Сергій Бак, Галина Ковтонюк, Тетяна Липа

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИСТЕМИ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ

Анотація. *У статті встановлено існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для рівнянь, які описують динаміку нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці у вагових просторах.*

Ключові слова: *системи осциляторів, двовимірна ґратка, задача Коші, глобальний розв'язок, вагові простори.*

Нескінченновимірні гамільтонові системи широко використовуються для моделювання складних квантових явищ. Зокрема, останнім часом значну увагу приділяють моделям, дискретним за просторовою змінною. Серед рівнянь, які описують такі моделі, найбільш відомими є рівняння систем осциляторів, дискретні рівняння типу синус-Ґордона, системи типу Фермі–Пасти–Улама, дискретні нелінійні рівняння типу Шредінгера. Такі системи є цікавими з огляду на їх численні фізичні застосування (див., наприклад, [1; 5]).

Задача Коші для систем осциляторів на одновимірній ґратці вивчалася в статтях [3; 4; 10] і для систем осциляторів на двовимірній ґратці в статтях [2; 7–9; 11]. У цих статтях вивчалися питання існування локальних і глобальних розв'язків, їх обмеженості у просторі l^2. Питання коректності задачі Коші для дискретного нелінійного рівняння Шредінгера вивчалося в статті [6].

В даній роботі вивчаються деякі питання динаміки нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Нехай $q_{n,m} = q_{n,m}(t)$ – узагальнена координата (n,m)-го осцилятора в момент часу t. Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}\left(q_{n-1,m} - q_{n,m}\right) - a_{n,m}\left(q_{n,m} - q_{n+1,m}\right) + b_{n,m-1}\left(q_{n,m-1} - q_{n,m}\right) - \\ - b_{n,m}\left(q_{n,m} - q_{n,m+1}\right) - U'_{n,m}\left(q_{n,m}\right),\ \left(n,m\right) \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь. Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n,m\to\pm\infty} q_{n,m}(t) = 0, \tag{2}$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Потенціал $U_{n,m}(r)$ запишемо у вигляді $U_{n,m}(r) = -\dfrac{d_{n,m}}{2}r^2 + V_{n,m}(r)$ і покладемо $c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}$. Тоді система (1) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + \\ + c_{n,m}q_{n,m} - V'_{n,m}(q_{n,m}),\ \left(n,m\right) \in \mathbb{Z}^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Враховуючи граничні умови (2), при певних припущеннях це рівняння природно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q), \tag{4}$$

де $\left(Aq\right)_{n,\,m}=a_{n-1,\,m}q_{n-1,\,m}+a_{n,\,m}q_{n+1,\,m}+b_{n,\,m-1}q_{n,\,m-1}+b_{n,\,m}q_{n,\,m+1}+c_{n,\,m}q_{n,\,m}$, а нелінійний оператор B визначається формулою $\left(B(q)\right)_{n,\,m}=V'_{n,\,m}\left(q_{n,\,m}\right)$, в гільбертовому просторі $l^2=l^2\left(\mathbb{Z}^2\right)$ дійсних двохсторонніх послідовностей $q=\left(q_{n,\,m}\right)$ зі скалярним добутком

$$\left(q^{(1)},\,q^{(2)}\right)=\sum_{(n,\,m)\in\mathbb{Z}^2}q^{(1)}_{n,\,m}\,q^{(2)}_{n,\,m}$$

і відповідною нормою $\|q\|=\left(q,\,q\right)^{\frac{1}{2}}$.

За означенням, *розв'язком* рівняння (4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від t зі значенням в l^2. Якщо розв'язок визначений на всій числовій прямій, то він називається *глобальним*, у протилежному випадку – *локальним*.

Передбачається, що

(i) *послідовності* $\{a_{n,m}\}$, $\{b_{n,m}\}$ і $\{d_{n,m}\}$ *дійсних чисел обмежені;*

(ii) $V_{n,m}(r)$ – *функція класу* C^1 *на* $\mathbb{R}$, $V_{n,m}(0)=V'_{n,m}(0)=0$ *і для будь-якого* $R>0$ *існує таке* $C=C(R)>0$, *що для всіх* $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$:

$$\left|V'_{n,m}(r_1)-V'_{n,m}(r_2)\right|\le C\left|r_1-r_2\right|,\quad \left|r_1\right|,\left|r_2\right|\le R. \tag{5}$$

Іноді замість (ii) ми будемо використовувати більш строге припущення:

(ii') *припущення* (ii) *виконується зі сталою* C, *яка не залежить від* $R>0$, *тобто існує така стала* $C>0$, *що для всіх* $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$:

$$\left|V'_{n,m}(r_1)-V'_{n,m}(r_2)\right|\le C\left|r_1-r_2\right|.$$

Задача Коші полягає у знаходженні розв'язку рівняння (4), який задовольняє початкові умови

$$q(0)=q^{(0)},\ \ \dot{q}(0)=q^{(1)}. \tag{6}$$

Нехай $\Theta=\{\theta_{n,m}\}$ послідовність додатних чисел (*вага*). Тоді позначимо через l^2_Θ простір всіх двохсторонніх послідовностей дійсних чисел з нормою

$$\|u\|_\Theta=\left(\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\theta_{n,m}u^2_{n,m}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Це гільбертів простір зі скалярним добутком

$$\left(u,\,v\right)_\Theta=\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}\theta_{n,m}u_{n,m}v_{n,m}.$$

Всюди далі припускаємо, що вага задовольняє таку умову:

(iii) *послідовність* $\Theta=\{\theta_{n,m}\}$ є обмеженою знизу додатною сталою та існує стала $c_0>0$ така, що

$$c_0^{-1}\le\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n}\le c_0$$

для всіх $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$.

Вага, яка задовольняє умову (iii) називається *регулярною*.

Згідно цієї умови вагові простори l^2_Θ неперервно і компактно вкладені в l^2, причому

$$\|u\| \le C_1 \|u\|_\Theta, \; u \in l^2_\Theta,$$

з деякою сталою $C_1 > 0$. Тому всі ці простори неперервно і компактно вкладені в простір l^∞ обмежених послідовностей з нормою

$$\|u\|_{l^\infty} = \sup_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} |u_{n,m}|.$$

Якщо $\theta_{n,m} \equiv 1$, то $l^2_\Theta = l^2$.

Основними результатами цієї статті є такі теореми.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (i), (ii') *та* (iii). *Тоді для будь-яких* $q^{(0)} \in l^2_\Theta$ *і* $q^{(1)} \in l^2_\Theta$ *задача (4), (6) має єдиний глобальний розв'язок* $q \in C^2(\mathbb{R}; l^2_\Theta)$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $(i)-(iii)$ *та оператор* A *недодатний, тобто* $(Aq, q) \le 0$ *для будь-якого* $q \in l^2$. *Крім того, нехай виконується одна із наступних умов:*

(a) $V_{n,m}(r) \ge 0$ *для всіх* $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ *і* $r \in \mathbb{R}$;

(b) *існує така неспадна функція* $h(\xi)$, *визначена для* $\xi \ge 0$, *що* $\lim\limits_{\xi\to+\infty} h(\xi) = +\infty$ *і* $V_{n,m}(r) \ge h(|r|)$ *для всіх* $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ *і* $r \in \mathbb{R}$.

Тоді для будь-яких $q^{(0)} \in l^2_\Theta$ *і* $q^{(1)} \in l^2_\Theta$ *задача (4), (6) має єдиний глобальний розв'язок* $q \in C^2(\mathbb{R}; l^2_\Theta)$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (i) *та* (ii). *Крім того, припустимо, що* $V_{n,m}(r) = \dfrac{g_{n,m}}{p} r^p$, *де* $(g_{n,m})$ *– обмежена послідовність, та оператор* A *від'ємний в* l^2. *Тоді існує таке* $\delta > 0$, *що для будь-яких* $q^{(0)} \in l^2_\Theta$ *і* $q^{(1)} \in l^2_\Theta$ *з* $\|q^{(0)}\| \le \delta$ *і* $\|q^{(1)}\| \le \delta$ *задача (4), (6) має єдиний глобальний розв'язок* $q \in C^2(\mathbb{R}; l^2_\Theta)$.

Таким чином, у цій встановлено існування і єдиність глобальних розв'язків задачі Коші для системи осциляторів на двовимірній ґратці у вагових l^2-просторах.

Література:

1. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization. *Physica D*. 1997. Vol. 103. P. 201–250.
2. Bak S. M. Global well-posedness of the Cauchy problem for system of oscillators on 2D-lattice with power potentials. *Український математичний вісник*. 2019. Т.16, №4. С. 465-476. (Engl.: Bak S. M. Global well-posedness of the Cauchy problem for system of oscillators on 2D-lattice with power potentials. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 246, No. 5 (May). P. 593-601.)
3. Bak S., N'Guerekata G., Pankov A. Well-posedness of initial value problem for discrete nonlinear wave equations. *Communications in Mathematical Analysis*. 2010. Vol. 8, № 1. P. 79–86.
4. Bak S. N., Pankov A. A. On the dynamical equations of a system of linearly coupled nonlinear oscillators. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2006. Vol. 58, №6. P.815-822.
5. Braun O. M., Kivshar Y. S. The Frenkel-Kontorova model. Berlin: Springer, 2004. 427 p.
6. Pankov A. Global well-posedness for discrete non-linear Schrödinger equation. *Applicable Analysis.*2010. Vol. 89, № 9. P. 1513–1521.
7. Бак С. М. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. Вип. 5. С. 3–9.

8. Бак С. М. Про обмеженість глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. 2019. Вип. 20. С. 5-12.
9. Бак С. М., Баранова О. О., Білик Ю. П. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. Вип. 4. С. 18–24.
10. Бак С. Н., Панков А. А. О динамических уравнениях системы линейно связанных нелинейных осцилляторов. *Український математичний журнал*. 2006. Т. 58, №6. С.723-729.
11. Бак С. М., Рум'янцева К. Є. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. Вип. 6. С. 29-36.

THE CAUCHY PROBLEM FOR SYSTEMS OF OSCILLATORS ON A TWO-DIMENSIONAL LATTICE IN WEIGHTED SPACES

Abstract. *The article establishes the existence and uniqueness of a global solution to the Cauchy problem for equations describing the dynamics of infinite system of nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice in weighted spaces.*

Key words: *systems of oscillators, two-dimensional lattice, Cauchy problem, global solution, weighted spaces.*