

УДК 517.97

Сергій Бак,
докт. фіз.-мат. наук, професор,
професор кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Галина Ковтонюк,
канд. пед. наук, доцент,
доцент кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Степан Кізім,
студент факультету математики, фізики
і комп'ютерних наук
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

МЕТОД УМОВНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ В ЗАДАЧІ ПРО ІСНУВАННЯ ВІДОКРЕМЛЕНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В СИСТЕМІ ТИПУ ФЕРМІ– ПАСТИ–УЛАМА–ЦИНГУ

Анотація. У статті досліджуються нескінченні системи типу Фермі–Пасті–Улама–Цингу з локальною взаємодією. За допомогою методу умовної мінімізації встановлено умови існування розв'язків таких систем у вигляді відокремлених біжучих хвиль.

Ключові слова: системи типу Фермі–Пасті–Улама–Цингу, відокремлені біжучі хвилі, метод умовної мінімізації, принцип концентрованої компактності.

Abstract. The paper investigates infinite Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou-type systems with local interaction. Using the method of constrained minimization, conditions for the existence of solutions in the form of solitary traveling waves are established.

Keywords: Fermi–Pasta–Ulam–Tsingou-type systems, solitary traveling waves, constrained minimization method, concentration-compactness principle.

Вступ. У цій статті вивчається однорідний ланцюг типу Фермі–Пасті–Улама–Цингу ([12]), в якому кожна частинка нелінійно взаємодіє з двома своїми найближчими сусідніми частинками. Рівняння руху такого ланцюга мають вигляд:

$$\ddot{q}_n(t) = U'(q_{n+1}(t) - q_n(t)) - U'(q_n(t) - q_{n-1}(t)), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Зауважимо, що рівняння (1) є зчисленною системою звичайних диференціальних рівнянь.

Зауважимо, що системи типу Фермі–Пасти–Улама–Цингу належать до широкого класу дискретних нескінченновимірних гамільтонових систем. До таких систем також належать подібні за структурою і походженням дискретні рівняння типу Клейна–Гордона. Важливим класом розв’язків таких систем є біжучі хвилі. В статтях [1; 2; 4–6; 9; 11; 13–16; 19; 20] вивчалось питання існування біжучих хвиль в дискретних рівняннях типу Клейна–Гордона та системах типу Фермі–Пасти–Улама–Цингу з локальною взаємодією. Біжучі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна–Гордона та системах типу Фермі–Пасти–Улама–Цингу з нелокальною взаємодією вивчались в працях [3; 7; 8; 10; 17].

Постановка задачі. Будемо вивчати розв’язки системи (1) у вигляді біжучих хвиль:

$$q_n(t) = u(n - ct), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Зазначимо, що функція $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – називається *профілем* біжучої хвилі, а стала c представляє собою *швидкість хвилі*. Якщо $c > 0$, то хвиля рухається вправо, а якщо $c < 0$, то – вліво.

Підставляючи розв’язок (2) в систему (1), одержуємо рівняння для профілю біжучої хвилі

$$c^2 u''(s) = U'(u(s+1) - u(s)) - U'(u(s) - u(s-1)), \quad (3)$$

де

$$s = n - ct.$$

Позначимо через

$$r(s) := u(s+1) - u(s).$$

Оскільки

$$r(n - ct) = q_{n+1}(t) - q_n(t),$$

то $r(s)$ називають *профілем відносних зміщень*.

Під розв'язком рівняння (3) будемо розуміти таку двічі неперервно-диференційовну функцію $u \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, яка при підстановці в це рівняння перетворює його на правильну рівність.

Нас цікавлять так звані локалізовані розв'язки (відокремлені біжучі хвилі) з профілями, які задовольняють умову:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} u'(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} u'(s) = u'(\pm\infty) = 0. \quad (4)$$

Варто зауважити, що профілі періодичних хвиль не є обов'язково періодичними, але періодичними є їх профілі швидкостей, а отже, і профілі відносних зміщень, оскільки

$$r(s) = \int_s^{s+1} u'(\tau) d\tau.$$

Введемо два гільбертів простір

$$X := \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}) : u' \in L^2(\mathbb{R}), u(0) = 0\},$$

для елементів якого скалярний добуток визначено таким чином

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} u'(s) v'(s) ds.$$

Зауважимо, що елементи простору X автоматично задовольняють умову (4).

На цьому просторі розглянемо функціонал

$$J(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{c^2}{2} (u'(s))^2 - U(Au(s)) \right) ds, \quad (5)$$

де

$$(Au)(s) := u(s+1) - u(s).$$

На потенціал U накладемо таку умову:

(h) *потенціал U є неперервно-диференційовним на $\mathbb{R}$, причому $U(0) = U'(0) = 0$ і для деякого $r > 0$*

$$\sup_{|x| \leq r} \left| \frac{U'(x)}{x} \right| < +\infty.$$

Олександр Панков в праці [16] показав, що за виконання умови (h) функціонал J є коректно визначеним і неперервно-диференційовним на просторі X , а його критичні точки є розв'язками рівняння (3), які задовольняють умову (4).

Задача умовної мінімізації. На просторі X розглянемо два функціонали

$$T(u) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (u'(s))^2 ds,$$

$$W(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} U(u(s+1) - u(s)) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} U(Au(s)) ds.$$

Зауважимо, що з фізичної точки зору ці функціонали визначають відповідно середні кінетичну і потенціальну енергії хвилі.

Далі розглянемо таку задачу умовної мінімізації:

для заданого $\theta > 0$ знайти $u \in X$, для якого існує $\inf_{u \in X} \{T(u) : W(u) = \theta\}$. (6)

Таким чином, з фізичної точки зору задача (6) полягає у мінімізації середньої кінетичної енергії за умови, що середня потенціальна енергія є фіксованою.

Позначимо через

$$A_\theta := \{u \in X : W(u) = \theta\},$$

$$T_\theta := \inf \{T(u) : u \in A_\theta\}.$$

Лема 1. Нехай потенціал $U \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $U(0) = 0$, $U(x) \geq 0$ в околі нуля та U є суперквадратичним принаймні з одного боку, тобто $x^{-2}U(x)$ строго зростає з $|x|$ для всіх $x \in \Omega$, де $\Omega = (-\infty, 0)$ або $\Omega = (0, +\infty)$. Тоді знайдеться $\theta_0 \geq 0$ таке, що для кожного $\theta > \theta_0$ функціонал T досягає свого мінімуму на A_θ .

Для доведення було використано принцип концентрованої компактності П.-Л. Ліонса [18].

Основний результат. Основним результатом статті, який випливає з леми 1, є така теорема:

Теорема 1. *Нехай потенціал $U \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, $U(0) = 0$, $U(x) \geq 0$ в околі нуля та U є суперквадратичним принаймні з одного боку, тобто $x^{-2}U(x)$ строго зростає з $|x|$ для всіх $x \in \Omega$, де $\Omega = (-\infty, 0)$ або $\Omega = (0, +\infty)$. Тоді знайдеться $\theta_0 \geq 0$ таке, що для кожного $\theta > \theta_0$ рівняння (3) має несталий розв'язок $u = u_\theta \in X$ (тобто система (1) має розв'язок у вигляді відокремленої біжучої хвилі) з $W(u_\theta) = \theta$ і деякою швидкістю $c = c_\theta > 0$. Крім того, біжучі хвилі u_θ є монотонними і надзвуковими хвилями, тобто $c_\theta > c_0 = \sqrt{U''(0)}$.*

Зауваження, що в статті [13] показано, що якщо U є субквадратичним, тобто $x^{-2}U(x)$ незростаюча функція з $|x|$, то для кожного $\theta > 0$ мінімум функціоналу T на A_θ не досягається.

Таким чином, у цій статті встановлено існування відокремлених біжучих хвиль в системі типу Фермі–Пасти–Улама–Цингу за допомогою методу умовної мінімізації середньої кінетичної енергії за умови, що середня потенціальна енергія є фіксованою.

Література:

1. Bak S. M. Periodic traveling waves in chains of oscillators. *Communications in Mathematical Analysis*. 2007. Vol. 3, № 1. P. 19–26.
2. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50, № 1. P. 75–87.
3. Bak S. M., Kovtoniuk H.M. Existence of solitary traveling waves in discrete Klein-Gordon-type equations with nonlocal interaction. *Український математичний вісник*. 2024. Т. 21, № 3. С. 296–311.
4. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Український математичний вісник*. 2020. Т. 17, № 3. С. 301–312.
5. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling solitary waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. *Український математичний вісник*. 2022. Т. 19, № 4. С. 450–461.

6. Bak S. M., Kovtoniuk H. M. Exponential decay of solitary traveling wave solutions to the Fermi–Pasta–Ulam-type systems on 2D lattice. *Український математичний вісник*. 2025. Т. 22, № 1. С. 1–9.
7. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Periodic traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam type systems with nonlocal interaction on 2d-lattice. *Mat. Stud.* 2023. Vol. 60, № 2. P. 180–190.
8. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Solitary traveling waves in Ferm-Pasta-Ulam type systems with nonlocal interaction on 2D-lattice. *Український математичний вісник*. 2024. Т. 21, № 1. С. 1–15.
9. Bak S., Kovtoniuk H., Kizim S., Cherniienko A. On solitons in Fermi–Pasta–Ulam-type systems. *Актуальні проблеми математики, фізики і комп'ютерних наук* : зб. наук. пр. [Електронне мережне наукове видання]. Вінниця, 2025. Вип. 22. С. 4–9.
10. Bates P.W., Zhang C. Traveling pulses for the Klein-Gordon equation on a lattice or continuum with long-range interaction. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2006. Vol. 16, № 1. P. 235–252.
11. Feckan M., Rothos V. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbor interactions. *Nonlinearity*. 2007. Vol. 20. P. 319–341.
12. Fermi E., Pasta J., Ulam S., Tsingou M. Studies of nonlinear problems. Los Alamos Sci. Lab. Rept. LA-1940. 1955. Reprinted in *Lect. Appl. Math.* 1974. Vol. 15. 156 p.
13. Friesecke G., Wattis J. Existence theorem for solitary waves on lattices. *Comm. Math. Phys.* 1994. Vol. 161 (2). P. 391–418.
14. Iooss G., Kirschgässner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. *Commun. Math. Phys.* 2000. Vol. 211. P. 439–464.
15. Iooss G., Pelinovsky D. Normal form for travelling kinks in discrete Klein-Gordon lattices. *Physica D*, 2006. Vol. 216. P. 327–345.
16. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices. London-Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.
17. Pankov A. Traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam chains with nonlocal interaction. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2019. Vol. 12, № 7. P. 2097–2113.
18. Lions P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case I, II. *Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire*. 1984. Vol. 1. P. 223–238.
19. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2014. Т. 57, № 3. С. 45–52.
20. Бак С. М., Панков О. А. Біжучі хвилі в системах осциляторів на двовимірних ґратках. *Український математичний вісник*. 2010. Т. 7, № 2. С. 154–175.