

**Міністерство освіти і науки України**  
**Вінницький державний педагогічний університет**  
**імені Михайла Коцюбинського**  
**Факультет мистецтв і художньо-освітніх технологій**  
**Кафедра образотворчого, декоративного мистецтва,**  
**технологій та безпеки життєдіяльності**

**С. В. Подолянчук**

**ОПР МАТЕРІАЛІВ.**  
**КРИТЕРІЇ МІЦНОСТІ**

Навчальний посібник

Вінниця-2024

**УДК 620.17(075.8)**

**DOI: [https://doi.org/10.31652/620.17\(075.8\)-1-18](https://doi.org/10.31652/620.17(075.8)-1-18)**

**П44**

**Рецензенти:**

Марущак О. В., кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри декоративного, образотворчого мистецтва, технологій та безпеки життєдіяльності Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

Іванчук А. В., кандидат педагогічних наук, доцент, доцент кафедри декоративного, образотворчого мистецтва, технологій та безпеки життєдіяльності Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського

Рекомендовано вченою радою факультету мистецтв і художньо-освітніх технологій Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського (протокол №3 від 09 жовтня 2024 року)

**Подолянчук С. В.**

**П44** Опір матеріалів. Критерії міцності : навчальний посібник. Вінниця: ВДПУ, 2024. 18 с.

Навчальний посібник містить відомості про класичні та нові критерії (теорії) міцності, які обґрунтовують можливість використання результатів випробувань матеріалів на міцність при простих видах навантажень у розрахунках на міцність при складному напруженому стані.

Рекомендується для здобувачів вищої освіти спеціальності 014.10. Середня освіта (Технології).

© Подолянчук С. В

## ПЕРЕДМОВА

Однією з найважливіших задач інженерно-технічних розрахунків є оцінка міцності деталей машин чи елементів конструкцій за відомими напруженими станами. Для простих видів деформацій подібні завдання розв'язуються достатньо просто, перш за все через те, що значення граничних (небезпечних) напружень достатньо легко встановити експериментальним шляхом. Наприклад, дослідження зразків на просте розтягання або стискання можна реалізувати без особливих технічних труднощів, визначивши при цьому необхідні значення небезпечних напружень.

Проте при складному напруженому стані у випадку дії двох або всіх трьох головних напружень небезпечний стан може мати місце при різних їхніх граничних значеннях та співвідношеннях між ними. Тому експериментальний шлях встановлення небезпечних головних напружень є надзвичайно громіздким і, фактично, нереалістичним як через технічні труднощі практичної реалізації, так і через необхідну велику кількість випробувань.

Враховуючи такі обставини більш ефективним і обґрунтованим вбачається шлях розробки певних критеріїв (теорій) міцності, в основу яких можуть бути покладені різні гіпотези руйнування матеріалів. Ці критерії дозволяють звести громіздкі розрахунки, характерні для різноманітних складних напружених станів, до достатньо простих залежностей, що містять характеристики, які можна доволі легко визначити, в тому числі й експериментальним шляхом.

У навчальному посібнику розглянуті основні критерії (теорії) міцності, як класичні - критерій найбільших нормальних напружень, критерій найбільших лінійних деформацій, критерій найбільших дотичних напружень, критерій питомої потенціальної енергії зміни форми, так і відносно нові – критерій Мора, теорія Писаренка-Лебедева, теорія Ягна. Наведені, також, приклади реалізації розглянутих в посібнику критеріїв при проведенні практичних розрахунків.

Вивчення та використання на практиці цих критеріїв дозволяє з достатньою точністю здійснювати розрахунки на міцність деталей механізмів, машин та елементів конструкцій чи споруд практично за будь-якого виду напруженого стану.

## 1. Завдання критеріїв міцності

Оцінка міцності деталей машин, механізмів, елементів конструкцій та споруд, кінцевою метою якої є забезпечення надійності роботи машин в цілому, є одним з найголовніших завдань інженерних розрахунків. Основною умовою для проведення таких розрахунків є знання небезпечного напруження ( $\sigma^o$ ), перевищення якого унеможливило експлуатацію деталі машини чи елемента конструкції.

При цьому момент появи пластичних деформацій (для пластичних матеріалів) або ознак крихкого руйнування (для крихких матеріалів) хоча б в одній точці розглядається як порушення міцності. В цьому випадку в якості небезпечного напруження для пластичних матеріалів приймають границю текучості ( $\sigma^o = \sigma_m$ ), а для крихких матеріалів – границю міцності ( $\sigma^o = \sigma_M$ ). Обидві ці характеристики достатньо легко визначити експериментальним шляхом.

Розрахунки на міцність, що базується на такому підході, називають розрахунками за допустимими напруженнями  $[\sigma]$ , які пов'язані із небезпечними напруженнями залежністю

$$[\sigma] = \frac{\sigma^o}{n}$$

де  $n$  – коефіцієнт запасу міцності, під яким розуміють число, що показує у скільки разів потрібно збільшити компоненти напруженого стану ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ), щоб він став граничним.

При лінійному напруженому стані знаходження допустимих напружень є нескладним завданням. Умова міцності в цьому випадку набуває вигляду

$$\sigma_1 \leq [\sigma_+] \quad \text{або} \quad \sigma_3 \leq [\sigma_-]$$

де  $[\sigma_+]$  та  $[\sigma_-]$  - допустимі нормальні напруження відповідно при розтяганні та при стисканні.

У випадку плоского та, особливо, об'ємного напруженого станів завдання суттєво ускладнюється. Безумовно, достатньо прийнятні результати можна отримати дослідним шляхом. Проте величезне різноманіття можливих поєднань значень головних напружень вимагало б такої ж кількості часом достатньо непростих дослідів. Тим більше, що деякі види напружених станів, наприклад, тривісне розтягання при  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ , через суттєві технічні та технологічні труднощі дуже складно здійснити в експериментальних умовах.

Тому більш оптимальним шляхом можна вважати визначення на підставі теоретичних положень та експериментальних даних критеріїв міцності (їх ще називають теоріями міцності), які дають змогу обґрунтувати ознаки однакової небезпеки руйнування при різних напружених станах.

Для цього використовують гіпотезу про переважаючий вплив на міцність матеріалу того чи іншого фактору, вважаючи, що перевищення граничного значення саме цього фактору призводить до втрати міцності. В якості такого фактору можна прийняти те чи інше напруження, деформацію, енергію деформування тощо. При цьому з'являється можливість замінити складний (об'ємний) напружений стан (рис. 1, а) на простий, наприклад, лінійний напружений стан (рис. 1, б).

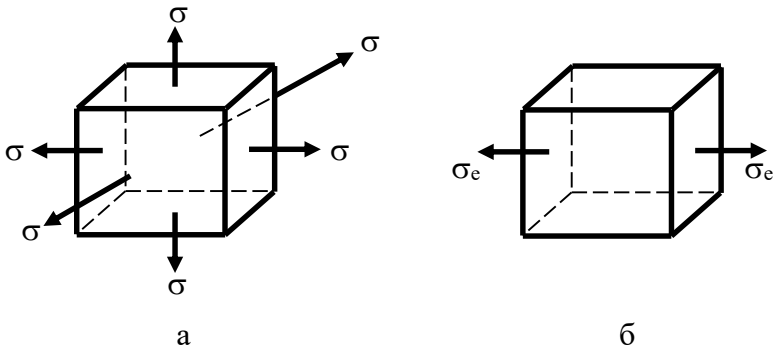


Рис. 1.

На практиці фактично все зводиться до знаходження еквівалентного напруження ( $\sigma_{екв}$ ). Воно являє собою таку сукупну характеристику напружень, яку необхідно створити в розтягнутому елементі (лінійний напружений стан), щоб його стан був би однаково небезпечний для плоского чи об'ємного напружених станів. При цьому повинна виконуватись така умова міцності

$$\sigma_{екв} \leq [\sigma]$$

На сьогодні універсальних критеріїв міцності, які можна було б застосовувати для всіх матеріалів та напружених станів, не встановлено. Проте деякі критерії (з урахуванням тих чи інших обмежень) успішно використовуються в інженерній практиці, забезпечуючи достатню для практичних розрахунків точність.

## 2. Критерій найбільших нормальних напружень (I теорія міцності)

Згідно з критерієм (теорією) найбільших нормальних напружень вважають, що втрата міцності матеріалу настає тоді, коли величина найбільшого нормального напруження досягає свого небезпечного значення. Умова руйнування при цьому набуває такого вигляду:

$$\text{при розтяганні} \quad \sigma_1 \geq \sigma_+^o$$

$$\text{при стисканні} \quad |\sigma_3| \geq \sigma_-^o$$

де  $\sigma_+^o$  - небезпечне нормальне напруження при розтяганні,  $\sigma_-^o$  - небезпечне нормальне напруження при стисканні,  $\sigma_1, \sigma_3$  - головні нормальні напруження.

З урахуванням коефіцієнта запасу міцності (формула 1) умова міцності набуває такого вигляду

$$\text{при розтяганні} \quad \sigma_{ексл}^+ = \sigma_1 \leq [\sigma_+]$$

$$\text{при стисканні} \quad \sigma_{ексл}^- = |\sigma_3| \leq [\sigma_-]$$

де  $\sigma_{ексл}^+$  та  $\sigma_{ексл}^-$  - еквівалентні напруження за першою теорією міцності відповідно при розтяганні та стисканні.

Критерій найбільших нормальних напружень є достатньо простим, оскільки з трьох головних напружень враховує лише одне. До того ж небезпечні напруження (формули 4 і 5) досить легко визначаються експериментальним шляхом при дослідженні матеріалів на розтягання чи стискання.

Проте критерій не відображає умов переходу матеріалу в пластичний стан. Тому розрахункові показники узгоджуються з даними експериментальних досліджень лише для дуже крихких матеріалів (цегла, камінь, бетон, кераміка, скло, гіпс, фарфор, інструментальна сталь), які руйнуються шляхом відриву однієї своєї частини від іншої без помітного пластичного деформування.

### 3. Критерій найбільших лінійних деформацій (II теорія міцності)

Згідно з критерієм (теорією) найбільших лінійних деформацій вважають, що втрата міцності настає тоді, коли найбільша лінійна деформація досягає свого небезпечного значення. Умова руйнування в цьому випадку набуває такого вигляду

$$\varepsilon_{\max} \geq \varepsilon^o$$

де  $\varepsilon_{\max}$  – максимальна лінійна деформація,  $\varepsilon^o$  – небезпечна лінійна деформація.

Використовуючи узагальнений закон Гука та припускаючи, що максимальне видовження чисельно дорівнює головному видовженню площадки, на якій діє найбільше головне напруження ( $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1$ ), отримуємо

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

де  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – головні нормальні напруження,  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона,  $E$  – модуль Юнга.

Враховуючи, що

$$[\sigma] = [\varepsilon]E$$

та математичний вираз закону Гука при розтяганні-стисканні отримаємо умову міцності

$$\sigma_{еквII} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

де  $\sigma_{еквII}$  – еквівалентне напруження за другою теорією міцності.

З формули видно, що друга теорія міцності враховує всі три головні напруження. Проте в основу її виведення покладений закон Гука, що унеможливує застосування цього критерію для пластичних зон деформування. Тому він використовується переважно для крихких матеріалів (каміння, шляхове покриття, високоміцні сталі після низького відпускання).

Фактично перша і друга теорії міцності призначені для одних і тих же груп матеріалів. В залежності від умов експлуатації і виду напруженого стану кращу узгодженість з експериментальними даними може давати як одна, так і інша теорія. Критерій найбільших лінійних деформацій видається більш обґрунтованим і логічним, проте в інженерній практиці при розрахунках на міцність крихких матеріалів частіше застосовують критерії найбільших нормальних напружень, в основному – завдяки простоті останнього.

#### 4. Критерій найбільших дотичних напружень (III теорія міцності)

Критерій найбільших дотичних напружень дає оцінку міцності матеріалу з погляду початку пластичного деформування. Вважається, що пластична деформація виникає внаслідок незворотних зсувів (ковзання шарів атомів у кристалі по певних кристалографічних площадках), які спричиняються дотичними напруженнями. Тому втрата міцності настає тоді, коли найбільші дотичні напруження досягають свого небезпечного значення.

Умова руйнування при цьому має вигляд

$$\tau_{\max} \geq \tau^o$$

де  $\tau_{\max}$  - найбільше дотичне напруження,  $\tau^o$  – небезпечне дотичне напруження.

Для об'ємного напруженого стану

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

Для лінійного напруженого стану максимальне дотичне напруження є одночасно небезпечним і визначається за формулою

$$\tau^o = \frac{1}{2}\sigma^o$$

Враховуючи коефіцієнт запасу міцності отримаємо

$$\sigma_{\text{екв. III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]$$

де  $\sigma_{\text{екв. III}}$  - еквівалентне напруження за третьою теорією міцності.

Третя теорія міцності загалом добре підтверджується експериментальними даними, перш за все – для пластичних матеріалів, що мають однакові міцносні характеристики на розтягання і стискання. Її недоліком є те, що не враховується значення головного напруження  $\sigma_2$ , хоча практичні розрахунки свідчать про незначний вплив  $\sigma_2$  на міцність матеріалу. Загалом критерій найбільших дотичних напружень завдяки своїй простоті і достатній точності набув широкого застосування в інженерній практиці при розрахунках характеристик пластичних матеріалів на металевій основі.

## 5. Критерій питомої потенціальної енергії зміни форми (IV теорія міцності)

Критерій питомої потенціальної енергії зміни форми базується на одному з найбільш фундаментальних підходів – енергетичному. Вважається, що граничний стан для матеріалу (незалежно від виду напруженого стану) настає тоді, коли питома потенціальна енергія зміни форми ( $u_\phi$ ) досягає свого небезпечного значення ( $u_\phi^o$ ).

Умова руйнування в цьому випадку має вигляд

$$u_\phi \geq u_\phi^o$$

При цьому небезпечне значення питомої потенціальної енергії зміни форми досить легко можна визначити з діаграми розтягання в момент настання текучості ( $u_\phi^o = u_{\phi m}$ ).

В загальному випадку, з урахуванням припущення про справедливість закону Гука до досягнення граничного стану, питому потенціальну енергію деформації можна визначити за формулою

$$u_\phi = \frac{1 + \mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1))$$

При простому розтяганні в момент текучості при  $\sigma_1 = \sigma_m$ , коли головні напруження  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ , отримуємо

$$u_{\phi m} = \frac{1 + \mu}{3E} \sigma_m^2$$

З урахуванням коефіцієнту запасу міцності можна записати умову міцності за IV теорією

$$\sigma_{еквIV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma]$$

де  $\sigma_{еквIV}$  - еквівалентне напруження за четвертою теорією міцності.

Вираз майже повністю збігається з формулою для визначення дотичних напружень при об'ємному напруженому стані. Це означає, що критерій питомої потенціальної енергії зміни форми можна застосовувати і поза межами закону Гука, тобто аж до початку руйнування.

З практичної точки зору при розрахунках більшості пластичних матеріалів III і IV теорії міцності є практично рівноцінними. Вибір конкретного критерію здійснюється, виходячи з умов простоти

розрахунків і кращої узгодженості теоретичних і практичних результатів.

Так, критерій питомої потенціальної енергії зміни форми точніше встановлює початок пластичного деформування, що особливо відчутно для міді, алюмінію, якісних вуглецевих сталей. Критерій найбільших дотичних напружень, забезпечуючи цілком прийнятні результати для пластичних матеріалів, використовується також для не дуже пластичних матеріалів, в тому числі – поза межею закону Гука. В деяких випадках при проведенні розрахунків відповідальних деталей перевірку проводять одночасно за III і IV теоріями міцності.

### **Приклад 1.**

Для елемента, на гранях якого діють напруження  $\sigma_\alpha=100\text{МПа}$ ,  $\sigma_\beta=40\text{МПа}$ ,  $\tau_\alpha=75\text{МПа}$ ,  $\tau_\beta=-75\text{МПа}$ , визначити еквівалентні напруження за чотирма основними теоріями міцності, приймаючи до уваги, що коефіцієнт Пуассона  $\mu=0,3$ , та порівняти отримані значення.

#### **Розв'язування**

1. Розв'язуючи зворотну задачу при плоскому напруженому стані знайдемо значення головних напружень

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[ \sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right]$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[ 100 + 40 + \sqrt{(100 - 40)^2 + 4 * 75^2} \right] = 150,8\text{МПа}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \left[ \sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right]$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \left[ 100 + 40 - \sqrt{(100 - 40)^2 + 4 * 75^2} \right] = -10,8\text{МПа}$$

2. Еквівалентне напруження за I теорією міцності

$$\sigma_{екв I} = \sigma_1 = 150,8\text{МПа}$$

3. Еквівалентне напруження за II теорією міцності

$$\sigma_{екв II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = 150,8 - 0,3 * (0 + (-10,8)) = 154,04\text{МПа}$$

4. Еквівалентне напруження за III теорією міцності

$$\sigma_{еквIII} = \sigma_1 - \sigma_3 = 150,8 - (-10,8) = 161,6 \text{ МПа}$$

5 Еквівалентне напруження за IV теорією міцності

$$\sigma_{еквIV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

$$\sigma_{еквIV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(150,8 - 0)^2 + (0 - (-10,8))^2 + (-10,8 - 150,8)^2} = 156,48 \text{ МПа}$$

6. Для вибраного елемента

- найбільше еквівалентне напруження

$$\sigma_{екв}^{\max} = \sigma_{еквIII} = 161,6 \text{ МПа}$$

- найменше еквівалентне напруження

$$\sigma_{екв}^{\min} = \sigma_{еквI} = 150,8 \text{ МПа}$$

## 6. Поняття про нові критерії міцності

Критерії найбільших нормальних напружень, найбільших лінійних деформацій, найбільших дотичних напружень, питомої потенціальної енергії зміни форми базуються на фундаментальних теоретичних підходах і використовуються для великих груп матеріалів та найбільш розповсюджених видів напружених станів. Тому в «Опори матеріалів» перераховані критерії часто називають класичними або основними.

Проте існують матеріали та види напружених станів, визначення еквівалентних напружень для яких за чотирма класичними теоріями міцності дають занадто велику похибку. Тому дослідниками запропоновано низку нових підходів для вирішення цієї проблеми, що призвело до створення нових (додаткових) критеріїв міцності. До них можна віднести критерій Мора, теорію Писаренка–Лебедева, теорію Ягна.

**Критерій Мора** фактично являє собою деталізовану третю теорію міцності. Грунтуючись в тому числі на експериментальних даних він доводять несуттєвий вплив головного напруження  $\sigma_2$  на міцність значної кількості матеріалів, та використовується для тих матеріалів, які по-різному чинять опір розтягання та стискання. Еквівалентне напруження за критерієм Мора визначається за формулою

$$\sigma_{еквМ} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 \leq [\sigma_+]$$

де  $[\sigma_+]$  та  $[\sigma_-]$  - допустимі нормальні напруження відповідно при розтяганні та при стисканні.

Фізичний зміст критерію Мора полягає в тому, що порушення міцності настає в разі досягання на деякій площадці найнебезпечнішої сукупності нормальних і дотичних напружень.

Критерій Мора використовується в основному для розрахунку елементів конструкцій, виготовлених з крихких матеріалів. Він також може стати в нагоді при розрахунку пластичних матеріалів, які за певних умов навантаження і температури поведуть себе як крихкі. За нормальних умов експлуатації більшість пластичних матеріалів мають однакові міцносні характеристики при розтяганні та стисканні ( $[\sigma_+] = [\sigma_-]$ ), тому критерій Мора в цьому випадку, як слідує з формули (20), зводиться до критерію найбільших дотичних напружень (III теорія міцності).

**Теорія Писаренка-Лебедева.** Подібне положення про те, що руйнування матеріалу настає як від нормальних, так і від дотичних

напружень, покладене в основу теорії Писаренка-Лебедева. Математичний вираз відповідного критерію має вигляд

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \chi \tau_{окт} + (1 - \chi) \sigma_1 \leq \sigma_+^o$$

де  $\sigma_+^o$  - небезпечне (граничне) напруження при одновісному розтяганні,  $\tau_{окт}$  – октаедричне дотичне напруження.

Параметр  $\chi$  характеризує ступінь відповідальності за мікроруйнування внаслідок зсуву, що створює сприятливі умови для «розпушування» матеріалу і утворення тріщин. Цей параметр визначається за формулою

$$\chi = \frac{\sigma_+^o}{\sigma_-^o}$$

де  $\sigma_+^o$  - небезпечне (граничне) напруження при одновісному розтяганні,  $\sigma_-^o$  - небезпечне (граничне) напруження при одновісному стисканні.

Для матеріалів, що перебувають в пластичному стані,  $\sigma_+^o = \sigma_-^o$ , тому  $\chi = 1$ . Це означає, що критерій Писаренка-Лебедева в цьому випадку фактично збігається з критерієм за IV теорією міцності. Для ідеально крихкого матеріалу небезпечне (або допустиме) напруження при розтяганні значно менше небезпечного (або допустимого) напруження при стисканні ( $[\sigma_+] \ll [\sigma_-]$ ), тому  $\chi = 0$ , а критерій Писаренка-Лебедева в цьому випадку фактично збігається з критерієм за I теорією міцності.

Описаний підхід є подальшим розвитком критерію Мора з суттєвою перевагою – врахуванням всіх головних напружень, які входять до складу формули з визначення октаедричного дотичного напруження ( $\tau_{окт}$ ). Теорія Писаренка-Лебедева відповідає сучасним уявленням про дію механізмів руйнування матеріалу (відривом і зрізом).

**Теорія Ягна** враховує всі три головні напруження. Математичний вираз критерію має вигляд

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + a(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + b(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = c$$

де  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – коефіцієнти, які визначаються для даного ізотропного матеріалу шляхом проведення дослідів відповідно на одновісне розтягання, одновісне стискання і чистий зсув. При цьому встановлюються значення відповідних допустимих напружень ( $[\sigma_+]$ ,  $[\sigma_-]$ ,  $[\tau]$ ).

Теорія Ягна є доволі універсальною, оскільки враховує не лише вплив на загальну міцність деформації зсуву, а й неоднаковий опір окремих матеріалів розтяганню і стисканню. При певних

співвідношеннях коефіцієнтів  $a, b, c$  вираз (23) фактично зводиться до критерію питомої потенціальної енергії зміни форми (IV теорія міцності). Експериментальна перевірка показала, що теорія міцності Ягна є найбільш гнучкою і доволі достовірною серед відомих теорій статичної міцності.

### Приклад 2.

У небезпечній точці чавунної деталі на гранях виділеного елемента діють напруження  $\sigma_\alpha = 7 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_\beta = -20 \text{ МПа}$ ,  $\tau_\alpha = -\tau_\beta = 17 \text{ МПа}$ . Перевірити деталь на міцність, якщо для матеріалу відомо допустиме нормальне напруження на розтягання  $[\sigma_+] = 35 \text{ МПа}$ , і допустиме нормальне напруження на стискання  $[\sigma_-] = 115 \text{ МПа}$ . Коефіцієнт Пуассона  $\mu = 0,3$ .

### Розв'язування

1. Розв'язуючи зворотню задачу при плоскому напруженому стані, визначимо головні напруження

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[ \sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right]$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[ 7 - 20 + \sqrt{(7 - (-20))^2 + 4 * 17^2} \right] = 15,21 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \left[ \sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right]$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \left[ 7 - 20 - \sqrt{(7 - (-20))^2 + 4 * 17^2} \right] = -28,21 \text{ МПа}$$

2. Оскільки величини опору чавуну при розтяганні і стисканні мають різні значення, перевірку умови міцності будемо здійснювати за критерієм Мора

$$\sigma_{еквМ} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]} \sigma_3 \leq [\sigma_+]$$

$$\sigma_{еквМ} = 15,21 - \frac{35}{115} (-28,21) = 23,8 \text{ МПа} < 35 \text{ МПа}$$

Умову міцності дотримано

3. Перевіримо деталь за II теорією міцності

$$\sigma_{еквII} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]$$

$$\sigma_{еквII} = 15,21 - 0,3(0 + (-28,21)) = 23,67 \text{ МПа} < 35 \text{ МПа}$$

Умову міцності дотримано.

## Контрольні питання

1. Які завдання розв'язують критерії міцності? 2. Поясніть суть розрахунку за допустимими напруженнями. 3. Назвіть основні ознаки еквівалентного напруження. 4. Запишіть у загальному випадку умову міцності. 5. Сформулюйте основне положення критерію найбільших нормальних напружень та запишіть умову міцності. 6. Сформулюйте основне положення критерію найбільших лінійних деформацій та запишіть умову міцності. 7. Сформулюйте основне положення критерію найбільших дотичних напружень та запишіть умову міцності. 8. Сформулюйте основне положення критерію питомої потенціальної енергії зміни форми та запишіть умову міцності. 9. Зробіть порівняльний аналіз застосування класичних теорій міцності. 10. Охарактеризуйте найбільш розповсюджені нові критерії міцності.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гурняк Л. І., Гуцуляк Ю. В., Юзьків Т. Б. Опір матеріалів: посібник для вивчення курсу при кредитно-модульній системі навчання. Львів: «Новий світ – 2000», 2019. 363 с.
2. Опір матеріалів : навчальний посібник : у 2 ч. / Жигілій Д. О., Верещака С. М., Некрасов С. С., Довгополов Ю. А. Суми : Сумський державний університет, 2022. Ч. I. 159 с.
3. Опір матеріалів : навчальний посібник до виконання розрахунково-графічних робіт і самостійної роботи / Довбуш Т. А., Хомик Н. І., Бабій А. В., Цьонь Г. Б., Довбуш А. Д. Тернопіль: ФОП Паляниця В. А., 2022. 220 с.
4. Опір матеріалів : навчально-методичний посібник для здобувачів освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної, заочної та дистанційної форм навчання / Сліпченко М. В, Алфьоров О. І., Савченко В. Б., Свіргун О. А. Харків, 2023. 153 с.
5. Опір матеріалів : підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський; За ред. Г. С. Писаренка. 2-ге вид., допов. і переробл. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.

## ЗМІСТ

Передмова.....	3
1. Завдання критеріїв міцності.....	4
2. Критерій найбільших нормальних напружень (I теорія міцності) .....	6
3. Критерій найбільших лінійних деформацій (II теорія міцності) .....	7
4. Критерій найбільших дотичних напружень (III теорія міцності).....	8
5. Критерій питомої потенціальної енергії зміни форми (IV теорія міцності) .....	9
6. Поняття про нові критерії міцності .....	12
Контрольні запитання.....	12
Список літератури.....	16

Навчальне видання

**Подолянчук Станіслав Вікторович**

**Опір матеріалів.**

**Розтягання. Стискання**

**Навчальний посібник**

Вінницький державний педагогічний університет  
імені Михайла Коцюбинського