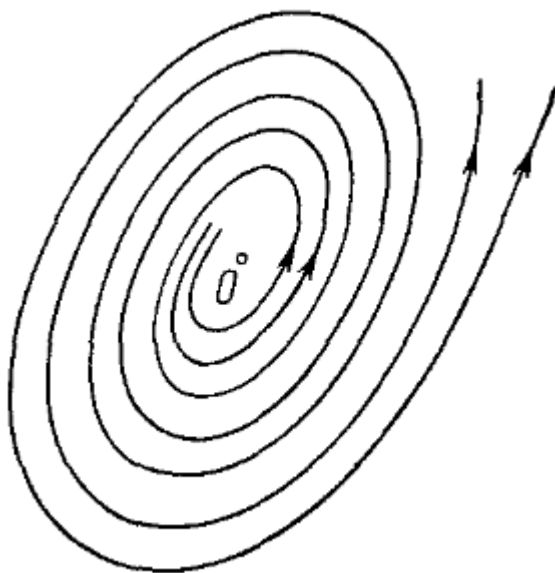


Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет математики, фізики і комп'ютерних наук

Кафедра математики та інформатики

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
*з вибраних питань теорії диференціальних
рівнянь*

(для студентів спеціальності Е7 Математика)



Вінниця 2026

*Схвалено і рекомендовано до видання вченою радою факультету
математики фізики і комп'ютерних наук,
протокол №2 від 30.09.2026 року.*

Рецензенти: доктор педагогічних наук,
професор **Ковтонюк М. М.**,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Панасенко О. Б.**

Бак С. М. Робочий зошит студента з вибраних питань теорії
диференціальних рівнянь (для студентів спеціальності Е7
Математика) [Електронне видання]. Вінниця, 2026. 23 с.

Індивідуальний робочий зошит студента

Дисципліна: вибрані питання теорії диференціальних рівнянь

Розділи: Крайові задачі. Основи теорії стійкості

Автор-укладач: доктор фізико-математичних наук, професор
Бак Сергій Миколайович

Передмова

Робочий зошит з вибраних питань теорії диференціальних рівнянь призначений для використання студентами спеціальності E7 Математика при вивченні розділів «Крайові задачі» та «Основи теорії стійкості».

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних розділів, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю.

Робочий зошит складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання та зразків текстів контрольних робіт. До кожного заняття подано запитання для самопідготовки.

Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

Робочий план студента

Робочий план студента складений на основі навчальної програми з додаткових розділів диференціальних рівнянь.

Таблиця 1. Розподіл годин

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	денна форма					
	усього	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	с.р.
1	2	3	4	5	6	7
Розділ 1. Крайові задачі						
Тема 1. Крайові задачі для рівнянь другого порядку	20	2	4	0	0	14
Тема 2. Функція Гріна	20	2	4	0	0	14
Разом за розділом 1	40	4	8	0	0	28
Розділ 2. Основи теорії стійкості						
Тема 1. Поняття стійкості та асимптотичної стійкості	18	2	1	0	0	15
Тема 2. Дослідження стійкості за першим наближенням	18	2	1	0	0	15
Тема 3. Найпростіші точки спокою для системи двох лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами	21	4	2	0	0	15
Разом за розділом 2	23	4	4	0	0	15
Усього годин	80	12	8	0	0	60
	120	16	16	0	0	88

Таблиця 1. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Крайові задачі для рівнянь другого порядку	2
2.	Розв'язання неоднорідної крайової задачі за допомогою функції Гріна	2
3.	Крайові задачі на власні значення	2
4.	Контрольна робота	2

5.	Стійкість за Ляпуновим. Метод функцій Ляпунова	2
6.	Дослідження стійкості за першим наближенням. Критерій Раussa-Гурвіца	2
7.	Точки спокою для лінійних однорідних систем зі сталими коефіцієнтами	2
8.	Контрольна робота	2
	Разом:	16

Таблиця 3. Розподіл балів за видами контролю та самостійної роботи

№	Вид поточного контролю та самостійної роботи	Кількість балів
1.	Домашні завдання	10
2.	Конспект	10
3.	Контрольна робота 1	20
4.	Контрольна робота 2	20
5.	Колоквіум	10
Загальна кількість балів за поточний контроль		70
Підсумковий контроль (екзамен)		30
Загальна кількість балів		100

Таблиця 4. Шкала оцінювання: сто балова, ECTS, розширена

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за розширеною шкалою
		<i>Для екзамену, заліку, курсової роботи, практики</i>
90-100	A	ВІДМІННО
80-89	B	ДУЖЕ ДОБРЕ
75-79	C	ДОБРЕ
60-74	D	ЗАДОВІЛЬНО
50-59	E	ДОСТАТНЬО
35-49	FX	НЕЗАДОВІЛЬНО З МОЖЛИВІСТЮ ПОВТОРНОГО СКЛАДАННЯ
1-34	F	НЕПРИЙНЯТНО З ОBOB'ЯЗКОВИМ ПОВТОРНИМ ВИВЧЕННЯМ ДИСЦИПЛІНИ

Практичне заняття № 1

Тема: **Крайові задачі для диференціальних рівнянь 2-го порядку**

Запитання для самопідготовки:

1. Поняття крайової задачі.
2. Класифікація крайових умов.
3. Однорідні і неоднорідні крайові задачі.

✎1. Знайти розв'язок однорідної крайової задачі:

- 1.1. $y'' - 3y' + 2y = 0, y(0) = y'(1) = 0.$
- 1.2. $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = y(2) = 0.$
- 1.3. $y'' + 5y' + 4y = 0, y(1) = 0, y'(2) + y(2) = 0.$
- 1.4. $y'' + y = 0, y'(0) = y'(\pi) = 0.$
- 1.5. $y'' + 6y' + 9y = 0, y(0) = y'(1) = 0.$
- 1.6. $y'' + 6y' + 25y = 0, y'(0) = y'(\pi) = 0.$
- 1.7. $y'' - 2y' + y = 0, y(-2) = y'(1) = 0.$
- 1.8. $y'' - 4y' + 5y = 0, y(-1) = y(0) = 0.$
- 1.9. $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = y(2) = 0.$
- 1.10. $y'' + 6y' + 13y = 0, y(0) = y(\pi) = 0.$

✎2. Знайти розв'язок неоднорідної крайової задачі:

- 2.1. $y'' + 2y' - 3y = x^2 + 3x + 1, y(1) = 0, y'(2) = 0.$
- 2.2. $y'' + 4y' - 5y = 2x - 1, y(0) = 1, y(2) = -1.$
- 2.3. $y'' + 5y' + 4y = 3x - 2, y(-1) = 0, y(1) = 0.$
- 2.4. $y'' - 6y' + 9y = e^x, y(0) = 0, y'(1) = 0.$
- 2.5. $y'' + 4y' + 4y = 0, y(-1) = 1, y(1) = 0.$

$$2.6. y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}, y'(0) = 1, y'(2) = 3.$$

$$2.7. y'' - 2y' + y = xe^x, y(0) = 2, y(1) = 3.$$

$$2.8. y'' - 4y' + 5y = \sin x, y'(-1) = 0, y'(0) = 0.$$

$$2.9. y'' - 6y' + 25y = \sin 4x, y(0) = 1, y'(\pi) = 0.$$

$$2.10. y'' - 6y' + 13y = 0, y'(0) = 1, y'(\pi) = 2.$$

Відповіді: 1.2. $y = 0.$ 1.4. $y = C \cos x.$ 2.1.

$$y = \frac{e^3(89e^4 - 75e^3)}{27(3 + e^4)}e^{-3x} + \frac{89 + 25e^3}{9e(3 + e^4)}e^x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{13}{9}x - \frac{41}{27}. \quad 2.3.$$

$$y = \frac{11e^8 - 35}{16e(e^6 - 1)}e^{-x} + \frac{e^2(35 - 11e^2)}{16(e^6 - 1)}e^{-4x} + \frac{3}{4}x - \frac{23}{16}. \quad 2.6. y = \left(-\frac{3}{8}e^{-4} + \frac{17}{8} + \left(\frac{3}{4}e^{-4} - \frac{13}{4}\right)x + x^2\right)e^{2x}.$$

$$2.9. y = e^{3x} \left(\frac{211}{219} \cos 4x - \frac{4 + 211e^{3\pi}}{292e^{3\pi}} \sin 4x \right) + \frac{8}{219} \cos 4x + \frac{1}{73} \sin 4x.$$

Практичне заняття № 2-3

Тема: Розв'язання неоднорідної крайової задачі за допомогою функції Гріна. Власні функції і власні значення

Запитання для самопідготовки:

1. Розв'язання неоднорідної крайової задачі за допомогою функції Гріна.
2. Крайова задача на власні значення.

1. Знайти розв'язок крайової задачі за допомогою функції Гріна:

$$1.1. y'' + 2y' - 3y = x + 1, y(1) = y'(\ln 2) = 0.$$

$$1.2. y'' + 4y = 2x - 1, y(0) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$1.3. y'' + 9y = 3x - 2, y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = y(0) = 0.$$

$$1.4. y'' - 6y' + 9y = e^x, y(0) = y'(\ln 3) = 0.$$

$$1.5. y'' + 4y' + 4y = e^{2x}, y(-\ln 3) = y(1) = 0.$$

$$1.6. y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}, y'(0) = y'(\ln 2) = 0.$$

$$1.7. y'' - 2y' + y = xe^x, y(0) = y(\ln 3) = 0.$$

$$1.8. y'' - 4y' + 5y = \sin x, y'(0) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$1.9. y'' - 6y' + 25y = \sin 4x, y(0) = 0, y'(\pi) = 0.$$

$$1.10. y'' - 6y' + 13y = x \cos 2x, y'(0) = 0, y'(\pi) = 0.$$

2. Знайти власні функції і власні значення крайової задачі:

$$2.1. y'' + \lambda y = 0, y(1) = 0, y'(2) = 0.$$

$$2.2. y'' - \lambda y = 0, y(0) = 1, y(2) = -1.$$

$$2.3. y'' + \lambda y = 0, y(-1) = 0, y(1) = 0.$$

$$2.4. y'' - \lambda y = 0, y(0) = 0, y'(1) = 0.$$

$$2.5. y'' + \lambda y = 0, y(-1) = 1, y(1) = 0.$$

$$2.6. y'' - \lambda y = 0, y'(0) = 1, y'(2) = 3.$$

$$2.7. y'' + \lambda y = 0, y(0) = 2, y(1) = 3.$$

$$2.8. y'' - \lambda y = 0, y'(-1) = 0, y'(0) = 0.$$

$$2.9. y'' + \lambda y = 0, y(0) = 1, y'(\pi) = 0.$$

$$2.10. y'' - \lambda y = 0, y'(0) = 1, y'(\pi) = 2.$$

Відповіді: 1.1. $y = \frac{1}{44} \left(\frac{1}{9} e^{-2x} (33x + 143) + e^{-3x} \left(\frac{20}{9} - \frac{1}{3} \ln 2 \right) - \frac{65}{24} e^x \right)$.

1.2. $y = \frac{1}{4} \left(\cos 2x - \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \sin 2x + 2x - 1 \right)$. 2.2. $\lambda = 0$ – власне

значення, $y = 1 - x$ – відповідна власна функція; всі $\lambda > 0$ є

власними значеннями, $y = \frac{e^{2\sqrt{\lambda}}}{e^{2\sqrt{\lambda}} - 1} e^{-\sqrt{\lambda}x} + \frac{1}{1 - e^{2\sqrt{\lambda}}} e^{\sqrt{\lambda}x}$ – відповідні

власні функції; всі $\lambda < 0$, $\lambda \neq -\frac{\pi^2 n^2}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, є власними

значеннями, $y = \cos \sqrt{-\lambda}x - \frac{1 + \cos 2\sqrt{-\lambda}}{\sin 2\sqrt{-\lambda}} \sin \sqrt{-\lambda}x$ – відповідні

власні функції; всі $\lambda = -\frac{\pi^2 (2n+1)^2}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, є власними

значеннями, $y = \cos \sqrt{-\lambda}x + C \sin \sqrt{-\lambda}x$ – відповідні власні

функції. 2.4. Немає власних значень і власних функцій. 2.9.

$\lambda = 0$ – власне значення, $y = 1$ – відповідна власна функція; всі

$\lambda < 0$ є власними значеннями, $y = \frac{e^{2\pi\sqrt{-\lambda}}}{e^{2\pi\sqrt{-\lambda}} + 1} e^{-\sqrt{-\lambda}x} + \frac{1}{e^{2\pi\sqrt{-\lambda}} + 1} e^{\sqrt{-\lambda}x}$ –

відповідні власні функції; всі $\lambda > 0$, $\lambda \neq \left(n + \frac{1}{2} \right)^2$, $n \in \mathbb{Z}$, є

власними значеннями, $y = \cos \sqrt{\lambda}x + \operatorname{tg} \pi \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x$ – відповідні
власні функції.

Практичне заняття № 4

⌘ Контрольна робота № 1 (зразок)

✍1. Знайти розв'язок однорідної крайової задачі:

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = y'(1) = 0.$$

✍2. Знайти розв'язок неоднорідної крайової задачі:

$$y'' - 6y' + 9y = e^x, \quad y(0) = y'(\ln 3) = 0.$$

Попередньо знайти загальний розв'язок.

✍3. Знайти розв'язок крайової задачі за допомогою функції Гріна:

$$y'' + 2y' - 3y = x + 1, \quad y(1) = y'(\ln 2) = 0.$$

✍4. Знайти власні функції і власні значення крайової задачі:

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(2) = 0.$$

Практичне заняття № 5

Тема: Стійкість за Ляпуновим. Метод функцій Ляпунова

Запитання для самопідготовки:

1. Коректність задачі Коші. Стійкість.
2. Означення стійкості за Ляпуновим. Асимптотична стійкість.
3. Другий метод Ляпунова.

✎1. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші:

1.1. $y' = -y, y(0) = 1.$

1.2. $y' = -2y, y(1) = 2.$

1.3. $y' = -\frac{y}{x}, y(1) = 0.$

1.4. $y' = \frac{4y}{x}, y(1) = 0.$

1.5. $y' = 1 + x - y, y(0) = 0.$

1.6. $y' = \cos^2 y, y(0) = 0.$

✎2. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи, використовуючи метод функцій Ляпунова:

2.1.
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1. \end{cases}$$

2.2.
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 3y_1, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_2. \end{cases}$$

2.3.
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -7y_1, \\ \frac{dy_2}{dx} = -5y_2. \end{cases}$$

2.4.
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -2y_1 + y_2. \end{cases}$$

2.5.
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 - 5y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 - y_2. \end{cases}$$

2.6.
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1 - 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 - 2y_2. \end{cases}$$

2.7.
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 3y_1 - 4y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + 5y_2. \end{cases}$$

2.8.
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 7y_1 - 3y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 5y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

$$2.9. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -2y_1^3 - 3y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 5y_1 - 2y_2^3. \end{cases}$$

$$2.10. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1y_2^2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 4y_1^2y_2. \end{cases}$$

$$2.11. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -2y_1^3 + 3y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -3y_1 - 9y_2^3. \end{cases}$$

$$2.12. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1^3 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 - 8y_2^3. \end{cases}$$

$$2.13. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -4y_1^3 + 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 - 7y_2^3. \end{cases}$$

$$2.14. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -5y_1^3 - 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 - 6y_2^3. \end{cases}$$

$$2.15. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -6y_1^3 + 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -2y_1 - 5y_2^3. \end{cases}$$

$$2.16. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -7y_1^3 - 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 - 4y_2^3. \end{cases}$$

$$2.17. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -8y_1^3 + 3y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 - 3y_2^3. \end{cases}$$

$$2.18. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -9y_1^3 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 - 2y_2^3. \end{cases}$$

$$2.19. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1^3 - 3y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 - 3y_2^3. \end{cases}$$

$$2.20. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -2y_1^3 + 3y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 - 4y_2^3. \end{cases}$$

3. Дослідити на стійкість розв'язки лінійної системи:

$$3.1. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - 2y_2 + x^2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 4y_1 + 3y_2 - e^x. \end{cases}$$

$$3.2. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1 - y_2 + \cos x, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 - y_2 - x^3. \end{cases}$$

$$3.3. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 7y_1 - 4y_2 - 2^x, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + 5y_2 + 5x^5. \end{cases}$$

$$3.4. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 - 2y_2 - e^{2x^2}, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 - y_2 + 3x - x^3. \end{cases}$$

$$3.5. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - 5y_2 - 3x^2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + y_2 + 3^{x^3}. \end{cases}$$

$$3.6. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1 - 2y_2 + 2\cos x^2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 - 2y_2 - 1. \end{cases}$$

$$3.7. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2 + 2^{x^3}, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2 - \cos x. \end{cases}$$

3.8.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -2y_1 - 3y_2 + 3^{x^2}, \\ \frac{dy_2}{dx} = 7y_1 - 5y_2 - 5\sin x^3. \end{cases}$$

$$3.9. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 3y_1 - 4y_2 + 4^{\sin x}, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + 5y_2 - 2^{\cos x}. \end{cases}$$

3.10.

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -7y_1 - 4y_2 + \cos(2^x), \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 - 5y_2 - 2^{x^3}. \end{cases}$$

Відповіді: 1.1. Розв'язок $y = e^{-x}$ – асимптотично стійкий. 1.3. Розв'язок $y = 0$ – асимптотично стійкий. 1.4. Розв'язок $y = 0$ – нестійкий. 1.5. Розв'язок $y = x$ – асимптотично стійкий. 2.1. Стійкий. 2.2. Нестійкий. 2.3. Асимптотично стійкий. 2.4. Нестійкий. 2.5. Асимптотично стійкий. 2.6. Асимптотично стійкий. 2.7. Нестійкий. 2.8. Нестійкий. 2.9. Асимптотично стійкий. 2.10. Стійкий. 3.1. Нестійкі. 3.2. Асимптотично стійкі.

Практичне заняття № 6

Тема: Дослідження стійкості за першим наближенням. Критерій Рауса–Гурвіца

Запитання для самопідготовки:

1. Теорема Ляпунова про стійкість за першим наближенням.
2. Стійкість лінійної однорідної системи зі сталими коефіцієнтами.
3. Критерій Рауса-Гурвіца.

✎1. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок рівняння:

1.1. $y'' - 8y' - 9y = 0$.

1.2. $y'' - 2y' - 3y = 0$.

1.3. $y'' - 2y' + y = 0$.

1.4. $y'' + 6y' + 9y = 0$.

1.5. $y'' - 6y' + 25y = 0$.

1.6. $y'' - 6y' + 13y = 0$.

1.7. $y''' + 9y'' + 23y' + 15y = 0$.

1.8. $y''' - 3y'' - 3y' + y = 0$.

1.9. $2y''' - 4y'' - 4y' + 2y = 0$.

1.10. $y''' - 2y'' + y' = 0$.

1.11. $y''' - 2y'' + 2y' = 0$.

1.12. $y''' - 4y'' + 13y' = 0$.

1.13. $y^{IV} - 10y'' + 9y = 0$.

1.14. $y^{IV} + 9y''' + 23y'' + 15y' = 0$.

1.15. $y^{IV} - 4y''' + y'' + 6y' = 0$.

1.16.

$y^{IV} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0$.

1.17. $y^{IV} - 18y'' + 81y = 0$.

1.18.

$y^{IV} + 2y''' - 3y'' - 4y' + 4y = 0$.

1.19. $y^{IV} - 6y''' + 25y'' = 0$.

1.20. $y^{IV} + 8y'' - 9y = 0$.

✎2. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи за першим наближенням:

$$2.1. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 + \sin y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 7y_1 + \ln(1 + y_1). \end{cases}$$

$$2.2. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -4y_1 + \sin y_1, \\ \frac{dy_2}{dx} = \cos y_1 - \sin y_2 - 1. \end{cases}$$

$$2.3. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -7y_1 + y_2^2 \cos x, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1^2 - 5y_2. \end{cases}$$

$$2.4. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 + 2y_2 + y_1^2 + y_2^2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -2y_1 + y_2 + \sqrt{(y_1^2 + y_2^2)^3}. \end{cases}$$

$$2.5. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 - (1 + y_2)^5 + 1, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 - \sin y_2. \end{cases}$$

$$2.6. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 1 - 3y_1 - 2y_2 - \cos y_1, \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 - 3y_2 + e^{y_2} - 1. \end{cases}$$

$$2.7. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 3y_1 - 4y_2 - \cos y_1 + 1 - \frac{y_1^2}{2}, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + 5\sin y_2. \end{cases}$$

$$2.8. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 7\sin y_1 - 3y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 5y_1 + 4\ln(1 + y_2). \end{cases}$$

$$2.9. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -2y_1^2 - 3y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 5y_1 - 3y_2^2. \end{cases}$$

$$2.10. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 + 2\sin y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = e^{y_1} - y_1 - 2y_2 - 1. \end{cases}$$

З3. Дослідити на стійкість розв'язки однорідної системи:

$$3.1. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 + y_2 - y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 - y_2 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = y_1 - y_2 - y_3. \end{cases}$$

$$3.5. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - 5y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + 4y_2 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = y_1 + 3y_3. \end{cases}$$

$$3.2. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -4y_1 + 3y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 - 4y_2, \\ \frac{dy_3}{dx} = 3y_2 - 4y_3. \end{cases}$$

$$3.6. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 + 3y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = -3y_1 - y_2 + 3y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = -y_1 - 3y_2 - y_3. \end{cases}$$

$$3.3. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 - y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 - y_2 - y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = -y_1 + y_2 - y_3. \end{cases}$$

$$3.7. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 + 2y_2 + 2y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = -2y_1 - y_2 + 2y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = -2y_1 - 2y_2 - y_3. \end{cases}$$

$$3.4. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 + 4y_2 + 3y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 - y_2 + 4y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = -3y_1 - 4y_2 - y_3. \end{cases}$$

$$3.8. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 + y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 - y_2 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = -y_1 - y_2 - y_3. \end{cases}$$

$$3.9. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = y_1 + y_2. \end{cases}$$

$$3.10. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 + y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 - y_2 + y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = y_1 + y_2 - y_3. \end{cases}$$

4. Дослідити на стійкість розв'язки лінійної неоднорідної системи:

$$4.1. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - 2y_2 + x^2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 4y_1 + 3y_2 - e^x. \end{cases}$$

$$4.3. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 7y_1 - 4y_2 - 2^x, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + 5y_2 + 5x^5. \end{cases}$$

$$4.2. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1 - y_2 + \cos x, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 - y_2 - x^3. \end{cases}$$

$$4.4. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 - 2y_2 - e^{2x^2}, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 - y_2 + 3x - x^3. \end{cases}$$

Відповіді: 1.1. Нестійкий. 1.4. Асимптотично стійкий. 1.16. Асимптотично стійкий. 2.1. Нестійкий. 2.2. Асимптотично стійкий. 2.3. Асимптотично стійкий. 3.1. Асимптотично стійкі. 4.1. Нестійкі. 4.2. Асимптотично стійкі.

Практичне заняття № 7

Тема: Точки спокою

Запитання для самопідготовки:

1. Поняття точки спокою системи.
2. Дослідження стійкості за першим наближенням.
3. Найпростіші типи точок спокою для системи двох лінійних однорідних рівнянь 1-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

✎1. Дослідити на стійкість і визначити характер точки спокою системи:

$$1.1. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

$$1.8. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1 + 4y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -4y_1 + y_2. \end{cases}$$

$$1.2. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -y_1 + y_2. \end{cases}$$

$$1.9. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 4y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

$$1.3. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 3y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

$$1.10. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1 - 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + y_2. \end{cases}$$

$$1.4. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1 + 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -2y_1 + y_2. \end{cases}$$

$$1.11. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

$$1.5. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 5y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

$$1.12. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1 - 2y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + y_2. \end{cases}$$

$$1.6. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1 + 3y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -3y_1 + y_2. \end{cases}$$

$$1.13. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -5y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

$$1.7. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 7y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

$$1.14. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1 - 3y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 3y_1 + y_2. \end{cases}$$

$$1.15. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

$$1.18. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1 - 5y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 5y_1 + y_2. \end{cases}$$

$$1.16. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1 - 5y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 5y_1 + y_2. \end{cases}$$

$$1.19. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 6y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

$$1.17. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -7y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

$$1.20. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -3y_1 + 7y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = -7y_1 + y_2. \end{cases}$$

2. Знайти всі точки спокою системи і дослідити їх на стійкість:

$$2.1. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 y_2 + 1. \end{cases}$$

$$2.5. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 5, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 y_2 + 2. \end{cases}$$

$$2.2. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 4, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 y_2 + 2. \end{cases}$$

$$2.6. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 10, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 y_2 + 3. \end{cases}$$

$$2.3. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 - y_2^2 - 21, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 29. \end{cases}$$

$$2.7. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 - y_2^2 - 3, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 5. \end{cases}$$

$$2.4. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 - y_2^2 + 21, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 29. \end{cases}$$

$$2.8. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 - y_2^2 + 3, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 5. \end{cases}$$

$$2.9. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 26, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 y_2 + 5. \end{cases}$$

$$2.15. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 - y_2^2 + 35, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 37. \end{cases}$$

$$2.10. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 13, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 y_2 + 6. \end{cases}$$

$$2.16. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 - y_2^2 - 32, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 40. \end{cases}$$

$$2.11. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 - y_2^2 - 24, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 26. \end{cases}$$

$$2.17. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 - y_2^2 + 32, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 37. \end{cases}$$

$$2.12. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 - y_2^2 + 24, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 26. \end{cases}$$

$$2.18. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 - y_2^2 - 27, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 45. \end{cases}$$

$$2.13. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 - y_2^2 + 11, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 61. \end{cases}$$

$$2.19. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 20, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 y_2 + 8. \end{cases}$$

$$2.14. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 - y_2^2 - 35, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 37. \end{cases}$$

$$2.20. \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 + y_2^2 - 29, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 y_2 + 10. \end{cases}$$

Відповіді: 1.1. Нестійкий фокус. 1.2. Сідло. 1.3. Нестійкий фокус. 1.4. Стійкий вузол. 1.5. Нестійкий вузол. 1.8. Стійкий фокус. 1.10. Стійкий вузол. 1.16. Стійкий фокус. 2.1. $A(1; -1)$ – нестійка; $B(-1; 1)$ – стійка, але не асимптотично. 2.3. $A(5; 2)$, $B(-5; 2)$, $C(5; -2)$ – нестійкі; $D(-5; -2)$ – асимптотично стійка.

Практичне заняття № 8

8 Контрольна робота № 2 (зразок)

✎1. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок рівняння:

$$y^{IV} - 10y'' + 9y = 0.$$

✎2. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи, використовуючи метод функцій Ляпунова:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -2y_1^3 - 3y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 5y_1 - 2y_2^3. \end{cases}$$

✎3. Дослідити на стійкість тривіальний розв'язок системи за першим наближенням:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 + \sin y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = 7y_1 + \ln(1 + y_1). \end{cases}$$

✎4. Дослідити на стійкість і визначити характер точки спокою системи:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Рекомендована література

Основна

1. Бак С.М. Диференціальні та інтегральні рівняння: Посібник 2-ге вид., випр. і доп. Вінниця: ФОП Рогальська І. О., 2018. 360 с.
2. Бондаренко В. Г. Диференціальні рівняння: конспект лекцій. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 124 с.
3. Капустян О.В., Капустян О.А., Касімова Н.В. Якісні й асимптотичні методи теорії диференціальних рівнянь. Конспект лекцій. Київ: КНУ, 2025. 67 с.
4. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах: Навч. посіб. Київ: Либідь, 2003. 504 с.
5. Перестюк М.О., Чернігова О.С. Теорія стійкості. Київ: КНУ, 2002. 58 с.

Додаткова

1. Капустян О.В., Пічкур В.В., Собчук В.В. Стійкість та аттрактори еволюційних рівнянь : навч. посіб. Київ: КНУ, 2023. 380 с.
2. Килимник І. М., Яримбаш Д. С. Диференціальні рівняння: навч. посіб. Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2024. 212 с.
3. Ляшенко В. П., Набок Т. А., Скотнікова Л. М. Диференціальні рівняння: навч. посіб. Кременчук: КрНУ ім. М. Остроградського, 2025. 166 с.
4. Томусяк А.А., Ковтонюк М.М. Диференціальні рівняння: У 2-х ч.: Навч. посіб. Вінниця: ПП «ТД «Едельвейс і К»», 2009. Ч. 1. 248 с.
5. Томусяк А.А., Ковтонюк М.М. Диференціальні рівняння: У 2-х ч.: Навч. посіб. Вінниця: ТОВ «фірма «Планер»», 2012. Ч. 2. 388 с.

Електронне навчальне видання

Бак Сергій Миколайович

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
З ВИБРАНИХ ПИТАНЬ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ
РІВНЯНЬ

21001, м. Вінниця, вул. Острозького, 32