюється ранг 6.

Таким чином, в графі W (табл. 5.10) находяться ранги всіх різниць без врахування їх знаку.

Потім враховуються знаки. З цією метою випускаються ранги позитивних різниць в графі *W (+)*, негативних в графі *W (–)*.

1. Виписані ранги сумуються – менша із цих сум є критерієм Уілкоксона. Для даного прикладу це $W = 8{,}0$.

2. Задається надійність розрахунку: Р=0,05 (a=0,05) при кількості пар, що порівнюються (6 пар) – і за табл. додатку 5 знаходиться граничне значення $W_{гр}=1$.

Статистичний висновок. Порівняльні вибірки різняться статистично недостовірно, так як $W=8{,}0 > W_{гр}=1{,}0$.

Педагогічний висновок. Порівнювальні вибірки відрізняються одна від одної несуттєво, а тому можна стверджувати, що група футболістів провела неефективну серію тренувань.

Критерій Уайта (kriterion) – непараметричний (ранговий) критерій значущості. За допомогою *Т*-критерію Уайта порівнюють дві різні, але невеликі за об'ємом, вибірки.

Послідовність визначення достовірності різниць за *Т*-критерієм Уайта наступна [15].

Вихідні дані. Експерти оцінювали за десятибальною системою рівень спортивної майстерності двох волейбольних команд, одна з яких була експериментальною, інша – контрольною. Отримані експертні оцінки розподілились таким чином: експериментальна група (8 гравців) – 8,5; 8,6; 8,4; 9,0; 9,2; 9,4; 9,1; 8,8; контрольна група (7 гравців) – 7,8; 8,0; 8,2; 7,9; 7,5; 8,5; 8,1.

1 КРОК. Проводиться ранжування результатів експертних оцінок у порядку зростання як для експериментальної, так і контрольної груп. При цьому верхній рядок складають оцінки, а нижній – їх ранги (табл. 5.11).

Таблиця 5.11

Порівняльні експертні оцінки і їх ранги волейболістів експериментальної і контрольної груп

Групи	*n*	Оцінки														
E	8							8,4		8,5	8,6	8,8	9,0	9,1	9,2	9,4
K	7	7,5	7,8	7,9	8,0	8,1	8,2		8,5							
R_E								7		8,5	10	11	12	13	14	15
R_K		1	2	3	4	5	6									

Примітка: *Е* – експериментальна група; *К* – контрольна група; R_E – ранги волейболістів експериментальної групи; R_K – ранги волейболістів контрольної групи.

У випадку, коли випадають однакові оцінки в різних групах, для таких оцінок ставиться середній ранг (сума рангів ділиться на 2). У наведеному прикладі такими є оцінки 8,5 і 8,5, тому середньоарифметичний ранг для них буде 8,5.

2 КРОК. Розраховується сума рангів для експериментальної($\sum R_E$) і контрольної ($\sum R_K$) груп.

$$\sum R_E = 7+8{,}5+10+11+12+13+14+15 = 90{,}5$$

$$\sum R_K = 1+2+3+4+5+6+8{,}5=29{,}5$$

Для перевірки правильності розрахунку визначається сума рангів обох груп $\left(\sum R_{заг}\right)$.

$$\sum R_{заг} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{15(15+1)}{2} = 120$$

Тобто $\sum R_E + \sum R_K$ = 90,5 + 29,5 = 120.

3 КРОК. Для визначення статистичної достовірності різниць менша сума рангів ($T_ф$ = 29,5) порівнюється із табличним значенням *Т*-критерія Уайта (табл. 5.12). Для n_E = 8 і $n_к$ = 7 при 5%-му рівні значимості. В лівому стовпчику табл. 5.12 знаходимо цифру 8, так як вона більше, а на верхньому рядку – цифру 7, на перетинанні цих двох цифр знаходиться значення $T_{ст}$, яке дорівнює 38. Так як $T_{ст}$=38 > *Тф*=25,5, варто зробити висновок, що різниця між результатами експертних оцінок волейболістів експериментальної і контрольної груп є статистично достовірною при 5%-му рівні значущості (*T*=29,5 при р>0,05).

Необхідно зазначити, що табл. 5.12 дозволяє визначити *Т*-критерій Уайта у випадку, коли більша вибірка не перевищує число 27, а менша – 15.

Таблиця 5.12

Значення Т-критерія Уайта *а*-0,05

Більше число спостережень	Менше число спостережень													
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4			11											
5		6	11	17										
6		7	12	18	26									
7		7	13	20	27	36								
8	3	8	14	21	29	38	49							
9	3	8	15	22	31	40	51	63						
10	3	9	15	23	32	42	53	65	78					
11	4	9	16	24	34	44	55	68	81	96				
12	4	10	17	26	35	46	58	71	85	99	115			
13	4	10	18	27	37	48	60	73	88	103	119	137		
14	4	11	19	28	38	50	63	76	91	106	123	141	160	
15	4	11	20	29	40	52	65	79	94	110	127	145	164	185
16	5	12	21	31	42	54	67	82	97	114	131	150	169	
17	5	12	21	32	43	56	70	84	100	117	135	154		
18	5	13	22	33	45	58	72	87	103	121	139			
19	5	13	23	34	46	60	74	90	107	124				
20	5	14	24	35	48	62	77	93	110					
21	6	14	25	37	50	64	79	95						
22	6	15	26	38	51	66	82							
23	6	15	27	39	53	68								
24	6	16	28	40	55									
25	6	16	28	42										
26	7	17	29											
27	7	17												

Критерій Ван-дер-Вардена (критерій знаків) (kriterion) – потужний непараметричний критерій, за яким визначають, суттєва чи несуттєва різниця між будь-якими вибірками. Цей критерій використовується при порівнянні великих різнооб'ємних вибірок з попарно поєднаними варіантами (**n – кількість пар значень**). Наприклад, коли розглядається один і той самий об'єкт до і після експерименту або порівнюють аналогічну ознаку в декількох групах.

Критерій Ван-дер-Вардена передбачає дослідження яких-небудь показників у випадку, коли вони змінюються. Прогресивна зміна виражається знаком «+», регресивна – знаком «–». В практиці спорту під покращенням в одних випадках розуміють збільшення абсолютного значення (приріст сили) в інших – їх зменшення (час забігу).

Критерій Ван-ден-Вердена визначається в такій послідовності [15]:

1. Порівнюються попарно елементи вибірок, призначається кожній парі відповідний знак: «+» у випадку покращення ознаки, «–» – погіршення, «0» – без зміни (табл. 5.13)

Таблиця 5.13

Опрацювання показників часу десяти забігів двох груп школярів на 30 м з високого старту: у віці 10 років (x_i); у віці 11 років (y_i) (С. В. Начинська [15])

№ з/п	x_i	y_i	z
1	6,1	5,9	+
2	6,3	6,3	0
3	6,3	6,3	+
4	6,4	6,3	+
5	6,4	6,4	0
6	6,4	6,5	–
7	6,5	6,4	+
8	6,5	6,6	–
9	6,6	6,5	+
10	6,7	6,8	–

2. Задається надійність P=0,95 при кількості порівнювальних пар, що проведені в умові певного завдання. В даному випадку ставиться завдання визначити чи суттєво відрізняються результати в школярів 10 і 11 років? За таблицею Ван-дер-Вардена (табл. додатку 7) визначається граничне значення критерію $Z_{гр} = [a…b]$.

В наведеному прикладі, покращення результатів пов'язано із зменшенням абсолютного значення числа: чим менший час забігу, тим кращий результат, якому і назначається знак «+».

Відповідно до даних, що наведені в табл. 5.12 $z(+)=5$; $z(–)=3$; $z(0)=2$.

За табл. додатку 7 при надійності P=0,95 (a=0,05) та числі пар 10 без двох нульових значень, тобто $n_1=n–2=10–2=8$, визначається граничне значення критерію $Z_{гр} = [1…7]$.

Цей інтервал вказує на те, що кількість плюсів чи мінусів, що складають число від 1 до 7, вказує на статистичну недостовірність. Так, як $z(+)=5$ і $z(–)=3$ знаходяться в межах граничного інтервалу $Z_{гр}$=[1…7]. У випадку, коли Z(–) буде знаходитись за межами інтервалу $Z_{гр}$, то можна стверджувати про статистичну достовірність зміни результатів.

5.7.3. Критерії згоди

Всі розглянуті вище критерії значущості є оптимальними, тобто забезпечують найвищу вірогідність статистичних висновків лише в тих випадках, коли вибірки отримані із нормально розподіленої генеральної сукупності. При відхиленнях від нормального розподілення точність оптимальних критеріїв суттєво знижується, тому попередньо перевіряється передбачення про нормальне розподілення генеральної сукупності. Для цього використовуються критерії згоди. Тут нульова гіпотеза H_0 представляє собою твердження про те, що розподілення генеральної сукупності, із якої отримана вибірка, не відрізняється від нормального. Існує декілька різновидностей критеріїв згоди. Найбільш часто використовуються такі критерії згоди, як: X^2(хі - квадрат), λ(*ламбда*) Колмогорова-Смірнова, W Шапіро-Уїлкі [5, 13, 16].

Критерій X^2 (хі-квадрат критерій) (kriterion) – достатньо потужній критерій згоди для вибірок об’ємом *n≥40,* згрупованих в інтервальний варіаційний ряд.

Послідовність використання [16]:

1. Формується гіпотеза, вибирається рівень значущості *а*.
2. Отримується вибірка об’єму n ≥ 40 незалежних спостережень та представляється емпіричне розподілення у вигляді інтервального ряду (див. табл. 5.3).
3. Розраховуються вибіркові характеристики $\bar{x}_i$ S. Їх використовують в якості генеральних параметрів нормального розподілення, з яким потрібно буде порівнювати емпіричне розподілення.
4. Розраховуються значення теоретичних частот n'_i попадання в 1-й інтервал групування. Для цього необхідно імовірність попадання в цей інтервал помножити на об’єм вибірки n:

$$n'_i = n\left[\Phi_0\left(\frac{x_{вi}-\bar{x}}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{x_{hi}-\bar{x}}{\sigma}\right)\right], \tag{5.30}$$

де: Φ_0 (u) функції Лапласа (табл. додатку 8) [16] $x_{вi}$ *і* x_{hi} – верхня та нижня границя *і*-го інтервалу групування.

Якщо частоти n'_i деяких інтервалів групування менше 5, то сусідні інтервали об’єднуються так, щоб сума їх очікуваних частот була більше чи рівна 5. Відповідно складаються і емпіричні частоти інтервалів, що об’єднані.

5. Значення X^2 – критерію розраховується за формулою:

$$X^2 = \sum_{i=1}^{\kappa}\frac{(n_i - n'_i)^2}{n_i}, \tag{5.31}$$

де n_i – емпіричні частоти*;* n'_i – очікувані (теоретичні) частоти; *k*– число інтервалів групування після об’єднання.

6. За табл. додатку 9 знаходиться критичне значення X_a^2 X^2 критерію для рівня значущості а і числа ступенів свободи *V=k–3*.
7. Висновок: якщо $X^2 \geq X_a^2$, то емпіричне розподілення не відповідає нормальному розподіленню на рівні значущості *а*, в протилежному випадку немає причин заперечувати цю відповідність.

Приклад. Вихідні дані з табл. 5.3.

1. Формується гіпотеза:

$H_0 = f(x) = f'(x)$,[6] вибирається рівень значущості *a=0,05*

2. Вихідні дані заносимо в табл. 5.13

Таблиця 5.13

Розрахунок X^2-критерію (В. С. Іванов [16])

1	2	3	4	5	6	7
№ з/п	Границі інтервалів X_{ni}, $X_{вi}$,	Частоти інтервалів n_i	Нормовані межі інтервалів U_{ni}, $U_{вi}$	Теоретичні частості n_i	$n_i - n'_i$	$\dfrac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
	12,4; 13,2	1	–3,33; –2,44	0,345		
2	13,2; 14,0	2 } 12	–2,44; –1,56	2,093 } 12,551	–0,551	0,024
3	14,0; 14,8	9	–1,56; –0,67	9,603		
4	14,8; 15,6	15	0,67; 0,22		–1,780	0,189
5	15,6; 16,4	17	0,22; 1,11	6,578	3,027	0,658
6	16,4; 17,2	5	1,11; 2,0		–0,578	0,051
7	17,2; 18,0	1 } 6	2,0; 2,89			
2		50		49,882		0,922

У графі 2 – границі інтервалів групування, графі 3 – емпіричні частоти інтервалів. В табл. 5.3 верхні межі були зменшені на 0,1 с для зручності розрахунку. В табл. 5.13 верхні границі залишені без змін.

3. Отримана вибірка *n=50.* Будується інтервальний ряд з числом інтервалів *k=7.*

4. Розраховуються характеристики вибірки:

$$\bar{x} = 15{,}4\text{с};\ S = 0{,}89\ \text{с};$$

5. Вираховується значення теоретичних частот за формулою (5.30) з використанням табл. додатку 9.

$$U_{вi} = \frac{x_{вi} - \bar{x}}{S},\ U_{нi} = \frac{x_{нi} - \bar{x}}{S}$$

Нормовані границі заносяться в графу 5.

Оскільки для інтервалів з номерами 1,2,7 теоретичні частоти є менше 5, то об’єднуються інтервали 1 і 2 з 3, а інтервал 7 з 6-м інтервалами.

Підсумуються емпіричні та очікувані частоти інтервалів, що були об’єднані.

6. Значення критерію X^2 дорівнює:

$$X^2 = 0{,}922$$

Проміжні розрахунки наведені в графах 6 та 7 (табл. 5.13).

7. За табл. додатку 9 знаходиться критичне значення X^2 для рівня значущості *a*=0,05 і числа ступенів свободи v = к-3=4-3=1:

$$X^2 0{,}05 = 3{,}84$$

[6] Гіпотеза $H_0 : f(x) = f'(x)$ – щільність розподілення *f (x)* загальної сукупності, із якої вибрана вибірка, відповідає теоретичній моделі нормального розподілення

8. Статистичний висновок: оскільки $X^2<X^2 0,05$, то вважається, що емпіричне розподілення сукупності відповідає нормальному на рівні значущості 0,05 [13, 18].

Критерій λ (ламбда) Комогорова-Смірнова

Критерій λ Колмогорова – Смірнова є достатньо потужним критерієм для перевірки гіпотези про нормальне розподілення [13, 18].

Умови використання [16]:

Об'єм вибірки $n \geq 35$, емпіричне розподілення представлено у вигляді інтервального варіаційного ряду.

Гіпотеза $H_0 : F(x) = F'(x)$[7]

Альтернатива $H_1 : F(x) \neq F'(x)$

Рівень значущості: a

Послідовність використання:

1. Формується гіпотеза H_0, вибирається рівень значущості: a.
2. Вибирається вибірка об'ємом $n \geq 35$ незалежних спостережень, вона ґрунтується в інтервальний варіаційний ряд.
3. Вираховуються характеристики вибірки $\bar{x}$ та S.
4. Розраховуються значення емпіричних накопичених частот n_{xi} та теоретичних накопичених частот n'_{xi} за формулою:

$$n_{xi} = n\left[0,5 + \Phi_0\left(\frac{x_i - \bar{x}}{S}\right)\right], \tag{5.32}$$

де: n – об'єм вибірки; $\Phi_0(u)$ – функція Лапласа (табл. додатку 8); x_i – серединні значення інтервалів групування.

5. Розраховується значення критерію λ:

$$\lambda = \frac{\max\left|n_{xi} - n'_{x_1}\right|}{\sqrt{n}},$$

де: $\max\left|n_{xi} - n'_{x_1}\right|$ – максимальне значення модуля (абсолютної величини) різниці між емпіричними n_{xi} та теоретичними n'_{xi} накопиченими частотами.

6. Визначається критичне значення λ_a критерію Колмогорова-Смірнова при рівні значущості a. для стандартних рівнів значущості критичні значення дорівнюють.

$$\lambda_{0,05} = 0,895; \lambda_{0,01} = 1,035.$$

7. Висновок: якщо $\lambda \geq \lambda_a$, то емпіричне розподілення не відповідає нормальному на рівні значущості a, у протилежному випадку приймається гіпотеза про розподілення генеральної сукупності з нормальним розподіленням.

Приклад: Використовуються дані табл. 5.3.

---

[7] Тут гіпотез H_0 формується по відношенню до функції розподілення $F(x)$ та $F'(x)$ – функція розподілення генеральної сукупності, з якої отримана вибірка

1. Вихідні дані записуються в табл. 5.14 у графі 2 – серединні значення інтервалів x_i, у графі 3 – емпіричні накопичені частоти n_{xi}.

2. Формулюється гіпотеза $Ho: F(x) = F'(x)$ та вибираємо рівень значущості *а=0,05*.

Таблиця 5.14

Розрахунок критерію λ Колмогорова-Смірнова (*n*=50)

1	2	3	4	5	6
№ з/п	Серединні значення інтервалів *xi*	Накопичені частоти n_{xi}	Нормовані серединні значення U_i	Теоретичні накопичені частоти n_{xi}	$\frac{\lvert n_{xi} - n'_{x_1} \rvert}{\sqrt{n}}$
1	12,8	1	-2,89	0,098	0,127
2	13,6	3	-2,0	1,138	0,263
3	14,4	12	-1,11	6,675	0,753
4	15,2	27	-0,22	20,648	0,898
5	16,0	44	0,67	37,428	0,929
6	16,8	49	1,56	47,03	0,279
7	17,6	50	2,44	49,633	0,052

3. Розраховуються характеристики вибірки

$\bar{x}$ та *S:* $\bar{x} = 15{,}4c$; $S = 0{,}89c$.

4. Емпіричні накопичені частоти наведені в графі 3, а теоретичні, що розраховані за формулою (5.32) – в графі 5.

5. Значення критерію λ дорівнює:

$$\lambda = \frac{\max\limits_i \lvert n_{xi} - n'_{x_1} \rvert}{\sqrt{n}} = 0{,}929$$

6. Критичне значення для *а*=0,05 дорівнює $\lambda_{0,05}$= 0,895.

7. Висновок: оскільки $\lambda > \lambda_{0,05}$, то гіпотеза $H_0: F(x) = F'(x)$ відхиляється.

Критерій *W* Шапіро-Уїлкі (kruterion), критерій згоди для малих вибірок від *n>10* до *n≤40*.

Приклад [16]*:* необхідно перевірити відповідність нормальному розподіленню даних, які отримані при вимірюванні результатів бігу на 100 м юних футболістів (*n* = 10): 12,6; 12,3; 11,8; 12,1; 12,8; 13,2; 13,8; 12,0; 12,6; 13,0.

Послідовність використання*:*

1. Формулюється гіпотеза H_0 про відповідність розподілу генеральної сукупності, з якої отримані дані, нормальному розподіленню. Вибирається рівень значущості *а*=0,05.

2. Прораховується вибірка, тобто розташовуються вибіркові значення від найменшого до найбільшого (табл. 5.2).

Номери різниць *к* наведені в графі *3*, а значення Δ_k – в графі 4 табл. 5.15.

3. За табл. додатку 10 знаходиться значення коефіцієнтів $a_{пк}$ критерію *W* Шапіро-Уїлкі, що відповідає об'єму вибірки *n=10* і номерам різниць *k*. Ці значення наведені в графі 5 табл. 5.15.

4. Знаходиться добуток $a_{пк} \cdot \Delta_k$ (графа 6, табл. 5.15).

5. Розраховується величина *b:*

$$b = \sum_{i=1}^{\kappa} a_{n\kappa} \cdot \Delta\kappa = 1{,}7966.$$

Таблиця 5.15

Розрахунок критерія W Шапіро-Уїлкі

1	2	3	4	5	6
№ з/п	x_i	k	Δ_k	a_{nk}	$a_{nk}P_k$
1	11,8	1	2,0	0,5739	1,1478
2	12,0	2	1,2	0,3291	0,3949
3	12,1	3	0,9	0,2141	0,1927
4	12,3	4	0,5	0,1224	0,0612
5	12,6	5	0	0,0399	0
6	12,6				
7	12,8	Сума			*b*=1,7966
8	13,0				
9	13,2				
10	13,8				

6. Розраховується значення критерію *W* Шапіро-Уїлкі за формулою:

$$W = \frac{b^2}{(n-1)\cdot S^2} = \frac{1{,}7966^2}{(10-1)\cdot 0.37} = 0.969 \qquad (5.34)$$

7. За табл. додатку 11 знаходиться критичне значення критерію *W* Шапіро-Уїлкі для рівня значущості *а= 0,05:*

$$W_{0,05}=0{,}842$$

10. Висновок: оскільки *W> W₀,₀₅,* то можна стверджувати про відповідність емпіричних даних нормальному розподіленню на рівні значущості *0,05.*[8]

5.8. Кореляційний аналіз [7, 14, 16, 17]

Кореляція (лат. **correlatio,** відповідність, взаємозв’язок) – залежність між явищами, процесами, факторами, сукупностями подій, це вид статистичної (вірогідної) залежності. Розрізняють парну кореляцію – взаємозв’язок між двома факторами та множинну – декількома факторами.

Серед статистичних залежностей найбільш важливою є кореляційна [7].

Кореляційна залежність (зв’язок) (**correlatio**) – вірогідна (статистична) залежність (зв’язок, взаємозв’язок) між факторами (чинниками), що розглядаються (наприклад, між довжиною і масою тіла людини, між швидкістю бігу – та результатом в стрибках у довжину з розбігу). Кореляційний зв’язок може бути лінійним чи нелінійним, прямим (позитивним) зворотним (негативним), розрізняють за тіснотою (силою). Кількісною оцінкою кореляційного зв’язку служать парні коефіцієнти кореляції (якщо зв’язок не лінійний – то кореляційне відношення), та множинні коефіцієнти кореляції, якщо 1 фактор залежить від декількох інших [9].

[8] Критерій *W* Шапіро-Уїлкі будується таким чином, що гіпотеза *Ho* приймається при *W >Wa,* на відміну від інших критеріїв, для яких гіпотеза *Ho* приймається, якщо значення критерію менше критичного.

Статистичний метод, який використовується для дослідження взаємозв'язків, називається **кореляційним аналізом.**

Функціональний зв'язок між ознаками відображає максимально тісний зв'язок, коли одному значенню першої ознаки відповідає одне значення другої ознаки.

Функціональний зв'язок більш характерний для точних наук – фізики, математики. В практиці фізичного виховання та спорту взаємозв'язок між ознаками виражається приблизно.

Аналіз взаємозв'язку починається з графічного представлення експериментальних даних. Наприклад, у шести студентів зареєстровані показники в стрибках у довжину з місця на початку (x_i) та в кінці навчального року (y_i) (табл. 5.16).

Таблиця 5.16

Показники в стрибках у довжину з місця в студентів на початку та в кінці навчального року (В. М. Заціорський [17])

№ студента	x_i	y_i
1	2,26	2,25
2	2,31	2,34
3	2,38	2,38
4	2,25	2,27
5	2,20	2,18
6	2,44	2,48

Для цих результатів будується графік, на осі абцис відкладаються результати *yi*, тобто, кожна пара результатів у прямокутній системі координат буде відображатись точкою (рис. 5.6).

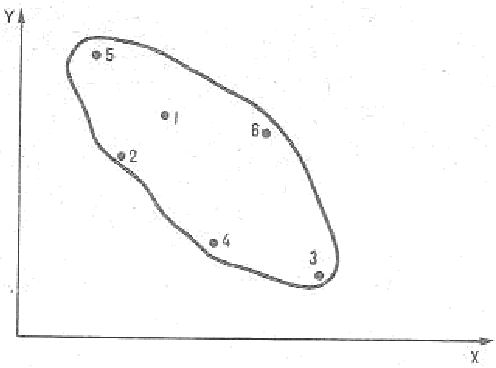

Рис. 5.6. Кореляційне поле (лінійна залежність) (В. М. Заціорський [17])

Така графічна залежність називається діаграмою розсіювання або кореляційним полем. Візуальний аналіз графіка дозволяє стверджувати про лінійну форму взаємозв'язку, про що свідчать еліпсоподібне розташування точок рис. 5.6.

Однак, в практиці фізичного виховання і спорту окрім лінійної форми взаємозв'язку досить часто зустрічаються й інші форми, зокрема: нелінійна функціональна, позитивна, негативна, а також відсутність статистичної залежності (рис.5.7).

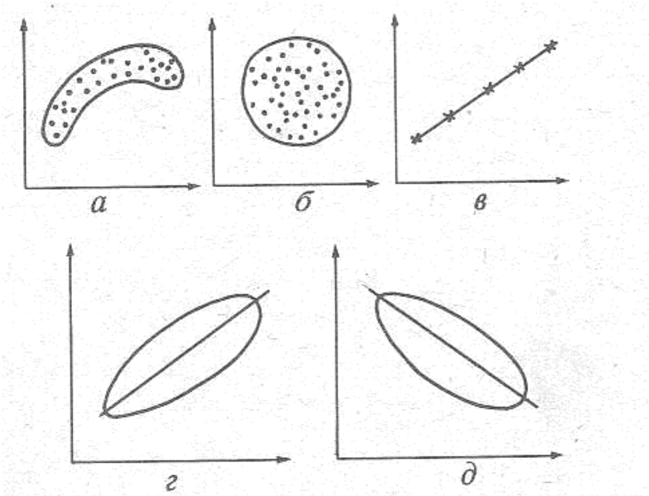

Рис. 5.7. Приклади статистичних взаємозв'язків (В. М. Заціорський [17]):

а) – нелінійна форма взаємозв'язку; *б)* – відсутність статистичної залежності (коефіцієнт кореляції = *0*); *в)* – функціональна залежність (коефіцієнт кореляції *>0*); *д)* – негативна залежність (коефіцієнт кореляції <0).

Візуальний аналіз кореляційних полів дозволяє зробити передбачення (прогнозування) про спрямованість і тісноту зв'язку.

В той же час для більш точного виявлення статистичного взаємозв'язку між двома ознаками (x_i, y_i) використовують парний лінійний коефіцієнт кореляції Браве-Пірсона r_{xy} та ранговий коефіцієнт кореляції Спірмена ρ_{xy}.

Ці коефіцієнти володіють такими властивостями [5]:

- на основі коефіцієнтів кореляції можна судити тільки про прямолінійний кореляційний зв'язок;
- значення коефіцієнтів кореляції – величина, яка не може бути меншою –1 і більшою +1, тобто $-1 \leq r_{xy} \leq +1$ і $-1 \leq \rho_{xy} \leq +1$;

якщо значення коефіцієнтів кореляції дорівнюють нулю – $r_{xy}=0$ або $\rho_{xy}=0$, то зв'язок між ознаками x та y відсутній;

- якщо значення коефіцієнтів кореляції негативні – $r_{xy}<0$ і $\rho_{xy}<0$, то зв'язок між ознаками x та y зворотний (негативний);
- якщо значення коефіцієнтів кореляції позитивні – $r_{xy}>0$ і $\rho_{xy}>0$, то зв'язок між ознаками x та y прямий (позитивний);
- якщо коефіцієнти кореляції набувають значення +1 або –1, тобто $r_{xy}=\pm 1$ або $\rho_{xy}=\pm 1$, то зв'язок між ознаками x та y лінійний (функціональний).
- тільки за значеннями коефіцієнтів кореляції не можна судити про достовірність кореляційного зв'язку між ознаками. Ця достовірність ще залежить від числа ступенів свободи: $k=n-2$, де n – число корельованих пар статистичних даних ознак x і y. Чим більше n, тим вища вірогідність зв'язку при одному і тому ж коефіцієнті кореляції.

Американський вчений Чеддока запропонував такі абсолютні значення коефіцієнтів кореляції Браве-Пірсона та Спірмена (табл. 5.17):

Таблиця 5.17

Абсолютні значення коефіцієнтів кореляції Браве-Пірсона та Спірмена (при n ≥ 30) [5]

№ з/п	Ступінь взаємозв'язку	Абсолютне значення коефіцієнтів кореляції	
		Браве-Пірсона	*Спірмена*
1	Дуже висока	$0,90 \le r_{xy} \le 0,99$	$0,90 \le \rho_{xy} \le 0,99$
2	Висока	$0,70 \le r_{xy} < 0,90$	$0,70 \le \rho_{xy} < 0,90$
3	Помітна	$0,50 \le r_{xy} < 0,70$	$0,50 \le \rho_{xy} < 0,70$
4	Помірна	$0,30 \le r_{xy} < 0,50$	$0,30 \le \rho_{xy} < 0,50$
5	Слабка	$0,10 \le r_{xy} < 0,30$	$0,10 \le \rho_{xy} < 0,30$

Головна різниця між коефіцієнтами кореляції Браве-Пірсона та Спірмена заключається в тому, що перший з них використовується тільки у випадку нормального розподілення ознак x_i та y_i, а другий може використовуватись для ознак з будь-яким видом розподілення.

5.8.1. Коефіцієнт кореляції Браве-Пірсона

Для відображення прямолінійного кореляційного зв'язку двох ознак x_i та y_i, що виражені в абсолютних одиницях, використовується коефіцієнт кореляції Браве-Пірсона, який визначається за формулою:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}, \tag{5.35}$$

де: r_{xy} – коефіцієнт кореляції між ознаками x та y; x_i, y_i – значення величин x та y, що спостерігаються; $\bar{x}$ та $\bar{y}$ середні арифметичні значення ознак x та y; n – об'єм сукупності.[9]

Квадрат коефіцієнту кореляції називається коефіцієнт детермінації (D):

$$D=r^2$$

Коефіцієнт детермінації (лат. *coefficientis; determinans* той, що визначає) – число, що характеризує міру «внеску» одного фактору у формування іншого (у %).

5.8.2. Ранговий коефіцієнт кореляції Спірмена

Ранговий коефіцієнт кореляції Спірмена показує, що тіснота зв'язку визначається не між самими ознаками, а між їх порядковими показниками. Таким чином оцінюється зв'язок однієї ієрархії ознак з іншою [15].

Коефіцієнт рангової кореляції Спірмена визначається за формулою:

$$\rho = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2 - 1)}, \tag{5.36}$$

де: ρ – ранговий коефіцієнт кореляції; d_i – різниця рангів даної пари показників x та у; n – об'єм вибірки.

[9] Приклад визначення коефіцієнту кореляції *Г* Браве – Пірсона наведений у 2-му розмірі посібника

5.9. Регресивний аналіз [5, 8, 18]

Регресія (лат. regresio рух назад, зворотний рух) – це залежність середнього значення (точніше, математичного очікування) випадкової величини Y від величини x. При цьому прийнято говорити: «регресія Y на x». Незалежна величина x може бути не обов'язково випадковою, тому вона позначається малою літерою, прописні літери використовуються зазвичай для випадкових величин [16].

Регресивний аналіз встановлює форму залежності між випадковою величиною Y та значеннями однієї чи декількох перемінних величин, при цьому значення останніх вважаються точно заданими.

Самий важливий етап регресійного аналізу – це вибір необхідної регресійної моделі, тобто математичного виразу, що пов'язує значення залежної випадкової величини Y та значення незалежної величини x.

В найбільш простому випадку передбачувана лінійна залежність записується у вигляді:

$$Y = a + b \cdot x \qquad (5.37)$$

Вираз кореляційної залежності називається **рівнянням регресії.** Це рівняння задає пряму лінію в прямокутній системі координат (рис. 5.8).

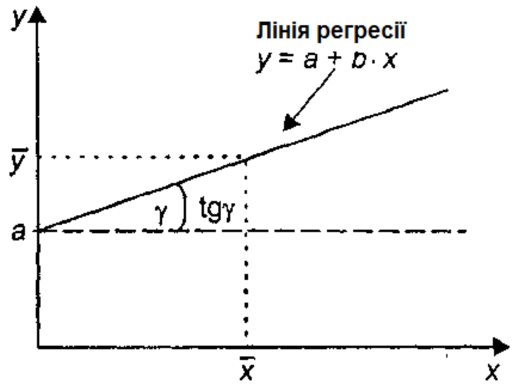

Рис. 5.8. Графічне відображення параметрів рівняння регресії та кореляційного поля: а – графічне відображення параметрів управління регресії; б – графік кореляційного поля (Л. В. Денисова [5]).

Коефіцієнти a та b називаються параметрами рівняння, x задана перемінна. Параметр a визначається величиною відрізку, що відтинається графіком рівняння регресії (лінійної регресії) на осі y, а параметр b являє собою тангес кута нахилу (Y) цієї прямої відносно горизонтальної осі x. параметр b показує, як змінюється ознака Y при зміні ознаки x. Параметр b також називають коефіцієнтом регресії. Параметром а називають вільним членом регресії [5, 16].

Приклад[10]. Вихідні дані результатів запливу вільним стилем групи плавців – чоловіків на 50 (x_i) і 100 (y_i) м.

x_i, с 24,0 24,1 24,3 24,5 24,7 24,7 24,8 24,8 25,0

[10] Денисова Л. В. Измерения и методы математической статистики в физическом воспитании и спорте: Учебное пособие для вузов / Л.В. Денисова, И. В. Хмельныцкая, Л. А. Харсенко. – К.: Олимп. Л-ра, 2008. – С. 68-69

y_i, с 54,0 54,3 54,4 54,7 54,6 54,8 55,0 55,3 55,7

Завдання: скласти рівняння лінійної регресії; побудувати пряму лінію, що встановлює наближену залежність результатів запливу на 100 м від результатів запливу на 50 м.

Послідовність вирішення завдань:

1. Виконуються проміжні розрахунки:

$$\sum_{i=1}^{9} x_i = 220{,}9 \quad \sum_{i=1}^{9} y_i = 492{,}8 \quad \sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 5422{,}81 \quad \sum_{i=1}^{9} x_i\, y_i = 12096{,}82$$

2. Визначаються значення середніх арифметичних:

$$\overline{x} = 24{,}5; \quad \overline{y} = 54{,}8$$

3. Знаходиться значення коефіцієнту регресії *b* за формулою:

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \tag{5.38}$$

де: x_i – значення незалежної перемінної величини *x; y_i* – значення залежної випадкової величини *y*.

$$b = \frac{9 \cdot 12096{,}8 - 220{,}9 \cdot 492{,}8}{9 \cdot 5422.8 - 48797{,}8} = 1{,}6$$

4. Знаходиться значення незалежного члена рівняння регресії за формулою:

$$a = \overline{y} - b\overline{x}, \tag{5.39}$$

де: $\overline{y}$, $\overline{x}$ – вибіркові середні арифметичні, що вираховуються за формулою (5.1)

$$a = 54{,}8 - 1{,}6 \cdot 24{,}5 = 15{,}6$$

5. У підсумку отримується таке рівняння регресії:

$$Y = a + b \cdot x = 15{,}6 + 1{,}6 \cdot x$$

6. Будується графік прямої, побудованої за отриманим рівнянням регресії та вихідними даними (рис. 5.9)

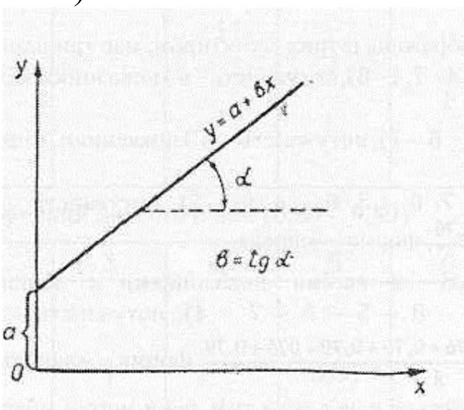

Рис. 5.9. Графік прямої, що побудований за отриманим рівнянням регресії

Аналіз графіку показує, що побудована пряма є найкращою лінійною оцінкою рівняння регресії, отриманими за емпіричними даними.

Висновок. Отримане емпіричне рівняння регресії можна використовувати для використання прогнозування результатів запливу на 100 м в залежності від результатів запливу на 50 м. Наприклад, якщо в групі плавців, які брали участь в експерименті, буде показаний результат 23,9 с на дистанції 50 м, то на дистанції 100 м варто очікувати такий результат:

$$15{,}6+1{,}6\cdot 23{,}9=53{,}8\ (\text{с})$$

5.10. Дисперсний аналіз [5, 7, 17, 18]

Дисперсний аналіз (*diskretus;* грецьк *analisis* розкладання) – метод статистичного аналізу, оснований на оцінці різниць дисперсій (S^2) статистичних сукупностей, що порівнюються, порівняння вибірок за їхніми середніми арифметичними – не єдиний шлях визначення значущості їх різниць. Її визначають за *F*-критерієм Фішера: розрахункове значення його $F_p = S_x^2 / S_y^2$ або $F_p = S_y^2 / S_x^2$ (у чисельник ставиться більша дисперсія).

Основною метою дисперсійного аналізу є дослідження значущості різниць середніх значень декількох різниць вибірок.

Дисперсний аналіз, так само як і кореляційний аналіз, дозволяє виявити вплив однієї ознаки на іншу. Сутність методу полягає в тому, що повна сума квадратів відхилень ($S_{заг}$) розподіляється на дві складові: сума квадратів відхилень між групами ($S_{між}$) та суму квадратів відхилень у середині груп ($S_{внут}$):

$$S_{заг} = S_{між}+S_{внут} \tag{5.40}$$

Сума квадратів відхилень між групами (між спробами), або між групова варіація, характеризує варіацію між загальним середнім і груповими середніми. Вона визначається за формулою:

$$S_{між} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x_0})^2 n_i, \tag{5.41}$$

де: x_i – варіанти факторного комплексу; $\bar{x}_0$ – середнє арифметичне варіантів; n_i – частоти; n – об’єм факторного комплексу.

Сума квадратів відхилень у середині груп, або внутрішньогрупова варіація, визначає варіацію між кожним результатом груп і середнім даної групи.

$$S = \sum_i \sum_j (x_{ij} - x_i)^2 \qquad (5.42)$$ [11]

Загальна сума квадратів відхилень (загальна варіація) визначає варіацію між загальним середнім і кожним результатом вимірювання та вираховується за формулою:

$$S_{заг} = \sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_0)^2 \tag{5.43}$$

В залежності від числа факторів, що впливають на спортивний результат чи результативну ознаку, дисперсний аналіз може бути *однофакторним* і

---

[11] Символ $\sum_i \sum_j x_{ij}$ означає додавання всіх елементів таблиці. Читається як сума сум

багатофакторним. Фактори розподіляються на контрольовані (керовані) та неконтрольовані (некеровані). Наприклад, об'єм тренувальних навантажень, спеціалізація спортсменів, їх кваліфікація – керовані фактори, а емоційний стан, працездатність, погодні умови – некеровані фактори.

Дисперсний аналіз дозволяє оцінювати вплив на варіацію результативної ознаки як окремо взятих факторів, так і їх можливих поєднань. Окрім цього, цей метод має суттєве значення в теорії тестів при оцінці коефіцієнтів надійності [7, 17].

5.10.1. Однофакторний дисперсний аналіз [5, 17]

Основне передбачення, яке перевіряється за допомогою дисперсійного аналізу – це відсутність суттєвої різниці між груповими середніми при повторних випробуваннях. У випадку коли повторні випробування не мають сильного взаємозв'язку (некорельовані), використовується метод однофакторного дисперсного аналізу. Модель цього методу основана на тому, що $S_{заг}$=$S_{між}$+$S_{внут}$, тобто загальна варіація розподіляється на між групову і внутрішньо групову варіації.

Умови використання однофакторного дисперсного аналізу [5]:

1. Набір даних складається із *К* випадкових вибірок із *К* генеральних сукупностей.
2. Всі генеральні сукупності мають нормальне розподілення та однакові стандартні відхилення $-\mathrm{S}_1 = S_2 = ... = S_\mathrm{k}$ це дозволяє використовувати для перевірки гіпотези стандартні статистичні таблиці.
3. Нульова гіпотеза:

$H_0 : \bar{x}_{ген1} = \bar{x}_{ген2} = ... = \bar{x}_{генк}$ (всі середні рівні між собою).

Альтернативна гіпотеза:

$H_1 : \bar{x}_{генi} \neq \bar{x}_{ген\,j}$ у крайньому випадку для однієї пари генеральної сукупності (не всі середні рівні).

4. F – статистика для однофакторного аналізу визначається в такій послідовності:

➢ Визначається загальний об'єм вибірки *n*:

$$n = n_1 + n_2 .... + n_к = \sum_{i=1}^{k} n_i , \qquad (5.44)$$

де: n_i – об'єм *i-й* вибірки; *k* – кількість вибірок.

➢ Вираховується значення середнє $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + ... + n_к x_к}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{к} n_i \bar{x}_i}{n} . \qquad (5.45)$$

➢ Вираховується значення міжгрупової варіації:

$$S^2_{між} = \frac{n_1(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)^2 + n_2(\bar{x}_2 - \bar{x}_0)^2 + ... + n_k(x_k - x_0)^2}{k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\,(\bar{x}_i - \bar{x})^2}{k-1} , \qquad (5.46)$$

де: *k – 1* – число ступенів свободи.

➢ Вираховується значення внутрішньогрупової варіації:

$$S^2_{внутр} = \frac{(n_1-1)(S_1)^2+(n_2-1)(S_2)^2+...+(n_k-1)(S_k)^2}{n-k} = \frac{\kappa\sum_{i=1}^{\kappa}(n_1-1)(S_i)^2}{n-k}, \qquad (5.47)$$

де: $n - k$ – число ступенів свободи

➢ F – статистика для одно факторного дисперсного аналізу.

$$F = \frac{S^2_{між}}{S^2_{внутр}}. \qquad (5.48)$$

Варто зазначити, що *F* – статистика має два значення числа ступенів свободи: *k – 1* (чисельник) і *n – k* (знаменник).

Результат є статистично значущим, якщо значення *F* – статистики ($F_{розр}$) більше критичного значення, оскільки в цьому випадку є суттєва різниця між вибірковими середніми. Гіпотеза H_0 відхиляється та приймається альтернативна гіпотеза H_1.

Результат не є статистично значущим, якщо значення *F* – статистики ($F_{розр}$)менше критичного значення, середні вибірки несуттєво відрізняються одна від одної. Гіпотеза H_1 відхиляється.[12]

5.11. Факторний аналіз [1, 6, 9, 15, 18]

Факторний аналіз (лат. *faktor* той, що виконує; *analisis*) – статистичний метод, який розроблений в працях С. Спірмена, Г. Томпсона, Л. Терстоуна і в деяких інших, особливо ефективний у випадках, коли немає надійно обґрунтованих теорій або чітко сформованих гіпотез, а мета дослідження – у виявлені смислових залежностей між перемінними. Метод дає можливість із задовільною точністю розрахувати структуру кореляційних залежностей між відносно великим числом факторів (чинників), що спостерігаються, а тому є незрозумілий зв’язок між ними, і замінити меншим числом факторів, що приймаються в якості основних значущих перемінних. Головна мета факторного аналізу – зменшення інформації, економний опис експериментальних даних, тобто, факторний аналіз дає можливість більш економного опису вихідних взаємозв’язків при використанні меншого числа факторів, ніж вихідних показників [9, 18].

Вихідними даними факторного аналізу є показники тестування в спортсменів (i=1,2,3…..i,…, N) за n тестами (j=1,2,3…,j,…, n). Вони ґрунтуються в табл. 5.18[13].

Дані, що внесені в табл. 5.18, в ході експерименту дозволяють побудувати матрицю, яка складає вихідну математичну систему факторного аналізу.

[12] Приклад, проведення однофакторного дисперсного аналізу на основі емпіричних даних наведений в 2-му розділі посібника

[13] Начинська С.В. Спортивная метрология : Учеб. Пособие для студ. высш. учеб. Заведений. – М.: Издательський центр „Академия“, 2005. – С. 170-183.

$$x=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2N} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3i} & \dots & a_{3N} \\ \dots & \dots. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nN} \end{pmatrix}$$

де a_{ji} – показник тестування; j – перший індекс показника тестування, який вказує на номер тесту; i – другий індекс показника тестування, який вказує на номер спортсмена; N – кількість спортсменів; n – кількість тестів; x - факторна матриця.

Практично така матриця виглядає як набір вихідних даних.

Таблиця 5.18

Вихідні дані факторного аналізу

Тест	Спортсмен					
	1	2	3	…	i	…	*N*
1 2 3 … *j* ... *n*							

Приклад. Сім хлопчиків у віці 10 років були протестовані для оцінки рівня фізичних здібностей за такими тестами:

Тест 1: біг 30 м з високого старту, с;

Тест 2: стрибки в довжину з місця, см;

Тест 3: човниковий біг 3×10 м, с;

Тест 4: нахили вперед із положення сидячи на підлозі, см.

Тест 5: шести хвилинний біг, м.

Результати тестування зведені у факторну матрицю *X.* вихідні дані представлені в табл. 5.19.

Таблиця 5.19

Результати тестування фізичних здібностей хлопчиків (С. В. Начинська [15])

Тест	Досліджуваний						
	1	2	3	4	5	6	7
1	5,1	5,4	5,5	5,6	5,2	5,3	5,8
2	182	175	172	170	180	184	165
3	8,5	9,0	9,1	9,2	8,8	8,9	9,3
4	8,5	7,0	7,0	8,0	6,0	7,0	8,0
5	1300	1150	1100	1200	1300	1350	1250

Вихідні дані можна представити у вигляді факторної матриці *X*.

$$\begin{pmatrix} 5,1 & 5,4 & 5,5 & 5,6 & 5,2 & 5,3 & 5,8 \\ 182 & 175 & 172 & 170 & 180 & 184 & 165 \\ 8,5 & 9,0 & 9,1 & 9,2 & 8,8 & 8,9 & 9,3 \\ 8,5 & 7,0 & 7,0 & 8,0 & 6,0 & 7,0 & 8,0 \\ 1300 & 1150 & 1100 & 1200 & 1300 & 1350 & 1250 \end{pmatrix}$$

Даний приклад показує, що кількість досліджуваних і кількість тестів можуть мати великі об'єми, тому матриця *X* може представляти собою так зване «полотнище».

Окрім цього, структура факторного аналізу, яка достатньо обґрунтовано розроблена математиками, повністю основана на факторній матриці *X,* так що елементами матриці можуть виступати не тільки досліджувані, а також і інші показники, що характеризуються за двома ознаками. Наприклад, це може бути зведена відомість успішності учнів, де в якості тестів виступають навчальні дисципліни, а досліджуваних – шкільні оцінки (12,11,10,9,8,7 і т.д). Елементами матриці виступає кількість учнів, які отримали по предмету (рядок) певну оцінку (стовпець) [15].

Таким чином, вихідними даними факторного аналізу є факторні матриці, отримані емпіричним шляхом.

Подальші дії зосереджуються на пошуку зв'язків між тестами і досліджуваними, тобто вияснється вплив кожного тесту на кожного досліджуваного.

Для оцінки такого впливу визначаються коефіцієнти кореляції, які також розміщуються в матриці, яка називається кореляційною матрицею R.

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1i} & \dots & r_{1N} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2i} & \dots & r_{2N} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & \dots & r_{3i} & \dots & r_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{j1} & r_{j2} & r_{j3} & \dots & r_{ji} & \dots & r_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & rn_{2} & r_{n3} & \dots & r_{ni} & \dots & r_{nN} \end{pmatrix}$$

Зазвичай кореляційна матриця представляється у вигляді так званої «Косинки», тобто матриці трикутного виду. Це пояснюється тим, що коефіцієнти кореляції $r_{ij} = r_{ji}$. Таким чином, $r_{21}=r_{12}$ $r_{13}=r_{31}$. Для того, щоб уникнути повторів формують матричну косинку.

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1i} & \dots & r_{1N} \\ & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2i} & \dots & r_{2N} \\ & & r_{33} & \dots & r_{3i} & \dots & r_{3N} \\ & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & r_{ji} & \dots & r_{iN} \\ & & & & & \dots & \dots \\ & & & & & & r_{nN} \end{pmatrix}$$

На основі вихідних даних формулюється мета факторного аналізу. Вона заключається в тому, щоб велику кількість вихідних даних, які складають первинний протокол спостережень (табл. 5.19), можна було б замінити на інші показники без втрати вихідної інформації.

Ці нові показники, з одного боку, за кількістю значно менше вихідних, що дозволяє досліднику отримувати легко інтерпретований матеріал, а з іншого боку вони виражають змістовно однорідні ознаки, що впливають на результат тестування. Такі показники називаються факторними. Загальне математичне формулювання відповідає формулі:

$$S_{ij} = a_{j1}F_{1i} + a_{i2}F_{2i} + ... + a_{iq}F_{qi} \quad (5.49)$$

де: S_{ij} – загальна оцінка властивостей досліджуваних; j – тест; i – досліджуваний; F – фактори, тобто, ознаки, що впливають на результат тестування; a_{ij} – навантаження фактору, тобто, специфічний коефіцієнт, що вказує на «наповнення» властивостей j-го досліджуваного i-м фактором.

Іншими словами, навантаження вказує, в якому об'ємі даний фактор впливає на властивість досліджуваних.

Властивості S_{ij} відповідають i-му досліджуваному за i-м тестом. Оскільки досліджуваних усього N, а тестів n, формула (5.49) дає стовпці даних, в яких елементами виступають навантаження факторів за всіма тестами, а кількість стовпців відповідає кількості знайдених факторів.

Кількісна інтерпретація показує, що дослідник отримує так зване наповнення факторів – стовпці факторних навантажень у вигляді коефіцієнтів кореляції, які за рядками співпадають з номерами тестів. Завдання заключаються в тому, щоб ідентифікувати, тобто, визначати змістовний смисл кожного фактору, відштовхуючись від найбільших навантажень (від тих тестів, які здійснюють найбільший вплив на властивості досліджуваних).

Отже, факторному аналізу повинен передувати етап контрольних випробувань (тестування) за різними компонентами діяльності. Так, наприклад, при тестуванні в спортивних іграх необхідно включити в аналіз ігрові показники (техніко-тактичні), комплекс показників, що характеризують фізичні якості, антропометричні дані, психофізіологічні показники тощо [1].

Отримані дані служать основою для кореляційного аналізу. Кореляція є мірою статичного зв'язку двох чи декількох перемінних. При цьому класичний коефіцієнт кореляції Браве-Пірсона призначених для характеристики „тісноти" зв'язку в двомірному розподілені при лінійній залежності між показниками, що досліджуються.

Кореляційний аналіз є вихідним матеріалом для факторного аналізу. Чим більша величина r, тим більша тіснота зв'язку між ознаками.

Факторний аналіз зводиться до перетворення матриці інтеркореляцій тестів до матриці факторних навантажень меншої розмірності.

Найбільш часто при проведені факторного аналізу використовується опрацювання кореляційної матриці методом головних компонент. В основному процедура виділення головних компонент подібна обертанню, що максимізує дисперсію (варімакс) вихідного простору перемінних. Наприклад, на діаграмі розсіювання розглядається лінія регресії як вісь *X*, повернувши її так, що вона співпадає з прямою регресії. Цей тип обертання називається обертанням, щ максимізує дисперсію, так як критерій (мета) обертання заключається в максималізації нової перемінної (фактору) і мінімізації відхилення навколо неї [5].

Аналіз головних компонент є методом скорочення чи редукції даних (методом скорочення числа перемінних).

Зокрема факторний аналіз опрацювання кореляційної матриці методом головних компонент використовується для аналізу змагальної діяльності спортсменів ігрових видів спорту[14].

Для матриці нормованих вихідних даних $Y = (y_{ij})$, де: $i = 1, \ldots m$ – індекс перемінних; $j = 1 \ldots n$ – індекс спостережень.

Модель методу головних компонент має наступний вид: $Y = A \cdot F$.

Матриця «*A*» називається матрицею факторних навантажень та пов'язана із кореляційною матрицею *h* співвідношенням $h = A \cdot A'$; де A' – трансформована матриця *A*. З іншого боку, $A' \cdot A = Л$, де: *Л* позначає діагональну матрицю, в якій знаходяться матриці *R*.

Матриця факторних навантажень «*A*» зазвичай використовується не повністю, беруться лише головні компоненти, що відповідають її стовпцям, які описують достатній відсоток дисперсій вихідних ознак. У всякому разі їх число повинно бути не менше числа власних значень кореляційної матриці, що перевершує одиницю.

Потім факторна матриця підлягає варімаксному обертанню для досягнення простої факторної структури, в якій у більшій мірі спостерігаються існуючі зв'язки перемінних. Повернута матриця факторних навантажень є основним джерелом аналізу.

Заключним етапом факторного аналізу є інтерпретація факторів. Практично вона заклечається у вивчені та розподілені значущих факторних навантажень по кожному із факторів.

Таким чином, факторний аналіз дає можливість більш економного опису вихідних взаємозв'язків при використані меншого числа факторів, ніж вихідних показників. Наприклад в спортивних іграх факторний аналіз може використовуватись як один із методів вивчення особливостей змагальної діяльності.

Приклад: факторний аналіз змагальної діяльності футболістів (воротарі) [1].

Кореляційна матриця включає 16 показників воротарів вищої та першої ліг: довжина тіла – 182,0; маса тіла – 79,0; кількість ударів – 12,7; кількість голів – 0,88; відсоток ефективності – 93,4; концентрація уваги – 5,67; об'єм уваги – 4,06; розподіл уваги – 6,78; диференціровка – 1 – 884; диференцірофка – 2 – 716; диференціровка – 3 – 168; комунікативність – 4,70; спокій – 4,90;

[14] Факторный анализ игровой деятельности спортсменов. В кн.: Специализация в спортивных играх/ В.З. Бабушкин. – К.: Здоровья, 1991. – С. 78 – 129

агресивність – 4,70; ЕОТ – 4,90; СІМ – 4,90. Були вирахувані середні величини $(\bar{x})$ та їх похибки.

Аналіз кореляційної матриці виявив наявність тісноти зв'язку між ростом воротарів і масою їх тіла (*r*=0,923); диференціровкою – 1 і кількістю ударів (*r*=0,470); диференціровкою – 3 і кількістю ударів (*r*=0,483); комунікативністю і відсотком ефективності (r=0,543); спокоєм і диференціровкою – 3 (*r*=782); спокоєм та ігровою агресивністю (*r*=0,900); ЕОТ і кількістю голів (*r*= –0,603); ЕОТ і диференціровкою – 3 (*r*= –0,608); СІМ і ЕОТ (*r*=0,509)та ін.

Факторний аналіз дозволив виявити ряд факторів, що визначають успішність змагальної діяльності воротарів у футболі. Результати аналізу представлені у факторній матриці (табл. 5.20).

Перший фактор (F_1) інтерпретований як психологічний. Найбільш вагомі факторні показники мають диференціровка – 2 (*r*=0,940), показник ігрової комунікативності (*r*=0,884) і показник концентрації уваги (*r*=0,736).

Другий фактор (F_2) – антропометричний в якому високі коефіцієнти довжини тіла (*r*=0,963) і маси тіла (*r*=0,976) є узагальнюючому факторі з об'ємом уваги (*r*=0,912) і спокоєм (*r*=0,546).

Третій фактор *(F_3)* – ефективність діяльності де високим є відсоток ефективності гри воротаря *(r=0,917)*. В цьому факторі значущі навантаження відмічені в показниках диференціровки – 3 *(r=0,773),* а також у показнику спокою (*r*=0,671) і ЕОТ (r=0,632).

Четвертий фактор (F_4) названий особисто-ігровим. В цьому факторі найбільш значущі кореляційні показники ігрової агресивності (*r=0,761*) і кількості відбитих ударів (*r=0,689*).

Таблиця 5.20

Факторний аналіз діяльності воротарів (футбол) (В. З. Бабушкін [1])

Параметри	Фактори			
	I	II	III	IV
Довжина тіла	-	0,963	-	-
Маса тіла	-	0,976	-	-
Кількість ударів	0,485	-	-	-
Кількість голів	-	-	- 0,927	0,249
Відсоток ефективності	-	-	0,926	-
Концентрація уваги	0,736	- 0,565	-	0,273
Об'єм уваги	-	0,917	-	-
Розподілення уваги	-	-	0,248	-0,779
Диференціровка – 1	0,866	-	-	-
Диференціровка – 2	0,940	-	-	-
Диференціровка – 3	-	-	0,773	0,274
Комунікативність	0,884	-	-	-
Спокій	-	0,546	-	-
Агресивність	-	-	-	0,761
ЕОТ	-	-	-	-
СІМ	-	-	-	-
Внесок факторів,%	33	23	18	11

Всі чотири узагальнюючі фактори складають 85% загальної дисперсії: $F_1=33\%$; $F_2=23\%$; $F_3=18\%$; $F_4=11\%$. Найбільший внесок в успішність специфічної діяльності воротаря у перших трьох факторах (74%).

Таким чином, факторний аналіз, не дивлячись на математичну складність і великий об'єм розрахунків, є достатньо необхідним для оцінки науково-дослідної роботи в сфері фізичного виховання та спорту.

Цей метод використовується у випадку необхідного програмного комп'ютерного забезпечення, а також творчого потенціалу спеціалістів, які в емпіричних дослідженнях використовують математико-статистичні методи.

Резюме

Статистичні методи опрацювання результатів вимірювань є однією із основних складових частин метрологічного контролю. Вони дозволяють не лише об'єктивно проаналізувати інформацію стосовно спортивних вимірювань, але й на основі результатів цих вимірювань зробити узагальнюючі висновки відносно ефективності наукових досліджень в тій чи іншій сфері фізичного виховання та спорту.

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте основні поняття математичної статистики.
2. Які Ви знаєте основні статистичні характеристики?
3. Що Ви розумієте під теоретичним та емпіричним розподіленням результатів вимірювань?
4. Щ таке варіаційний ряд?
5. Що Ви розумієте під вибіркою та генеральною сукупностями?
6. Що Ви розумієте під репрезентативністю вибірки?
7. Як визначається необхідний об'єм вибірки?
8. Що таке довірчий інтервал?
9. Що називають рівнем значущості?
10. Що таке статистична гіпотеза?
11. Як здійснюється перевірка статистичних гіпотез?
12. Охарактеризуйте параметричні критерії t-Стьюдента і F-Фішера.
13. Які Ви знаєте непараметричні критерії та їх основні особливості?
14. За допомогою яких критеріїв перевіряється гіпотеза про нормальне розподілення результатів вимірювань?
15. Що таке кореляційний зв'язок?
16. В чому заключається основний смисл кореляційного аналізу?
17. Які Ви знаєте коефіцієнти кореляції та за якими формулами вони визначаються?
18. Що таке кореляційне поле?
19. За якою формулою описується рівняння прямолінійної регресії?
20. Як знаходяться параметри рівняння регресії?
21. Яка основна мета проведення дисперсного аналізу;
22. Для чого необхідний факторний аналіз?
23. В чому заключається метод факторного аналізу за допомогою головних компонент?

Література

1. Бабушкин В. З. Специализация в спортивных играх. / В. З. Бабушкин. — Киев, 1991. — 164 с.
2. Баландин В. И. Прогнозирование в спорте / В. И. Баландин, Ю. В. Блудов, В. А. Плахтиенко. — М. : Физкультура и спорт, 1986. — 193 с.
3. Боровиков В. П. STATISTICA : искусство анализа данных на компьютере. Для профессионалов / В. П. Боровиков. — СПб: Питер, 2001. — 656 с.
4. Годик М. А. Спортивная метрология : учеб. для ин-тов физ. культ. / М. А. Годик. — М. : Физкультура и спорт, 1988. — 192 с.
5. Денисова Л. В. Измерение и методы математической статистики в физическом воспитании и спорте : уч. пособие для вузов / Л. В. Денисова, И. В. Хмельницкая, Л. А. Харченко. — К. : Олимпийская литература, 2008 — 127 с.
6. Закс Л. Статистическое оценивание. Пер с нем. / Л. Закс. — М : Статистика, 1976. — 598 с.
7. Зациорский В. М. Кибернетика, математика, спорт. / В. М. Зациорский. — М. : Физкультура и спорт, 1969. — 198 с.
8. Зациорский В. М. Основы спортивной метрологии. / В. М. Зациорский. — М. : Физкультура и спорт, 1979. — 152 с.
9. Коренберг В. В. Спортивная метрология : словарь-справочник : уч. пособие / В. В. Коренберг. — М. : Советский спорт, 2004. — 340 с.
10. Костюкевич В.М. Теоретичні та методичні основи моделювання тренувального процесу спортсменів ігрових видів спорту: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня доктора наук з фіз. вих. та спорту: спец. 24.00.01 «Олімпійський і професійний спорт» / В.М. Костюкевич. – Київ, 2012. – 41 с.
11. Костюкевич В. М. Факторна структура спеціальних здібностей висококваліфікованих хокеїстів на траві різних ігрових амплуа / В. М. Костюкевич // Теорія і методика фізичного виховання і спорту. — 2011. — № 2. — С. 21—27.
12. Костюкевич В. М. Теорія і методика спортивної підготовки (на прикладі командних ігрових видів спорту). Навчальний посібник. / В. М. Костюкевич. – Вінниця : Планер, 2014. — 616 с.
13. Масальгин Н. А. Математико-статистические методы в спорте / Н. А. Масальгин. — М. : Физкультура и спорт, 1991. — 199 с.
14. Начинская С. В. Основы спортивной статистики / С. В. Начинская. — К. : Вища школа, 1987. — 190 с.
15. Начинская С. В. Спортивная метрология: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. / С. В. Начинская. — М. : Издательский центр «Академия», 2005. — 240 с.
16. Основы математической статистики : учеб. пособ. [для институтов физ. культуры] / [под редакцией В. С. Иванова]. — М. : Физкультура и спорт, 1990. — 176 с.
17. Спортивная метрология : учеб. [для ин-тов физ. культ.] / [под ред. В. М. Зациорского]. — М. : Физкультура и спорт, 1982. — 256 с.
18. Vincent W. I. Statistics in kinesiology / W. I. Vincent. — 3 rd ed. Champaign : Human Kinetics, 2005. — 312 p.