

ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ ГЛОБАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЛАНЦЮГА ОСЦИЛЯТОРІВ З КУБІЧНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

В даній статті вивчаються рівняння, що описують динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Нехай q_n – узагальнена координата n -го осцилятора. Рівняння його руху при відсутності взаємодії з сусідніми осциляторами має вигляд:

$$\ddot{q}_n = -U'_n(q_n), n \in \mathbb{Z}.$$

Припускається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з двома своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд:

$$\ddot{q}_n = -U'_n(q_n) + a_{n-1}(q_{n-1} - q_n) - a_n(q_n - q_{n+1}), n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Рівняння (1) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь. Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} q_n(t) = 0, \quad (2)$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Подібні системи представляють інтерес у зв'язку з численним фізичним застосуванням [4], [6], [7]. В роботах [1], [4], [9] вивчалися періодичні за часом розв'язки в таких ланцюгах, а в [3], [5], [8] – біжучі хвилі. Відома тільки одна праця, в якій розглянуто задачу Коші для таких систем [2]. Огляд відомих результатів про подібні системи зроблено в [10].

В даній роботі розглядається питання коректності задачі Коші для системи (1) з кубічним потенціалом.

Постановка задачі. Потенціал $U_n(r)$ запишемо у вигляді

$$U_n(r) = -\frac{c_n}{2}r^2 + V_n(r)$$

і покладемо

$$b_n = c_n - a_n - a_{n-1}.$$

Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$\ddot{q}_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n - V'_n(q_n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Враховуючи граничні умови (2), при певних припущеннях це рівняння природно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q) \quad (4)$$

в гільбертовому просторі l^2 дійсних двохсторонніх послідовностей $q = \{q_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, де

$$(Aq)_n = a_n q_{n+1} + a_{n-1} q_{n-1} + b_n q_n,$$

а нелінійний оператор B визначається формулою

$$(B(q))_n = V'_n(q_n). \quad (5)$$

Скалярний добуток і норма в l^2 позначаються $(\cdot, \cdot)$ і $\|\cdot\|$ відповідно.

За означенням, розв'язком (4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від t зі значенням в l^2 .

Передбачається, що

(i) послідовності $\{a_n\}$ і $\{c_n\}$ дійсних чисел обмежені;

(ii) $V_n(r)$ – функція класу C^1 на $\mathbb{R}$, $V_n(0) = V'_n(0) = 0$ і для будь-якого $R > 0$

існує таке $C = C(R) > 0$, що для всіх $n \in \mathbb{Z}$

$$|V'_n(r_1) - V'_n(r_2)| \leq C|r_1 - r_2|, \quad |r_1|, |r_2| \leq R. \quad (6)$$

В умові (i) неважко бачити, що A є обмежений самоспряжений оператор в l^2 .

Задача Коші полягає у знаходженні розв'язку системи (4), який задовольняє умови

$$q(0) = q^{(0)}, \quad \dot{q}(0) = q^{(1)}. \quad (7)$$

Основні результати. Приведемо спочатку результати, отримані у статті [2].

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (i) та (ii) з константою C , що не залежить від R . Тоді для будь-яких $q^{(0)} \in l^2$ і $q^{(1)} \in l^2$ задача (4), (7) має єдиний розв'язок визначений при всіх $t \in \mathbb{R}$.*

Умови теореми 1 означають, зокрема, що потенціал V_n має зріст на нескінченності не вище другого степеня.

Рівняння (4) можна записати у гамільтоновому вигляді

$$\dot{p} = -H'_q(p, q), \quad \dot{q} = H'_p(p, q) \quad (8)$$

з гамільтоніаном

$$H(p, q) = \frac{1}{2} [\|p\|^2 - (Aq, q)] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n(q_n), \quad (9)$$

де $p = \dot{q}$.

Теорема 2. *Додатково до умов (i) та (ii), припустимо, що оператор A недодатний, тобто $(Aq, q) \leq 0$ для будь-якого $q \in l^2$. Крім того, нехай виконується одна із наступних умов:*

(a) $V_n(r) \geq 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ і $r \in \mathbb{R}$;

(b) існує така неспадна функція $h(\xi)$, $\xi \geq 0$, що $\lim_{r \rightarrow +\infty} h(\xi) = +\infty$ і

$V_n(\xi) \geq h(|\xi|)$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ і $\xi \in \mathbb{R}$.

Тоді для будь-яких $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ задача (4), (7) має єдиний розв'язок, визначений при всіх $t \in \mathbb{R}$.

При деяких додаткових припущеннях умову недодатності в теоремі 2 можна відкинути.

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови (i), (ii) та умова (b) теореми 2, де*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{h(r)}{r^2} = +\infty.$$

Тоді задача (4), (7) має єдиний глобальний розв'язок для будь-яких $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$.

Розглянемо тепер випадок кубічного потенціалу:

$$V_n(r) = \frac{d_n}{3} r^3,$$

де d_n – обмежена послідовність. Передбачається, що оператор A від'ємно визначений, тобто

$$(Aq, q) \leq -\alpha_0 \|q\|^2, \quad \alpha_0 > 0, \quad (10)$$

для $q \in l^2$.

Покладемо

$$J(q) = -\frac{1}{2}(Aq, q) + \frac{1}{3} \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n q_n^3 = \frac{1}{2}a(q) + \frac{1}{3}b(q).$$

Відмітимо, що $a^{1/2}(q)$ – норма на l^2 , еквівалентна стандартній нормі $\|\cdot\|_{l^2}$.

Тоді

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \|p\|^2 + J(q).$$

Оскільки $|b(q)| \leq c \|q\|_{l^3}^3 \leq c \|q\|^3$, то існує така константа $c > 0$, що

$$|b(q)|^{1/3} \leq ca(q)^{1/2}, \quad q \in l^2. \quad (11)$$

Далі c завжди позначає константу з (11).

Покладемо

$$\gamma = \inf_q \left\{ \sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda q) : q \in l^2, q \neq 0 \right\}. \quad (12)$$

Лема 1. $\gamma \geq \frac{1}{6c^6}$.

Доведення. Маємо

$$J(\lambda q) = \frac{\lambda^2}{2} a(q) + \frac{\lambda^3}{3} b(q).$$

Якщо $b(q) \geq 0$, то

$$\sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda q) = +\infty.$$

Якщо $b(q) < 0$, то

$$\sup_{\lambda \geq 0} J(\lambda q) = J\left(-\frac{a(q)}{b(q)}q\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{a^3(q)}{b^2(q)}.$$

Нерівність (11) дає необхідне. Лему доведено. $\square$

Покладемо

$$W_\gamma = \{q \in l^2 : 0 \leq J(\lambda q) < \gamma, \forall \lambda \in [0, 1]\}. \quad (13)$$

Очевидно, що W_γ зірковий відносно початку координат, тобто якщо $q \in W_\gamma$, то $\theta q \in W_\gamma$ для будь-якого $\theta \in [0, 1]$.

Лема 2. Множина W_γ містить відкритий еліпсоїд

$$B = \{q \in l^2 : a(q) < \rho\},$$

для будь-якого $\rho > 0$, що задовольняє умовам:

$$\rho \leq \frac{9}{4c^6},$$

$$\frac{\rho}{2} + \frac{c^3}{3} \rho^{3/2} < \gamma.$$

Доведення. Згідно (11)

$$\frac{\lambda^2}{2} a(q) - \frac{\lambda^3 c^3}{3} a^{3/2}(q) \leq J(\lambda q) \leq \frac{\lambda^2}{2} a(q) + \frac{\lambda^3 c^3}{3} a^{3/2}(q).$$

При $a(q) \leq \frac{9}{4c^6}$ маємо

$$\frac{1}{2} - \frac{\lambda c^3}{3} a^{1/2}(q) \geq 0, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Отже, $J(\lambda q) \geq 0$ для будь-якого $\lambda \in [0, 1]$.

Якщо $a(q) \leq \rho$, то, згідно другої умови на ρ ,

$$J(\lambda q) < \frac{\lambda^2}{2} \rho + \frac{\lambda^3 c^3}{3} \rho^{3/2} = \lambda^2 \left[\frac{1}{2} \rho + \frac{\lambda c^3}{3} \rho^{3/2} \right] < \gamma, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Отже, $J(\lambda q) < \gamma$. Лему доведено. $\square$

Покладемо

$$W_{*,\gamma} = \{q \in l^2 : a(q) + b(q) > 0, J(q) < \gamma\}.$$

Згідно неперервності функціоналів $a(q)$ і $b(q)$, $W_{*,\gamma}$ – відкрита множина.

Лема 3. $W_\gamma = W_{*,\gamma} \cup B$.

Доведення. Достатньо показати, що $W_\gamma = W_{*,\gamma} \cup \{0\}$.

Нехай $q \in W_\gamma$, $q \neq 0$. Якщо $b(q) \geq 0$, то $a(q) + b(q) > 0$ і $J(q) < \gamma$.

Якщо ж $b(q) < 0$, то

$$\sup J(\lambda q) = J\left(-\frac{a(q)}{b(q)}q\right) \geq \gamma.$$

Тоді $-\frac{a(q)}{b(q)} > 1$ і $J(q) < \gamma$. Це показує, що $q \in W_{*,\gamma}$.

Навпаки, нехай $q \in W_{*,\gamma}$. Якщо $b(q) \geq 0$, то

$$\sup_{\lambda \in [0,1]} J(\lambda q) = J(q) < \gamma$$

і $q \in W_\gamma$. Якщо ж $b(q) < 0$, то нерівність $-\frac{a(q)}{b(q)} > 1$ показує, що

$$\sup_{\lambda \in [0,1]} J(\lambda q) = J(q),$$

що й дає необхідне. Лему доведено. $\square$

В силу відкритості $W_{*,\gamma}$ і B , лема 3 показує, що множина W_γ відкрита, тобто є околom нуля в l^2 .

Лема 4. W_γ – обмежена множина.

Доведення. Якщо $b(q) \geq 0$, то $J(q) \geq \frac{1}{2}a(q)$ і $a(q) < 2\gamma$. Якщо ж

$b(q) < 0$, то за лемою 3, $b(q) > -a(q)$. Значить, $J(q) > \frac{1}{6}a(q)$ і $a(q) < 6\gamma$.

Таким чином, W_γ міститься в обмеженій множині $\{q \in l^2 : a(q) < 6\gamma\}$. Лему доведено. $\square$

Теорема 3. Нехай $V_n(r) = \frac{d_n}{3}r^3$, де d_n – обмежена послідовність, оператор A від’ємно визначений і $q^{(0)} \in W_\gamma$, $q^{(1)} \in l^2$ такі, що

$$\frac{1}{2}\|q^{(1)}\|^2 + J(q^{(0)}) < \gamma.$$

Тоді задача Коші з початковими даними $q^{(0)}, q^{(1)}$ має єдиний глобальний розв’язок.

Доведення. Існування та єдиність локального розв’язку $q(t)$ впливає із теореми 1. Як і в доведенні теореми 2, частина (a) ([2]), достатньо показати, що $q(t)$ залишається обмеженим.

Покажемо, що $q(t) \in W_\gamma$. Припустимо, що це не так і нехай $t_1 > 0$ найменше значення $t > 0$, для якого $q(t_1) \notin W_\gamma$. Тоді $q(t_1)$ належить межі ∂W_γ множини W_γ . Оскільки W_γ зірковий, то $\theta q(t_1) \in W_\gamma$ для будь-якого $\theta \in [0, 1)$. Значить, $J(\theta q(t_1)) < \gamma$. Переходячи до границі при $\theta \rightarrow 1$, отримуємо, що $J(q(t_1)) \leq \gamma$. Якщо $J(q(t_1)) < \gamma$, то, згідно визначення W_γ і того, що $J(\theta q(t_1)) < \gamma$, отримуємо $q(t_1) \in W_\gamma$. Останнє протирічить зробленому припущенню. Таким чином, $J(q(t_1)) = \gamma$.

Оскільки гамільтоніан H зберігається, то

$$J(q(t_1)) \leq \frac{1}{2}|\dot{q}(t_1)|^2 + J(q(t_1)) = \frac{1}{2}|q^{(1)}|^2 + J(q^{(0)}) < \gamma.$$

Отримане протиріччя показує, що $q(t) \in W_\gamma$ для всіх $t > 0$, для яких q визначене. Отже, розв’язок існує при всіх $t > 0$.

Оскільки рівняння (1) інваріантне відносно заміни t на $-t$, то розв’язок визначено при всіх $t \in \mathbb{R}$. Теорему доведено. $\square$

Теорема 3 є дискретним аналогом одного результату Сеттінджера ([11]), що відноситься до нелінійного хвильового рівняння. Зокрема, вона дає існування та єдиність глобальних розв'язків задачі Коші у випадку, коли початкові дані достатньо малі в l^2 -нормі.

Оскільки множина початкових даних із теореми 1 відкрита і містить нульові дані, то отримуємо

Наслідок 2. *Нехай $V_n(r) = \frac{d_n}{3}r^3$, де d_n – обмежена послідовність, оператор A від'ємно визначений. Тоді існує таке $\delta > 0$, що для будь-яких $q^{(0)}, q^{(1)} \in l^2$ з $\|q^{(0)}\| \leq \delta$ і $\|q^{(1)}\| \leq \delta$ задача Коші має єдиний глобальний розв'язок.*

Анотація:

В даній роботі розглядається питання коректності задачі Коші для системи

$$\ddot{q}_n = -U'_n(q_n) + a_{n-1}(q_{n-1} - q_n) - a_n(q_n - q_{n+1}), n \in \mathbb{Z},$$

з кубічним потенціалом, де q_n – узагальнена координата n -го осцилятора.

Ключові слова:

Ланцюг осциляторів, потенціал, гамільтоніан, глобальний розв'язок задачі Коші.

Література:

1. Бак С.Н., Панков А.А. О периодических колебаниях бесконечной цепочки линейно связанных нелинейных осцилляторов //Доповіді НАН України. – 2004. – №9. – С.13-16.
2. Бак С.Н., Панков А.А. О динамических уравнениях системы линейно связанных нелинейных осцилляторов //Український математичний журнал. – 2006. – №6. – Т.58. – С.723-729.
3. Бак С.М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів //Математичні студії. – 2006. – Т. 26, №2. – С. 140-153.

4. *Aubry S.* Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization // *Physica D.* – 1997. – 103. – P. 201 – 250.
5. *Bak S.M.* Periodic traveling waves in chains of oscillators // *Communications in Mathematical Analysis.* – 2007. – Volume 3, Number 1. – P. 19–26.
6. *Braun O.M., Kivshar Y.S.* Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model // *Physics Repts.* – 1998. – 306. – P. 1 – 108.
7. *Braun O.M., Kivshar Y.S.* The Frenkel–Kontorova model. – Berlin: Springer, 2004. – 427 p.
8. *Iooss G., Kirschgässner K.* Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators // *Commun. Math. Phys.* – 2000. – 211. – P. 439 – 464.
9. *MacKay R.S., Aubry S.* Proof of existence of breathers for time-reversible a Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators // *Nonlinearity.* – 1994. – P. 1623 – 1643.
10. *Pankov A.* Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices. – London – Singapore: Imperial College Press, 2005. – 196 p.
11. *Sattinger D.* On global solutions non linear hyperbolic equations // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1968. – 30. – P. 148 – 172.