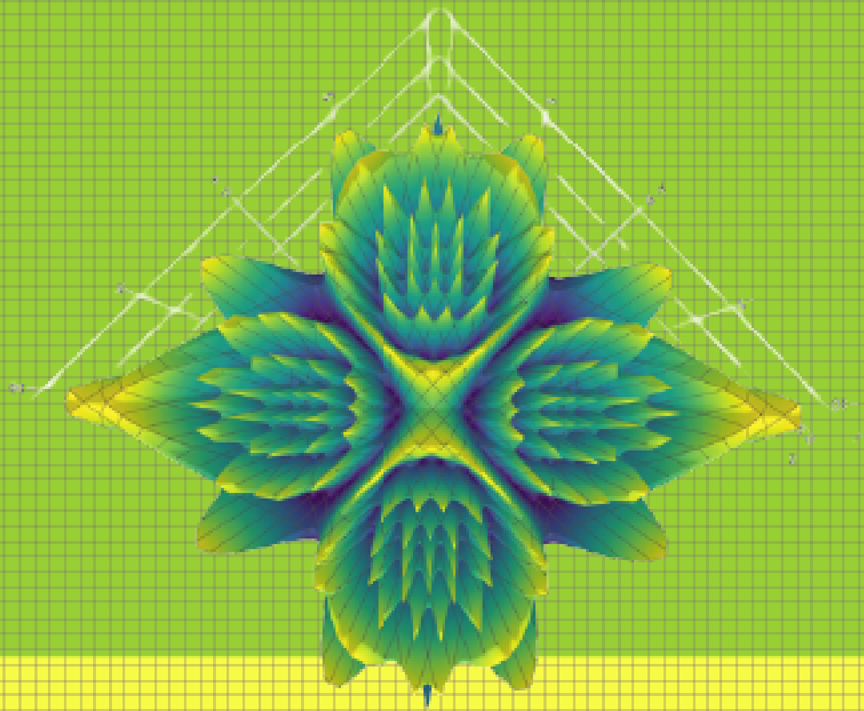
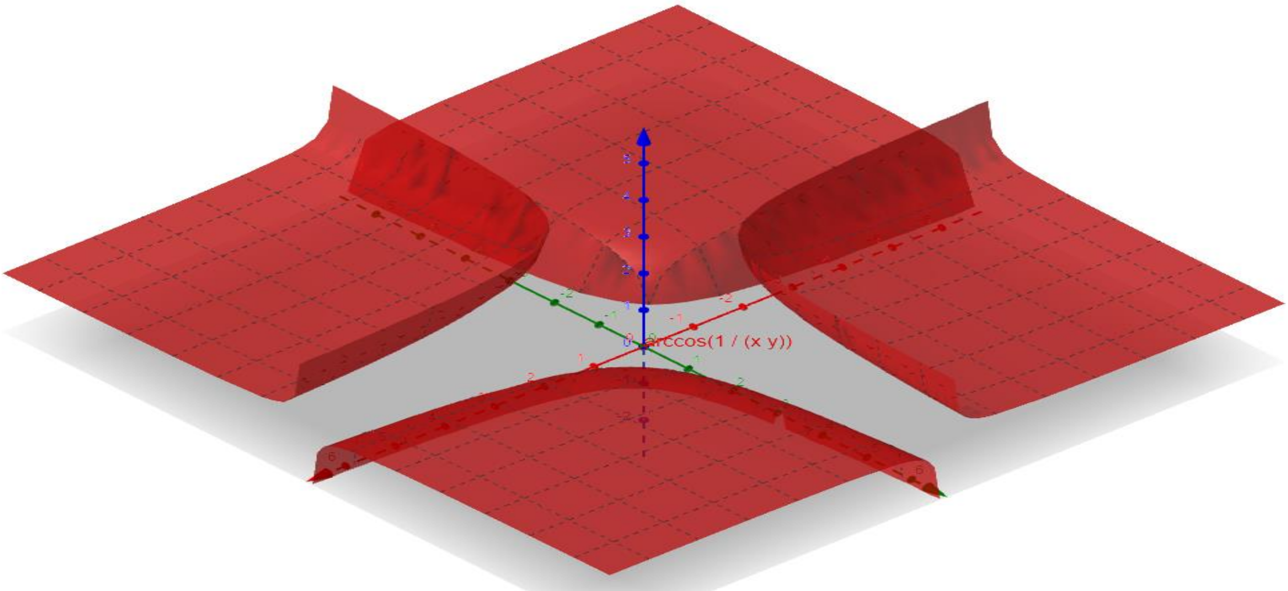
Ковтонюк М.М.
Клімішина А.Я.
Леонова І.М.
Соя О.М.



ПРАКТИКУМ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

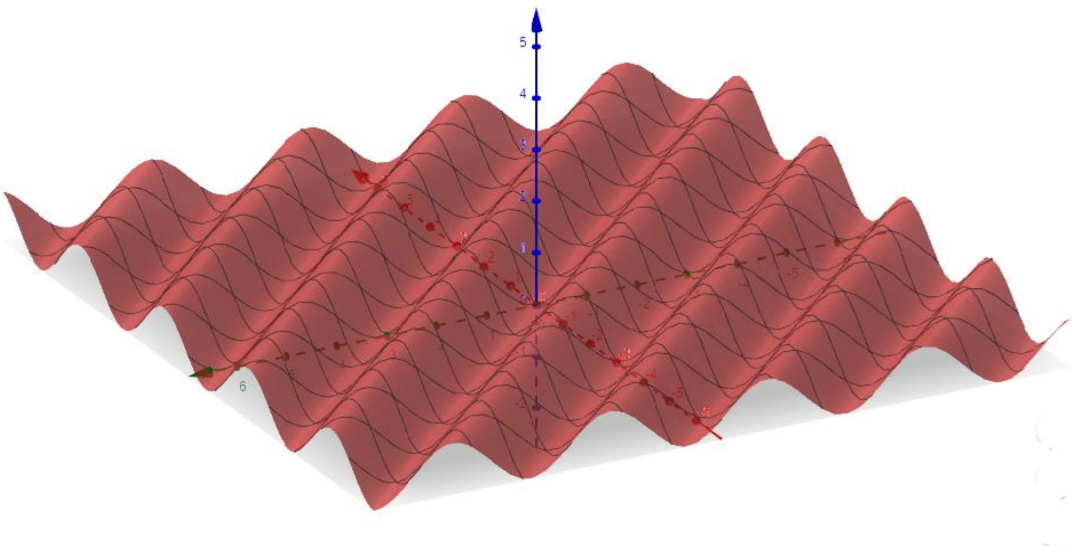
Навчальний посібник для студентів спеціальностей
111 Математика та 014.04
Середня освіта (Математика)

М. М. Ковтонюк, А. Я. Клімішина, І. М. Леонова, О. М. Соя



Практикум з диференціального числення функцій багатьох змінних

Навчальний посібник для студентів СВО Бакалавр спеціальностей 111 Математика та 014 Середня освіта (Математика)



Вінниця, ВНТУ, 2023

УДК 517.2:517.55(075.8)
DOI: https://doi.org/10.31652/978-617-8163-04-4-1-251

П-69

Рекомендовано до видання Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського як навчальний посібник для студентів СВО Бакалавр спеціальностей 111Математика та 014.04 Середня освіта (Математика)(протокол №6 від 15.11.2023 р.)

Рецензенти:

– доктор фізико-математичних наук, професор кафедри теорії функцій та методики навчання математики Волинського національного університету імені Лесі Українки **Іван Михайлович Конет**

– доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету **Володимир Маркусович Михалевич**

П-69 **Практикум** з диференціального числення функцій багатьох змінних. Навчальний посібник для студентів СВО Бакалавр спеціальностей 111 Математика та 014 Середня освіта (Математика) [Електронний ресурс] / М. М. Ковтонюк, А. Я. Клімішина, І. М. Леонова, О. М. Соя. Вінниця: ВНТУ, 2023 (PDF, 251 с.)

ISBN 978-617-8163-04-4 (PDF)

Навчальний посібник написано відповідно до навчальної програми з математичного аналізу. В посібнику є велика кількість розв'язаних типових прикладів і практико-орієнтованих задач з диференціального числення функції багатьох змінних, завдань для самостійного опрацювання, завдань для самостійних і контрольних робіт.

Посібник написаний для студентів СВО Бакалавр спеціальностей 111 Математика й 014.04 Середня освіта (Математика), в тому числі заочної форми навчання. Може бути корисним викладачам математики, магістрантам, вчителям фізико-математичних ліцеїв.

УДК 517.2:517.55(075.8)

ISBN 978-617-8163-04-4 (PDF)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Рекомендований «Практикум» має своєю метою надати істотну допомогу студентам в оволодінні технікою диференціювання і розв'язуванні практико-орієнтованих задач з використанням похідної функцій багатьох змінних.

«Практикум» складається з 12 практичних занять, у кожному з яких наведено короткі теоретичні відомості з диференціального числення функцій багатьох змінних, запитання та завдання для самостійних і контрольних робіт, термінологічний словник математичних термінів українською та англійською мовами. Матеріал поділено відповідно до плану практичних занять.

У «Практикумі» велика кількість типових прикладів і задач супроводжується детальним розв'язанням та зображенням поверхонь. Для цього авторами були використані редактори GeoGebra – динамічне математичне програмне забезпечення, та Mathcha – математичний онлайн-редактор для роботи з формулами та графіками.

При складанні «Практикуму» автори використовували різні підручники, навчальні посібники і збірники задач з математичного аналізу.

Посібник написаний для студентів СВО Бакалавр спеціальностей 111 Математика й 014.04 Середня освіта (Математика), зокрема змішаної форми навчання, на основі робочої програми з математичного аналізу, яка передбачає 3,5 кредити (105 годин) на вивчення розділу «Диференціальне числення функцій багатьох змінних».

Робоча програма з диференціального числення функцій багатьох змінних (зразок)

1. Опис навчальної дисципліни«Математичний аналіз»

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, спеціальність, спеціалізація, додаткова спеціалізація/ спеціальність, освітня програма, ступінь вищої освіти</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td colspan="2">денна форма навчання</td></tr>
<tr><td>Загальна кількість кредитів – 18
Кількість кредитів у 4 семестрі – 3</td><td>Галузь знань
11 «Математика та статистика»</td><td colspan="2">Обов’язкова</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Індивідуальне науково-дослідне завдання 4 семестр: «Застосування функцій багатьох змінних»</td><td rowspan="5">Спеціальність
111 «Математика»
Додаткова предметна спеціальність
014.04 Середня освіта (Математика)
Освітня програма
Комп’ютерна математика</td><td colspan="2">Рік навчання:</td></tr>
<tr><td colspan="2">2-й</td></tr>
<tr><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Загальна кількість годин – 540
Загальна кількість годин у 4 семестрі – 90</td><td></td><td>4-й</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Тижневих годин для денної форми навчання:
аудиторних – 3
самостійної роботи здобувача – 3</td><td rowspan="8">Ступінь вищої освіти:
Бакалавр</td><td></td><td>24 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні</td></tr>
<tr><td></td><td>24 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td></td><td>42 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю:</td></tr>
<tr><td></td><td>залік</td></tr>
</table>

Примітка. Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної і індивідуальної роботи становить: % для денної форми навчання – 53% : 47% .

2. Мета, завдання, компетентності та програмні результати навчання

2.1 Мета дисципліни: ознайомлення та оволодіння сучасними методами та положеннями математичного аналізу, набуття студентами вмінь та навичок щодо використання їх у навчальній, науково-дослідній роботі та професійній діяльності.

2.2. Завдання:

– розкрити зміст і значення науки про функції, методи їх дослідження та застосування;

– навчити користуватися бакалавра математики знаннями та навичками одного з найефективніших методів наукового пізнання, а саме методу подання кількісних відношень реальної дійсності у вигляді певних функціональних залежностей;

– сприяти формуванню математичної культури бакалавра математики.

2.3. Компетентності.

2.3.1. Загальні компетентності.

*ЗК.1.*Здатність учитися, здобувати нові знання, уміння, у тому числі в галузях, відмінних від математики.

ЗК.2. Знання та розуміння предметної області та професійної діяльності.

ЗК.4. Здатність використовувати стандартні прийоми та методи математичних досліджень, проявляти творчий підхід, ініціативу.

ЗК.7. Здатність вирішувати проблеми у професійній діяльності на основі абстрактного мислення, аналізу, синтезу і прогнозу.

ЗК.10. Здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово.

ЗК.13. Здатність відповідально приймати рішення з урахуванням соціальних і етичних цінностей та правових норм.

2.3.2. Фахові компетентності.

ФК.4. Спроможність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних.

ФК.5. Спроможність виражати терміни специфічної предметної області мовою математики.

ФК.6. Здатність до кількісного мислення.

ФК.7. Спроможність розуміти проблеми та виділяти їхні суттєві риси.

ФК.10. Спроможність перевіряти математичну модель на адекватність емпіричним даним.

ФК.11. Здатність проводити обчислення в рамках основних математичних моделей та застосовувати необхідні математичні методи.

ФК.13. Спроможність одержувати якісну інформацію на основі кількісних даних.

ФК.15. Здатність пояснювати у математичних термінах результати, одержані під час розрахунків.

2.4. Програмні результати навчання.

Здобувач вищої освіти після успішного завершення освітньо-професійної програми має продемонструвати заплановані знання, уміння, здатності:

ПРН-З-3. Знати аксіоми різних складових частин математики, принципи modusponens (правило виведення логічних висловлювань) та modustollens (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень у різних складових частинах математики.

ПРН-З-4. Відтворювати базові знання фундаментальних розділів математики в обсязі, необхідному для володіння математичним апаратом відповідної галузі знань і використання математичних методів у обраній професії.

ПРН-З-6. Володіти основами математичних дисциплін, у яких вивчаються моделі природничих та соціальних процесів, основами математичних теорій, що використовуються при математичному моделюванні.

ПРН-У-2. Усно й письмово спілкуватися рідною мовою з професійних питань, читати спеціальну літературу іноземною мовою, знаходити, аналізувати та використовувати інформацію з різних довідкових джерел.

ПРН-У-4. Бути наполегливим у досягненні мети під час розв'язування поставленої математичної проблеми.

ПРН-У-5. Розв'язувати задачі з математичною строгістю та математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й існуючими моделями.

ПРН-У-6. Розв'язувати конкретні математичні задачі, сформульовані в термінах даної предметної області, здійснювати базові перетворення математичних моделей з метою розв'язування математичних та/або прикладних задач.

ПРН-У-7. Використовувати раціональні способи пошуку та використання науково-технічної інформації, включаючи засоби електронних інформаційних мереж, використовувати інформаційні ресурси, в тому числі електронні, для пошуку існуючих математичних моделей.

ПРН-У-8. Застосовувати методи математичного аналізу для дослідження функцій однієї та багатьох дійсних змінних.

3. Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Тема 1. Двовимірні та тривимірні евклідові простори. Топологічні властивості просторів $\mathbb{R}^2$ і $\mathbb{R}^3$. Множини $\mathbb{R}^2$ і $\mathbb{R}^3$. Наділення алгебраїчною структурою. Наділення геометричною структурою. Криві та області на площині. Криві та поверхні у просторі. Послідовності точок просторів $\mathbb{R}^2$ і $\mathbb{R}^3$. Збіжні послідовності. Властивості границь послідовностей. Теорема Больцано-Вейєрштрасса. Компактні множини. Критерій Коші збіжності послідовності. Повнота просторів $\mathbb{R}^2$ і $\mathbb{R}^3$.

Тема 2. Функції двох і багатьох змінних.

Тема 3. Границя функції багатьох змінних. Границя функції у точці. Неперервність функції двох змінних, основні властивості. Властивості функцій, неперервних на компакті.

Тема 4. Диференційовність функції багатьох змінних. Повний диференціал. Частинні похідні функцій двох і багатьох змінних. Правила відшукання частинних похідних. Диференційовність функцій двох і багатьох змінних. Достатні умови диференційовності. Диференціал двох і багатьох змінних. Арифметичні операції над диференційовними функціями.

Тема 5. Властивості диференційовних функцій. Складена функція та її диференційовність. Диференціал складеної функції. Інваріантність форми першого диференціала.

Тема 6. Геометричний зміст диференційовності функції двох змінних. Геометричний зміст частинних похідних та повного диференціала. Геометричний зміст диференційовної функції двох змінних. Гладка поверхня. Дотична площина до поверхні.

Змістовий модуль 2. Застосування диференціального числення під час дослідження функцій

Тема 7. Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Частинні похідні вищих порядків. Рівність змішаних похідних. Диференціали вищих порядків. Порушення форми диференціалів вищих порядків.

Тема 8. Похідна в заданому напрямку. Градієнт функції.

Тема 9. Формула Тейлора. Апроксимація функцій. Формула Тейлора для функцій однієї змінної. Формула Тейлора для функцій двох змінних. Залишковий член формули Тейлора у формі Пеано, Лагранжа, інтегральній.

Тема 10. Екстремуми функцій двох змінних. Означення екстремальних точок функцій двох змінних. Необхідні умови екстремуму диференційовної функції. Достатні умови екстремуму функцій двох змінних. Задача про знаходження найменшого та найбільшого значення функції двох змінних.

Тема 11. Неявні функції. Функція однієї змінної, задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$, існування, неперервність, диференційовність. Функція двох змінних, задана неявно рівнянням $F(x, y, z) = 0$, існування, неперервність, диференційовність.

Тема 12. Умовний екстремум. Умовний екстремум функції $z = f(x, y)$ відносно рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$. Умовний екстремум функції $u = f(x, y, z)$ відносно рівняння зв'язку $\varphi(x, y, z) = 0$. Умовний екстремум функції $u = f(x, y, z)$ відносно рівнянь зв'язку $\varphi(x, y, z) = 0, \omega(x, y, z) = 0$.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів	Кількість годин					
	денна форма					
	усього	лк	пз	лз	інд	с.р.
Розділ 1. Диференціальне числення функцій двох і трьох змінних						
Тема 1.	7,5	2	2			3,5
Тема 2.	7,5	2	2			3,5
Тема 3.	7,5	2	2			3,5
Тема 4.	7,5	2	2			3,5
Тема 5.	7,5	2	2			3,5
Тема 6.	7,5	2	2			3,5
Разом у розділі 1	45	12	12			21
Розділ 2. Застосування диференціального числення функцій двох і трьох змінних						
Тема 7.	7,5	2	2			3,5
Тема 8.	7,5	2	2			3,5
Тема 9.	7,5	2	2			3,5
Тема10.	7,5	2	2			3,5
Тема 11.	7,5	2	2			3,5
Тема 12.	7,5	2	2			3,5
Разом у розділі 2	45	12	12			21
Усього годин	**90**	**24**	**24**			**42**

5. Теми практичних занять у 4 семестрі

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Функції багатьох змінних	2
2.	Границя і неперервність функції багатьох змінних	2
3.	Диференційовність функції багатьох змінних. Повний диференціал	2
4.	Складена функція та її диференційовність.	2
5.	Похідна в заданому напряму. Градієнт.	2

6.	Частинні похідні та диференціали вищих порядків	2
7.	Диференціювання неявних функцій.	2
8.	Дотична площина і нормаль.	2
9.	Формула Тейлора.	2
10.	Екстремум функції багатьох змінних.	2
11.	Найбільше і найменше значення функції багатьох змінних.	2
12.	Умовний екстремум.	2
	Разом:	**24**

6. Методи та технології навчання

Вивчення навчальної дисципліни передбачає використання різноманітних методів та технологій викладання і навчання.

Пояснювально-ілюстративний метод: повідомлення інформації з використанням різних засобів з подальшим усвідомленням такої інформації та її фіксацією у пам'яті здобувачів. Найчастіше метод реалізується на лекціях у формі розповіді чи пояснення складного теоретичного та/або великого за обсягом навчального матеріалу тощо.

Репродуктивний метод: відтворення і повторення способу діяльності за сформованим динамічним стереотипом дій. Метод є корисним для засвоєння основних понять.

Активні методи навчання: послідовна й цілеспрямована постановка перед здобувачами завдань, розв'язуючи які активно засвоюються нові знання.

Метод проблемного викладу навчального матеріалу передбачає створення проблемних ситуацій, надання допомоги здобувачам у їхньому аналізі з подальшим спільним розв'язанням поставлених завдань. Під час вивчення навчальної дисципліни викладач формує у здобувачів зразки наукового пізнання та вирішення проблемної ситуації.

Частково-пошуковий (евристичний) метод спрямований на залучення здобувачів до самостійного розв'язання пізнавального завдання. При цьому здобувачі опановують різні способи пошуку інформації, формують переконаність в істинності нових знань, аналізують достовірність отриманих результатів та можливі помилки та труднощі.

Дослідницький метод спрямований на залучення здобувачів до самостійного розв'язання завдання наукового характеру з використанням сучасних засобів обчислювальної техніки та інформаційно-комунікаційних технологій. При вивченні навчальної дисципліни здобувачі можуть виконувати науково-дослідні завдання з подальшим оформленням та оприлюдненням отриманих наукових результатів. При цьому викладач орієнтує здобувачів на проведення досліджень, долучає до їхньої самостійної організації.

При викладанні навчальної дисципліни використовуються різноманітні технології навчання – як традиційні, так і сучасні (особистісно-орієнтовані, інформаційно-комунікаційні тощо). При цьому навчання є студентсько-центрованим та здійснюється через активну практичну діяльність. Зокрема, для активізації освітнього процесу передбачено застосування проблемних лекцій, ділових ігор, занять-дискусій тощо.

Лекції органічно поєднуються не лише з практичними заняттями, а й із самостійною роботою, яка полягає в самостійному опрацюванні теоретичного матеріалу, підготовці до практичних занять, пошуку необхідної інформації, підборі та огляді літературних джерел за заданою тематикою, виконанні індивідуальних завдань тощо. При цьому в освітньому процесі передбачено використання спеціальних методів, більш характерних для науково-дослідної роботи – експертного оцінювання, ранжирування, систематизації, екстраполяції, «мозкового штурму» тощо. В багатьох випадках такі методи є найбільш оптимальними для розв’язання конкретних навчальних завдань.

Також використовуються:

– словесні методи (лекція, розповідь, пояснення, бесіда, навчальна дискусія, диспут, консультація, співбесіда тощо);

– практичні методи (практичні заняття, графічні роботи);

– наочні методи (ілюстрування, демонстрування, комп’ютерна презентація тощо);

– робота з навчально-методичною літературою, науковими джерелами і електронними ресурсами;
– відеометод у сполученні з новітніми інформаційними технологіями та комп'ютерними засобами навчання (дистанційні, мультимедійні, веб-орієнтовані тощо);
– методи організації самостійної роботи (розв'язання завдань, виконання проектів, індивідуальних і творчих завдань тощо);
– за логікою навчального процесу (індуктивні, дедуктивні, метод аналогій, аналітичні і синтетичні);
– за характером пізнавальної діяльності (пояснювально-ілюстративний, репродуктивний, проблемно-пошуковий, евристичний, дослідницький, розв'язування творчих завдань, проблемного викладу навчального матеріалу);
– інтерактивні та активізації навчання, з використанням новітніх мультимедійних та комп'ютерних технологій (групове навчання, мозковий штурм, робота в парах);
– індивідуальна науково-дослідна робота.

7. Критерії та методи оцінювання

Методи оцінювання: увесь перелік письмових, усних та практичних методів, а також проєктів, презентацій, портфоліо тощо, які використовуються для оцінювання успішності здобувача освіти і визнання досягнення результатів навчання освітнього компонента.

Поточний контроль проводиться на усіх видах аудиторних занять (лекції, практичні, індивідуальні, лабораторні заняття), а також оцінюється самостійна робота, зокрема й індивідуальні навчально-дослідні завдання, з кожної теми.

Поточний контроль на усіх видах аудиторних занять реалізується такими методами: усного і письмового опитування, захисту лабораторних робіт, виступів на практичних заняттях, підготовка та демонстрація презентацій, порт фоліо тощо, проведення контрольних робіт, колоквіумів та ін. Поточний контроль виконання самостійної роботи, в тому числі й ІНДЗ, здійснюється за усіма темами.

Форми здійснення поточного контролю та кількість балів за кожну форму визначаються викладачем.

Методи підсумкового оцінювання: усний, письмовий, тестовий залік, екзамен.

Підсумкова (загальна) оцінка з навчальної дисципліни є сумою рейтингових оцінок (балів), одержаних за окремі оцінювані форми навчальної діяльності: поточне та підсумкове оцінювання рівня засвоєння теоретичного матеріалу під час аудиторних занять та самостійної роботи (модульний контроль); оцінка (бали) за виконання лабораторних досліджень; оцінка (бали) за практичну діяльність; оцінка за ІНДЗ; оцінка (бали) за участь у наукових конференціях, олімпіадах, підготовку наукових публікацій тощо. Здобувачам вищої освіти після аудиторних занять надається право підвищувати свій рейтинг під час складання екзаменів та заліків (підсумкового контролю) за графіком екзаменаційної сесії.

У процесі оцінювання навчальних досягнень студентів застосовуються методи:

– *методи усного контролю:* індивідуальне опитування, бліц-опитування, фронтальне опитування; співбесіда, доповіді;

– *методи письмового контролю:* модульне письмове тестування, реферат, конспекти статей, занять; практичні заняття; бліц-контроль, експрес-контроль;

– *комп'ютерного контролю:* презентації доповідей та індивідуальних навчально-дослідницьких завдань;

– *методи самоконтролю:* уміння самостійно оцінювати свої знання, самоаналіз.

Оцінка навчальних досягнень виконується за допомогою процедур об'єктивного контролю – критеріально-орієнтованого тестування та комплексних контрольно-кваліфікаційних завдань; оцінювання виконується з використанням таких професійних засобів діяльності: практичні заняття; колоквіуми; тести; самостійні і контрольні роботи, залік.

Оцінка за шкалами ECTS, стобаловою, розширеною	**Критерії оцінювання (зразок)**
A 90-100 балів	Здобувач володіє понятійним і фактичним апаратом освітнього компонента на поглибленому рівні; комплексом знань та вмінь, який характеризується

ВІДМІННО	системністю. Застосування знань здійснюється на основі самостійного цілеутворення, побудови власних програм діяльності. Здобувач проявляє нешаблонність мислення у виборі і використанні елементів комплексу знань, здатний самостійно і творчо використовувати набуті уміння відповідно до варіативних ситуацій навчання. Здобувач спроможний самостійно формулювати узагальнення та висновки, нові задачі, розв'язувати нестандартні задачі, ситуації. Навчально-пізнавальна активність обумовлена пізнавальними інтересами, мотивами саморозвитку і професійного становлення. Здобувач проявляє інтерес до актуальних проблем відповідного освітнього компонента, може під керівництвом викладача вибрати предмет наукового дослідження, проводити самостійну науково-дослідну роботу.
B 80-89 балів ДУЖЕ ДОБРЕ	Здобувач володіє понятійним і фактичним апаратом освітнього компонента на поглибленому рівні. Здобувач володіє комплексом знань та вмінь, який є частково-впорядкованим. У процесі застосування знань здобувач спроможний вибрати необхідний елемент комплексу знань та вмінь. Застосування знань та вмінь здійснюється як у стандартних ситуаціях, так і при незначних варіаціях умов на основі використання загальних рекомендацій. Відбувається перенесення сформованих умінь або їх комплексів на розв'язування незнайомих задач, ситуацій. Навчально-пізнавальна активність стимулюється пізнавальними інтересами, продукт діяльності оцінюється як професійно значущий.
C 75-79 балів ДОБРЕ	Здобувач володіє понятійним і фактичним апаратом освітнього компонента на підвищеному рівні, може усвідомлено застосовувати знання та вміння для висвітлення суті питання. Комплекс знань частково-структурований. Знання застосовуються переважно у знайомих ситуаціях. Здобувач усвідомлює особливості навчальних задач, ситуацій тощо. Пошук способів їх розв'язання здійснюється за зразком. Здобувач спроможний аргументувати застосування певної методичної дії під час розв'язування задач, ситуацій тощо. Навчально-пізнавальна активність стимулюється мотивами професійного становлення і пізнавальними інтересами.
D 60-74 балів	Здобувач володіє понятійним і фактичним апаратом освітнього компонента на середньому рівні, може проілюструвати власними прикладами відповідь на

ЗАДОВІЛЬНО	питання, частково усвідомлює специфіку навчальних та прикладних задач, ситуацій тощо, має знання про способи розв'язування типових задач, ситуацій тощо. Однак процес самостійного розв'язування задач, ситуацій тощо потребує опори на зразок. Навчально-пізнавальна активність здобувачів є ситуативно-евристичною. Домінують мотиви обов'язку та особистого успіху. Використання засобів саморозвитку та самопізнання відбувається не усвідомлено.
E 50-59 балів ДОСТАТНЬО	Здобувач володіє понятійним і фактичним апаратом освітнього компоненту на середньому рівні. Має уявлення про специфіку навчальних та прикладних задач, ситуацій тощо. Виконання дій при роз'ясненні задач, ситуацій частково усвідомлюється, здійснюється частково правильно.
FX 35-49 балів НЕЗАДОВІЛЬНО	Здобувач володіє понятійним і фактичним апаратом освітнього компонента на елементарному рівні, має уявлення про зміст основних розділів. Виконання окремих дій відбувається не усвідомлено, однак переважно правильно, навчально–пізнавальна активність мотивується ситуативно-прагматичним інтересом.
F 1-34 балів НЕПРИЙНЯТНО	Здобувач має значні прогалини в основних поняттях і методах, володіє понятійним і фактичним апаратом освітнього компонента на елементарному рівні, має уявлення про зміст окремих розділів. Виконання окремих методичних дій відбувається несвідомо, у більшості неправильно, навчально-пізнавальна активність проявляється лише у ситуаціях зовнішнього примусу.

8. Розподіл балів, які одержують студенти (зразок)

№	Вид діяльності	Коефіцієнт вартості (бали)	Кількість робіт	Результат (бали)
1.	Домашні завдання	1	8	8
3.	Творче завдання	22	1	22
4.	Самостійні роботи	10	1	10
5.	Контрольна робота	10	2	20
6.	Колоквіум	10	2	20
Всього за 4-й семестр:				80 (80%)
Залік				20 (20%)
Нормований рейтинговий бал				100

§ 1. Функції двох і трьох змінних

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Функція багатьох змінних	Multivariable function
Область визначення функції	Domain of the function
Графік функції	Graph of the function
Лінії рівня	Level curves

1. Сформулювати означення функції багатьох змінних.

Нехай задано множину $E \subset \mathbb{R}^n$. *Якщо кожній точці* $x \in E$ *за певним законом співвідноситься одне дійсне число* y, *то кажуть, що* ***на множині*** E ***визначена функція багатьох змінних*** $y = f(x)$:

$$\boxed{\text{кожній } x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{функція}} \text{одне } y \in \mathbb{R}} \quad \textbf{(1.1)}$$

Позначення функції:

$y = f(x)$, $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, або $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, або $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

2. Що розуміють під графіком функції багатьох змінних?

Якщо функція визначена на множині $E \subset \mathbb{R}^n$, *то* ***графіком цієї функції*** *називається множина точок* $(x_1, x_2, ..., x_n, y)$ *простору* $\mathbb{R}^{n+1}$, *де* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E \subset \mathbb{R}^n$, *а* $y = f(x)$.

Зокрема, якщо $z = f(x, y)$ – *функція двох змінних* x *і* y, *визначена на множині* $E \subset \mathbb{R}^2$*, то її графіком, взагалі кажучи, є деяка поверхня, проєкція якої на площину* xOy *співпадає з множиною* E.

3. Що називають лініями рівня для функції двох змінних?

Криві на площині, в яких функція $z = f(x, y)$ *зберігає однакове значення, називають* ***лініями рівня***: $f(x, y) = C,\ C \in \mathbb{R}$ ***(1.2)***

Надаючи C *різних значень через однакові проміжки, одержимо сімейство ліній рівня, які є плоским графіком функції* $z = f(x, y)$.

Геометричний зміст лінії рівня: це проєкція кривої, яка є перетином площини $z = C$ *з поверхнею* $z = f(x, y)$ *на площину* xOy.

4. Що називають лініями рівня для функції трьох змінних?

Для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ ***лінією рівня*** *є множина точок, в яких функція зберігає однакове значення:* $f(x, y, z) = C,\ C \in \mathbb{R}$*, тобто поверхня.*

Основні поняття, що стосуються розділу «Диференціальне числення функції багатьох змінних» узагальнено та подано у вигляді схеми (рис. 1.1).

ФБЗ: $y = f(x)$

кожній точці $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{f}$ одне число $y \in \mathbb{R}$

Границя ФБЗ:

1. $\left(A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) \right) \overset{df}{\Leftrightarrow} \left(\forall \{x_k\} \subset O^*(x_0) \cap E : \lim\limits_{k \to \infty} x_k = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = A \right)$

2. $\left(A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) \right) \overset{df}{\Leftrightarrow} \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E : 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \right)$

Теорема.
Якщо існує $\lim\limits_{\substack{(x,y) \to (x_0, y_0) \\ (x,y) \in E}} f(x,y) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$, то існує $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y) \to (x_0, y_0) \\ (x,y) \in E}} f(x,y)$

Повторні границі:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$

2. $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$

Властивості границь:
Якщо існує $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = A$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} g(x) = B$, то існує:

1. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \left(f(x) \pm g(x) \right) = A \pm B$; **2.** $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$; **3.** $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$.

Неперервність ФБЗ:

1. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = f(x_0)$;

2. $\lim\limits_{\substack{d(x, x_0) \to 0 \\ x \in X}} \Delta f(x_0) = 0$;

3. $\left(\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = f(x_0) \right) \overset{df}{\Leftrightarrow} \left(\forall (x_k) \subset O(x_0) \cap E : \lim\limits_{k \to \infty} x_k = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = f(x_0) \right)$;

4. $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \right) \overset{df}{\Leftrightarrow} \left(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, \forall x \in E : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right)$.

Неперервність на компактній множині:
1. Т. Вейєрштрасса. **2.** Т. Больцано-Коші. **3.** Т. Кантора.

Рис. 1.1

Приклади розв'язування вправ

Задача 1.1. *Знайти значення функції* $z=\left(\dfrac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\operatorname{arctg}(x-y)}\right)^2$ *у точці* $(x_0,y_0)=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

Розв'язання. Значення x_0 і y_0 підставимо у функцію і проведемо відповідні обчислення:

$$z\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}{\operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)}\right)^2=\left(\frac{\operatorname{arctg}1}{\operatorname{arctg}\sqrt{3}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}.\ \blacksquare$$

Задача 1.2. *Знайти область визначення функції:*

1) $z=\sqrt{(1+x)(y-4)}$; ***2)*** $u=\ln\left(x\ln(y-x)\right)$.

Розв'язання. ***1)*** Графік функції $z=\sqrt{(1+x)(y-4)}$ зображено на рис. 1.2.

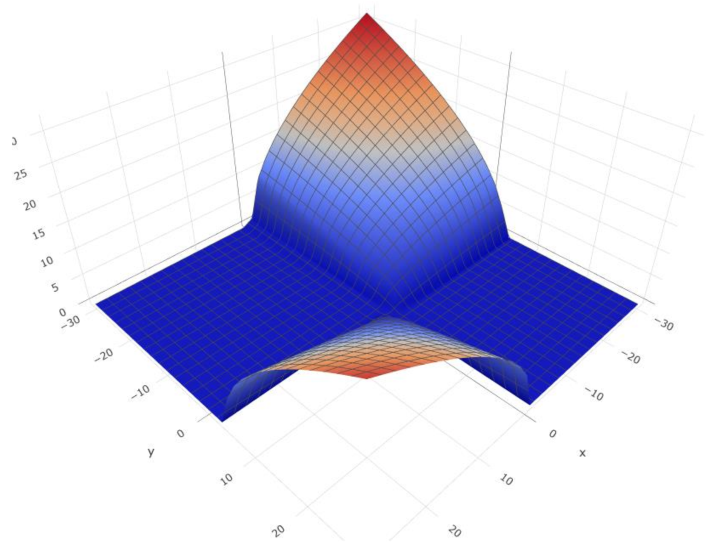


Рис. 1.2

Під областю визначення функції двох змінних, заданої аналітично, розуміємо множину всіх чисел $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, для яких формула, що задає функцію, має зміст $\forall(x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$. У нашому випадку маємо: $D(z)$: $(1+x)(y-4)\geq 0$, тобто

$$\begin{cases}1+x\geq 0,\\ y-4\geq 0,\end{cases} \text{або} \begin{cases}1+x\leq 0,\\ y-4\leq 0,\end{cases} \text{звідки} \begin{cases}x\geq -1,\\ y\geq 4,\end{cases} \text{або} \begin{cases}x\leq -1,\\ y\leq 4.\end{cases}$$

На площині точки з області визначення заповнюють два кути, які частково заштриховані на рис. 1.3. ■

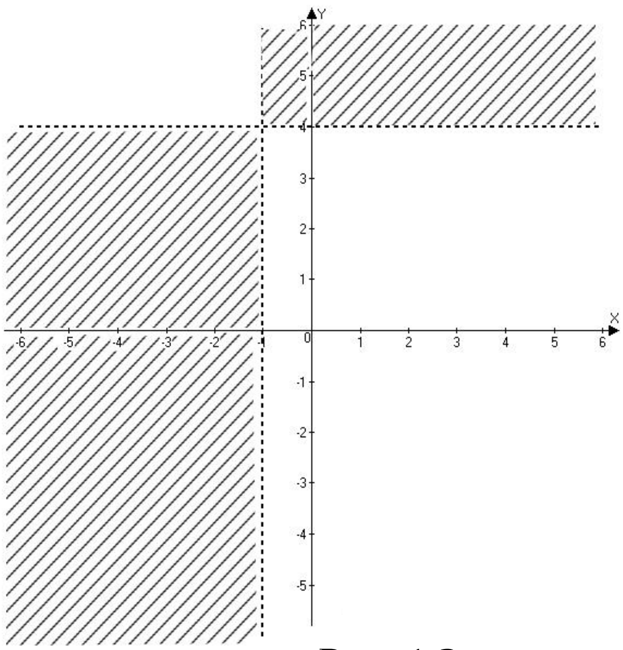


Рис. 1.3

2) $D(u): x\ln(y-x)>0$, звідси

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ \ln(y-x)>0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ \ln(y-x)<0,\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ y-x>1,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ y-x>0,\\ y-x<1.\end{cases}\end{array}\right. \quad ■$$

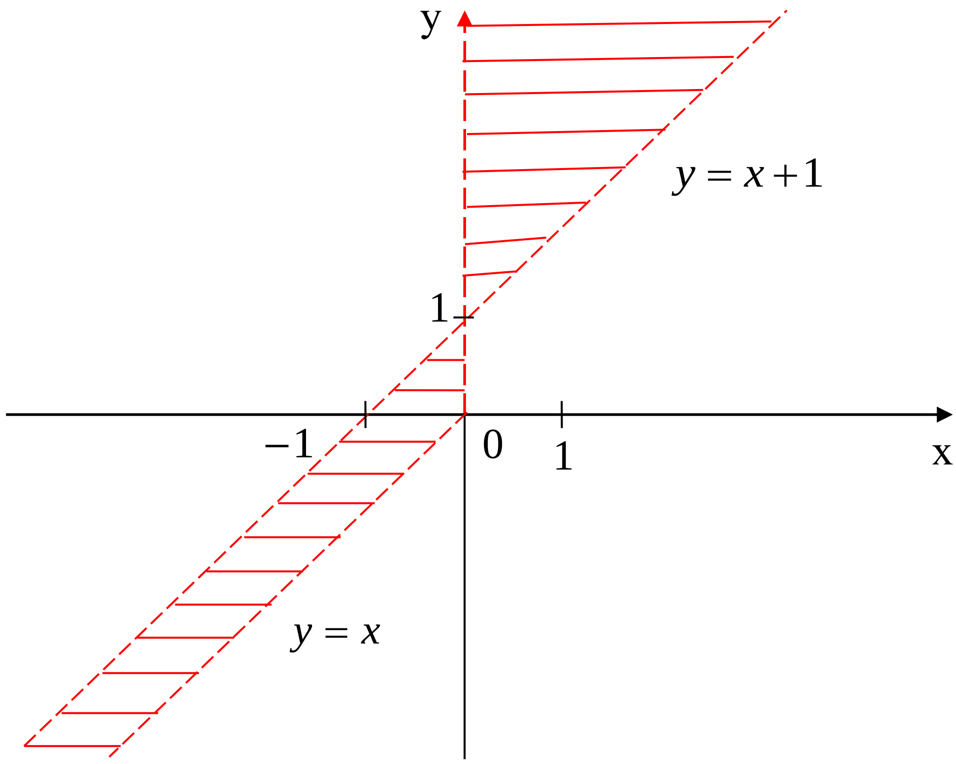


Рис. 1.4

Задача 1.3. *Знайти область визначення функції:*

1) $z = 4 - x - 2y$; **2)** $u = \dfrac{x^2 y}{2x + y}$;

3) $p = \dfrac{3}{x^2 + y^2}$; **4)** $q = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$;

5) $v = \arcsin(x + y)$; **6)** $t = \ln\dfrac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}$.

Розв'язання.

1) Функція z (рис. 1.5), як і будь-яка ціла раціональна функція, визначена при будь-яких значеннях x і y, тобто область визначення функції z є вся числова площина xOy, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, а графіком лінійної функції є площина.■

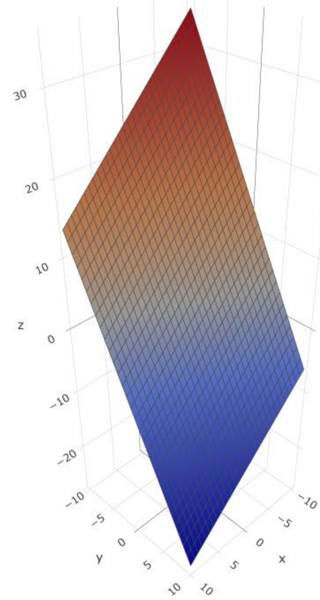


Рис. 1.5

2) Область визначення функції $u = \dfrac{x^2 y}{2x + y}$ (рис. 1.6) це вся площина xOy, за винятком прямої $2x + y = 0$, в точках якої знаменник функції перетворюється в нуль. ■

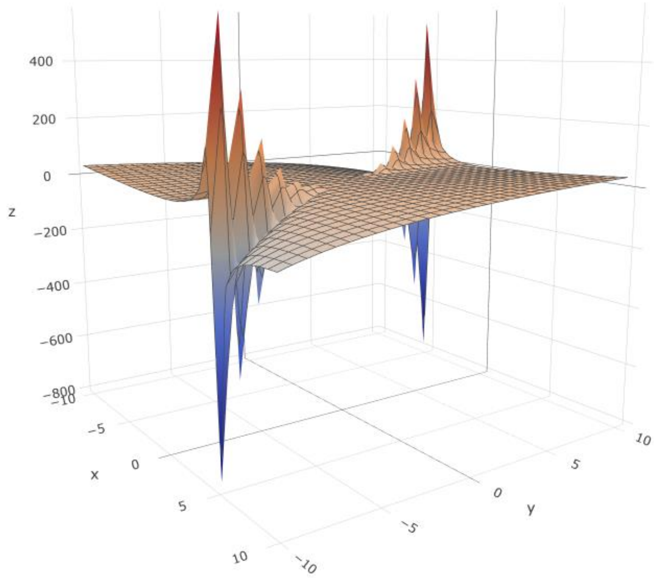


Рис. 1.6

3) Функція $p = \dfrac{3}{x^2 + y^2}$ (рис. 1.7) визначена при будь-яких значеннях змінних $x,\ y$, крім $x = 0,\ \ y = 0$, при яких її знаменник дорівнює нулю. Тому область визначення функції p буде вся числова площина, крім точки $(0;0)$. ■

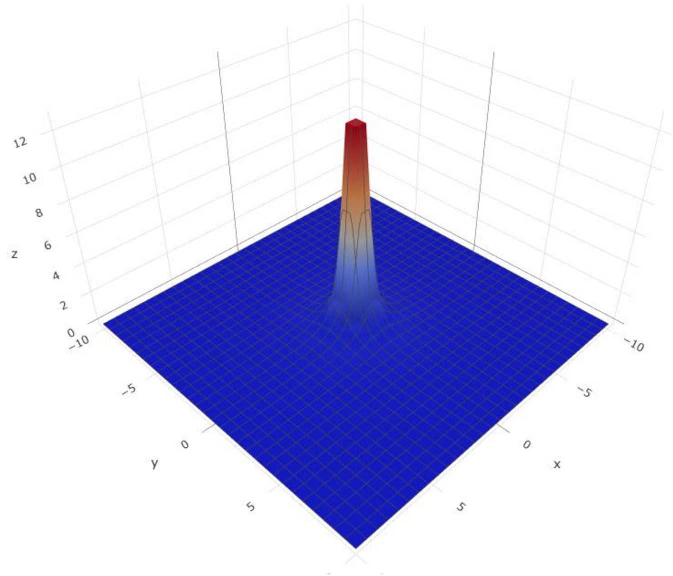


Рис. 1.7

4) Функція $q = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$ (рис. 1.8) визначена в тих і тільки точках площини xOy, координати яких задовольняють нерівність $xy > 0$. Всі ці точки лежать всередині першого і третього квадрантів (відкрита область). ■

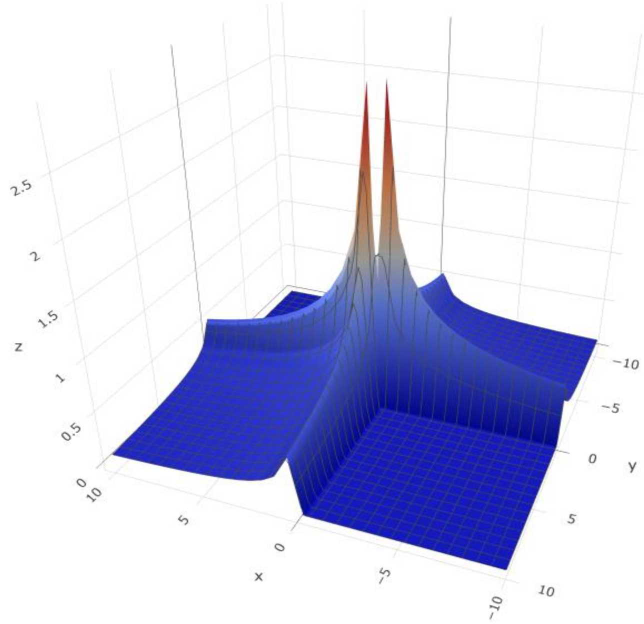


Рис. 1.8

5) Область визначення функції $v = \arcsin(x + y)$ (рис. 1.9) це множина точок площини, що задовольняють нерівність

$-1 \le x + y \le 1$. На площині xOy ця область є смугою, що обмежена паралельними прямими $x + y + 1 = 0$ і $x + y - 1 = 0$ (рис. 1.10). ■

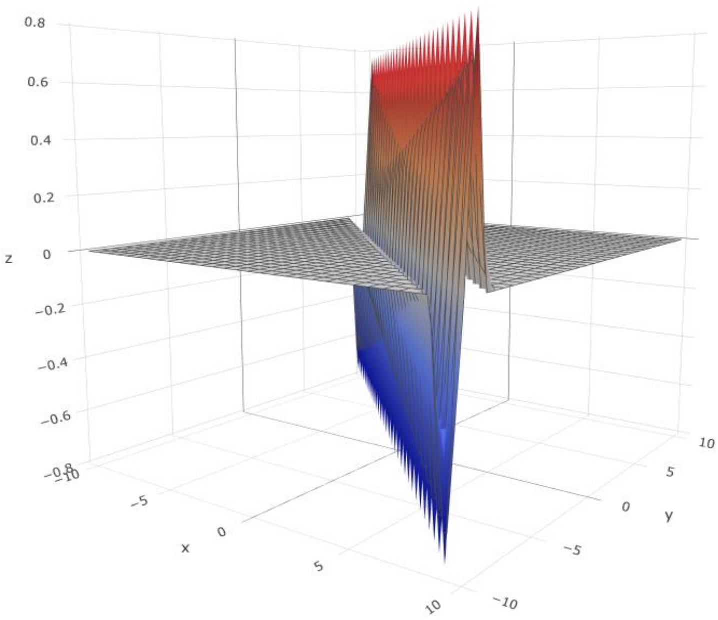


Рис. 1.9

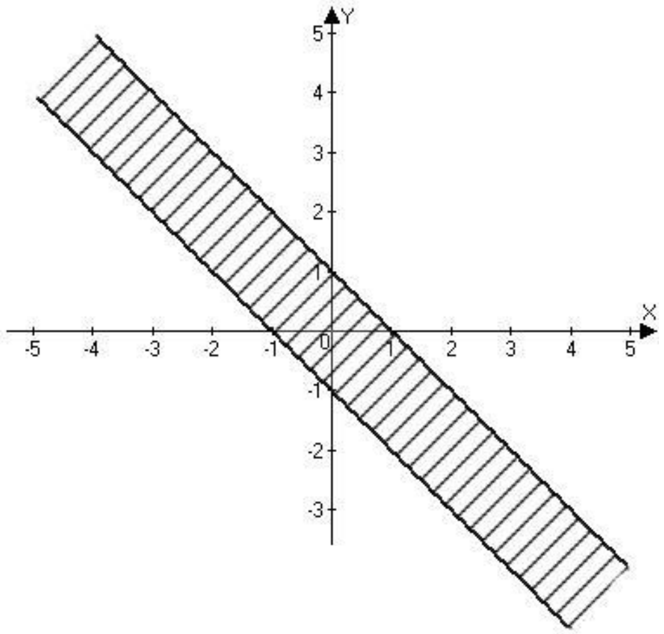


Рис. 1.10

б) Графік функції $t = \ln \dfrac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}$ зображено на рис. 1.11.

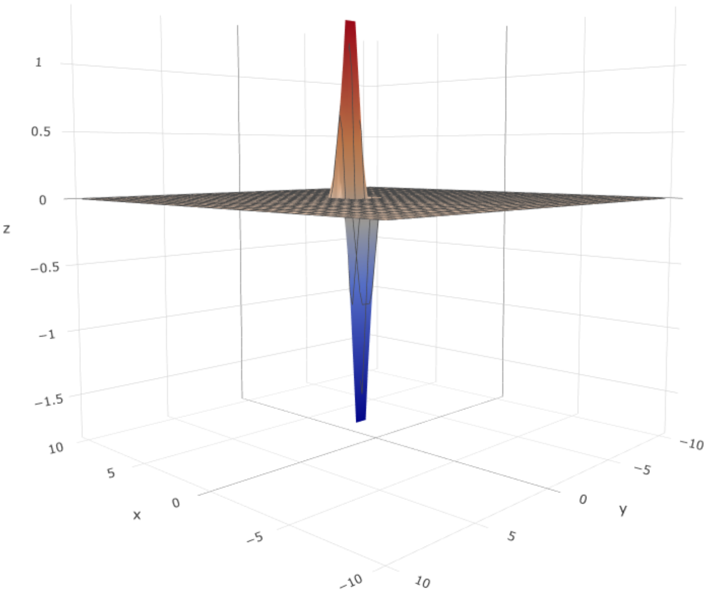


Рис. 1.11

$$D(t):\ \frac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}>0,\ \text{або}\ \frac{x^2+y^2-x}{x^2-2x+y^2}<0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+y^2-x<0,\\ x^2-2x+y^2>0,\end{cases}\\ \begin{cases}x^2+y^2-x>0,\\ x^2-2x+y^2<0.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left(x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+y^2<\frac{1}{4},\\ \left(x^2-2x+1\right)+y^2>1,\end{cases}\\ \begin{cases}\left(x^2-2x\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+y^2>\frac{1}{4},\\ \left(x^2-2x+1\right)+y^2<1.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)+y^2<\frac{1}{4},\\ \left(x^2-1\right)+y^2>1,\end{cases}\\ \begin{cases}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)+y^2>\frac{1}{4},\\ \left(x^2-1\right)+y^2<1.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)+y^2>\frac{1}{4},\\ \left(x^2-1\right)+y^2<1.\end{cases}$$

Область визначення даної функції зображена на рис. 1.12. ■

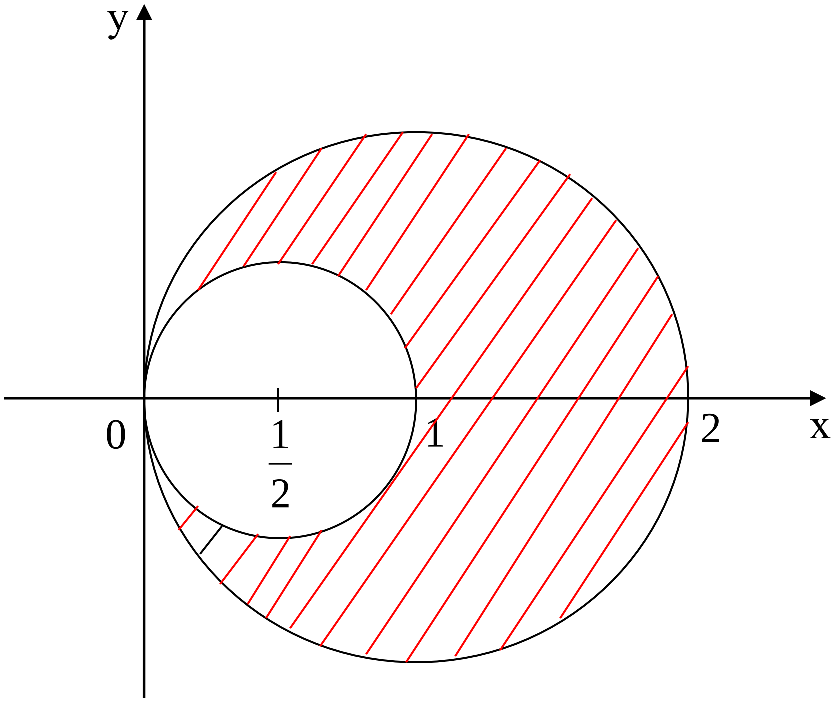


Рис. 1.12

Задача 1.4. *Виразити площу* $S = f(x, y)$ *ромба як функцію його периметра* x *та суми* y *довжин його діагоналей.*

Розв'язання. Оскільки периметр ромба відомий і дорівнює x, то сторона ромба рівна $\frac{x}{4}$. Площу ромба можна знайти через його діагоналі: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$. За умовою відома сума діагоналей ромба, тому використавши теорему Піфагора для півдіагоналей і сторони ромба, одержимо систему рівнянь (рис.1.13):

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = y, \\ \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{16}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 = y, \\ d_1^2 + d_2^2 = \frac{x^2}{4}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = y, \\ (d_1 + d_2)^2 - 2d_1 d_2 = \frac{x^2}{4}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 = y, \\ d_1 d_2 = \frac{4y^2 - x^2}{8}. \end{cases}$$

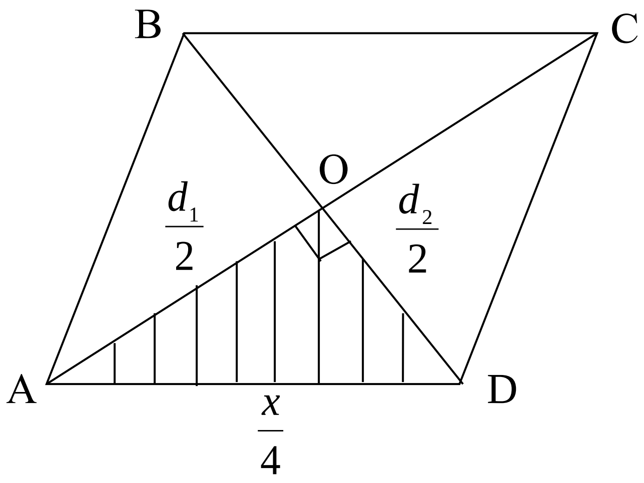


Рис. 1.13

Отже, площа ромба, як функція периметра і суми діагоналей, має вигляд: $S = f(x,y) = \frac{1}{2}d_1d_2 = \frac{4y^2 - x^2}{16}$, причому тут $4y^2 - x^2 \geq 0$, або $y \geq \frac{x}{2}$. ■

Задача 1.5. *Знайти область визначення функції трьох змінних* $u = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{z(1-z)}} - 2\ln(9-y^2)$.

Розв'язання.

Під областю визначення функції трьох змінних, заданої формулою, аналогічно випадку функції двох змінних, розуміють множину всіх точок (x,y,z) з простору $\mathbb{R}^3$, для яких формула, що задає функцію, має зміст. У нашому випадку маємо:

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0, \\ z(1-z) > 0, \\ 9-y^2 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq 2, \\ 0 < z < 1, \\ |y| < 3. \end{cases}$$

Точки в просторі, координати яких задовольняють останній системі нерівностей, заповнюють паралелепіпед, він і є областю визначення даної функції (рис. 1.14). ■

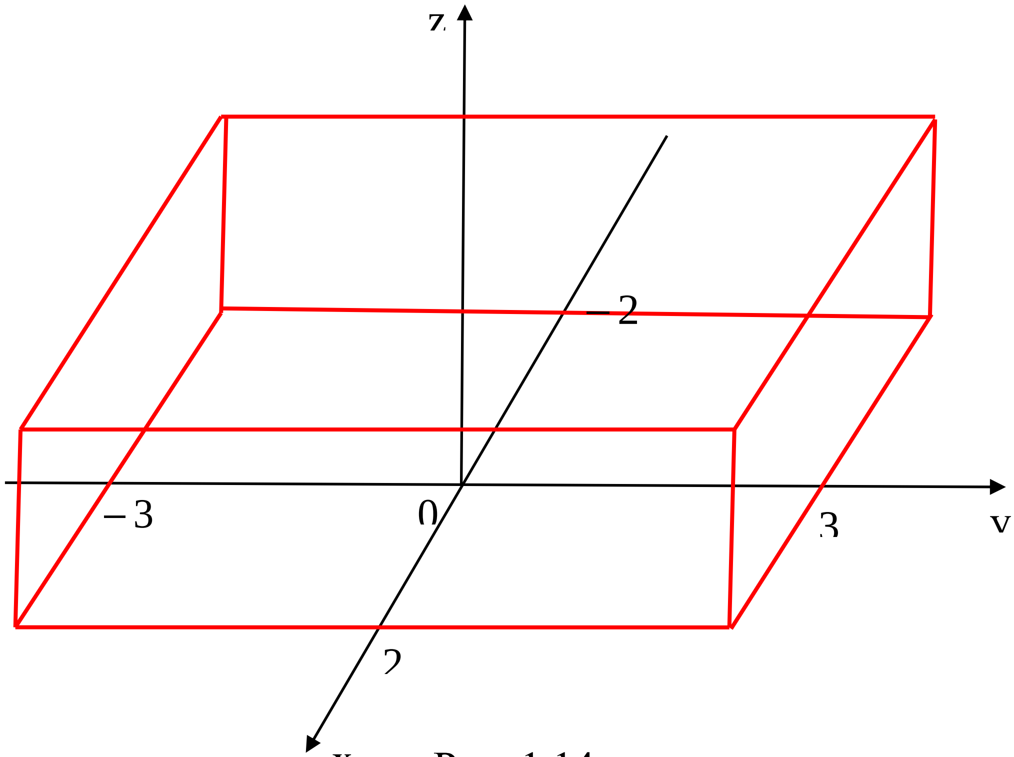


Рис. 1.14

Задача 1.6. Знайти область визначення і сімейства ліній рівня функції:

1) $u=\sqrt{\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}}$; **2)** $z=\max\left(|x|,|y|\right)$.

Розв'язання. ***1)*** Графік функції $u=\sqrt{\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}}$ зображено на рис. 1.15.

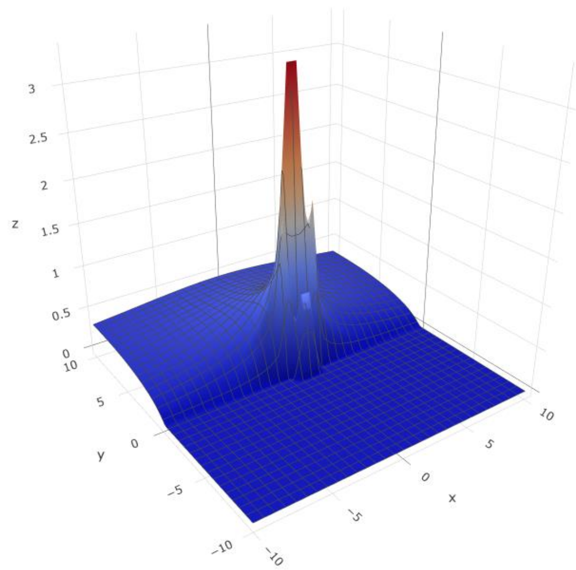


Рис. 1.15

Функція визначена в тих і тільки тих точках $(x;y)$ площини $\mathbb{R}^2$, координати яких задовольняють нерівність $\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}\geq 0$.

Ця нерівність рівносильна двом системам нерівностей:

$$\begin{cases} y\geq 0, \\ x^2+y^2>1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y\leq 0, \\ x^2+y^2<1. \end{cases}$$

Першу систему нерівностей задовольняють координати всіх точок, розміщених у верхній півплощині $y\geq 0$ і зовні круга радіусом 1 з центром в початку координат.

Другу систему нерівностей задовольняють всі точки площини, що лежать у нижній півплощині $y\leq 0$ і всередині круга радіусом 1. На рис. 1.16 область визначення функції показана штриховкою.

Для знаходження ліній рівня функції потрібно для довільної сталої $C\in\mathbb{R}$ знайти множину точок площини, координати яких задовольняють рівнянню $\sqrt{\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}}=C$.

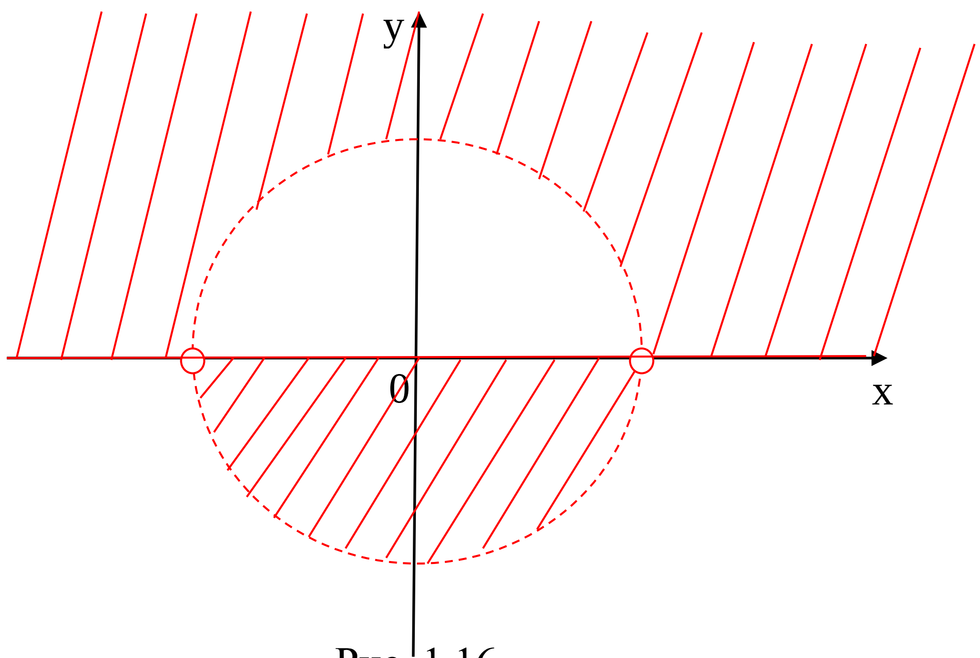


Рис. 1.16

Для $C<0$ ліній рівня немає; для $C=0$ лініями рівня функції будуть криві, які є розв'язками рівняння $\sqrt{\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}}=0$, тобто множина всіх точок осі абсцис за винятком двох точок $(\pm1,0)$, що не входять в область визначення функції. Для випадку $C>0$ лініями рівня функції будуть криві, які є розв'язками рівняння

$$\frac{2y}{x^2+y^2-1}=C^2,\ x^2+y^2-\frac{2}{C^2}y=1,\ x^2+\left(y-\frac{1}{C^2}\right)^2=1+\frac{1}{C^4}.$$

З останнього рівняння бачимо, що лініями рівня будуть кола радіуса $\sqrt{1+\dfrac{1}{C^4}}$ з центром у точці $\left(0;\dfrac{1}{C^2}\right)$, за винятком двох точок $(\pm1,0)$ цього кола, що не належать області визначення функції. На рис. 1.17 побудовані C-рівні функції при $C=0,\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{3}$. ■

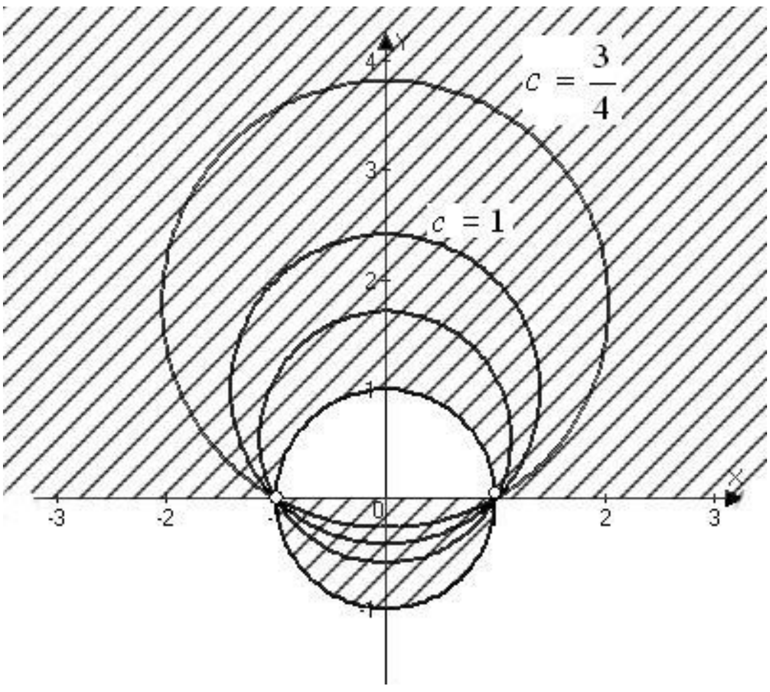


Рис. 1.17

2) Графік функції $z = \max\left(|x|,|y|\right)$ зображено на рис. 1.18.

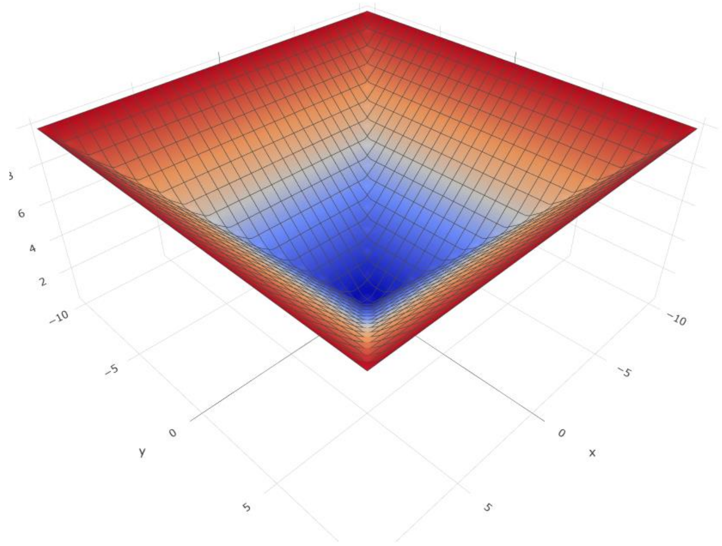


Рис. 1.18

Для функції $z = \max\left(|x|,|y|\right)$ лінії рівня знаходимо з умови: $\max\left(|x|,|y|\right) = C$. Для $C < 0$ ліній рівня немає; для $C = 0$ лініями рівня функції будуть криві, які є розв'язками рівняння $\max\left(|x|,|y|\right) = 0$, тобто лише одна точка площини $(0;0)$. Для $C > 0$ рівняння буде рівносильне двом системам рівнянь і нерівності: $\begin{cases} |x| = C, \\ |y| \le C, \end{cases}$ або $\begin{cases} |y| = C, \\ |x| \le C. \end{cases}$.

Одержимо на площині множину ліній, які зображають сімейство квадратів з сторонами довжини $C > 0$, діагоналі яких перетинаються в початку координат (рис. 1.19). ■

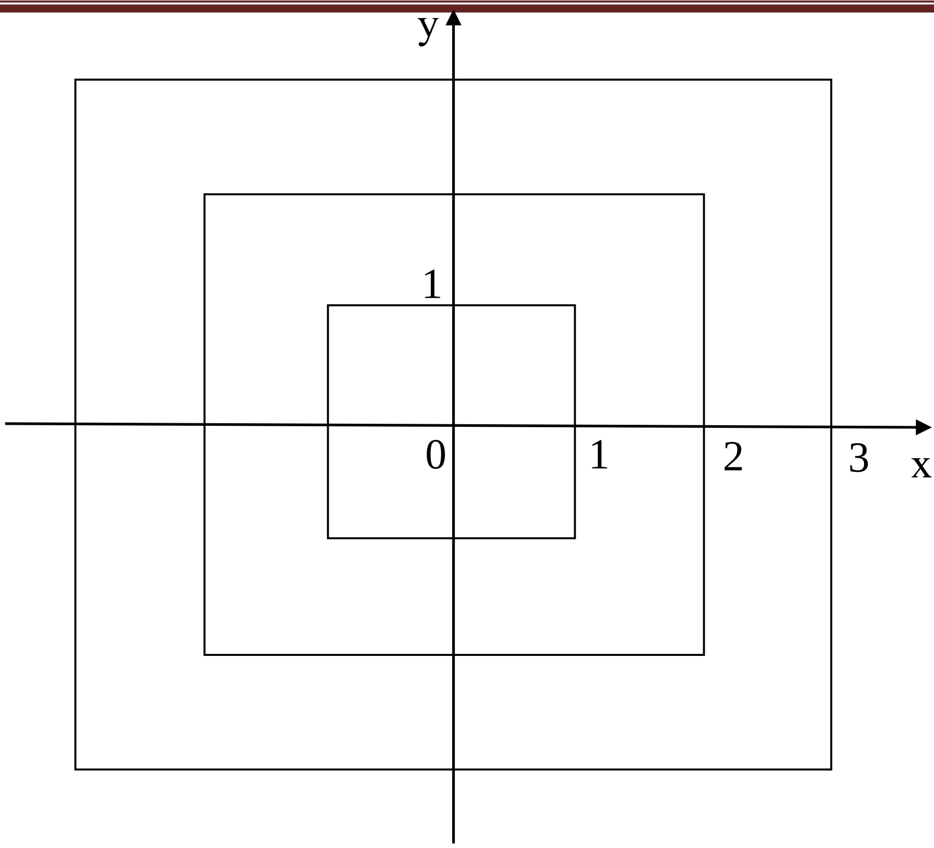


Рис. 1.19

Задача 1.7. *Знайти область визначення функції* $f(x,y,z)=\ln(z-y)+xy\sin z$.

Розв'язання.

Областю визначення функції трьох змінних $f(x,y,z)=\ln(z-y)+xy\sin z$ є: $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | z>y\}$.

Це є півпростір, що складається з усіх точок, що лежать над площиною $z=y$. ■

Задача 1.8. *Знайти функцію* $S=f(x,y,z)$, *якщо* S *– площа рівнобічної трапеції,* x *і* y *– довжини основ,* z *– довжина бічної сторони трапеції. Обчислити:*

1) $f(2;1;2)$; ***2)*** $f(4;2;2)$.

Розв'язання. Площа трапеції дорівнює добутку півсуми основ на висоту: $S=\dfrac{x+y}{2}\cdot h$. Висоту рівнобічної трапеції знайдемо за теоремою Піфагора з прямокутного трикутника AHB, у якому бічна сторона $AB = z$, а катет $AH = \dfrac{x-y}{2}$, $x > y$ (рис.1.20):

$$h = \sqrt{z^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4z^2 - (x-y)^2},$$

$$S = f(x,y,z) = \frac{x+y}{2}\cdot h = \frac{1}{4}(x+y)\sqrt{4z^2-(x-y)^2}, \text{ якщо } x > y,$$

$$z > \frac{x-y}{2}.$$

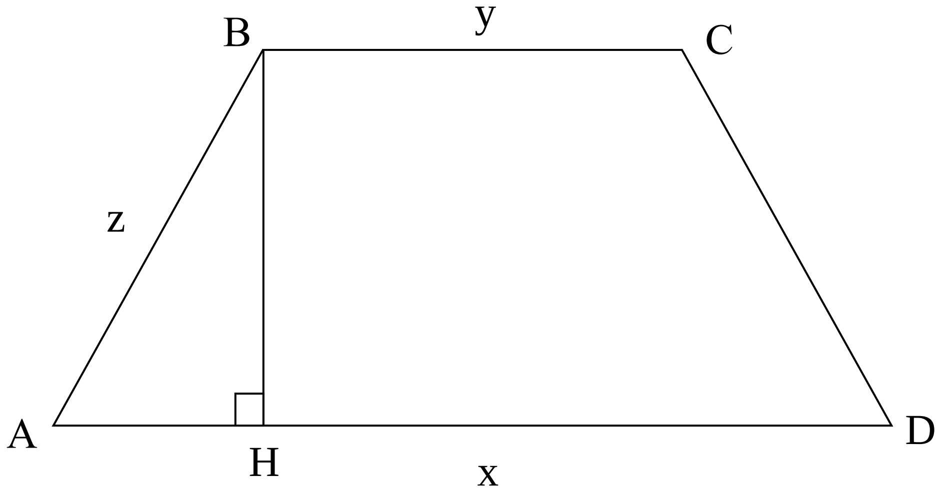


Рис. 1.20

1) $f(2;1;2) = \dfrac{1}{4}(2+1)\sqrt{16-(2-1)^2} = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$. ■

2) $f(4;2;2) = \dfrac{1}{4}(2+4)\sqrt{16-(4-2)^2} = 3\sqrt{3}$. ■

Задача 1.9. *Знайти поверхні рівня функції* $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Розв'язання. Поверхні рівня визначаються рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 = C, C \geq 0$. Це сім'я концентричних сфер з центром у початку координат і радіусом $R = \sqrt{C}$ (рис. 1.21).

Якщо С=0, то маємо точку (0; 0; 0);

якщо С=1, то маємо сферу радіуса 1;

якщо С=4, то маємо сферу радіуса 2;

якщо C=9, то маємо сферу радіуса 3.

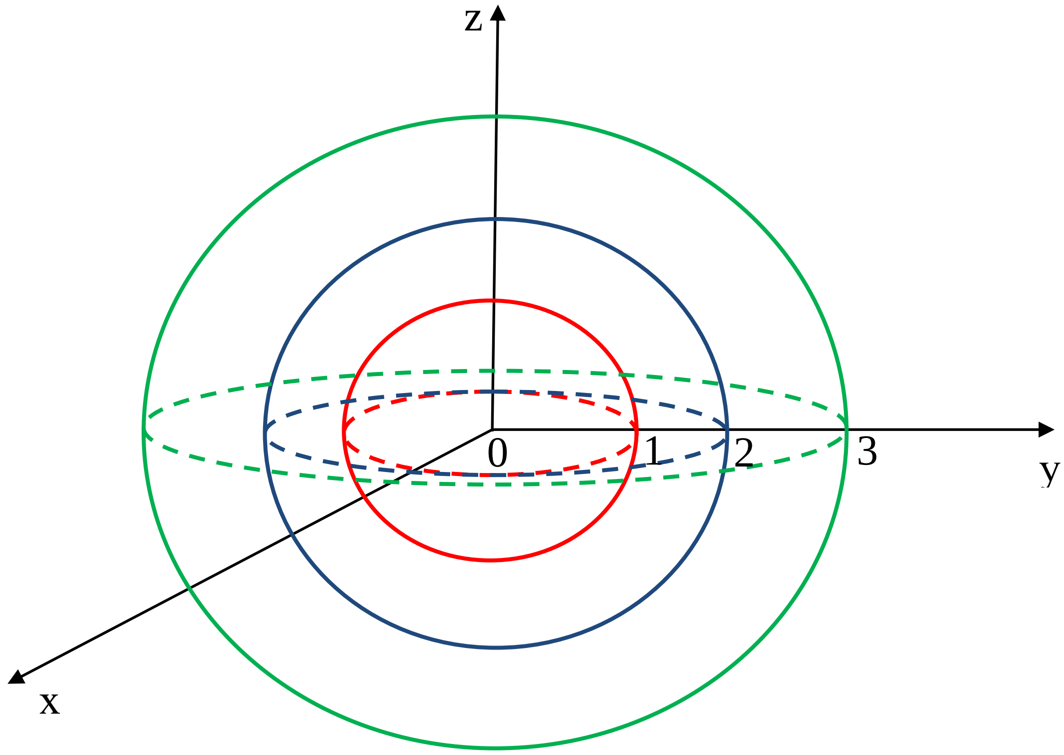


Рис. 1.21

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1. [1]** *Знайти значення функції* $z = f(x;\ y)$ *у точці* $(x_0;\ y_0)$:

1) $z = \left(\dfrac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\operatorname{arctg}(x-y)}\right)^2, \quad \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2};\ \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right);$

2) $z = e^{\sin(x+y)}, \quad \left(\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right);$

3) $z = y^{x^2-1} + x^{y^2-1}, \quad (2;\ 2),\ (1;\ 2),\ (2;\ 1);$

4) $z = \sqrt{x^2 - y^2}, \quad (5;\ -3).$

✍**2. [1; 9]** *Знайти область визначення функції двох змінних:*

1) $u = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y};$

2) $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2};$

3) $u=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}};$ ***4)*** $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}};$

5) $u=\ln(y^2-4x+8);$ ***6)*** $u=\ln xy;$

7) $u=\ln x-\ln\sin y;$ ***8)*** $u=\ln(x^2+4y^2-2x-3);$

9) $u=\ln\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2};$ ***10)*** $u=\ln\big(x\ln(y-x)\big);$

11) $u=\sqrt{\dfrac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}};$ ***12)*** $u=\sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)};$

13) $u=\sqrt{1-|x|-|y|};$ ***14)*** $u=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}.$

✍**3. [9]** *Знайти функцію* $V=f(x;\,y)$, *якщо* V *– об'єм прямого кругового конуса,* x *– довжина його твірної, а* y*:*

1) висота конуса; ***2)*** довжина кола основи.

✍**4. [1]** *В кулю радіуса* R *вписана піраміда з прямокутною основою, вершина якої ортогонально проектується в точку перетину діагоналей основи. Об'єм піраміди є функцією сторін* x *і* y *її основи. Чи буде ця функція однозначною? Скласти для неї аналітичний вираз. Знайти область визначення функції.*

✍**5. [3]** *Квадратна дошка складається з 4 квадратних клітинок, почергово білих і чорних, сторона кожної з них дорівнює одиниці. Розглянемо прямокутник зі сторонами, паралельними сторонам дошки, один з кутів якого співпадає з чорним кутом дошки. Площа чорної частини цього прямокутника є функцією від довжин його сторін* x *і* y. *Записати цю функцію аналітично.*

✍**6. [3]** *Підібрати аналітичні вирази, областями визначення яких були б такі множини:*

1) *площина з виколотою точкою* $A(-3;\,1)$;

2) *площина з виколотим колом* $x^2+y^2=25;$

3) *площина з виколотою параболою* $y^2 = 9x$ *і колом* $x^2 + y^2 = 9$;

4) *площина, з якої вилучені точки* $A(m;\, n),\ m,\ n \in \mathbb{Z}$*;*

5) *півкруг* $x^2 + y^2 \le 100,\ x > 0$*;*

6) *півкруг* $x^2 + y^2 ,100,\ x > 0$*;*

7) *частина параболи* $y^2 = 4x$*, що відтинається прямою* $x - y - 4 = 0$*;*

8) *зовнішня частина круга радіуса 4 з центром* $C(5;\,1)$*;*

9) *область, обмежена параболами* $y^2 = x,\ y^2 = 4x$ *і гіперболами* $xy = 4$ *і* $xy = 8.$

✍**7. [3; 9]** *Знайти сімейства ліній рівня для кожної з функцій і накреслити їх графіки*

1) $z = x + y$;

2) $z = x^2 + y^2$;

3) $z = x^2 - y^2$;

4) $z = \sqrt{y - x}$;

5) $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$;

6) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{2y}{x^2 + y^2 - 1}$;

7) $z = \sqrt{1 - 2|x| - |y|}$;

8) $z = |x| + |y| - |x + y|$;

9) $z = \min(x,\ y)$;

10) $z = \max(|x|,\ |y|)$.

✍**8. [3; 9]** *Знайти область визначення функції трьох змінних, заданих формулами:*

1) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}}$;

2) $u = \ln(1 - x - y - z)$;

3) $u = \sqrt{z(2 - z)} + \ln(4 - x^2) - 3y$;

4) $u = \sqrt{8 - x^2 - 2y^2 - 4z^2}$;

5) $u = \sqrt{1 - |x| - |y| - |z|}$;

6) $u = \ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$;

7) $u = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2}\, \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$;

8) $u = \arcsin\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z-1}$.

✍**9. [9]** *Знайти функцію* $Q = f(x, y, z)$, *якщо* Q *– площа бічної поверхні правильної шестикутної зрізаної піраміди,* x *і* y *– сторони основ,* z *– висота піраміди.*

✍**10. [9]** *Знайти* C *-рівні функції трьох змінних:*

1) $u = x + 2y + 3z$;

2) $u = e^{x+2y+3z}$;

3) $u = x^2 + y^2 + 4z^2$;

4) $u = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2+2y}$;

5) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$;

6) $u = \ln(z^2 - x^2 - y^2)$;

7) $u = \ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

8) $u = \dfrac{z}{x+y+z-1}$.

§ 2. Границя і неперервність функції багатьох змінних

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Границя функції в точці на множині	The limit of the functionat the point on the set
Повторні границі	Repeated limits
Границя функції в точці вздовж кривої	The limit of the function at the point along the curve
Неперервна функція в точці	A continuous function at a point

1. Сформулювати означення границі функції $y = f(x)$, визначеної на множині $E \subset \mathbb{R}^n$ у точці $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$.

Означення (за Гейне). *Число* A *називається* ***границею функції*** $f(x)$ *на множині* E *у точці* x_0, *якщо для довільної послідовності точок* $x_k \in E$, $k = 1, 2, \dots$, $x_k \neq x_0$, *збіжної до точки* x_0, *відповідна числова послідовність значень функції* $\{f(x_k)\}$ *збіжна до числа* A **(2.1).**

$$\boxed{\left(A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x)\right) \overset{df}{\Leftrightarrow} \left(\forall \{x_k\} \subset O^*(x_0) \cap E : \lim_{k \to \infty} x_k = x_0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} f(x_k) = A\right)}$$

Означення (за Коші). *Число* A *називається* ***границею функції*** $f(x)$ *на множині* E *в точці* x_0, *якщо для довільного як завгодно* *малого числа* $\varepsilon > 0$ *можна вказати додатне число* $\delta > 0$ *таке, що для всіх точок* $x \in E : 0 < d(x, x_0) < \delta$ *виконується нерівність:* $|f(x) - A| < \varepsilon$ ***(2.2)***.

$$\boxed{\left(A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x)\right) \overset{df}{\Leftrightarrow} \left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E : 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right)}$$

2. Властивості границь функції багатьох змінних.

Нехай функції $f(x)$ *і* $g(x)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, *визначені на множині* $E \subset \mathbb{R}^n$ *і мають у точці* x_0 *границі:*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = A,\ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} g(x) = B,\ x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}).$$

Тоді функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *також мають границі у точці* x_0, *і правильні рівності:*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \left(f(x) \pm g(x)\right) = A \pm B,$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \left(f(x) \cdot g(x)\right) = A \cdot B, \qquad \textbf{(2.3)}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{A}{B}\ (B \neq 0).$$

3. Що називають повторною границею для функції двох змінних?

Якщо для довільного фіксованого $y \in (y_0 - \delta_2; y_0 + \delta_2) \setminus \{y_0\}$ *існує границя функції* $f(x, y)$ *однієї змінної x у точці* x_0: $\lim_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$, *і існує границя функції* $\varphi(y)$ *у точці* y_0:

$\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=b$, *то кажуть, що в точці* (x_0,y_0) *існує повторна границя для функції* $f(x,y)$:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=b. \qquad \textbf{(2.4)}$$

Аналогічно означається ще одна повторна границя:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y):=\lim_{x\to x_0}\psi(x), \qquad \textbf{(2.5)}$$

де $\psi(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $x\in(x_0-\delta_1;x_0+\delta_1)\setminus\{x_0\}$.

4. Чи існує зв'язок між повторними границями і границею в заданій точці для функції двох змінних?

Нехай функція $f(x,y)$ *визначена на множині* E, *яка містить всі точки деякого прямокутного околу* $P((x_0,y_0),\delta_1,\delta_2)$ *точки* (x_0,y_0), *крім, можливо, точок прямих* $x=x_0$, $y=y_0$. *Якщо існує границя функції* $f(x,y)$ *у точці* (x_0,y_0) *на множині* E *і* $\forall y\in(y_0-\delta_2,y_0+\delta_2)$, *для якої точки* $(x,y)\in P\cap E$, *існує* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$, *то повторна границя* $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ *існує і*

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in E}} f(x,y) \qquad \textbf{(2.6)}$$

5. Як означається неперервна функція багатьох змінних у точці?

1. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x)=f(x_0)$

2. $\left(\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x)=f(x_0)\right)\overset{df}{\Leftrightarrow}\left(\forall(x_k)\subset O(x_0)\cap E:\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=f(x_0)\right)$

3. $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\right)\overset{df}{\Leftrightarrow}\left(\forall\varepsilon>0\exists\delta>0,\forall x\in E: d(x,x_0)<\delta\Rightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon\right)$

4. $\lim\limits_{\substack{d(x,x_0)\to 0\\ x\in X}} \Delta f(x_0)=0$.

5. *Неперервність по змінній:* $\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\Delta_{x_k} f(x_0)=0$.

Приклади розв'язування вправ

Задача 2.1. *Обчислити границю функції:*

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-2)}\dfrac{x^2+4y^2}{12x-3y}$; ***2)*** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(1+2xy)}{\sin 3xy}$.

Розв'язання.

1) Застосувавши теорему про арифметичні операції над границями, а також взявши до уваги, що границя сталої величини дорівнює цій сталій дістанемо (рис. 2.8):

$$\lim_{(x,y)\to(-1,-2)}\frac{x^2+4y^2}{12x-3y}=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-2)}\left(x^2+4y^2\right)}{\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-2)}\left(12x-3y\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-2)}x^2+\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-2)}4y^2}{\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-2)}12x-\lim\limits_{(x,y)\to(-1,-2)}3y}=-\frac{17}{6}.\ \blacksquare$$

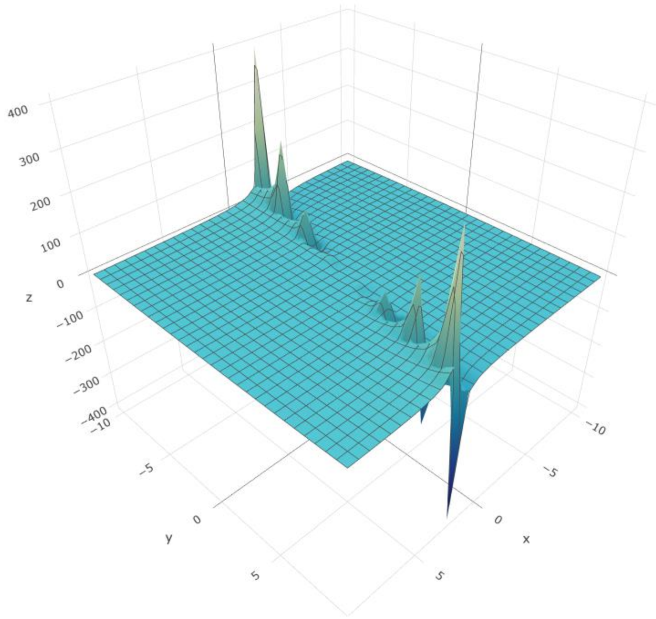


Рис. 2.1

2) При знаходженні границі функції багатьох змінних можна скористатися певними замінами і звести відшукання границі функції багатьох змінних до границі функції однієї змінної. Тут в нагоді стане таблиця чудових границь або таблиця еквівалентних.

Зробимо заміну: $xy = t$. Тоді з того, що $(x; y) \to (0;0)$ випливає $t = 0$ і границю заданої функцію можна знайти як границю функції однієї змінної:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(1+2xy)}{\sin 3xy} = \left| \begin{array}{l} t = xy \\ (x; y) \to (0;0) \\ t \to 0 \end{array} \right| = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+2t)}{\sin 3t} = \left| \begin{array}{l} \ln(1+2t) \sim 2t \\ \sin 3t \sim 3t \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2t}{3t} = \frac{2}{3}. \quad \blacksquare$$

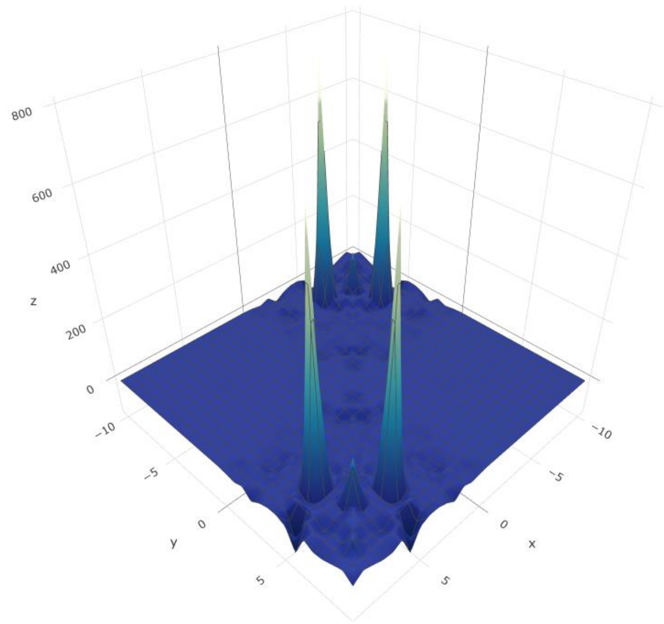


Рис. 2.2

Задача 2.2. *Знайти* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. І спосіб. Використаємо означення за Гейне і відому нерівність $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{1}{2}$. Виберемо довільну послідовність точок $(x_k, y_k) \in O^*\big((0,0)\big)$, $k = 1,2,\ldots$: $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k, y_k) = (0;0)$, і оцінимо модуль різниці

$$\left|\frac{x_k^2 y_k}{x_k^2+y_k^2} - 0\right| = \frac{|x_k y_k|}{x_k^2+y_k^2}|x_k| \le \frac{|x_k|}{2} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

тому $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{x_k^2 y_k}{x_k^2+y_k^2} = 0$. Останній факт і означає, що границя функції $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ у точці $(0;0)$ дорівнює 0.

II спосіб. Перейдемо до полярних координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тоді $\dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \dfrac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2} = \rho\cos^2\varphi\sin\varphi$. Оскільки функція $\cos^2\varphi\sin\varphi$ обмежена, то функція $\rho\cos^2\varphi\sin\varphi$ є нескінченно малою як добуток нескінченно малої і обмеженої функцій: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim\limits_{\rho\to0}\rho\cos^2\varphi\sin\varphi = 0$. ■

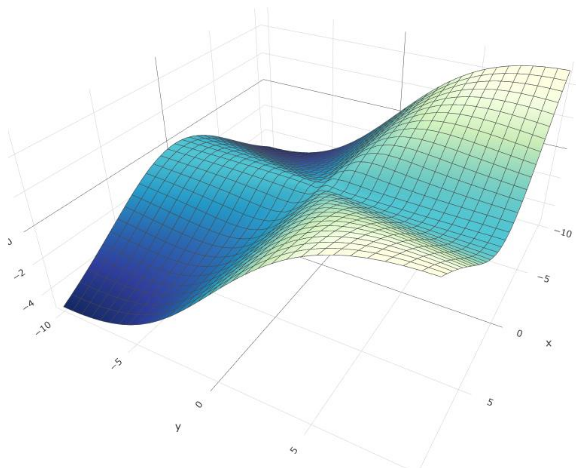


Рис. 2.3

Задача 2.3. *Знайти границю функції* $f(x;y) = y\cos\dfrac{1}{y-x}$ *у точці* $(0;0)$ *на області визначення.*

Розв'язання. Функція $f(x;y)$ визначена у всіх точках площини крім тих, де $y = x$: $E = \left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \neq y\right\}$. Знайдемо

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in E}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in E}} y\cdot\cos\dfrac{1}{y-x} = 0,$ як добуток нескінченно малої $y\left(\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in E}} y = 0\right)$ і обмеженої $\cos\dfrac{1}{y-x}$, $\left|\cos\dfrac{1}{y-x}\right| \le 1\ \forall(x,y)\in E$. ■

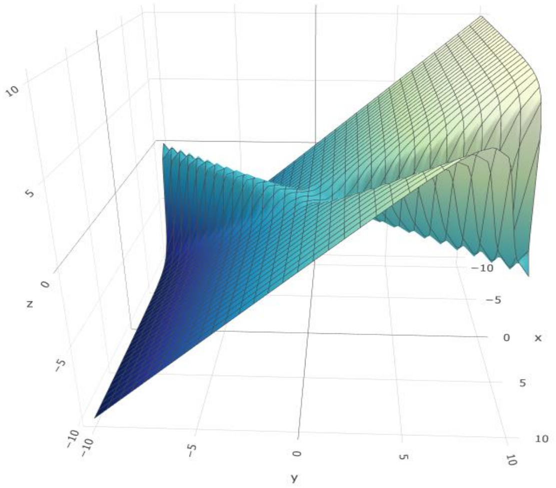


Рис. 2.4

Задача 2.4. *Довести, що функція* $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ *не має границі в точці* $(0;0)$.

Розв'язання. І спосіб. Використаємо означення за Гейне. Візьмемо дві послідовності точок, збіжних до точки $(0;0)$, і покажемо, що послідовності відповідних значень функції збігаються до різних чисел:

$$\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}(0;0),\ \text{тоді}\ \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}}=0,$$

$$\left(\frac{2}{n};\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}(0;0),\ \text{тоді}\ \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{2}{n};\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4}{n^2}-\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{1}{n^2}}=\frac{3}{5},$$

$$0\neq\frac{3}{5}.$$

Отже, за означенням границі функції за Гейне, дана функція у точці $(0;0)$ границі немає.

II спосіб. Перейдемо до полярних координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тоді функція $f(x, y)$ матиме вигляд:

$$f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) = \frac{r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \cos 2\varphi. \qquad (*)$$

Якби існувала границя $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y) = c$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайшлося б таке число $\delta > 0$, що із нерівності $0 < r < \delta$ випливало би $\left|f(x;y) - c\right| < \varepsilon$. Але функція (*) не залежить від r, і в довільному околі точки $O(0;0)$ є як точки, де значення функції дорівнює нулю: $f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) = 0$ (наприклад, при $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$), так і точки, де значення функції дорівнює 1: $f(r\cos\varphi; r\sin\varphi) = 1$ (наприклад, при $\varphi = 0$). Звідси робимо висновок, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x;y)$ не існує (рис. 2.5а, 2.5б). ■

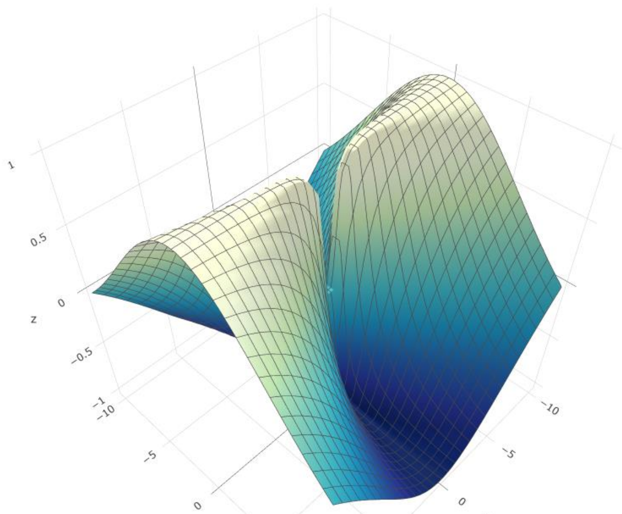


Рис. 2.5а. Редактор Mathcha

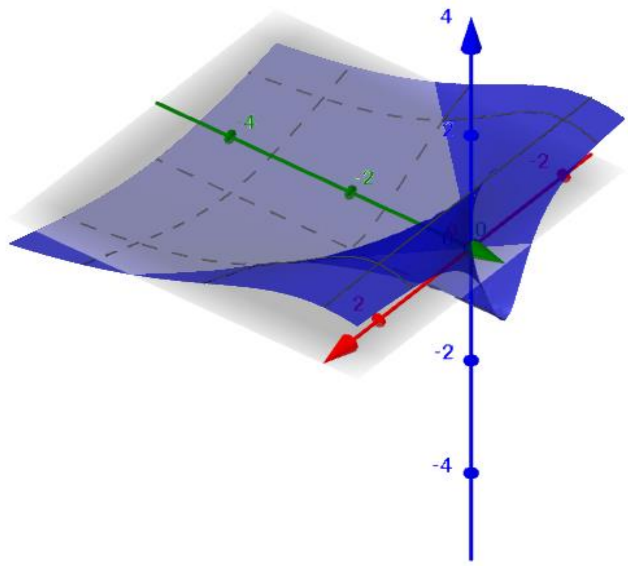


Рис. 2.5б. Редактор GeoGebra

Задача 2.5. *Обчислити границю* $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \dfrac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Маємо: $\dfrac{x+y+2x^2+2y^2}{x^2+y^2}=2+\dfrac{x}{x^2+y^2}+\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Якщо $|x|>N$ і $|y|>N$, де N довільне фіксоване число, то

$$\left|\frac{x}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x}{x^2+0^2}\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0, \quad \left|\frac{y}{x^2+y^2}\right| < \frac{1}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

Звідси $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(2+\dfrac{x}{x^2+y^2}+\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)=2$ (рис. 2.6). ■

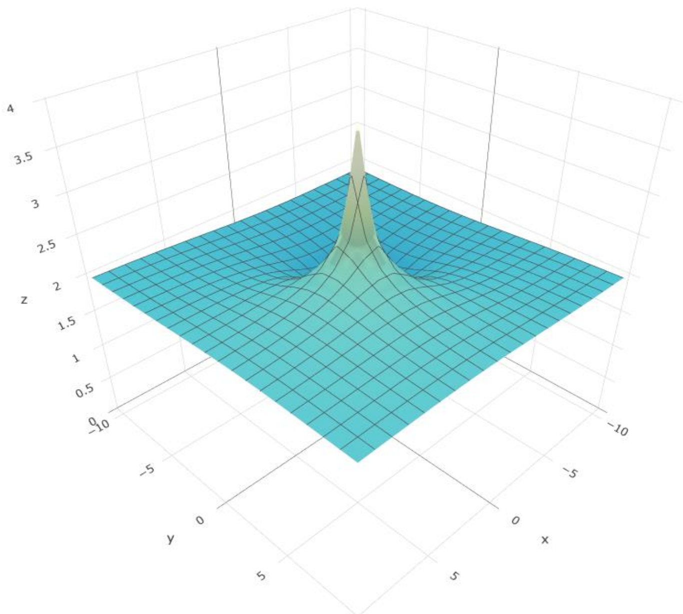


Рис. 2.6

Задача 2.6. *Знайти* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} f(x;y)$, *де*

$$f(x;y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2y\right)}{x^2}, & \text{якщо } x\ne 0,\\ 3, & \text{якщо } x=0.\end{cases}$$

Розв'язання. При $x=0,\ y=3$ чисельник і знаменник дробу $\dfrac{\sin\left(x^2y\right)}{x^2}$ перетворюється в нуль. Покладемо $x^2y=\alpha$.

Тоді при $x\to 0$ і $y\to 3$ буде $\alpha\to 0$, і тому

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\frac{\sin\left(x^2y\right)}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}}\frac{\sin x^2y}{x^2y}y=\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ y\to 3}}\frac{\sin\alpha}{\alpha}y=1\cdot 3=3$$

(тут ми використали першу чудову границю). Якщо ж $x=0$, то $f\left(x;y\right)=3$, і границя $f\left(x;y\right)$ при $y\to 3$ дорівнює 3 (рис. 2.7). ■

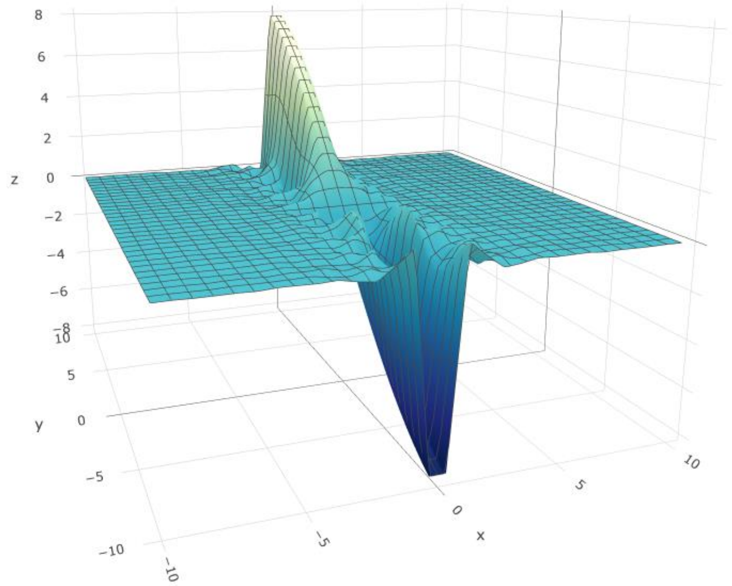


Рис. 2.7

Задача 2.8. *Знайти область визначення і перевірити неперервність функції* $z=\dfrac{xy+4}{x^2+y^2+1}$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є вся площина.

Для перевірки неперервності функції виберемо довільну точку $M_0(x_0, y_0)$. Нехай точка $M(x,y)$ прямує до M довільним способом, тоді:

$$\lim_{M\to M_0} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{xy+4}{x^2+y^2+1} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} x\cdot \lim\limits_{y\to y_0} y+4}{\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)^2+\left(\lim\limits_{y\to y_0} y\right)^2+1} = \frac{x_0y_0+4}{x_0^2+y_0^2+1} =$$

$$= f(x_0, y_0).$$

Дана функція неперервна на всій площині (рис. 2.8а, 2.8б). ■

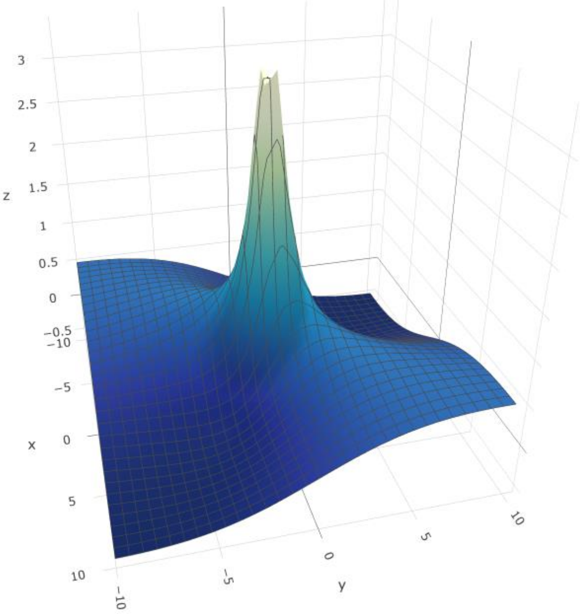


Рис. 2.8а. Редактор Mathcha

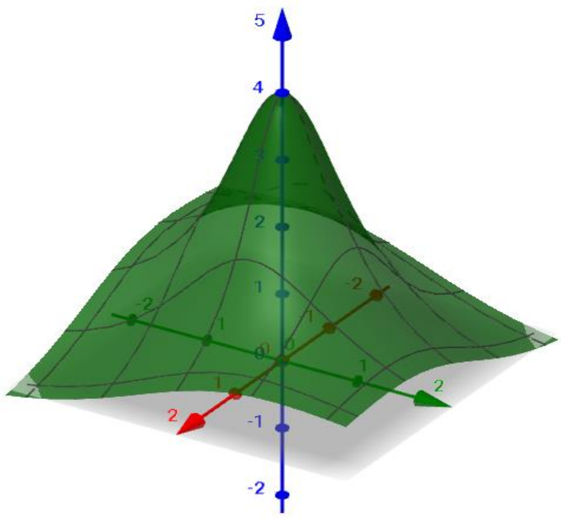


Рис. 2.8б. Редактор GeoGebra

Задача 2.9. *Знайти точки розриву функції* $w = \dfrac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}$.

Розв'язання. Функція не визначена у точках, де знаменник дорівнює нулю:

$$\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 \pi x = 0, \\ \cos^2 \pi x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi x = \pi n, \\ \pi y = \pi m, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = n, \\ y = m, \end{cases} m, n \in \mathbb{Z}.$$

Із неї знаходимо, що x і y цілі числа. Отже, функція розривна у всіх точках виду $M(m;n)$, де m і n – цілі числа (рис. 2.9а, 2.9б). ■

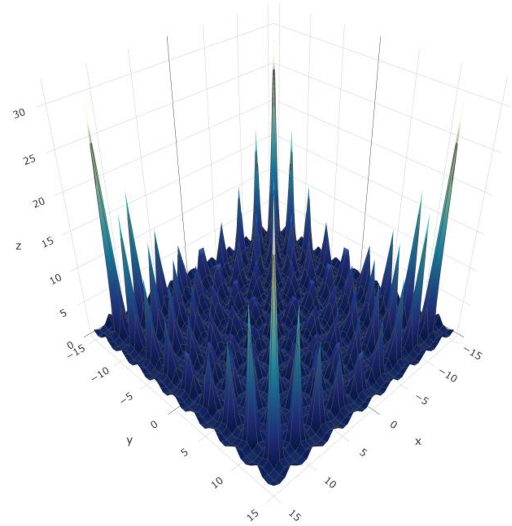


Рис. 2.9а. Редактор Mathcha

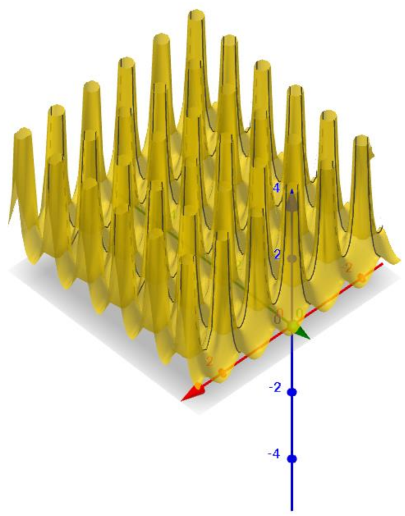


Рис. 2.9б. Редактор GeoGebra

Задача 2.10. *Для функції* $f(x, y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ *знайти границю* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$ *і повторні границі* $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)\right)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)\right)$, *якщо вони існують, у точках* $(1;1)$; $(0;0)$; $(+\infty;+\infty)$.

Розв'язання.

Точка $(1;1)$.

Використаємо правила знаходження границі.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} \frac{x-y}{x+y} = \frac{\lim\limits_{(x,\,y)\to(1;1)}(x-y)}{\lim\limits_{(x;\,y)\to(1;1)}(x+y)} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

Повторні границі:

$$\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 1}\frac{x-y}{x+y}\right) = \left|x = \mathrm{const}\right| = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0.$$

$$\lim_{y\to 1}\left(\lim_{x\to 1}\frac{x-y}{x+y}\right) = \left|y = \mathrm{const}\right| = \lim_{y\to 1}\frac{1-y}{1+y} = \frac{1-1}{1+1} = 0.$$

Висновок: тут існує границя функції і повторні границі і всі вони рівні.

Точка $(0;0)$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y}{x+y}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Маємо невизначеність, яку потрібно розкрити. З цією метою використаємо означення границі функції в точці за Гейне. Візьмемо дві послідовності точок, збіжних до точки $(0;0)$ і проаналізуємо послідовності відповідних значень функції $f(x;y)=\dfrac{x-y}{x+y}$: $\left(\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{n}\right)\underset{n\to\infty}{\to}(0;0)$, $f\left(\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}=0$, тому маємо числову послідовність $0,0,\dots,0,\dots\to 0$.

$\left(\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{2n}\right)\underset{n\to\infty}{\to}(0;0)$, $f\left(\dfrac{1}{n};\dfrac{1}{2n}\right)=\dfrac{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}}=\dfrac{\frac{1}{2n}}{\frac{3}{2n}}=\dfrac{1}{3}$, маємо числову послідовність $\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dots,\dfrac{1}{3},\dots\to\dfrac{1}{3}$.

Робимо висновок, що у цій точці не існує границі функції.

Повторні границі:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\left|x=\text{const}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x+0}=\lim_{x\to 0}1=1,$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right)=\left|y=\text{const}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{0-y}{0+y}=\lim_{y\to 0}(-1)=-1.$$

Висновок. У точці $(0;0)$ існують повторні границі, а границя функції не існує.

Точка $(+\infty;+\infty)$.

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\frac{x-y}{x+y}=\left(\frac{\infty-\infty}{\infty}\right),$$ тобто маємо невизначеність.

Аналогічно до попереднього пункту використаємо означення границі за Гейне:

$$(2n;\,n)\underset{n\to\infty}{\to}(+\infty;+\infty),\ \ f(x_n;\,y_n)=\frac{2n-n}{2n+n}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n;\,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

$$(3n;\,n)\underset{n\to\infty}{\to}(+\infty;+\infty),\ \ f(x_n;\,y_n)=\frac{3n-n}{3n+n}=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n;\,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{3}.$$

Робимо висновок, що в цій точці не існує границі функції.

Повторні границі:

$$\lim_{y\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{x-y}{x+y}=\left|\begin{matrix}y=\text{const}\\ \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\end{matrix}\right|=\lim_{y\to+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y}{x}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1-0}{1+0}=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to+\infty}\frac{x-y}{x+y}=\left|\begin{matrix}x=\text{const}\\ \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\end{matrix}\right|=\lim_{x\to+\infty}\lim_{y\to+\infty}\frac{\dfrac{x}{y}-1}{\dfrac{x}{y}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{0-1}{0+1}=-1.$$

Висновок. У нескінченно віддаленій точці $(+\infty;+\infty)$ існують повторні границі, а границя не існує. ■

Задача 2.11. *Знайти границю функції* $f(x;\,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ *у точці* $(0;\,0)$*, або довести, що вона не існує.*

Розв'язання.

I спосіб. Маємо невизначеність типу $\left(\frac{0}{0}\right)$. Домножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до знаменника:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2+1-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)=1+1=2. \ \blacksquare$$

II спосіб. Перейдемо до полярної системи координат, а потім використаємо еквівалентні функції:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ (x;\,y)\to(0;\,0)\\ \Rightarrow \rho\to 0\end{array}\right|=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2}{\sqrt{1+\rho^2}-1}=$$

$$=\left|\begin{array}{c} (1+*)^{\alpha}-1\sim\alpha *,\\ *\to 0\\ \left(1+\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}\rho^2\end{array}\right|=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2}{\frac{1}{2}\rho^2}=2. \ \blacksquare$$

III спосіб. Виконаємо заміну і використаємо еквівалентні функції:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=\left|\begin{array}{l} x^2+y^2=t\\ (x,\,y)\to(0;\,0)\\ \Rightarrow t\to 0\end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sqrt{1+t}-1}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{2}t}=2. \ \blacksquare$$

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1. [14]** *Знайти границю:*

1) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \dfrac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$;

2) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$;

3) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq 1}} \dfrac{xy-y-2x+2}{x-1}$;

4) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,-4)\\ y\neq -4,\ x\neq x^2}} \dfrac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$;

5) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \dfrac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;

6) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,2)\\ x+y\neq 4}} \dfrac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}$;

7) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,0)\\ 2x-y\neq 4}} \dfrac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$;

8) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(4,3)\\ x\neq y+1}} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$;

9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$;

10) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(xy)}{xy}$;

11) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^3+y^3}{x+y}$;

12) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \dfrac{x-y}{x^4-y^4}$;

✍**2. [14]** *Знайти границю:*

1) $\lim\limits_{p\to(1,3,4)} \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$;

2) $\lim\limits_{p\to(1,-1,-1)} \dfrac{2xy+yz}{x^2+z^2}$;

3) $\lim\limits_{p\to(\pi,\pi,0)} \left(\sin^2 x+\cos^2 y+\sec^2 z\right)$;

4) $\lim\limits_{p\to\left(-\frac{1}{4},\frac{\pi}{2},2\right)} \tan^{-1} xyz$;

5) $\lim\limits_{p\to(\pi,0,3)} ze^{-2y}\cos 2x$;

6) $\lim\limits_{p\to(2,-3,6)} \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

✍**3.** **[9]** *Для функції* $z = f(x, y)$ *знайти повторні границі* $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y)\right)$; $\lim\limits_{y\to y_0}\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)\right)$; *і границю* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)$, *якщо вони існують у випадках:*

1) $f(x, y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$, $(0; 0)$; $\left(\dfrac{1}{\pi}; 0\right)$; $\left(\dfrac{1}{\pi}; \dfrac{1}{\pi}\right)$; $(+\infty; +\infty)$;

2) $f(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$, $(0; 0)$; $(+\infty; +\infty)$; $(+\infty; -\infty)$;

3) $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $(0; 0)$; $(+\infty; +\infty)$; $(0; +\infty)$; $(0; 1)$;

4) $f(x, y) = x^2e^{-(x^2-y)}$, $(+\infty; +\infty)$; $(0; +\infty)$; $(+\infty; 0)$; $(+\infty; -\infty)$;

5) $f(x, y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$, $(+\infty; +\infty)$; $(0; 0)$; $(\infty; 0)$; $(0; \infty)$;

6) $f(x, y) = \dfrac{\sin\pi x}{2x+y}$, $(+\infty; +\infty)$; $(+\infty; -\infty)$; $(0; +\infty)$; $(+\infty; 0)$;

7) $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}tg\,\dfrac{xy}{1+xy}$, $(0; +\infty)$; $(0; 0)$;

8) $f(x, y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$, $(\infty; \infty)$; $(0; 0)$;

9) $f(x, y) = \dfrac{\sin xy}{x}$, $(0; 0)$; $(0; 1)$; $(0; +\infty)$; $(\pi; 1)$;

10) $f(x, y) = \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$, $(+\infty; +\infty)$, $(+\infty; 1)$; $(+0; +0)$; $(+0; +\infty)$;

11) $f(x, y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2}$, $(0; 0)$; $(\infty; 0)$;

12) $f(x, y) = \dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(1; 0)$; $(0; 0)$; $(+\infty; +\infty)$.

✍**4. [9]** *Знайти границю функції* $z = f(x, y)$ *у точці* $(0; 0)$, *або довести, що вона не існує, якщо:*

1) $f(x; y) = \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$; ***2)*** $f(x; y) = \dfrac{\sin(x^4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$;

3) $f(x; y) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4 + y^4}$; ***4)*** $f(x; y) = \dfrac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$;

5) $f(x; y) = \dfrac{(x^2 + y^2)x^2 y^2}{1 - \cos(x^2 + y^2)}$; ***6)*** $f(x; y) = (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$;

7) $f(x; y) = \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + y^3} - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; ***8)*** $f(x; y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

✍**5. [3]** *Довести, що функція*

$$f(x; y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0; 0), \\ 0, & (x, y) = (0; 0) \end{cases}$$

не має границі в точці $O(0; 0)$.

✍**6. [3]** *Довести, що функція*

$$f(x; y) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{x + y}\right)^{x+y}, & \text{якщо } x + y \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } x + y = 0 \end{cases}$$

не має границі, якщо $x \to \infty;\ y \to \infty$.

✍**7.** *Дослідити функції на неперервність і знайти точки розриву, якщо такі є:*

1) $f(x;\,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y}{x^4+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0;\end{cases}$

2) $f(x;\,y)=\dfrac{2x-3}{x^2+y^2-4};$

3) $f(x;\,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x+y}, & x+y\neq 0,\\ 3, & x+y=0;\end{cases}$

4) $f(x;\,y)=\dfrac{\sin^2 x\sin y}{\sin^4 x+\sin^2 y};$

5) $f(x;\,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}, & (x,\,y)\notin\mathbb{Z}^2,\\ 1, & (x,\,y)\in\mathbb{Z}^2;\end{cases}$

6) $f(x;\,y)=x\sin\dfrac{y^2}{x^2+y^2};$

7) $f(x;\,y;\,z)=\dfrac{1}{\sin\pi x+\sin\pi y+\sin\pi z};$

8) $f(x;\,y;\,z)=\dfrac{1}{\sqrt{8-x^2-2y^2-4z^2}};$

9) $f(x;\,y;\,z)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xyz)}{z}, & z\neq 0,\\ x^2, & z=0;\end{cases}$

10) $f(x;\,y;\,z)=\begin{cases}\arccos\dfrac{x^2}{x^2+z^2}, & x^2+z^2\neq 0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x^2+z^2=0.\end{cases}$

§ 3. Диференційовність функції двох і трьох змінних. Повний диференціал

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Частинна похідна функції за змінними	Partial derivative of a function with respect to variables
Диференційовна функція	Differentiable function
Частинний диференціал	Partial derivative
Повний диференціал	Total derivative

1. Що називають частинними похідними функції двох змінних?

Частинною похідною за змінною x *функції* $f(x,y)$ *у точці* (x_0,y_0) *називають границю (якщо вона існує) відношення частинного приросту* $\Delta_x f(x_0,y_0)$ *до приросту* Δx, *якщо останній прямує до нуля:* $f'_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ ***(3.1)***

Частинною похідною за змінною y *функції* $f(x,y)$ *у точці* (x_0,y_0) *називають границю (якщо вона існує) частинного приросту* $\Delta_y f(x_0,y_0)$ *за змінною* y *функції* $f(x,y)$ *у точці* (x_0,y_0) *до приросту* Δy, *якщо останній прямує до нуля:*

$$f'_y(x_0,y_0):=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f(x_0,y_0)}{\Delta y} \qquad \textbf{(3.2)}$$

2. Як означаються частинні похідні функції багатьох змінних?

Аналогічно. Якщо існує границя відношення частинного приросту $\Delta_{x_k} f(x_0)$ *за змінною* x_k *функції* $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *у точці* $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$ *до відповідного приросту* Δx_k *аргументу* x_k *при* $\Delta x_k \to 0$, *то цю границю називають* ***частинною похідною функції*** $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *у точці* M_0 *по аргументу* x_k *і позначають:*

$$f'_{x_k}(M_0) = f'_{x_k}(x_{01}, ..., x_{0n}) = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_k} = \frac{\partial f(x_{01}, ..., x_{0n})}{\partial x_k} \qquad \textbf{(3.3)}$$

3. Які правила знаходження частинних похідних?

Під час обчислення частинних похідних можна використати правила обчислення похідних функції однієї змінної (похідна суми, добутку, частки двох функцій, похідна складеної функції).

4. Яку функцію називають диференційовною?

Функція $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *називають* ***диференційовною у точці*** $M_0(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$, *якщо її повний приріст можна подати у вигляді:*

$$\Delta y = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_n \Delta x_n + \varepsilon_1 \Delta x_1 + \varepsilon_2 \Delta x_2 + ... + \varepsilon_n \Delta x_n \qquad \textbf{(3.4)}$$

де $A_1, A_2, ..., A_n$ *– сталі числа, які не залежать від* Δx_k, $k = \overline{1,n}$, *а*

$$\lim_{d \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{d \to 0} \varepsilon_2 = ... = \lim_{d \to 0} \varepsilon_n = 0, \; d = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k^2}.$$

5. Що називають повним диференціалом функції?

Лінійну відносно приростів аргументів частину диференційовної у точці M_0 *функції* $y = f(x)$ *називають* ***повним диференціалом функції*** f *у точці* M_0 *і позначають:*

$$df(M_0) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + ... + A_n \Delta x_n, \; \frac{\partial y(M_0)}{\partial x_k} = A_k, \; k = \overline{1,n} \qquad \textbf{(3.5)}$$

$$dy = \frac{\partial y(M_0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y(M_0)}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial y(M_0)}{\partial x_n} dx_n$$

6. Використання повного диференціалу в наближених обчисленнях.

Повні диференціали часто використовують при наближених обчисленнях. При достатньо малих приростах аргументів повний приріст функції можна з досить малою похибкою замінити її повним диференціалом: $\Delta u \approx du$.

Наприклад для функції $u = u(x, y, z)$ *трьох змінних маємо* ***(3.6)****:*

$$u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0) \approx u'_x(x_0,y_0,z_0)\Delta x + u'_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y + u'_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z$$

$$u(x,y,z) \approx u(x_0,y_0,z_0) + u'_x(x_0,y_0,z_0)\Delta x + u'_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y + u'_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z$$

Основні поняття, що стосуються теми «Частинні похідні», узагальнено та подано на рис. 3.1.

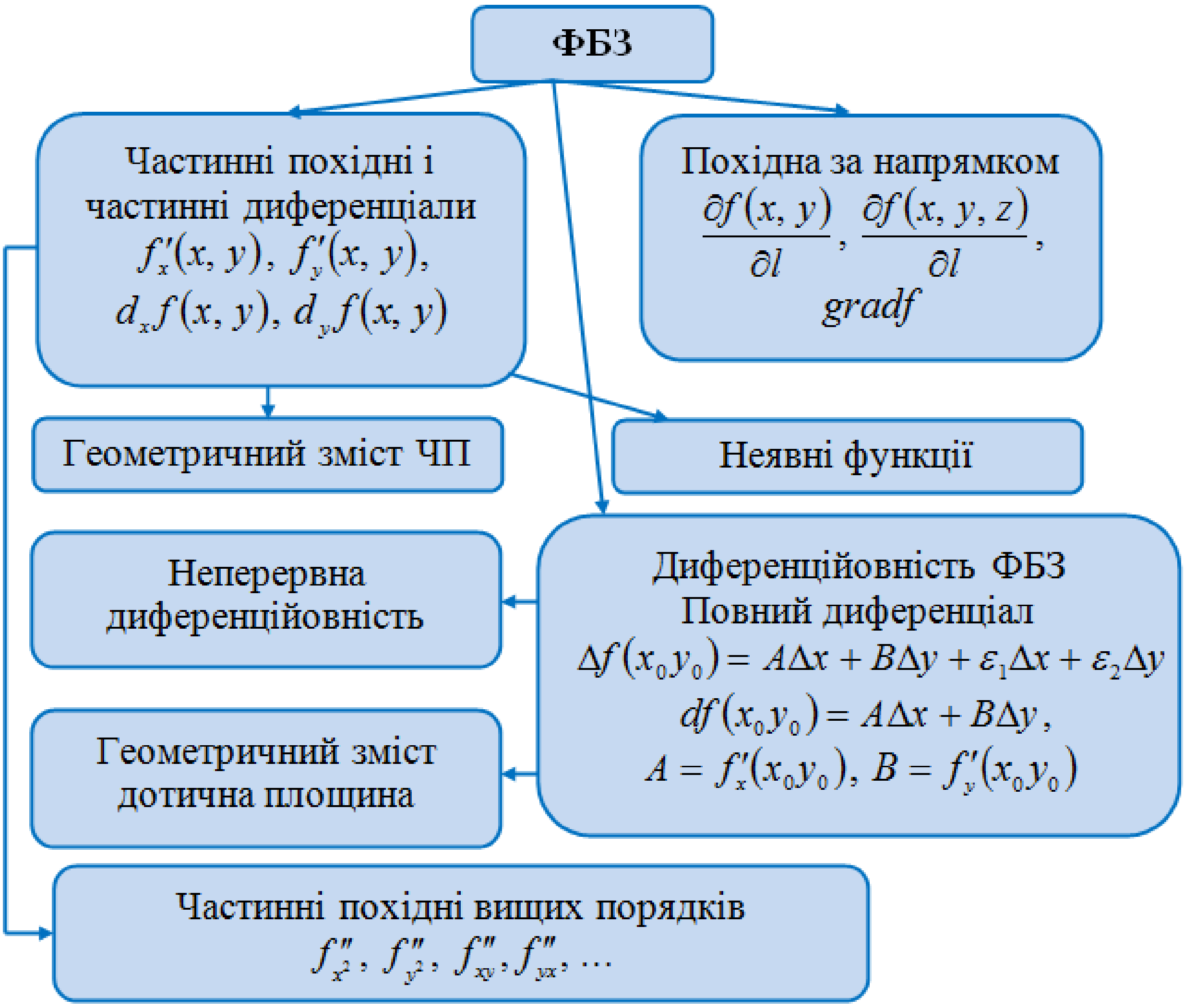


Рис. 3.1

Приклади розв'язування вправ

Задача 3.1. *Знайти повні диференціали функцій:*

1) $z = 3x^2y^5$; **2)** $u = 2x^{yz}$; **3)** $p = \arccos\dfrac{1}{uv}$.

Розв'язання.

1) Графік функції $z = 3x^2y^5$ зображено на рис. 3.2.

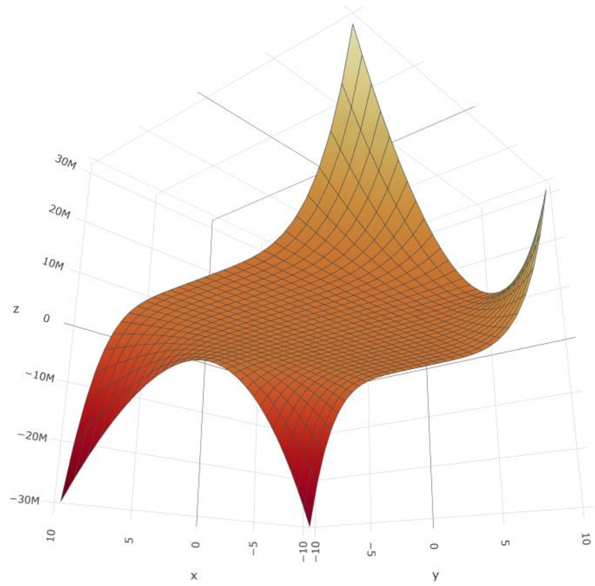


Рис. 3.2

Знаходимо частинні похідні даної функції.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(3x^2y^5\right)'_x = \left|y = \text{const}\right| = 6xy^5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(3x^2y^5\right)'_y = \left|x = \text{const}\right| = 15x^2y^4.$$

Частинні диференціали функції одержуємо, помноживши частинні похідні на диференціали відповідних аргументів:

$$d_xz = 6xy^5dx; \quad d_yz = 15x^2y^4dy.$$

Шуканий повний диференціал функції знайдемо як суму її частинних диференціалів: $dz = d_xz + d_yz = 6xy^5dx + 15x^2y^4dy$. ■

2) Графік функції $u = 2x^{yz}$ зображено на рис. 3.3.

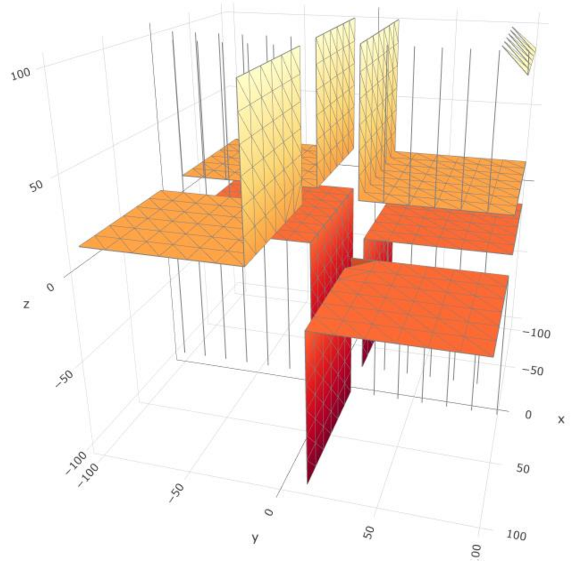


Рис. 3.3

Аналогічно до попереднього прикладу знаходимо:

$$u'_x = \left(2x^{yz}\right)'_x = \left| \begin{matrix} y,\, z = const \\ \left(t^n\right)' = nt^{n-1} \end{matrix} \right| = 2yzx^{yz-1};$$

$$u'_y = \left(2x^{yz}\right)'_y = \left| \begin{matrix} x,\, z = const \\ \left(a^t\right)' = a^t \ln a \end{matrix} \right| = 2x^{yz} \ln x \cdot (yz)'_y = 2zx^{yz} \ln x.$$

Аналогічно $u_z{}' = 2yx^{yz} \ln x$.

Частинні диференціали:

$$d_x u = 2yzx^{yz-1}dx;\;\; d_y u = 2zx^{yz} \ln x dy;\;\; d_z u = 2yx^{yz} \ln x dz;$$

Повний диференціал: $du = 2x^{yz}\left(\dfrac{yz}{x}dx + z\ln x dy + 2y\ln x dz\right)$. ■

3) Графік функції $p = \arccos\dfrac{1}{uv}$ зображено на рис. 3.4.

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \left| \begin{matrix} v = const \\ (\arccos t)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot t' \end{matrix} \right| = -\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{(uv)^2}}} \cdot \left(\frac{1}{uv}\right)'_u =$$

$$= -\frac{|uv|}{\sqrt{u^2v^2-1}}\cdot\frac{1}{v}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right) = \frac{|uv|}{u^2v\sqrt{u^2v^2-1}};$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \left| \begin{array}{l} u = \text{const} \\ (\arccos t)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot t' \end{array} \right| = -\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{(uv)^2}}}\cdot\left(\frac{1}{uv}\right)'_v =$$

$$= -\frac{|uv|}{\sqrt{u^2v^2-1}}\cdot\frac{1}{u}\cdot\left(-\frac{1}{v^2}\right) = \frac{|uv|}{uv^2\sqrt{u^2v^2-1}}.$$

Повний диференціал:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial u}du + \frac{\partial p}{\partial v}dv = \frac{|uv|}{uv\sqrt{u^2v^2-1}}\left(\frac{du}{v}+\frac{dv}{v}\right). \ \blacksquare$$

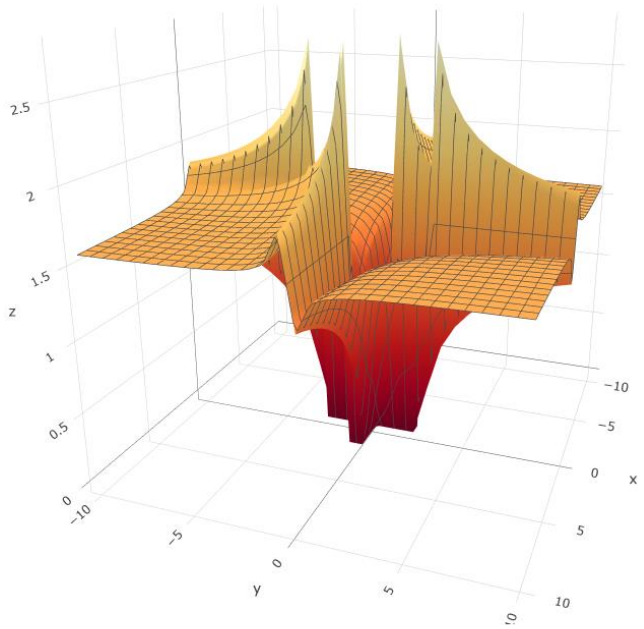


Рис. 3.4

Задача 3.2. *Знайти повний диференціал функції* $u = \dfrac{3x+4yz}{xz+y}$.

Розв'язання.

1 спосіб. Графік функції $u = \dfrac{3x+4yz}{xz+y}$ зображено на рис. 3.5.

Аналогічно до попередньої задачі знайдемо частинні похідні:

$$u'_x = \left(\frac{3x+4yz}{xz+y}\right)'_x = |y,\, z = const| = \frac{3(xz+y)-(3x+4yz)z}{(xz+y)^2} = \frac{y(3-4z^2)}{(xz+y)^2};$$

$$u'_y = \left(\frac{3x+4yz}{xz+y}\right)'_y = \left|x,\, z = const\right| = \frac{4z(xz+y)-(3x+4yz)\cdot 1}{(xz+y)^2} = \frac{x(4z^2-3)}{(xz+y)^2};$$

$$u'_z = \left(\frac{3x+4yz}{xz+y}\right)'_z = \left|x,\, y = const\right| = \frac{4y(xz+y)-(3x+4yz)\cdot x}{(xz+y)^2} = \frac{4y^2-3x^2}{(xz+y)^2}.$$

Повний диференціал:

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz = \frac{y(3-4z^2)}{(xz+y)^2}dx + \frac{x(4z^2-3)}{(xz+y)^2}dy + \frac{4y^2-3x^2}{(xz+y)^2}dz. \ \blacksquare$$

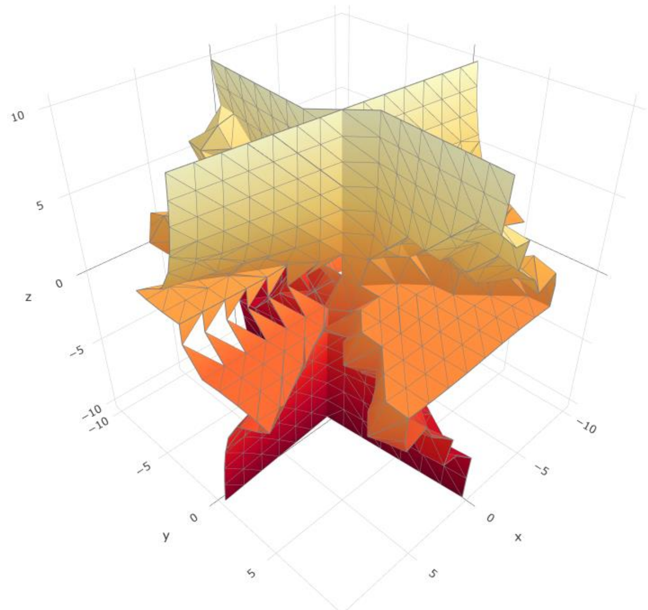


Рис 3.5

2 спосіб. Повний диференціал функції шукаємо, використовуючи властивості диференціала:

$$du = d\left(\frac{v}{w}\right) = \frac{wdv - vdw}{w^2}.$$

$$du = d\left(\frac{3x+4yz}{xz+y}\right) = \frac{(xz+y)d(3x+4yz)-(3x+4yz)d(xz+y)}{(xz+y)^2} =$$

$$= \frac{(xz+y)(3dx+4ydz+4zdy)-(3x+4yz)(xdz+zdx+dy)}{(xz+y)^2} =$$

$$=\frac{\left(3y-4yz^2\right)dx+\left(4xz^2-3x\right)dy+\left(4y^2-3x^2\right)dz}{\left(xz+y\right)^2}=$$

$$=\frac{y\left(3-4z^2\right)dx}{\left(xz+y\right)^2}+\frac{x\left(4z^2-3\right)dy}{\left(xz+y\right)^2}+\frac{\left(4y^2-3x^2\right)dz}{\left(xz+y\right)^2}.$$

Коефіцієнти при dx, dy, dz і є трьома частинними похідними першого порядку функції u. ■

Задача 3.3. *Нехай* $x=\rho^2\cos\varphi,\ y=\rho^2\sin\varphi$. *Обчислити визначник:*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. У цій задачі потрібно знайти частинні похідні від заданих функцій, поставити їх на відповідне місце у визначнику і потім за відомим методом обчислити визначник другого порядку:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2\rho\cos\varphi & -\rho^2\sin\varphi \\ 2\rho\sin\varphi & \rho^2\cos\varphi \end{vmatrix}=2\rho^3\cos^2\varphi+2\rho^3\sin\varphi=2\rho^3.\ ■$$

Задача 3.4. *Нехай* $pV=RT\ (R=const)$. *Довести, що*

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-1.$$

Розв'язання. $pV=RT,\ R=const.$

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{P}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RV}{V^2}\cdot\frac{V}{P}-1.\ ■$$

Задача 3.5. Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено обчислити:

1) $\ln\left(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1\right)$;

2) $\sqrt{1,98^2+1,01^2}$;

3) $2,003^2\cdot 3,998^3\cdot 1,002^2$.

Розв'язання. ***1)*** Для функції двох змінних формула для наближених обчислень значення функції набере вигляду:

$$z(x,y)\approx z(x_0,y_0)+z'_x(x_0,y_0)\Delta x+z'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Розглянемо функцію двох змінних $z=\ln\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1\right)$ (рис. 3.6) у точках $M(1,03;\,0,98)$ і $M_0(1;\,1)$.

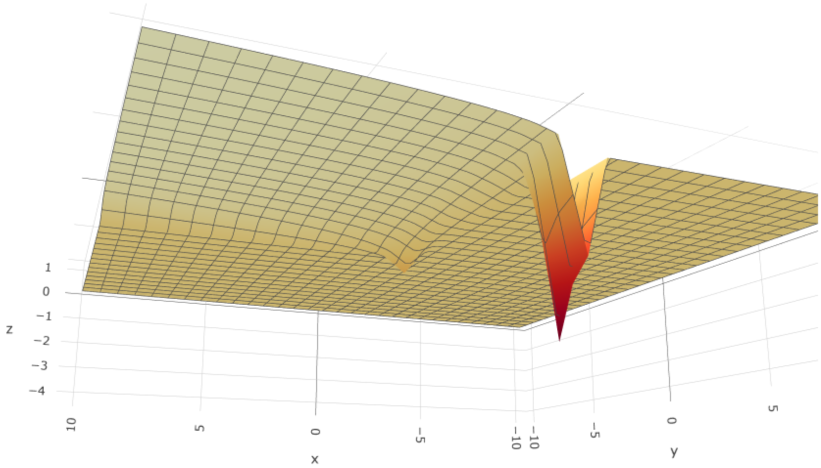


Рис. 3.6

Тут $\Delta x=x-x_0=1,03-1=0,03$, $\Delta y=y-y_0=0,98-1=-0,02$, значення функції у точці M_0 дорівнює: $z(1;\,1)=\ln(1+1-1)=0$.

Знайдемо частинні похідні:

$$z'_x(x,y)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+0-0\right)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1\right)};$$

$$z'_y(x,y)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\left(0+\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}-0\right)=\frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1\right)};$$

$$z'_x(1;1)=\frac{1}{3\cdot 1(1+1-1)}=\frac{1}{3}; \qquad z'_y(1;1)=\frac{1}{4\cdot 1(1+1-1)}=\frac{1}{4}.$$

Отже,

$$\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1\right)\approx 0+\frac{1}{3}\cdot 0{,}03+\frac{1}{4}\cdot(-0{,}02)=0{,}01-0{,}005=0{,}005. \ \blacksquare$$

2) Аналогічно до попереднього прикладу для виразу $\sqrt{1{,}98^2+1{,}01^2}$ підберемо функцію $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (рис. 3.7) і початкову точку, в якій легко обчислити значення функції:

$(x_0,y_0)=(2;1); \quad f(x_0,y_0)=\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}.$

Щоб обчислити значення нашого виразу, покладемо $(x;y)=(1{,}98;1{,}01)$, тоді $\Delta x=1{,}98-2=-0{,}02;$ $\Delta y=1{,}01-1=0{,}01.$

$$f_x'=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad f_y'=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad f_x'(x_0;y_0)=\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad f_y'(x_0;y_0)=\frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\sqrt{1{,}98^2+1{,}01^2}\approx\sqrt{5}+\frac{2}{\sqrt{5}}(-0{,}02)+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 0{,}01=\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}(-0{,}04+0{,}01)=$$

$$=\sqrt{5}-\frac{0{,}03}{\sqrt{5}}=\frac{4{,}97}{\sqrt{5}}\approx\frac{4{,}97}{2{,}24}\approx 2{,}22. \ \blacksquare$$

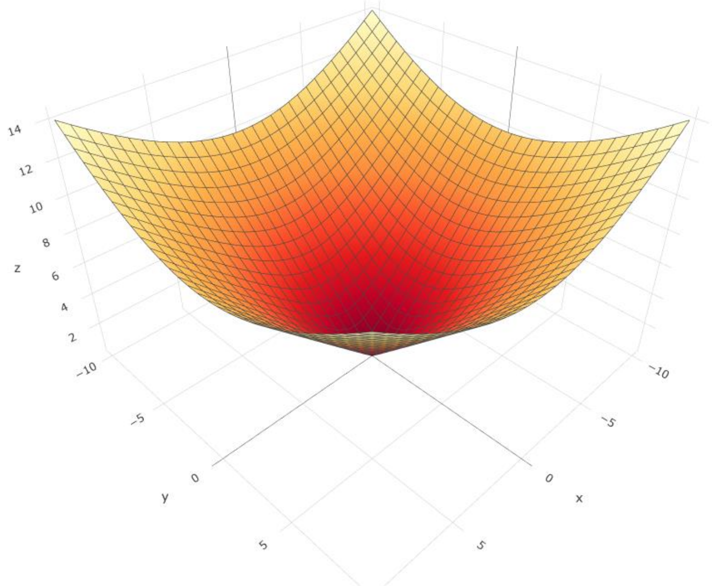


Рис. 3.7

3) Для виразу $2{,}003^2 \cdot 3{,}998^3 \cdot 1{,}002^2$ підберемо функцію трьох змінних $u = x^2 y^3 z^2$ і початкову точку $(x_0, y_0, z_0) = (2;4;1)$, в якій легко обчислити значення функції і яка знаходиться на відносно невеликій відстані від точки $(x, y, z) = (2{,}003;\ 3{,}998;\ 1{,}002)$ (рис. 3.8).

$x_0 = 2 \quad x = 2{,}003 \quad \Delta x = 0{,}003$

$y_0 = 4 \quad y = 3{,}998 \quad \Delta y = -0{,}002$

$z_0 = 1 \quad z = 1{,}002 \quad \Delta z = 0{,}002$

$$u(x,y,z) \approx u(x_0,y_0,z_0) + u'_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y + u'_x(x_0,y_0,z_0)\Delta x +$$

$$+u'_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z.$$

$$u(x_0,y_0,z_0) = 2^2 \cdot 4^3 \cdot 1^2 = 4 \cdot 64 = 256;$$

$$u'_x = 2xy^3z^2; \quad u'_x(x_0,y_0,z_0) = 2 \cdot 2 \cdot 64 = 256;$$

$$u'_y = 3x^2y^2z^2; \; u'_y(x_0,\, y_0,\, z_0) = 3 \cdot 4 \cdot 16 = 192;$$

$$u'_z = 2x^2y^3z; \quad u'_z(x_0,y_0,z_0) = 2 \cdot 4 \cdot 64 = 512;$$

$$u \approx 256 + 256 \cdot 0{,}003 + 192 \cdot (-0{,}002) + 512 \cdot 0{,}002 =$$

$$= 256 + 128 \cdot (0{,}006 - 0{,}003 + 0{,}008) = 256 + 128 \cdot 0{,}011 = 257{,}408. \;\blacksquare$$

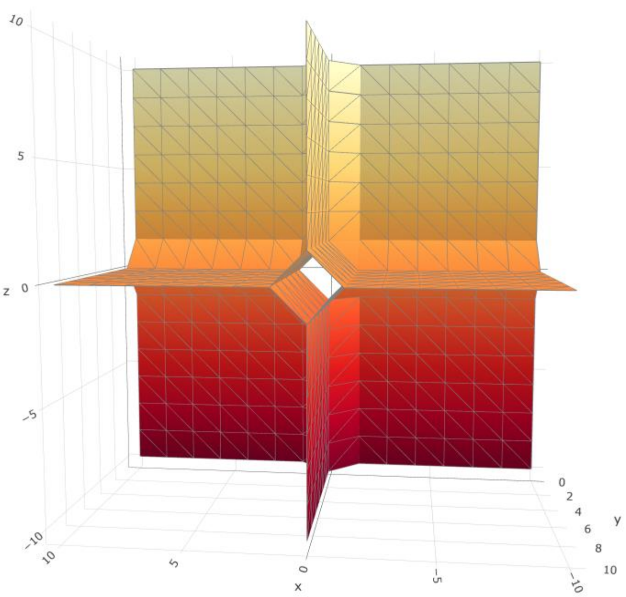


Рис. 3.8

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1. [1]** *Знайти частинні похідні та повні диференціали функцій по кожній з незалежних змінних:*

1) $z = x^3 y - y^3 x;$

2) $z = \dfrac{u}{v} + \dfrac{v}{u};$

3) $z = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2};$

4) $z = \left(5x^2 y - y^3 + 7\right)^3;$

5) $z = x\sqrt{y} + \dfrac{y}{\sqrt[3]{x}};$

6) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right);$

7) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y};$

8) $z = x^y;$

9) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right);$

10) $z = \ln\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x};$

11) $z = \sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x};$

12) $z = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{y}{x}};$

13) $z = x^{x^y};$

14) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$

15) $z = x^3 + yz^2 + 3yx - x + z;$

16) $u = xyz + yzv + zvx + vxy;$

17) $u = e^{x(x^2 + y^2 + z^2)};$

18) $u = x^{\frac{y}{z}}.$

✍**2. [3; 9]** *Дослідити функцію* $f(x,\, y)$ *на диференційовність у точці* $(0;\, 0)$*:*

1) $f(x,\, y) = \sqrt[3]{xy};$

2) $f(x,\, y) = \cos\sqrt[3]{xy};$

3) $f(x,\, y) = \sqrt{x^2 + y^3};$

4) $f(x,\, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3};$

5) $f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

6) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

7) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & x^6 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$

8) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

✍**4. [3]** *Нехай* $x = \rho\cos\alpha\cos\beta,\ y = \rho\cos\alpha\sin\beta,$ $z = \rho\sin\alpha\sin\beta$. *Обчислити визначник:*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial x}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial y}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial z}{\partial \beta} \end{vmatrix}.$$

✍**6. [3]** *Довести, що функція* $u = \dfrac{x-y}{z-t} + \dfrac{t-x}{y-z}$ *задовольняє співвідношення* $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0.$

✍**7.** *Знайти повний диференціал функції* $z = f(x, y)$ *у точці* (x_0, y_0), *якщо:*

1) $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$, $x_0 = 3$, $y_0 = 4$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$;

2) $z = e^{xy}$, $x_0 = y_0 = 1$, $\Delta x = 1,15$, $\Delta y = 0,1$;

3) $z = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$, $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $\Delta x = 0,01$, $\Delta y = 0,03$;

4) $z = \dfrac{x + 3y}{y - 3x}$, $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $\Delta x = 0,5$, $\Delta y = -0,5$.

✍**8.** *Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено обчислити:*

1) $0,97^{1,05}$;

2) $\sin 59^0 tg 46^0$;

3) $1,04^{2,02}$;

4) $2,68^{\sin 0,05}$;

5) $1,94^2 \cdot e^{0,12}$;

6) $\ln(1,05) \cdot \mathrm{arctg}\, 0,99$;

7) $\dfrac{\mathrm{tg}\, 46^0\, \mathrm{arcctg}\, 0,01}{(4,03)^{\frac{1}{2,02}}}$.

✍**9. [3]** *При вимірюванні радіуса основи R і висоти H циліндра отримали такі результати:*

$$R = 3м \pm 0,1м,$$
$$H = 5м \pm 0,2\,м.$$

З якою абсолютною і відносною похибкою можна обчислити об'єм циліндра?

✍**10. [3]** *Центральний кут сектора $\alpha = 60^0$ збільшився на $\Delta\alpha = 1^0$. На скільки потрібно зменшити початковий радіус сектора $R = 20см$, щоб площа сектора не змінилася?*

✍**11. [1]** *В зрізаному конусі радіуси основ дорівнюють $R = 30см$, $r = 20см$, висота $h = 40см$. Як зміниться об'єм конуса, якщо змінити R на 3 мм, r на 4 мм, h на 2 мм?*

§ 4. Складена функція та її диференційовність

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Складена функція	The composite function
Похідна складеної функції	The derivative of the composite function
Інваріантність форми повного диференціалу	Invariance of the formof the total differential

1. Сформулювати правило знаходження частинних похідних складеної функції.

Теорема 1. *Нехай функції $x(t)$ і $y(t)$ від однієї змінної t диференційовні у точці t_0. Якщо функція $z=f(x,y)$ диференційовнау точці (x_0,y_0), де $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, то складена функція $z=f(x(t),y(t))$диференційовнау точці t_0 і правильна рівність:*

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}, \qquad \textbf{(4.1)}$$

або

$$\frac{df\left(x(t_0),y(t_0)\right)}{dt}=\frac{\partial f\left(x_0y_0\right)}{\partial x}\cdot\frac{dx(t_0)}{dt}+\frac{\partial f\left(x_0y_0\right)}{\partial y}\cdot\frac{dy(t_0)}{dt} \qquad \textbf{(4.2)}$$

Правило. *Похідна складеної функції дорівнює сумі добутків частинних похідних зовнішньої функції по кожному з своїх аргументів на похідні цих аргументів по незалежній змінній.*

2. Сформулювати теорему про неперервність складеної функції багатьох змінних.

Теорема 2. *Нехай у точці* $t_0 = (t_{01}, t_{02}, \ldots, t_{0k}) \in E_1 \subset \mathbb{R}^k$ *визначені функції:*

$x_1 = x_1(t_1, t_2, \ldots, t_k), x_2 = x_2(t_1, t_2, \ldots, t_k), \ldots x_n = x_n(t_1, t_2, \ldots, t_k),$

які мають частинні похідні $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$, $j = \overline{1,k}$, $i = \overline{1,n}$, *а в околі точки* $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$, $x_{0i} = x_i(t_0)$, *задана функція* $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Якщо функція $y = y(x)$ *диференційовна у точці* x_0, *то складена функція* $y(x(t))$ *має у точці* t_0 *частинні похідні:*

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j}, \quad j = \overline{1,k} \quad \textbf{(4.3)}$$

3. Що означає інваріантність форми повного диференціалу?

Теорема 3. *В умовах теореми 2 повний диференціал* df *складеної функції* $f(x(t)) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ *у точці* $t_0 = (t_{01}, t_{02}, \ldots, t_{0k})$ *можна записати у вигляді:*

$$df := \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f(x(t_0))}{\partial t_j} dt_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} dx_i \qquad \textbf{(4.4)}$$

і тут $dx_i = dx_i(t_0) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i(t_0)}{\partial t_j} dt_j$, $dt_j = \Delta t_j$.

Властивість диференціала функції, яка виражається попередньою формулою, називають ***інваріантністю*** *форми першого диференціала відносно вибору змінних.*

4. Як знаходити повний диференціал?

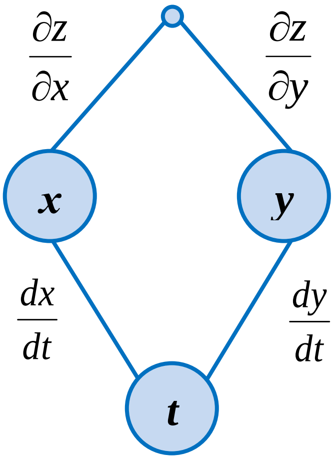
Аналогічно, як і для функції однієї змінної. Нехай функції $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *і* $v = v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *диференційовні у точці* x. *Тоді:* $d(Cu) = Cdu$, $d(u \pm v) = du \pm dv$,

$$d(u \cdot v) = udv + vdu, \ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \ \textbf{(4.5)}$$

Основні поняття, що стосуються теми «Складена функція та її диференційовність» узагальнено та подано на рис. 4.1 та рис. 4.2.

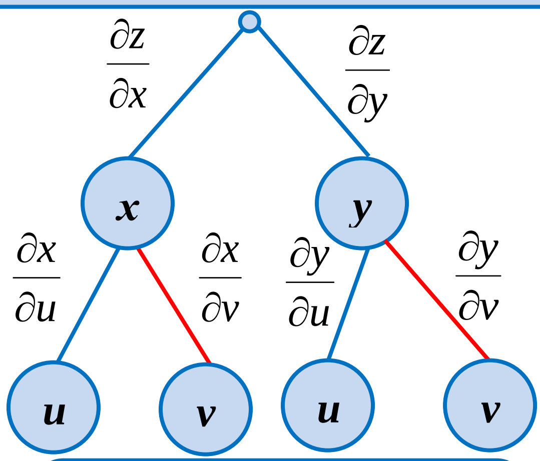
Похідна складеної функції двох змінних

$$z=f(x,y)=f(x(t),y(t))$$



$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

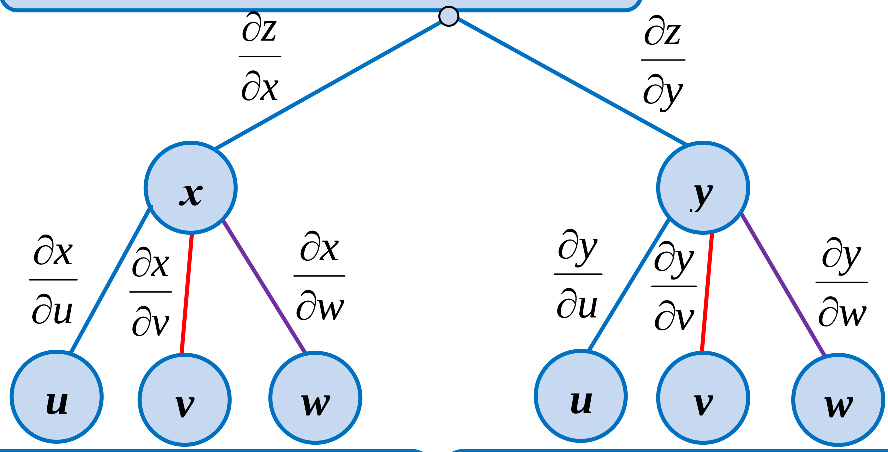
$$z=f(x,y)=f(x(u,v),y(u,v))$$



$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$z=f(x,y)=f(x(u,v,w),y(u,v,w))$$



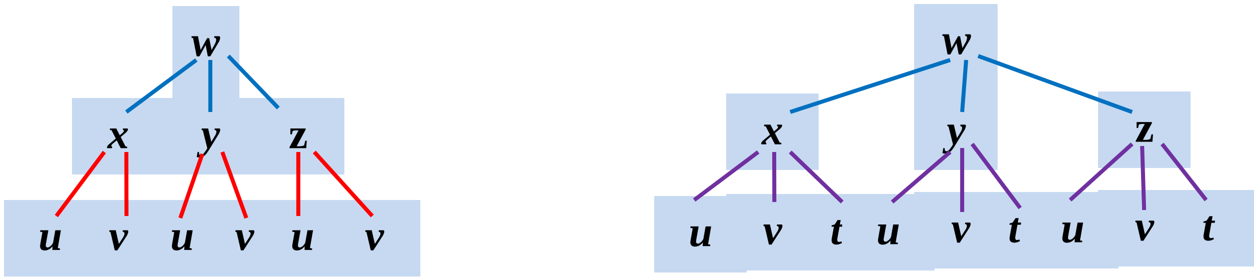
$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial w}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial w}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial w}$$

Рис. 4.1

Похідна функції багатьох змінних



$$\frac{\partial w}{\partial u}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

Запишіть $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial w}{\partial t}$

Рис. 4.2

Приклади розв'язування вправ

Задача 4.1. *Знайти* $\frac{dz}{dt}$ *і* dz*, якщо:*

1) $z=x^2+xy+y^2,\ x=\sin t,\ y=\cos t;$

2) $z=e^{xy}\ln(x+y),\ \ x=t^3,\ y=1-t^3.$

Розв'язання.

1)I спосіб. Графік функції $z=x^2+xy+y^2$ зображено на рис. 4.3.

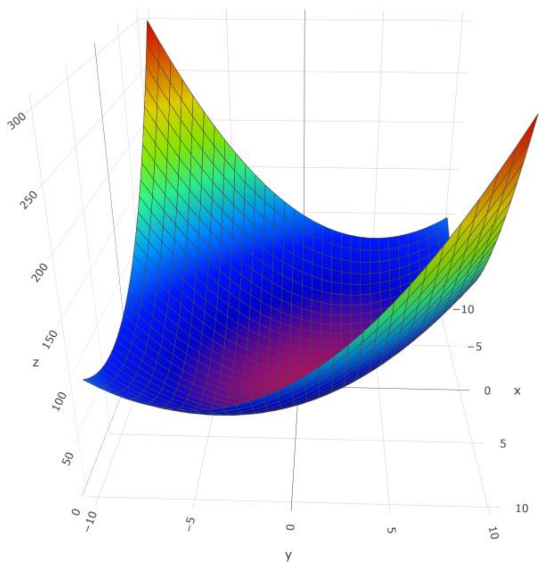


Рис. 4.3

Якщо у функцію z підставити $x=\sin t,\ y=\cos t$, то це є функція однієї змінної t:

$$z=\sin^2 t+\sin t\cos t+\cos^2 t=1+\sin t\cos t,$$

тому знайдемо похідну $\dfrac{dz}{dt}$, використовуючи правило знаходження похідної функції однієї змінної:

$$\frac{dz}{dt}=(1+\sin t\cos t)'=\cos t\cos t-\sin t\sin t=\cos^2 t-\sin^2 t=\cos 2t;$$

$$dz=\frac{dz}{dt}dt=\cos 2tdt.\ \blacksquare$$

II спосіб. Знайдемо похідну функції $z(x,y)=x(x(t),y(t))$, використовуючи правило знаходження похідної складеної функції:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

$$\frac{dz}{dt}=\left(x^2+xy+y^2\right)'_x\cdot(\sin t)'+\left(x^2+xy+y^2\right)'_y\cdot(\cos t)'=$$

$$=(2x+y)\cos t+(x+2y)(-\sin t)=\begin{vmatrix}x=\sin t\\ y=\cos t\end{vmatrix}=$$

$$=(2\sin t+\cos t)\cos t-(\sin t+2\cos t)\sin t=$$

$$=2\sin t\cos t+\cos^2 t-\sin^2 t-2\sin t\cos t=\cos 2t.\ \blacksquare$$

2) I спосіб. Графік функції $z=e^{xy}\ln(x+y)$ зображено на рис. 4.4.

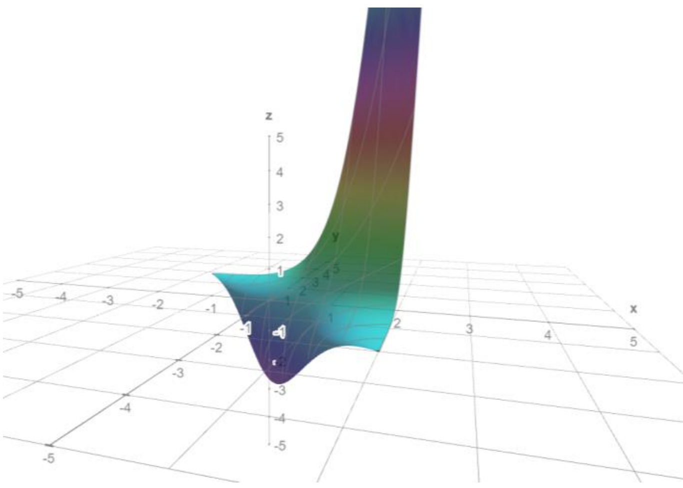


Рис. 4.4

$$z = e^{t^3(1-t^3)} \ln\left(t^3 + 1 - t^3\right) = 0; \frac{dz}{dt} = 0 dz = \frac{dz}{dt} dt = 0 dt = 0. \ \blacksquare$$

II спосіб.

$$z'_x = y e^{xy} \ln(x+y) + \frac{e^{xy}}{x+y}, \ x'_t = 3t^2;$$

$$z'_y = x e^{xy} \ln(x+y) + \frac{e^{xy}}{x+y}, \ y'_t = -3t^2;$$

$$\frac{dz}{dt} = \left(e^{xy} \ln(x+y) + \frac{e^{xy}}{x+y} \right) 3t^2 - \left(x e^{xy} \ln(x+y) + \frac{e^{xy}}{x+y} \right) 3t^2 =$$

$$= \left(\left(1 - t^3\right) e^{t^3(1-t^3)} \ln\left(t^3 + 1 - t^3\right) + \frac{e^{t^3(1-t^3)}}{t^3 + 1 - t^3} \right) 3t^2 -$$

$$- t^3 \left(e^{t^3(1-t^3)} \ln\left(t^3 + 1 - t^3\right) + \frac{e^{t^3(1-t^3)}}{t^3 + 1 - t^3} \right) 3t^2 =$$

$$= 3t^2 e^{t^3(1-t^3)} - 3t^2 e^{t^3(1-t^3)} = 0. \ \blacksquare$$

Задача 4.2. *Знайти частинні похідні і повний диференціал складеної функції, що задана у вигляді* $z = x^2 - y^2$, *де* $x = u\cos v,\ y = u\sin v$.

Розв'язання.

Графік функції $z = x^2 - y^2$ зображено на рис. 4.5.

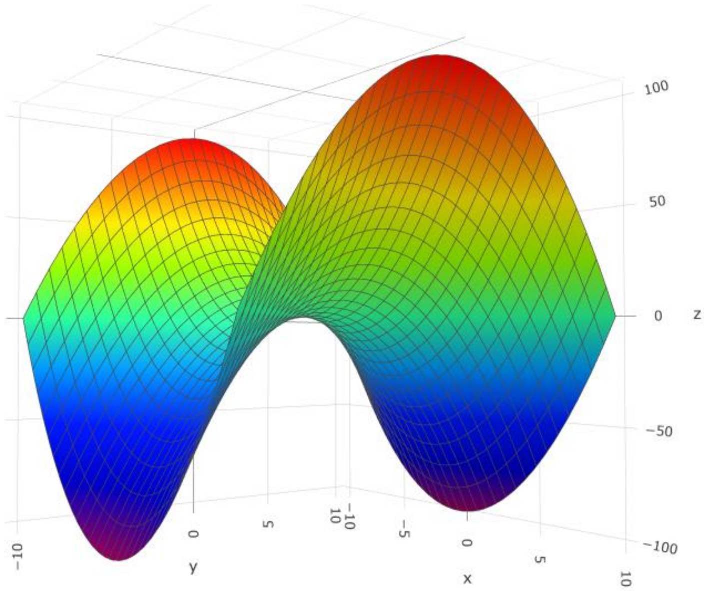


Рис. 4.5

Використаємо теорему 2 для функції $z(x,y)$, $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};\ \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v},\text{ де}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2-y^2\right)'_x=2x;\ \frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2-y^2\right)'_y=-2y;$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\cos v;\ \frac{\partial y}{\partial u}=\sin v;\ \frac{\partial x}{\partial v}=u\sin v;\ \frac{\partial y}{\partial v}=\cos v.$$

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial u}=2x\cdot\cos v-2y\cdot\sin v=2u\cdot\cos v\cdot\cos v-2u\cdot\sin v\cdot\sin v=$$

$$=2u\cdot\cos^2 v-2u\cdot\sin^2 v=2u\cdot\cos 2v;$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=2x\cdot u\sin v-2y\cdot\cos v=2u^2\cdot\cos v\cdot\sin v-2u\cdot\sin v\cdot\cos v=$$

$$=2\cos v\cdot\sin v\left(u^2-u\right)=\sin 2v\left(u^2-u\right).$$

Повний диференціал шукаємо у вигляді:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot du+\frac{\partial z}{\partial v}dv=2u\cdot\cos 2v du+\sin 2v\left(u^2-u\right)dv.\ \blacksquare$$

Задача 4.3. *Знайти повні диференціали функцій, користуючись властивістю інваріантності їх форми*

$$z=f(u,v),\ \ u=y^2,\ v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Розв'язання. *I спосіб.*

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 0+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{-y}{x^2}=-\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}.$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{\partial f}{\partial v}\frac{y}{x^2+y^2}dx+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 2y+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy. \blacksquare$$

II спосіб.

$$dz=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv=\frac{\partial f}{\partial u}(0dx+2ydy)+$$

$$+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)dx+\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x}dy\right)=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial u}2ydy+\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\left(-\frac{y}{x^2}dx+\frac{1}{x}dy\right). \blacksquare$$

Задача 4.4. *Довести, що якщо* $f(u)$ *– довільна диференційовна функція, то функція* $\varphi(x,y)=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)$ *задовольняє вказаному рівнянню* $x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}=xy+\varphi$.

Розв'язання. Ліва частина:

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x\left(y+f\left(\frac{y}{x}\right)+x\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{-y}{x^2}\right)+y\left(x+xf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\right)=$$

$$=xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)-yf'\left(\frac{y}{x}\right)+xy+yf'\left(\frac{y}{x}\right)=2xy+xf\left(\frac{y}{x}\right).$$

Права частина: $xy+\varphi=xy+xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)=2xy+xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

Бачимо, що ліва і права частини рівняння рівні, тому функція $\varphi(x,\ y)$ є розв'язком вказаного функціонального рівняння. $\blacksquare$

Задача 4.5. *Сторона трикутника має довжину 2,4 м і зростає з швидкістю 10 см/с, друга сторона довжиною 1,5 мзменшується з швидкістю 5 см/с. Кут, утворений даними сторонами, дорівнює 60º і зростає з швидкістю 2º/с. Як і з якою швидкістю змінюється площа трикутника?*

Розв'язання. Площа трикутника ABC дорівнює $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\angle A=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ і є функцією від трьох змінних $AC=b$, $AB=c$ і кута $\angle BAC=\alpha$.

При невеликих змінах аргументів

$$\Delta S_{ABC}\approx dS_{ABC}=\frac{\partial S}{\partial b}\Delta b+\frac{\partial S}{\partial c}\Delta c+\frac{\partial S}{\partial \alpha}\Delta\alpha .$$

Знайдемо частинні похідні функції $S(b,c,\alpha)$ по всіх змінних:

$$\frac{\partial S}{\partial b}=\frac{1}{2}c\sin\alpha;\ \frac{\partial S}{\partial c}=\frac{1}{2}b\sin\alpha;\ \frac{\partial S}{\partial \alpha}=\frac{1}{2}bc\cos\alpha .$$

$$b_0=240\,\text{см},\ c_0=150\,\text{см},\ \alpha_0=60^0,$$

$$b=(240+10t)\text{см};\ c=(150-5t)\text{см};\ \alpha=\left(60^0+2^0t\right),$$

$$\Delta b=b-b_0=10t\,\text{см};\ \Delta c=c-c_0=-5t\,\text{см};$$

$$\Delta\alpha=\alpha-\alpha_0=2^0t=\frac{2\pi t}{180}=\frac{\pi t}{90}.$$

Тоді

$$\frac{\partial S(b_0,c_0,\alpha_0)}{\partial b}=\frac{1}{2}\cdot 150\sin 60^0=\frac{75\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{\partial S(b_0,c_0,\alpha_0)}{\partial c}=\frac{1}{2}\cdot 240\sin 60^0=60\sqrt{3};$$

$$\frac{\partial S(b_0,c_0,\alpha_0)}{\partial \alpha}=\frac{1}{2}\cdot 240\cdot 150\cdot\sin 60^0=9000,$$

$$S(b_0,c_0,\alpha_0)=\frac{1}{2}\cdot 240\cdot 150\cdot\sin 60^0=9000\sqrt{3}.$$

Отже, площа трикутника з часом t набиратиме значення:

$$S \approx 9000\sqrt{3} + \frac{75\sqrt{3}}{2} \cdot 10t - 60\sqrt{3} \cdot 5t + 9000 \cdot \frac{\pi t}{90},$$

або
$$S \approx 9000\sqrt{3} + 375\sqrt{3}t - 300\sqrt{3} \cdot 5t + 100\pi t;$$
$$S \approx 9000\sqrt{3} + 75\sqrt{3}t - 314t \text{ (см}^2\text{)}.$$

Вона змінюватиметься з швидкістю:

$$v = S'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{75\sqrt{3}t + 314t}{t} = 75\sqrt{3} + 314 \approx 444 \text{ см}^2/\text{с}. \ ■$$

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1. [3]** *Знайти* $\frac{dz}{dt}$ *і* dz, *якщо:*

1) $z = x^2 + xy + y^2, \ \ x = \sin t, \ y = \cos t;$

2) $z = \cos(2t + 4x^2 - y), \ \ x = \frac{1}{t}, \ y = \frac{\sqrt{t}}{\ln t};$

3) $z = e^{xy}\ln(x + y), \ \ x = t^3, \ y = 1 - t^3;$

4) $z = e^{x-2y}, \ x = \sin t, \ y = t^3;$

5) $z = uvw, \ u = t^2 + 1, \ v = e^t, \ w = \cos t;$

6) $z = \ln(e^x + e^y), \ x = t, \ y = t^3;$

7) $z = \operatorname{arctg}\frac{t+1}{x}, \ \ x = e^{(1+t)^2};$

8) $z = \arcsin\frac{t}{y}, \ \ y = \sqrt{t^2 + 1};$

9) $z = e^{x-2y}, \ \ x = \sin t, \ y = t^3.$

✍**2. [3]** *Знайти частинні похідні і повний диференціал складеної функції:*

1) $z = x^2 + y^2, \ x = u + v, \ y = u - v;$

2) $z = x^2y - xy^2,\ \ x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi;$

3) $u = y^2 + \sqrt{xz} + \dfrac{1}{\cos z},\ \ x = t + v,\ y = \dfrac{t}{v},\ z = tv;$

4) $p = u^2 \ln v,\ \ u = \dfrac{x}{y},\ v = 3x - 2y.$

5) $z = \ln\left(x^2 + y^2\right),\ x = uv,\ y = \dfrac{u}{v}.$

✍**3. [3]** *Знайти повні диференціали функцій, користуючись властивістю інваріантності їх форми та/або іншим методом:*

1) $z = xy\,\mathrm{arctg}\,xy,\ \ x = t^2 + 1,\ y = t^3;$

2) $z = x^y + y^x,\ \ x = u^2 + v^2,\ y = u^2 - v^2;$

3) $z = x\sin y + y\cos x,\ \ x = \dfrac{u}{v},\ y = uv;$

4) $p = f(x^2y^3z^4),\ \ x = \arcsin\dfrac{u}{v},\ y = \sqrt{v^2 - u^2},\ z = \ln v;$

5) $z = f(u, v),\ \ u = y^2,\ v = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x};$

6) $p = f(u, v, w),\ \ u = x^2 + y^2 + z^2,\ v = x + y + z,\ w = xyz.$

7) $z = x^2 \ln y,\ x = \dfrac{u}{v},\ \ y = 3u - 2v;$

8) $z = F\left(x^2 - y^2, e^{xy}\right);$

9) $u = \varphi(t, r, s) = F\left(\sqrt{t - r}, \sin 2t, \dfrac{t}{r - s}\right);$

10) $u = \mathrm{tg}^2\,\varphi \cdot \mathrm{tg}^2\,\theta \cdot \mathrm{tg}^2\,\psi.$

✍**4. [9]** *Довести, що якщо* $f(u)$ *– довільна диференційовна функція, то функція* $\varphi(x, y)$ *задовольняє вказаному рівнянню:*

1) $\varphi = xy + xf\left(\dfrac{y}{x}\right),\ \ x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = xy + \varphi;$

2) $\varphi = \sin x + f(\sin y - \sin x),\ \ \cos y\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos x\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \cos x \cos y;$

3) $\varphi = e^{y} f\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}} \right),\ \ (x^2 - y^2)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + xy\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = xy\varphi.$

✍**5. [2, с. 97]** *Рівняння* $pV = RT$ *характеризує ідеальний газ (V – об'єм газу; p – тиск; T – абсолютна температура; R – деяка стала). Знайти співвідношення між диференціалами* dV, dp *і* dT.

✍**6. [2, с. 97]** *Скориставшись результатом задачі 5, знайти, як змінюється p за таких умов:* $t = 300°C$, $p = 1000$ *кг/м*^{2}, $V = 14{,}4$ *м*^{3}*, коли відомо, що під час зміни* t *до* $301°C$ *і V до 14,5 м*^{3} *значення p змінюється рівномірно.*

✍**7. [2, с. 97]** *Як змінюється третя сторона трикутника, заданого умовами задачі 4.5?*

✍**8. [2, с. 97]***Сторона прямокутника завдовжки 25 см зростає зі швидкістю 5 см/с. Друга його сторона завдовжки 37,5 см зменшується зі швидкістю 2,5 см/с. Як змінюється площа прямокутника наприкінці другої секунди?*

✍**9. [2, с. 97]***Ребра прямокутного паралелепіпеда завдовжки 7,5, 10 і 12,5 см зростають з однаковою швидкістю 0,5 см/с. Як змінюється об'єм паралелепіпеда?*

✍**10. [2, с. 97]** *Повітряний змій переміщується горизонтально зі швидкістю 0,6 м/с і піднімається вертикально вгору зі швидкістю 1,5 м/с. З якою швидкістю розкручується мотузка, що його утримує?*

✍**11. [2, с. 98]** *Людина, яка стоїть на пристані, притягує човен за мотузку зі швидкістю 0,6 м/с. Руки її перебувають на* *висоті 1,8 м над носом човна. З якою швидкістю рухається човен у момент, коли відстань його від пристані дорівнює 2,4 м?*

✍**12. [2, с. 98]** *Об'єм і радіус циліндричного котла зростають відповідно зі швидкістю 27 дм^3/хв. і 0,003 дм/хв. Як змінюється довжина котла в момент, коли його об'єм становить 1,18 м^3, а радіус – 0,6 м?*

✍**13. [2, с. 98]** *Вода з конічного фільтра, висота якого 20 см, а діаметр основи 15 см, витікає зі швидкістю 0,0125 см^3/год. З якою швидкістю зменшується площа поверхні води, коли рівень води знижується на 10 см?*

✍**14. [2, с. 98]** *Нехай x і y – координати деякої точки в прямокутній системі координат, а r і θ – полярні координати цієї точки. Довести, що* $xdy - ydx = r^2 d\theta^2$; $dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$.

✍**15. [2, с. 98]** *Закритий ящик, довжина якого 10 см, ширина 8 см і висота 7 см, зроблений із дощечок завтовшки* $\frac{1}{2}$ *см. Визначити наближено об'єм затраченого на ящик матеріалу.*

Відповіді

5. $Vdp + pdV = RdT$.**6.** $-3{,}25$ *кг/м^2*. **7.**Зростає зі швидкістю 12,32 см/с.**8.**Зростає зі швидкістю 74,82 см^2/с.**10.**1,61 м/с.**11.**0,75 м/с. **12.**0,234 дм/хв. **15.** 206 см^3.

§ 5. Похідна в заданому напрямку. Градієнт

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Похідна за напрямком або похідна у заданому напрямку	Directional derivative
Градієнт функції	Gradient or Gradient vector
Найбільше значення похідної за напрямком	The greatest value of the derivative in the direction

1. Означити похідну функції двох змінних у заданому напрямку.

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, *яка визначена в околі точки* (x_0, y_0) *і деякий напрям* ℓ, *який утворює кут* α *з додатним напрямком осі* Ox *і визначається одиничним вектором* $\vec{l}_0 = (\cos\alpha; \sin\alpha)$ *(рис. 5.1).*

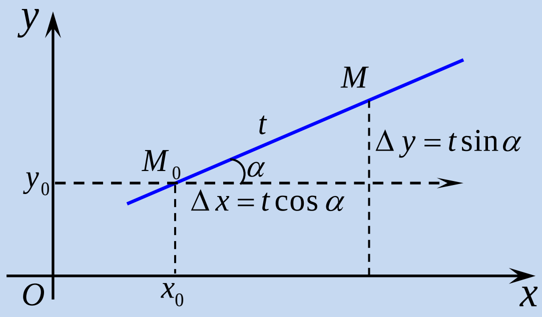


Рис. 5.1

Рівняння променя M_0M *у параметричній формі:*

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \quad y = y_0 + t\sin\alpha, \; t = |M_0M| \geq 0 \quad \textbf{(5.1)}$$

Визначимо приріст функції в даному напрямі ***(5.2)****:*

$$\Delta_l f(x_0, y_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0).$$

Якщо існує границя відношення приросту функції $\Delta_l f(x_0, y_0)$ *у даному напрямі до відповідного зміщення* $|M_0M|$ *при* $M \to M_0$, *то її називають **похідною функції*** f *у точці* M_0 *в напрямі* l:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} := \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) - f(x_0, y_0)}{t} \quad \textbf{(5.3)}$$

Можна довести, що похідна функції у заданому напрямку визначається за формулою:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}\sin\alpha \qquad \textbf{(5.4)}$$

2. Означити похідну за напрямком для функції трьох змінних.

Нехай функція f *диференційовнау у точці* $M_0(x_0, y_0, z_0)$. *Тоді у цій точці функція* f *має похідну в довільному напрямку* ℓ $(\vec{\ell}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma))$, *яка визначається за формулою:*

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma \ \textbf{(5.5)}$$

3. Що таке градієнт функції двох та трьох змінних?

Вектор $\left(\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}\right)$ *називається **градієнтом функції*** $f(x, y, z)$ *у точці* M_0 *і позначається* **(5.6)**:

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0) := \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}\vec{k}$$

Для функції двох змінних:

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) := f'_x(x_0, y_0)\vec{i} + f'_y(x_0, y_0)\vec{j} \ \textbf{(5.7)}$$

4. Який напрям характеризує градієнт?

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \operatorname{grad} f(M_0)\cdot\vec{l_0} = |\operatorname{grad} f(M_0)|\cdot\cos\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(M_0), \vec{l_0}\right)$$

похідна у напрямку даної функції досягає найбільшого значення лише у напрямі, коли кут $\varphi = \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(M_0), \vec{l_0}\right) = 0$ *і* $\cos\varphi = 1$, *тобто градієнта функції* f. *Отже,**вектор*** $\operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)$ ***визначає той напрям, у якому функція*** f ***зростає найшвидше.***

5. Які властивості градієнта?

Властивості градієнта:

1) $\operatorname{grad} C = 0,\ C = \text{const}$ ***;***

2) $\operatorname{grad}(u + C) = \operatorname{grad} u,\ C = \text{const}$ *;*

3) $\operatorname{grad}(Cu) = C \operatorname{grad} u,\ C = \text{const}$ *;*

4) $\operatorname{grad}(u + v) = \operatorname{grad} u + \operatorname{grad} v$*;*

5) $\operatorname{grad}(u \cdot v) = v \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} v$*;*

6) $\operatorname{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \operatorname{grad} u - u \operatorname{grad} v}{v^2}$.

Приклади розв'язування вправ

Задача 5. 1. *Знайти похідну функції у заданому напрямку вектора* $\vec{l}$ *в точці* M_0*, якщо:*

1) $f = x\sin(x + y),\ \vec{l} = (-1;\ 0),\ M_0\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4}\right)$;

2) $f = \dfrac{x}{y} + \left(\dfrac{y}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{x}\right)^3,\ M_0(1;1;1),\ \vec{l}_1 = (1;-1;1),\ \vec{l}_2 = (1;1;0)$.

Розв'язання.

1) Графік функції $f = x\sin(x + y)$ зображено на рис. 5.2.

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (x\sin(x + y))'_x = \sin(x + y) + x\cos(x + y);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (x\sin(x + y))'_y = x\cos(x + y);$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 1;$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial y}=\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Оскільки довжина вектора $\vec{l}=(-1;\,0)$ дорівнює 1, то можемо скористатися формулою (5.1) для похідної за напрямком:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}=1\cdot(-1)+0\cdot 0=-1. \blacksquare$$

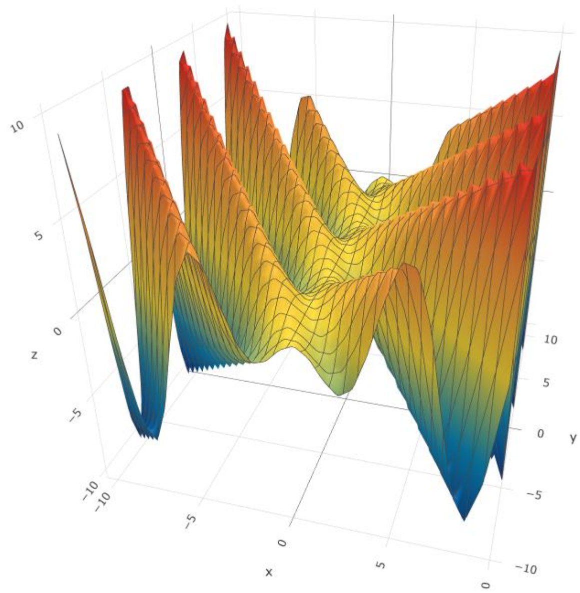


Рис. 5.2

2) У другому випадку вектори $\vec{l}_1=(1;\,-1;\,1),\ \vec{l}_2=(1;\,1;\,0)$ не є одиничними, тому для них ми знайдемо одиничні колінеарні вектори:

$$\left|\bar{l}_1\right|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3};\ \bar{l}_{10}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma);$$

аналогічно

$$\left|\bar{l}_2\right|=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2};\ \bar{l}_{20}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};0\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

Тепер знайдемо частинні похідні функції $f=\dfrac{x}{y}+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2+\left(\dfrac{z}{x}\right)^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y}+3\left(\frac{z}{x}\right)^2\cdot\frac{-z}{x^2}=\frac{1}{y}-\frac{3z^3}{x^4};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}+2\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{x}{y^2}+\frac{y}{2};\frac{\partial f}{\partial z}=3\cdot\left(\frac{z}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{x}=\frac{3z^2}{x^3}.$$

Знаходимо значення частинних похідних у вказаній точці:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}=\frac{1}{1}-\frac{3}{1}=-2,\ \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}=-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2},\ \frac{\partial f(M_0)}{\partial z}=\frac{3}{1}=3.$$

І, нарешті, знаходимо значення похідної функції трьох змінних за напрямками $\vec{l}_1=(1;-1;1),\vec{l}_2=(1;1;0)$:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l_1}=-2\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+3\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l_2}=-2\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+3(0)=-\frac{5\sqrt{2}}{4}.\ \blacksquare$$

Задача 5. 2. *Знайти градієнт функції f у точці M, якщо*

$f=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $M_1(1;2), M_2(0;1)$.

Розв'язання.

Графік функції $f(x,y)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ зображено на рис. 5.3.

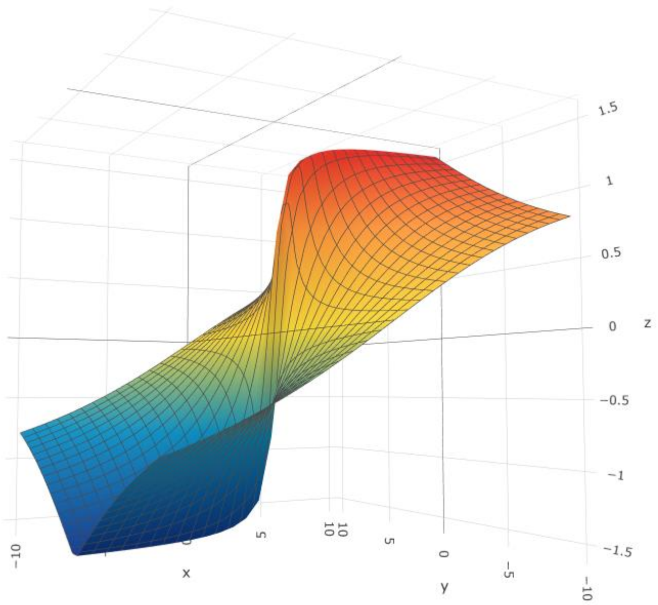


Рис. 5.3

Маємо функцію двох змінних, її градієнт визначаємо за формулою (5.4): $\operatorname{grad} f = \overrightarrow{\left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}\right)}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} \cdot \frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} \cdot \frac{x\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2y}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}} = \frac{-x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial f\left(M_1\right)}{\partial x} = \frac{2}{1+4} = \frac{2}{5}; \quad \frac{\partial f\left(M_1\right)}{\partial y} = \frac{-1}{1+4} = -\frac{1}{5};$$

$\operatorname{grad} f\left(M_1\right) = \overrightarrow{\left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right)}$. ■

Задача 5. 3. *Знайти кут між градієнтами функції* f_1 *у точці* *M_1 і* f_2 *у точці M_2, якщо* $f_1 = f_2 = \sin(x+y+z) - \sin x - \sin y - \sin z$, $M_1\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right), M_2\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо вектори $\operatorname{grad} f\left(M_1\right)$ і $\operatorname{grad} f\left(M_2\right)$, використавши алгоритм розв'язання з попередньої задачі:

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(x+y+z\right) - \cos x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(x+y+z\right) - \cos y;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \cos(x+y+z) - \cos z.$$

$$\frac{\partial f(M_1)}{\partial x} = \cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \ \frac{\partial f(M_1)}{\partial y} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \ \frac{\partial f(M_1)}{\partial z} = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{\partial f(M_2)}{\partial x} = \cos\pi - \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{3}{2}; \ \frac{\partial f(M_2)}{\partial y} = -\frac{3}{2}; \ \frac{\partial f(M_2)}{\partial z} = -\frac{3}{2};$$

$$\text{grad}\, f(M_1) = \overrightarrow{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}; \quad \text{grad}\, f(M_2) = \overrightarrow{\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)}.$$

Кут між двома векторами знаходимо, використавши відому формулу з геометрії для скалярного добутку:

$$\cos\varphi = \frac{\text{grad}\, f(M_1)\cdot \text{grad}\, f(M_2);}{|\text{grad}\, f(M_1)|\cdot|\text{grad}\, f(M_2)|} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}}} =$$

$$= \frac{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{9}{4}}\cdot\sqrt{\frac{27}{4}}} = \frac{9\sqrt{3}}{3\cdot 3\sqrt{3}} = 1.$$

$\varphi = \arccos 1 = 0.$ ■

Задача 5. 4. *Знайти найбільше значення* $\frac{\partial f}{\partial l}$ *у точці* M_0, *якщо* $f(x,y,z) = \ln xyz,\ M_0(1;-2;-3)$.

Розв'язання. Найбільше значення $\frac{\partial f}{\partial l}$ досягається у напрямку градієнта функції f в точці M_0, тобто $\vec{l} = \text{grad}\, f(M_0)$, $\varphi = \left(\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0)\cdot \vec{l_0}\right) = 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \overrightarrow{\text{grad}\, f(M_0)}\cdot\vec{l} = |\text{grad}\, f(M_0)|\cdot 1\cdot\cos\varphi = |\text{grad}\, f(M_0)|.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{xyz}\cdot yz=\frac{1}{x};\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{xyz}\cdot xz=\frac{1}{y};\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{z};$$

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial x}=1;\quad \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial y}=-\frac{1}{2};\quad \frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial z}=-\frac{1}{3};$$

$$\frac{\partial f\left(M_0\right)}{\partial l}=\left|\operatorname{grad} f\left(M_0\right)\right|=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}=\frac{7}{6}.\ \blacksquare$$

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1. [9; 11]** *Знайти похідну функції по заданому напрямку вектора* $\vec{l}$ *у точці* M_0*, якщо:*

1) $f=3x^2+5y^2,\ \vec{l}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ M_0(1;1);$

2) $f=x\sin(x+y),\ \vec{l}=(-1;0),\ M_0\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right);$

3) $f=x^3+2xy^2+3yz^2,\ \vec{l}=\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right),\ M_0(3;3;1);$

4) $f=\frac{x}{y}+\left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{z}{x}\right)^3,\ \ M_0(1;1;1),\ \vec{l}_1=(1;-1;1),\ \vec{l}_2=(1;1;0),$

5) $f=\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ M_0(1;1;1),\ M(1;5;4),\ \vec{l}=\overrightarrow{M_0M};$

6) $f=\sum_{k=1}^{n}\arcsin x_k,\ \vec{l}=\left(\frac{1}{\sqrt{n}};\frac{1}{\sqrt{n}};\ldots;\frac{1}{\sqrt{n}}\right),\ M_0\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\ldots;\frac{1}{4}\right);$

7) $f=\sum_{k=1}^{n}x_k^k,\ \vec{l}=(1;2;\ldots;m),\ M_1(0;0;\ldots;0),\ M_2(1;1;\ldots;1),$

$M_3(-1;-2;\ldots;-m).$

✍**2. [9; 11]** *Знайти градієнт функції* f *у точці* M*, якщо:*

1) $f=1+x^2y^3,\ \ M(-1;1);$

2) $f=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ M_1(1;\,2),\, M_2(0;\,1);$

3) $f=x+yz+x^2yz,\ M_0(0;\,0;\,0),\, M_1(1;\,1;\,1),\, M_2(1;\,2;\,3);$

4) $f=\sin(x+y)+\cos yz-\operatorname{tg} zx,\ M_0(0;\,0;\,0),\, M_1\left(\dfrac{\pi}{4};\,\dfrac{\pi}{4};\,1\right),$ $M_2\left(0;\,\dfrac{\pi}{6};\,\dfrac{\pi}{3}\right);$

5) $f=\left(\sum\limits_{k=1}^{m}x_k^{2m}\right)^{\frac{1}{m}},\ M_0(1;\,0;\,0;...;\,0),\, M_1(1;\,1;...;\,1),\, M_2(1;\,2;...;\,3).$

✍**3. [11]** *Знайти кут між градієнтами функції* f_1 *у точці* M_1 *і* f_2 *у точці* M_2*, якщо:*

1) $f_1=f_2=\arcsin\dfrac{x}{x+y},\ M_1(1;\,1),\, M_2(3;\,4);$

2) $f_1=\sqrt{x^2-y^2},\ f_2=x^3+y^3-3xy,\ M_1=M_2(4;\,3);$

3) $f_1=f_2=\sin(x+y+z)-\sin x-\sin y-\sin z,\ M_1(0;\,0;\,0),$ $M_2\left(\dfrac{\pi}{2};\,\dfrac{\pi}{2};\,\dfrac{\pi}{2}\right);$

4) $f_1=\sqrt[3]{x^3+y^3+z^3},\ f_2=\sqrt[4]{x^4+y^4+z^4},\ M_1(1;\,0;\,0),\, M_2(1;\,1;\,1).$

✍**4. [9]** *Знайти найбільше значення* $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ *у точці* M_0*, якщо:*

1) $f=xy^2-3x^4y^5,\ M_0(1;\,1);$

2) $f=\dfrac{x+\sqrt{y}}{y},\ M_0(2;\,1);$

3) $f=\ln xyz,\ M_0(1;\,-2;\,-3);$

4) $f=3x^2-6xy+y^2,\ M_0\left(-\dfrac{1}{3};\,-\dfrac{1}{2}\right).$

✍**5. [9]** *Знайти одиничний вектор* $\vec{l}$, *у напрямку якого похідна* $\frac{\partial f}{\partial l}$ *у точці* M_0 *досягає найбільшого значення, якщо:*

1) $f = x^2 - xy + y^2,\ M_0(-1;\,2)$;

2) $f = x - 3y + \sqrt{3xy},\ M_0(3;\,1)$;

3) $f = \arcsin xy + \arccos yz,\ M_0(1;\,0{,}5;\,0)$;

4) $f = xz^y,\ M_0(-3;\,2;\,1)$.

✍**6. [11]** *Для функції* f *знайти точки* D_f, *в яких її градієнт задовольняє умову (*):*

1) $f(x,\,y) = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$, (*): 1) евклідова норма градієнта дорівнює $\frac{5}{3}$; 2) довжина градієнта дорівнює нулю;

2) $f(x;\,y) = \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{3}{2}}$, (*): 1) довжина градієнта дорівнює 2; 2) довжина градієнта дорівнює нулю;

3) $f(x,\,y) = x^2 + y^2 - 3xy$, (*): 1) градієнт перпендикулярний осі Oy; 2) градієнт перпендикулярний осі Ox;

4) $f(x, y,\,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, (*): 1) градієнт перпендикулярний осі Ox; 2) градієнт паралельний осі Oy; 3) $grad\ f \parallel \vec{a}(1;1;1)$; 4) $|grad\ f| = 1$.

✍**7. [1]** *Знайти похідну функції* $z = \ln(x + y)$ *у точці* $(1;2)$, *яка лежить на параболі* $y^2 = 4x$, *в напрямку цієї параболи.*

✍**8. [1]** *Знайти похідну функції* $z = arctg\frac{y}{x}$ *у точці* $\left(\frac{1}{2};\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, *яка лежить на колі* $x^2 + y^2 - 2x = 0$ *в напрямку цього кола.*

✍**9.** *Знайти похідну функції* $u = xy^2 + z^3 - xyz$ *в точці* $M(1;1;2)$ *в напрямку, що утворює з осями координат кути відповідно в* $60^0, 45^0, 60^0$.

✍**10.** *Довести, що похідна функції* $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ *в довільній точці* $M(x, y, z)$ *в напрямку від точки* M *до початку координат, дорівнює* $\frac{2u}{r}$, *де* $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

✍**11. [14, с. 730] *Зміна температури по колу.*** *Чи існує напрями, при якому швидкість зміни функції температури* $T(x, y, z) = 2xy - yz$ *(температура в градусах Цельсія, відстань у футах) у точці* $P(1;-1;1)$ *дорівнює* $-3°C$ */фут? Відповідь обґрунтувати.*

✍**12. [14, с. 730]** *Похідна функції f(x, y) у точці* $P_0(1;2)$ *у напрямку* $\vec{i} + \vec{j}$ *дорівнює* $2\sqrt{2}$, *у напрямку* $-2\vec{j}$ *дорівнює* -3. *Чому дорівнює похідна функції f у напрямку* $-\vec{i} - 2\vec{j}$*? Відповідь обґрунтувати.*

✍**13. [14, с. 730]** *Похідна функції f(x, y, z) у точці P є найбільшою у напрямку* $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. *У цьому напрямку значення похідної дорівнює* $2\sqrt{3}$.

1) Чому дорівнює ∇f *у точці P? Відповідь обґрунтувати.*

2) Чому дорівнює похідна функції f у точці P в напрямку $\vec{i} + \vec{j}$*?*

✍**14. [14, с. 730] *Правила алгебри для градієнтів.*** *Дано константу k і градієнти:* $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$, $\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k}$. *Встановити правила алгебри для градієнтів.*

§ 6. Частинні похідні вищих порядків

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Частинні похідні другого порядку	Second order partial derivatives
Змішані частинні похідні	Mixed partial derivatives
Частинні похідні вищих порядків	Partial derivatives of still higher orders
Диференціал другого порядку	Differential of the second order
Диференціали вищих порядків	Differentials of higher orders

1. Сформулювати означення частинних похідних другого порядку.

*Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена в області $E\subset\mathbb{R}^2$ і нехай у кожній точці з E вона має частинні похідні $f'_x(x,y)$ і $f'_y(x,y)$. Якщо виявиться, що функції $f'_x(x,y)$ і $f'_y(x,y)$ мають частинні похідні за змінними x і y, то їх називають **частинними похідними другого порядку** і позначають:*

$$f''_{x^2}(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2},\qquad f''_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y},$$

$$f''_{yx}(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x},\qquad f''_{y^2}(x,y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}. \qquad \textbf{(6.1)}$$

*Частинні похідні $f''_{xy}(x,y)$ і $f''_{yx}(x,y)$ другого порядку називають **змішаними** або **мішаними похідними**.*

2. Чи можуть змішані похідні бути рівними?

Так. Якщо змішані похідні $f''_{xy}(x,y)$ і $f''_{yx}(x,y)$ неперервні у точці (x_0,y_0), тоді вони рівні у цій точці:

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0) \qquad \textbf{(6.2)}$$

3. Що називають диференціалом другого порядку?

Диференціал першого порядку від диференціала першого порядку називають ***диференціалом другого порядку*** *функції* $z = f(x,y)$ *у точці* (x,y) *і позначають:* $d^2z := d(dz)$.

$$d^2z = f''_{x^2}(x,y)dx^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)dy^2 \quad \textbf{(6.3)}$$

4. Що називають частинними похідними третього і вищих порядків?

Аналогічно можна говорити про частинні похідні третього порядку в області $E \subset \mathbb{R}^2$, *які є частинними похідними за змінними* x *і* y *від похідних другого порядку:*

$$\begin{aligned} f'''_{x^3}(x,y) &= \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right), \\ f'''_{x^2y}(x,y) &= \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right), \text{ і т.д.} \end{aligned} \qquad \textbf{(6.4)}$$

І взагалі, індуктивно можна означити частинні похідні n*-го порядку як частинні похідні першого порядку від частинних похідних* $(n-1)$*-го порядку. Причому щоразу кількість частинних похідних подвоюється, тому частинних похідних* n*-го порядку уже буде* 2^n.

5. Що називають диференціалами третього та вищих порядків?

Диференціал першого порядку від диференціала другого порядку називають ***диференціалом третього порядку*** *функції* $z = f(x,y)$ *у точці* (x,y) *і позначають:* $d^3z := d(d^2z)$.

$$d^3z = f'''_{x^3}(x,y)dx^3 + 3f'''_{x^2y}(x,y)dx^2dy + 3f'''_{xy^2}(x,y)dxdy^2 + f'''_{y^3}(x,y)dy^3$$

Індуктивно можна означити диференціал четвертого і вищих порядків $d^nz := d(d^{n-1}z)$.

Для запам'ятовування диференціалів вищих порядків корисні *формули:*

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)z,$$

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 z, \qquad \textbf{(6.5)}$$

....

$$d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k$$

Приклади розв'язування вправ

Задача 6.1. *Знайти частинні похідні другого порядку функції* $z=x^y,\ x>0.$

Розв'язання. Графік функції $z=x^y,\ x>0$ зображено на рис. 6.1.

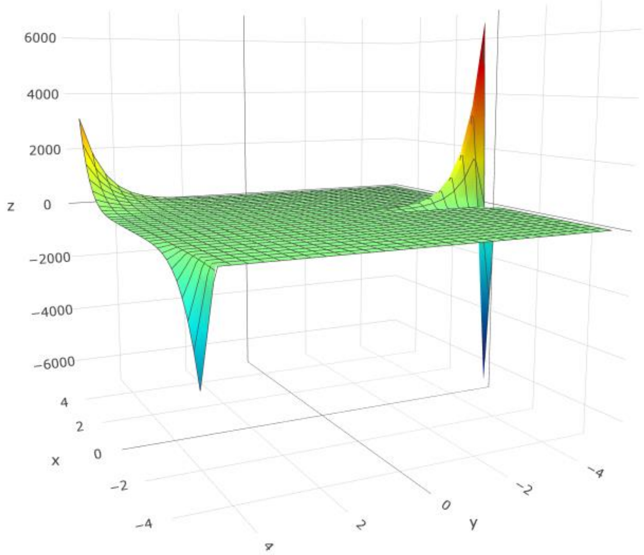


Рис. 6.1

Знайдемо на області визначення спочатку частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^y\right)'_x=\left|\begin{array}{l}\left(t^n\right)'=nt^{n-1}\\ y=\text{const}\end{array}\right|=yx^{y-1}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^y\right)'_y=\left|\begin{array}{l}\left(a^t\right)'=a^t\ln a\\ x=\text{const}\end{array}\right|=x^y\ln x.$$

Кожна з цих частинних похідних визначена в області функції z і має, у свою чергу, частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(yx^{y-1}\right)'_x=\left|y=\text{const}\right|=y(y-1)x^{y-2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(yx^{y-1}\right)'_y=\left|x=\text{const}\right|=x^{y-1}+y\left(x^{y-1}\right)'_y=x^{y-1}(1+y\ln x);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(x^y\ln x\right)'_x=\left|y=\text{const}\right|=\left(x^y\right)'_x\ln x+x^y\left(\ln x\right)'_x=x^{y-1}(1+y\ln x);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(x^y\ln x\right)'_y=\left|x=\text{const}\right|=x^y\ln^2 x.\ \blacksquare$$

Задача 6.2. *Знайти диференціал* d^2z *функції* $z=x\sin^2 y$ *у точці* $\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Графік функції $z=x\sin^2 y$ зображено на рис. 6.2.

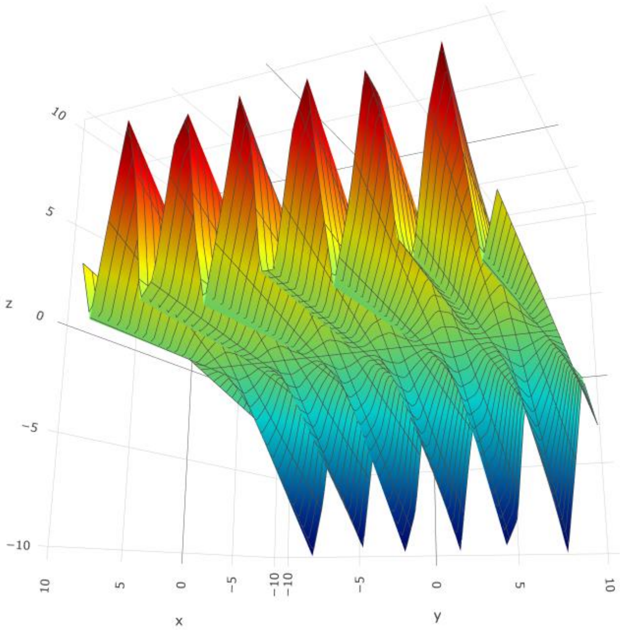


Рис. 6.2

Для знаходження диференціалу другого порядку від функції двох змінних знаходимо частинні похідні до другого порядку включно, обчислюємо їх значення у вказаній точці і результат підставляємо у формулу:

$$d^2z=f''_{x^2}(x,y)dx^2+2f''_{xy}(x,y)dxdy+f''_{y^2}(x,y)dy^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\sin^2 y; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2x\sin y\cos y=x\sin 2y.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\sin 2y; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x\cos 2y.$$

$$d^2z=0\cdot dx^2+2\sin 2ydxdy+2x\cos 2ydy^2.$$

$$d^2z\left(1;\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\pi dxdy+2\cos\pi dy^2=-2dy^2. \blacksquare$$

Задача 6.3. *Знайти змішані похідні функції*

$$z=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$ *у точці* $(0;0)$.

Розв’язання. Графік функції $z=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ зображено на рис. 6.3.

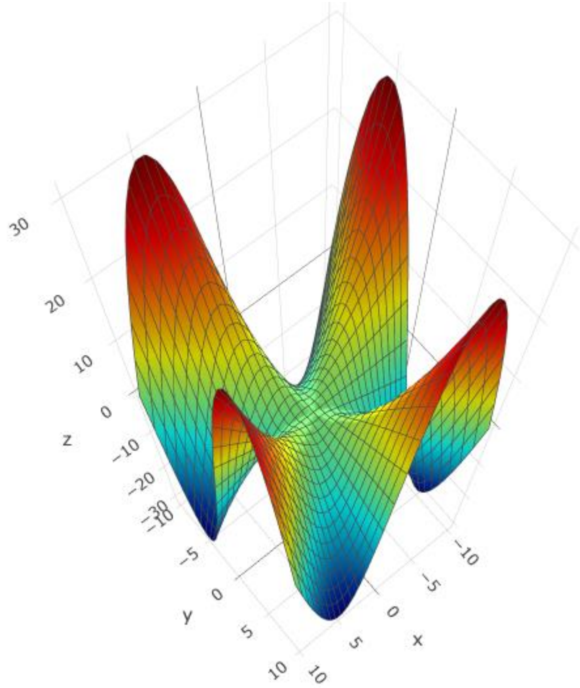


Рис. 6.3

1) Знайдемо частинні похідні першого порядку, скориставшись означенням та/або властивостями частинних похідних:

$$z'_x(0;0) := \lim_{\Delta x\to 0}\frac{z(0+\Delta x,0)-z(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0\cdot\Delta x\dfrac{(\Delta x)^2-0}{(\Delta x)^2+0}-0}{\Delta x} = 0; \quad z'_y(0;0) := 0,$$

$$z'_x(x,y) = \left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)'_x = y\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-xy^2)2x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2};$$

$$z'_y(x,y) = \left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)'_y = x\frac{(x^2-3y^2)(x^2+y^2)-(x^2y-y^3)2y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

2) Щоб знайти змішані похідні другого порядку у точці $(0;0)$, знайдемо спочатку значення частинних похідних першого порядку у точках $(0;y)$ та $(x;0)$.

Покладемо $x=0$, тоді $z'_x(0,y) = -\dfrac{y^5}{y^4} = -y$, $z''_{xy}(0,y) = -1$,

$y=0$, тоді $z'_y(x,0) = \dfrac{x^5}{x^4} = x$, $z''_{xy}(x,0) = 1$.

Отже, $z''_{xy}(0,0) = -1$, а $z''_{yx}(0,0) = 1$ і $z''_{xy}(0,0) \neq z''_{yx}(0,0)$. ■

Задача 6.4. *Знайти диференціал другого порядку функції* $u = xe^y$*, якщо: 1)* x *і* y *– функції довільних незалежних змінних і їх диференціали* d^2x *і* d^2y *відомі; 2)* x *і* y *– незалежні змінні.*

Розв'язання. Графік функції $u = xe^y$ у випадку незалежних змінних зображено на рис. 6.4.

1) ***І спосіб.*** За означенням диференціала другого порядку і властивостями диференціала першого порядку маємо:

$$d^2u = d\left(d\left(xe^y\right)\right) = d\left(e^y dx + xe^y dy\right) = d\left(e^y\right)dx + e^y d^2x + d\left(xe^y\right)dy + xe^y d^2y =$$
$$= 2e^y dxdy + xe^y\left(dy\right)^2 + e^y d^2x + xe^y d^2y. \ \blacksquare$$

II спосіб.

Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x} = e^y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = xe^y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^y$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xe^y$,

то знаходимо:

$$d^2u = d\left(du\right) = d\left(u'_x dx + u'_y dy\right) = u''_{x^2}dx^2 + 2u''_{xy}dxdy + u''_{y^2}dy^2 + u'_x d^2x + u'_y d^2y =$$
$$d^2u = 2e^y dxdy + xe^y dy^2 + e^y d^2x + xe^y d^2y.$$

2) Якщо x і y – незалежні змінні, то у цьому випадку $d^2x = 0$, $d^2y = 0$, і, відповідно, $d^2u = 2e^y dxdy + xe^y dy^2$. $\blacksquare$

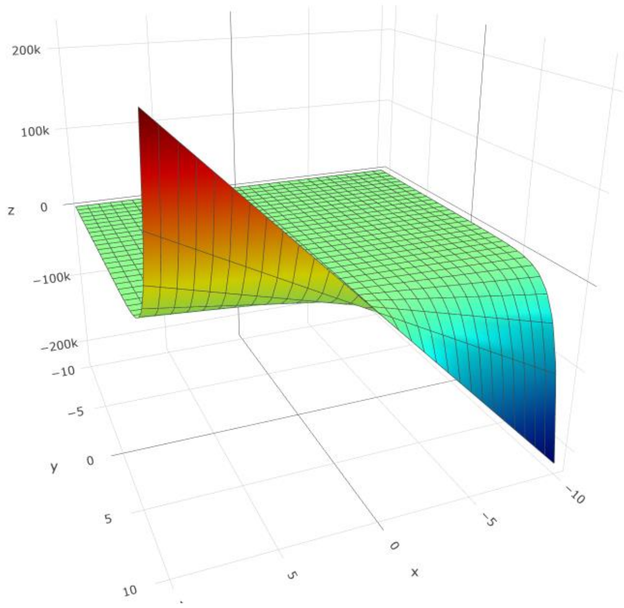


Рис. 6.4

Задача 6.5. *Знайти* d^2z *і* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ *для функції* $z = \frac{x^2+1}{y^3}$.

Розв'язання. Графік функції $z = \frac{x^2+1}{y^3}$ зображено на рис. 6.5.

Оскільки для обчислення диференціала другого порядку d^2z можна послідовно знайти 5 частинних похідних і використати відому формулу (І спосіб), а можна використати означення диференціала другого порядку як диференціала від диференціала першого порядку (ІІ спосіб).

I спосіб. Використаємо означення диференціала другого порядку, матимемо:

$$dz=\frac{y^3d(x^2+1)-(x^2+1)d(y^3)}{y^6}=\frac{y^3 2xdx-(x^2+1)3y^2dy}{y^6}=\frac{2xydx-3(x^2+1)dy}{y^4}.$$

Далі враховуємо, що dx і dy є диференціалами незалежних змінних, тому:

$$d^2z=d(dz)=\frac{y^4d\left(2xydx-3\left(x^2+1\right)dy\right)-\left(2xydx-3\left(x^2+1\right)dy\right)d\left(y^4\right)}{y^8}=$$

$$=\frac{y^4\left(2ydxdx+2xdydx-6xdxdy\right)-\left(2xydx-3\left(x^2+1\right)dy\right)4y^3dy}{y^8}=$$

$$=\frac{2y^2dx^2-12xydydx+12\left(x^2+1\right)dy^2}{y^5}=\frac{2}{y^3}dx^2-\frac{12x}{y^4}dxdy+\frac{12\left(x^2+1\right)}{y^5}dy^2$$

.

Порівнюючи одержаний вираз для d^2z з формулою:

$d^2z=\frac{\partial^2z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}dy^2$, бачимо, що $\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=-\frac{6x}{y^4}$

(вираз для решти похідних першого і другого порядку також можна бачити із знайдених d^2z і dz). ■

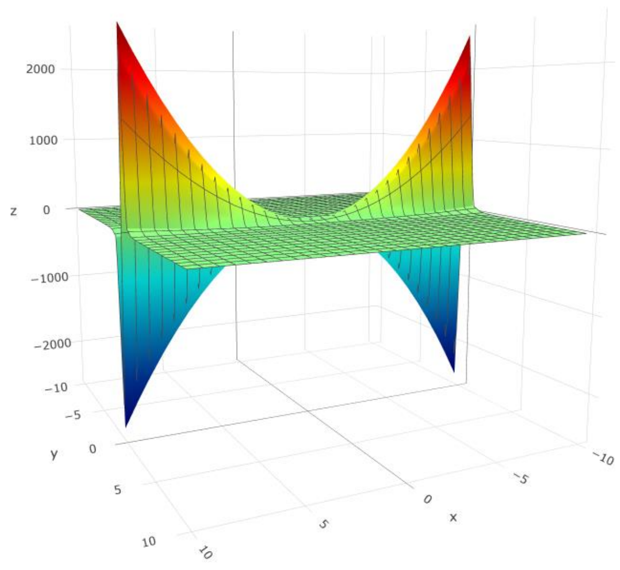


Рис. 6.5

II спосіб. Знайдемо частинні похідні до другого порядку включно для заданої функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{x^2+1}{y^3}\right)'_x=\frac{2x}{y^3};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{x^2+1}{y^3}\right)'_y=\frac{-3(x^2+1)}{y^4};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{2x}{y^3}\right)'_x=\frac{2}{y^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{2x}{y^3}\right)'_y=\frac{-6x}{y^4};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{-3(x^2+1)}{y^4}\right)'_y=\frac{12(x^2+1)}{y^5}.$$

Диференціал другого порядку d^2z обчислюємо за формулою:

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=$$

$$=\frac{2}{y^3}dx^2-\frac{12x}{y^4}dxdy+\frac{12(x^2+1)}{y^5}dy^2.\ \blacksquare$$

Задача 6.6. *Знайти всі частинні похідні і диференціали другого порядку у точці для функцій:*

1) $z=\ln\dfrac{2-y-x^2}{2+y+x^2},\ (1;0);$

2) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy},\ (0;0);$

3) $z=\sin^2(ax+by),\ (0;0).$

Розв'язання. Ці задачі ви розв'язуєте за аналогією до попереднього завдання. Бажаємо успіху!

1) Графік функції $z=\ln\dfrac{2-y-x^2}{2+y+x^2}$ зображено на рис. 6.6.

Використаємо властивості логарифма і нашу функцію подамо у більш зручному вигляді для знаходження частинних похідних:

$$z=\ln\frac{2-y-x^2}{2+y+x^2}=\ln\left(2-y-x^2\right)-\ln\left(2+y+x^2\right).$$

$$z'_x=\frac{-2x}{2-y-x^2}-\frac{2x}{2+y+x^2}=\frac{-2x\cdot 4}{\left(2-y-x^2\right)\left(2+y+x^2\right)};$$

$$z'_y=\frac{-1}{2-y-x^2}-\frac{1}{2+y+x^2}=\frac{-4}{\left(2-y-x^2\right)\left(2+y+x^2\right)};$$

$$z''_{x^2}=-8\cdot\frac{\left(2-y-x^2\right)\left(2+y+x^2\right)-x\cdot\left(-2x\left(2+y+x^2\right)+2x\left(2-y-x^2\right)\right)}{\left(2-y-x^2\right)^2\left(2+y+x^2\right)^2}=$$

$$=-8\cdot\frac{4-y^2+2yx^2+3x^4}{\left(2-y-x^2\right)^2\left(2+y+x^2\right)^2};$$

$$z''_{xy}=\frac{8x\left(-2-y-x^2+2-y-x^2\right)}{\left(2-y-x^2\right)^2\left(2+y+x^2\right)^2}=\frac{16x\left(y+x^2\right)}{\left(2-y-x^2\right)^2\left(2+y+x^2\right)^2};$$

$$z''_{y^2}=\frac{4\cdot 2\left(y+x^2\right)}{\left(2-y-x^2\right)^2\left(2+y+x^2\right)^2};$$

$$d^2z=z''_{x^2}dx^2+2z''_{xy}dxdy+z''_{y^2}dy^2=$$

$$=\frac{-8\left(4-y^2+2x^2y+3x^4\right)dx^2+32x\left(y+x^2\right)dxdy+8\left(y+x^2\right)dy^2}{\left(2-y-x^2\right)^2\left(2+y+x^2\right)^2};$$

$$d^2z(0;1)=\frac{-56dx^2+32dxdy+8dy^2}{1^2\cdot 3^2}=\frac{-56dx^2+32dxdy+8dy^2}{9}.\ \blacksquare$$

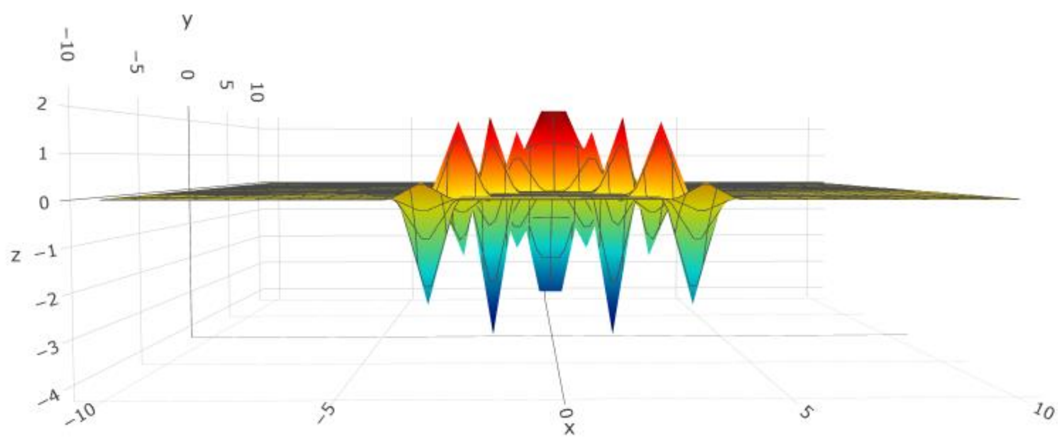


Рис. 6.6

2) Графік функції $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$ зображено на рис. 6.7.

$$z'_x = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{1-xy+y^2+xy}{(1-xy)^2} = \frac{1+y^2}{\left(1+x^2\right)+y^2\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$z'_y = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{1-xy+x^2+xy}{(1-xy)^2} = \frac{1}{1+y^2}.$$

$$z''_{x^2} = \frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}; \qquad z''_{xy} = 0; \qquad z''_{y^2} = \frac{-2y}{\left(1+y^2\right)^2}.$$

$$d^2z = \frac{-2xdx^2}{\left(1+x^2\right)^2} - \frac{2ydy^2}{\left(1+y^2\right)^2}, \qquad d^2z = (0;0) = 0. \ \blacksquare$$

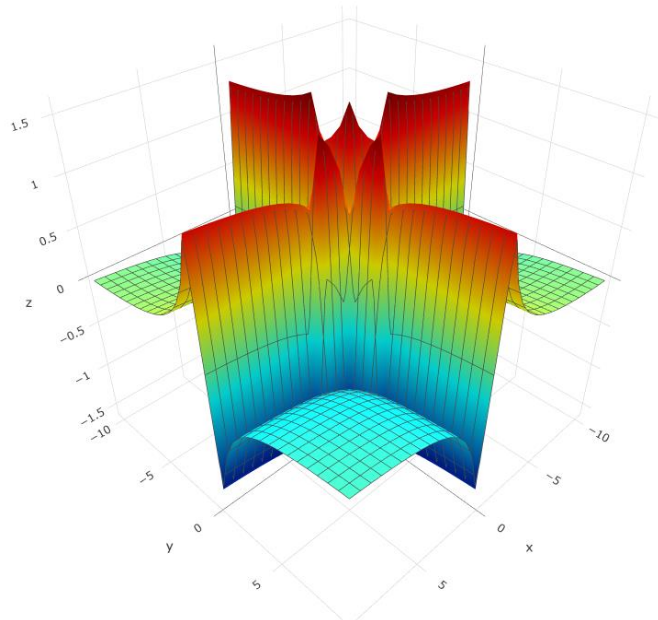


Рис. 6.7

3) Графік функції $z = \sin^2(ax+by)$ зображено на рис. 6.8.

$$z'_x = 2\sin(ax+by)\cos(ax+by)\cdot a = a\sin(2ax+2by).$$

$$z'_y = b\sin(2ax+2by).$$

$$z''_{x^2} = 2a^2\cos(2ax+2by); \quad z''_{xy} = 2ab\cos(2ax+2by);$$

$$z''_{y^2} = 2b^2\cos(2ax+2by).$$

$$d^2z = \cos(2ax+2by)\left(2a^2dx^2 + 4abdxdy + 2b^2dy^2\right),$$

$$d^2z(0;0) = \cos 0\left(2a^2dx^2 + 4abdxdy + 2b^2dy^2\right) =$$

$$= 2a^2dx^2 + 4abdxdy + 2b^2dy^2. \ \blacksquare$$

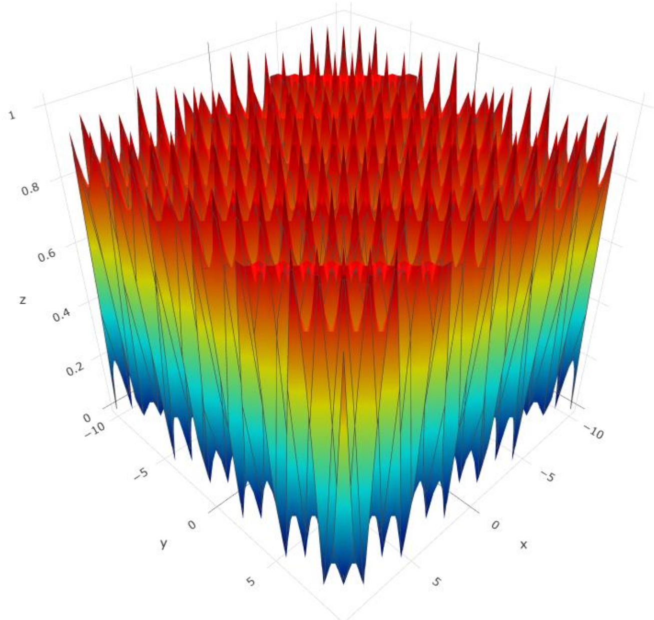


Рис. 6.8

Задача 6.7. *Знайти вказані частинні похідні:*

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$, якщо $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}$;

2) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, якщо $z = e^{xy^2}$;

3) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, якщо $u = e^{xyz}$.

Розв'язання. ***1)*** Спочатку знаходимо частинну похідну за змінною y, а потім за змінною z: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}}$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = y \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2 + y^2 + z^2 - 2xz\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2z - 2x) =$$

$$=\frac{(x-z)\,y}{\sqrt{\left(x^2+y^2+z^2-2xz\right)^3}}.\ \blacksquare$$

2) Графік функції $z=e^{xy^2}$ зображено на рис. 6.9. Тут ми двічі поспіль знаходимо частинні похідні за змінною x, а потім за змінною y:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2e^{xy^2};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^4e^{xy^2};$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=4y^3e^{xy^2}+2xy^5e^{xy^2}=2y^3\left(2+xy^2\right)e^{xy^2}.\ \blacksquare$$

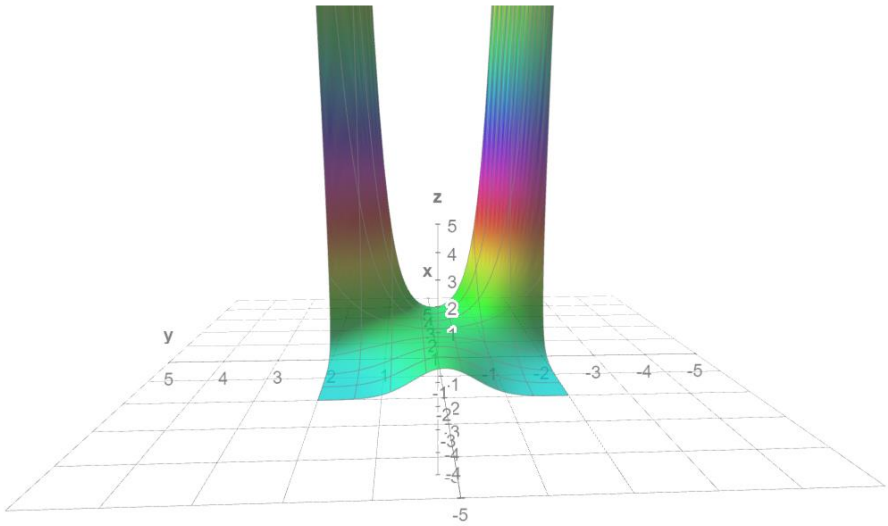


Рис. 6.9

3) Маємо функцію трьох змінних. Шукаємо частинні похідні послідовно спочатку за змінною x, потім за змінною y, і за змінною z:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yze^{xyz};\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=z\left(e^{xyz}+yxz\cdot e^{xyz}\right)=z\left(1+xyz\right)e^{xyz};$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)=\left(1+xyz\right)e^{xyz}+zxy\cdot e^{xyz}+z\left(1+xyz\right)xy\cdot e^{xyz}=$$

$$=\left(1+xyz+xyz+xyz+\left(xyz\right)^2\right)e^{xyz}=\left(1+3xyz+x^2y^2z^2\right)e^{xyz}.\ \blacksquare$$

Задача 6.8. *Знайти диференціал третього порядку* d^3u *для функції трьох змінних* $u=x^3z^4-5y^2z^2+1$.

Розв'язання. Маємо функцію трьох змінних, і спочатку знаходимо диференціал першого порядку:

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz = 3x^2z^4dx + 4x^3z^3dz - 10yz^2dy - 10y^2zdz.$$

Знаходимо диференціал другого порядку:

$$d^2u = d\left(3x^2z^4\right)dx + d\left(4x^3z^3\right)dz - d\left(10yz^2\right)dy - d\left(10y^2z\right)dz =$$

$$= 6xz^4dx^2 + 12x^2z^3dxdz + 12x^2z^3dzdx + 12x^3z^2dz^2 - 10z^2dy^2 -$$

$$-20yzdydz - 20yzdzdy - 10y^2dz^2 =$$

$$= 6xz^4dx^2 + 24x^2z^3dxdz + 12x^3z^2dz^2 - 10z^2dy^2 - 40yzdzdy - 10y^2dz^2.$$

Остаточно шукаємо диференціал третього порядку як диференціал від диференціала другого порядку:

$$d^3u = 6z^4dx^3 + 24xz^3dx^2dz + 48xz^3dx^2dz + 72x^2z^2dxdz^2 +$$

$$+36x^2z^2dz^2dx + 24x^3zdz^3 - 20ydy^2dz - 40zdy^2dz - 40ydydz^2 - 20ydz^2dy =$$

$$= 6z^4dx^3 + 72xz^3dx^2dz + 108x^2z^2dxdz^2 + 24x^3zdz^2 - 60zdzdy^2 - 60ydydz^2.$$

Задача 6.9. *Перевірити, що функція* $z = 2\cos^2\left(y - \dfrac{x}{2}\right)$ *задовольняє диференціальне рівняння* $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$

Розв'язання. Графік функції $z = 2\cos^2\left(y - \dfrac{x}{2}\right)$ зображено на рис. 6.10.

Знайдемо частинні похідні другого порядку, які містяться в даному рівнянні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \cdot 2\cos\left(y - \frac{x}{2}\right) \cdot \left(-\sin\left(y - \frac{x}{2}\right)\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \sin(2y - x);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\cos(2y - x); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\cos(2y - x).$$

Якщо підставимо їх в дане рівняння, то одержимо тотожність для всіх значень незалежних змінних: $0 = 0$. ■

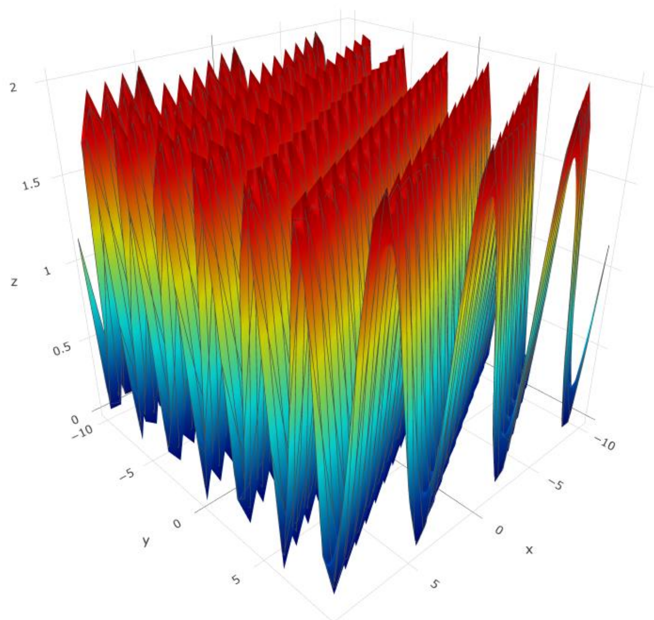


Рис. 6.10

Задача 6.10. *Перевірити рівності:*

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ *(рівняння Лапласа), якщо:*

$u=e^x\left(x\cos y-y\sin y\right);$

2) $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *(рівняння теплопровідності), якщо:*

$u=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$

Розв'язання.

1) Графік функції $u=e^x\left(x\cos y-y\sin y\right)$ зображено на рис. 6.11. Знаходимо послідовно потрібні нам частинні похідні і підставляємо у рівняння. Якщо рівність правильна для всіх значень незалежних змінних, то отримуємо тотожність. Тому вказана функція є розв'язком так званого диференціального рівняння в частинних похідних.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\left(x\cos y-y\sin y\right)+e^x\cos y=e^x\left(x\cos y-y\sin y+\cos y\right).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^x\left(-x\sin y-\sin y-y\cos y\right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x\left(x\cos y - y\sin y + 2\cos y\right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x\left(-x\cos y - \cos y - \cos y + y\sin y\right).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^x\left(x\cos y - y\sin y + 2\cos y - x\cos y - 2\cos y + y\sin y\right) \equiv 0.$$

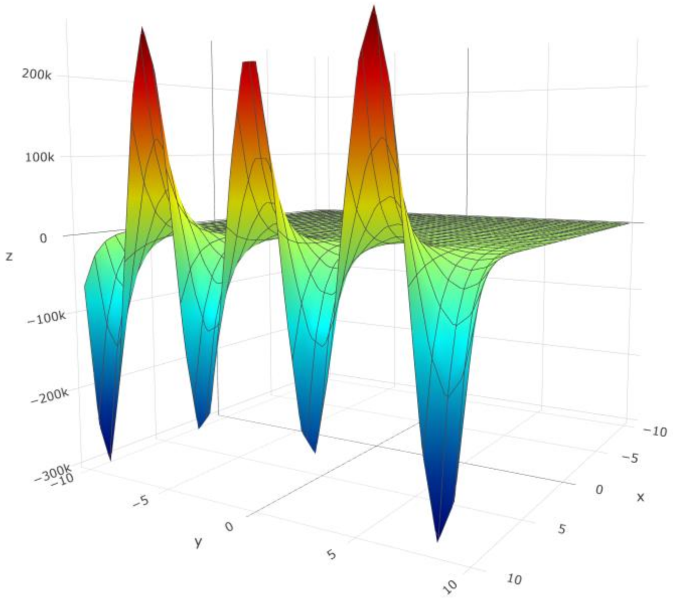


Рис. 6.11

2) Працюємо аналогічно до попереднього прикладу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{t^3}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} + \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\cdot\frac{x^2}{4a^2t^2}\right) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t^3}}\left(-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4a^2t}\right)e^{-\frac{x^2}{4a^2t}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\frac{-2x}{4a^2t}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} = \frac{-x}{4a^3\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} - \frac{x}{4a^3\sqrt{\pi t^3}}\cdot\frac{-2x}{4a^2t}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} =$$

$$= \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi t^3}}\cdot\left(-1 + \frac{x^2}{2a^2t}\right)e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

Складемо різницю лівої і правої частини рівняння теплопровідності і підставимо знайдені нами частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t^3}}\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{4a^2t}\right)e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}-\frac{a^2}{4a^3\sqrt{\pi t^3}}\cdot\left(-1+\frac{x^2}{2a^2t}\right)e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}=$$

$$=\frac{1}{4a\sqrt{\pi t^3}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(-1+\frac{2x^2}{4a^2t}+1-\frac{x^2}{2a^2t}\right)\equiv 0. \blacksquare$$

Задача 6.11. *Знайти всі похідні до другого порядку включно, перші і другі диференціали складеної функції* f*, якщо:* $F=f\left(x^2+y^2+z^2\right),\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

Розв'язання. Повний диференціал складеної функції знаходимо за формулою $dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz.$ Тепер обчислюємо частинні похідні складеної функції $F=f\left(x^2+y^2+z^2\right)=f(u),\ u=x^2+y^2+z^2$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{df(u)}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)\cdot 2x;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=f'(u)\cdot 2y;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=f'(u)\cdot 2z.$$

$$dF=f'\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(2xdx+2ydy+2zdz\right).$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f''(u)\cdot u'_x\cdot 2x+f'(u)\cdot 2=f''(u)\cdot 4x^2+2f'(u);$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=2x\cdot f''(u)\cdot u'_y=4xyf''(u);$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}=4xzf''(u);$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=f''(u)4y^2+2f'(u);$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 2yf''(u) \cdot u'_z = 4yzf''(u);$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = f''(u) 4z^2 + 2f'(u);$$

$$d^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} dz + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dxdy + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} dxdz +$$

$$+2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} dydz = \left(f''(u) \cdot 4x^2 + 2f'(u) \right) dx^2 + \left(f''(u) 4y^2 + 2f'(u) \right) dy^2 +$$

$$+\left(f''(u) 4z^2 + 2f'(u) \right) dz^2 + 2 \cdot 4xyf''(u) dxdy + 2 \cdot 4xzf''(u) dxdz +$$

$$+2 \cdot 4yzf''(u) dydz. \blacksquare$$

Задача 6.12. *Знайти* n*-й диференціал функції* f*, якщо* $f(x, y, z) = (x+y+z)^{10} - (x+y)^9 - (x+z)^8 + x^6 + y^5 + z^4, \ n = 10$.

Розв'язання.

$$df = d\left((x+y+z)^{10} \right) - d\left((x+y)^9 \right) - d\left((x+z)^8 \right) + dx^6 + dy^5 + dz^4 =$$

$$= 10(x+y+z)^9 (dx+dy+dz) - 9(x+y)^8 (dx+dy) - 6x^5 dx +$$

$$+5y^4 dy + 4z^3 dz;$$

$$d^2 f = 10 \cdot 9 (x+y+z)^8 (dx+dy+dz)^2 - 9 \cdot 8 (x+y)^7 (dx+dy)^2 -$$

$$-6 \cdot 5x^4 dx^2 + 5 \cdot 4y^3 dy^2 + 4 \cdot 3z^2 dz^2;$$

$$d^3 f = 10 \cdot 9 \cdot 8 (x+y+z)^7 (dx+dy+dz)^3 - 9 \cdot 8 \cdot 7 (x+y)^6 (dx+dy)^3 -$$

$$-6 \cdot 5 \cdot 4x^3 dx^3 + 5 \cdot 4 \cdot 3y^2 dy^3 + 4 \cdot 3 \cdot 2z dz^3;$$

....

$$d^8 f = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 (x+y+z)^2 (dx+dy+dz)^8 -$$

$$-9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2 (x+y)(dx+dy)^8 - 8!(dx+dz)^8;$$

$$d^9 f = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 (x+y+z)(dx+dy+dz)^9 - 9!(dx+dy)^9;$$

$$d^{10} f = 10!(dx+dy+dz)^{10}. \blacksquare$$

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1. [1]** *Знайти всі частинні похідні і диференціали другого для функцій:*

1) $z = \ln\dfrac{2-y-x^2}{2+y+x^2}$, $(1;\,0)$;

2) $z = \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$;

3) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$, $(0;\,0)$;

4) $z = \sin^2(ax+by)$, $(0;\,0)$;

5) $z = \arcsin xy$;

6) $z = \dfrac{x-y}{x+y}$;

7) $z = (\sin x)^{\cos y}$, $\left(\dfrac{\pi}{6};\,\dfrac{\pi}{2}\right)$;

8) $z = \operatorname{arctg}\sqrt{xy}$.

✍**2.** *Знайти вказані частинні похідні:*

1) $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, якщо $z = \ln\left(x^2+y^2\right)$;

2) $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^3 \partial z^2}$, якщо $u = x^m y^n z^p$;

3) $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial t}$, якщо $f = \ln\sqrt{(x-y)^2+(z-t)^2}$;

4) $\dfrac{\partial^{3n} u}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n}$, якщо $f = x^{n+1}(y-1)^n(z+1)^{n-1}$.

✍**3. [1; 11]** *Перевірити рівності:*

1) $i\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$ (рівняння Шредінгера), якщо $u=\dfrac{1}{\sqrt{t}}e^{\frac{ix^2}{4t}}$;

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=k^2u$ (рівняння Гельмгольца), якщо $u=\dfrac{C_1e^{-kr}+C_2e^{kr}}{r}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, k, C_1, C_2 – сталі.

✍**4. [11]** *Знайти всі похідні до другого порядку включно, перші і другого порядку включно, перші і другі диференціали складної функції* f *, якщо:*

1) $F=f\left(x^2+y^2+z^2\right),\ (x, y, z)\in\mathbb{R}^3;$

2) $F=f\left(x, \dfrac{x}{y}\right),\ (x, y)\in\mathbb{R}^2;$

3) $F=f\left(x, xy, xyz\right),\ (x, y, z)\in\mathbb{R}^3;$

4) $F=f\left(x+y, x-y\right),\ (x, y)\in\mathbb{R}^2;$

5) $F=f\left(x^2+y^2, x^2-y^2, 2xy\right),\ (x, y)\in\mathbb{R}^2;$

6) $F=f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}\right),\ (x, y, z)\in\mathbb{R}^3;$

7) $F=f\left(t, t^2-t, t^3-t^2\right),\ t\in\mathbb{R};$

8) $F=f\left(\sin t, \cos t\right),\ t\in\mathbb{R};$

9) $F=f\left(xy, x^2y^2, x^3+y^3\right),\ (x, y)\in\mathbb{R}^2;$

10) $F = f\left(x^2 y,\ x^y\right),\ \ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2.$

✍**5. [11]** *Знайти n-й диференціал функції f, якщо:*

1) $f(x,\ y,\ z) = \sin(x+y) + \cos(y+z),\ \ n = 4;$

2) $f(x,\ y,\ z) = e^{x+2y+3z},\ \ n = 8;$

3) $f(x,\ y,\ z) = \ln(x+y) - \lg z,\ \ n = 5;$

4) $f(x,\ y,\ z) = (x+y+z)^{10} - (x+y)^9 - (x+z)^8 + x^6 + y^5 + z^4,$

$n = 8;\ \ n = 9;\ n = 10.$

✍**6. [11]** *Для функції f порівняти змішані похідні в точці $(0;\ 0)$, якщо:*

1) $f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0; \end{cases}$

2) $f(x,\ y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\dfrac{x-y}{x+y}, & x \neq -y0, \\ 0, & x = -y; \end{cases}$

3) $f(x,\ y) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - y^2 \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0. \end{cases}$

§ 7. Диференціювання неявних функцій

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Неявна функція однієї змінної	Animplicit function of one variable
Похідна неявно заданої функції	The derivative of animplicitly given function
Неявна функція багатьох змінних	The multi-valued implicit function
Частинні похідні неявно заданої функції	Partial derivatives of animplicit function

1. Сформулювати означення неявної функції однієї змінної. Записати умови, які мають виконуватись для її існування.

Якщо в прямокутнику:

$$D=[a,b;c,d]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b; c\le y\le d\}$$

рівняння $F(x;y)=0$ **(7.1)** *для кожного значення* $x\in[a;b]$ *має один корінь* $y=f(x)$ *з відрізка* $[c;d]$, *то* $y=f(x)$ *називають* ***неявною функцією*** *від змінної x, заданої рівнянням (7.1).*

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) *Функція* $F(x;y)$ *визначена і неперервна в прямокутнику* $D=[x_0-\Delta x,\ x_0+\Delta x;\ y_0-\Delta y,\ y_0+\Delta y]$ *з центром у точці* $(x_0;y_0)$;

2) $F(x_0;y_0)=0$;

3) *існують в* D *неперервні частинні похідні* $F'_x(x;y)$ *і* $F'_y(x;y)$;

4) $F'_y(x;y)\neq 0$.

Тоді в деякому околі точки $(x_0; y_0)$ рівняння (7.1) визначає змінну у як функцію від змінної х: $y = f(x); F(x_0) = y_0$.

Функція $f(x)$ *неперервна в околі* $O(x_0)$ *точки* x_0 *і має похідну:*

$$f_x'(x_0) = -\frac{F_x'(x_0; y_0)}{F_y'(x_0; y_0)} \quad \textbf{(7.2)}$$

2. Як знайти похідну другого порядку від функції $y = f(x)$, заданої рівнянням $F(x; y) = 0$?

$$y''(x) = -\frac{F_x'^2 F_{y^2}'' - 2F_x'F_y'F_{xy}'' + F_y'^2 F_{x^2}''}{F_y'^3} \qquad \textbf{(7.3)}$$

3. Сформулювати означення неявної функції багатьох змінних. Записати умови, які мають виконуватись.

Теорема 2. *Припустимо, що:*

1) *функція $F(x_1, x_2, ..., x_n; y)$ визначена і неперервна в $(n+1)$-мірному паралелепіпеді з центром у точці $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}; y_0)$.*

$D = [x_{01} - \Delta_1, x_{01} + \Delta_1, ..., x_{0n} - \Delta_n, x_{0n} + \Delta_n; y_0 - \Delta, y_0 + \Delta]$;

2) $F(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}, y_0) = 0$;

3) *в області D існують неперервні частинні похідні функції F по всіх змінних:* $F_{x_1}', F_{x_2}', ..., F_{x_n}', F_y'$;

4) *частинна похідна по змінній у не дорівнює нулю:*

$F_y'(x_{01}, ..., x_{0n}, y_0) \neq 0$

*Тоді в деякому околі $O((x_{01}, ..., x_{0n}, y_0))$ рівняння $F(x_1, x_2, ..., x_n; y) = 0$ визначає змінну **у** як однозначну функцію від незалежних змінних* $x_1, ..., x_n : y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$; $y_0 = f(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$: *причому функція $f(x)$ неперервна в околі $O(x_0)$ і має неперервні частинні похідні по всіх змінних:*

$$f_{x_1}' = -\frac{F_{x_1}'}{F_y'}, f_{x_2}' = -\frac{F_{x_2}'}{F_y'}, ..., f_{x_n}' = -\frac{F_{x_n}'}{F_y'} \quad \textbf{(7.4)}$$

Приклади розв'язування вправ

Задача 7. 1. *Виразити з рівняння* $F(x;\, y)=0$ *змінну* y *як неявну функцію від* x*:* $y^4-4x^2y^2+\sin x=0$.

Розв'язання. Графік функції $F(x;\, y)=y^4-4x^2y^2+\sin x$ зображено на рис. 7.1.

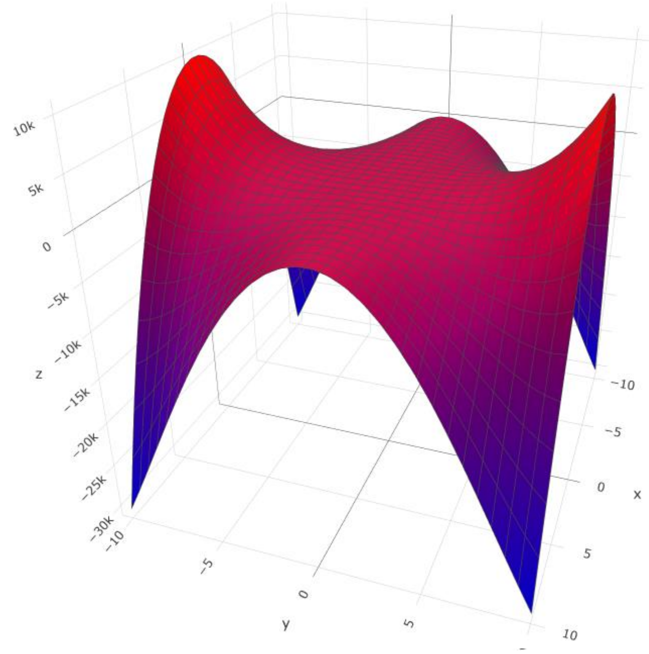


Рис. 7.1

Відносно змінної y маємо біквадратне рівняння, яке розв'язуємо стандартним способом, тобто знаходимо дискримінант: $\frac{D}{4}=4x^4-\sin x$. Якщо $4x^2-\sin x\ge 0$, або $4x^2\ge\sin x$, то

$$y^2=\frac{2x^2\pm\sqrt{4x^2-\sin x}}{1};\quad \text{звідки}\ \left[\begin{array}{l} y^2=2x^2+\sqrt{4x^2-\sin x}, \\ y^2=2x^2-\sqrt{4x^2-\sin x}. \end{array}\right.$$

Звідки $y=\pm\sqrt{2x^2+\sqrt{4x^2-\sin x}}$ або $y=\pm\sqrt{2x^2-\sqrt{4x^2-\sin x}}$ з умовою $4x^2\ge\sin x$. А в другому рівнянні маємо накласти ще одну додаткову умову:

$$2x^2\ge\sqrt{4x^2-\sin x}\,\Big|^{\wedge 2};$$

$$4x^2 \geq 4x^2 - \sin x;$$
$$\sin x \geq 0.$$

Таким чином бачимо, що залежно від околу точки $(x_0; y_0)$ вибираємо одну з чотирьох віток кривої. ■

Задача 7. 2. *Дослідити на неперервність і диференційовність неявну функцію* $y = y(x)$, *задану рівнянням* $F(x; y) = 0$, $F(x; y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1$. *Знайти частинні похідні і диференціали першого і другого порядку в точці* $M_0(0;1)$.

Розв'язання. *I спосіб.*

Графік функції $F(x; y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1$ зображено на рис. 7.2.

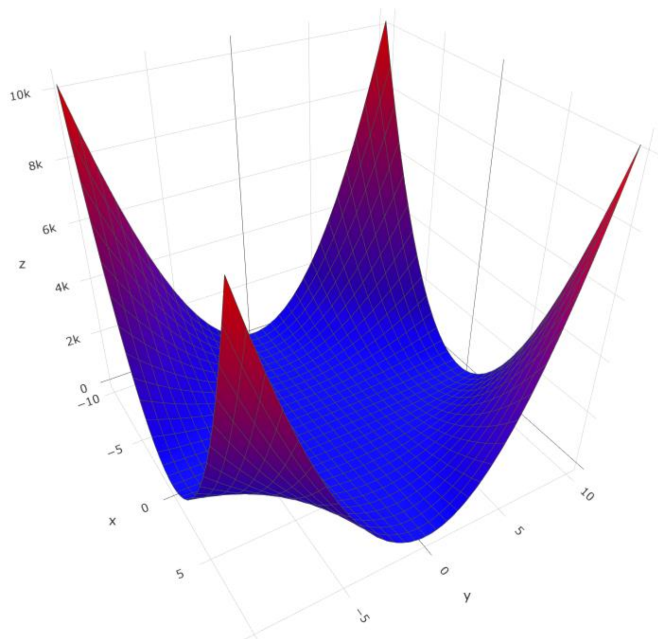


Рис. 7.2

Функція $F(x; y)$ дорівнює нулю у точці $M_0(0;1)$, неперервна як многочлен і має частинні похідні по обох змінних:

$$F'_x = 2xy^2 + 2x; \qquad F'_x(0;1) = 0;$$
$$F'_y = 2x^2y + 2y; \qquad F'_y(0;1) = 2 \neq 0.$$

Відповідно до теореми 1 рівняння $F(x; y) = 0$ визначає неявно задану функцію $y = y(x)$, похідна якої в точці дорівнює:

$$y'(x)=-\frac{F'_x(x;\,y)}{F'_y(x;\,y)}=-\frac{xy^2+x}{yx^2+y};\quad y'(0)=-\frac{0\cdot 1^2+0}{1\cdot 0^2+1}=0.$$

$$dy=y'(0)dx=0.$$

Похідну другого порядку знайдемо, використавши формулу (7.3):

$$y''(x)=-\frac{F_x'^2F''_{y^2}-2F'_xF'_yF'_{xy}+F_y'^2F''_{x^2}}{F_y'^3}.$$

$$F''_{x^2}=2y^2+2;\quad F''_{x^2}(0;1)=4;$$

$$F''_{xy}=4xy;\quad F''_{xy}(0;1)=0;$$

$$F''_{y^2}=2x^2+2;\quad F''_{y^2}(0;1)=2;$$

$$y''(0)=\frac{0-0+4\cdot 4}{8}=2.\, d^2y=y''(0)dx^2=2dx^2.\ \blacksquare$$

II спосіб. Прирівнявши функцію до нуля, знайдемо від неї похідну по змінній x, вважаючи, що змінна y є функцією від x:

$$x^2y^2+x^2+y^2-1=0\Big|'_x.$$

$$2xy^2+2x^2yy'+2x+2yy'=0;$$

$$\left(2x^2y+2y\right)y'=-2x-2xy^2;$$

$$y'=-\frac{x+xy^2}{x^2y+y};\quad y'(0)=\frac{0}{0+1}=0;$$

$$y''=-\frac{\left(1+y^2+2xy\cdot y'\right)\left(x^2y+y\right)-\left(x+xy^2\right)\left(2xy+x^2y'+y'\right)}{\left(x^2y+y\right)^2};$$

$$y''(0)=\frac{(1+1+0)(0+1)-(0+0)(0+0+0)}{(0+1)^2}=\frac{2}{1}=2.\ \blacksquare$$

Задача 7. 3. *Знайдіть частинні похідні функції* $u=f(x;y)$ *у точці* $(1;1)$*, заданої неявно рівнянням* $u^3-2u^2x+uxy-2=0$.

Розв'язання.

Із рівняння знайдемо значення функції u у заданій точці $(1;1)$:

$$u^3 - 2u^2 + u - 2 = 0,$$
$$u^2(u-2) + (u-2) = 0,$$
$$(u-2)(u^2+1) = 0,$$
$$u = f(1;1) = 2.$$

Функція $F(x;y;u) = u^3 - 2u^2x + uxy - 2$ дорівнює нулю у точці $(1;1;2)$ і неперервна в околі цієї точки, а її частинні похідні:

$$F'_x = -2u^2 + uy,\ F'_y = ux,\ F'_u = 3u^2 - 4ux + xy$$

також неперервні, причому $F'_u(1;1;2) = 5 \neq 0$. Відповідно до теореми (7.2), рівнянням $F(x;y;u) = 0$ в околі точки $(1;1;2)$ визначається неперервно-диференційовна функція $u = f(x;y)$, частинні похідні якої можна знайти за формулами: $f'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_u},\ f'_y = -\dfrac{F'_y}{F'_u}$. Оскільки частинні похідні функції F у точці $(1;1;2)$ відповідно рівні:

$$F'_x = -6,\quad F'_y = 2,\quad F'_u = 5,$$

то частинні похідні неявно заданоїфункції $u = f(x;y)$ у цій точці рівні $f'_x(1;1) = \dfrac{6}{5},\ f'_y(1;1) = -\dfrac{2}{5}$. ■

Задача 7. 4. *Дослідити на неперервність і диференційовність неявну функцію* $z = z(x;\, y)$, *задану рівнянням* $F(x;\, y;\, z) = 0$, $F(x;\, y;\, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$. *Знайти частинні похідні неявно заданої функції у точці* $M_0(1;\, 2;\, 3)$.

Розв'язання.

Функція неперервна і диференційовна як многочлен: $F(1;\, 2;\, 3) = 0$, $F'_x = 2x;\ \ F'_y = 2y;\ \ F'_z = 2z;$

$F'_x(1;\, 2;\, 3) = 2;\ \ F'_y(1;\, 2;\, 3) = 4;\ \ F'_z(1;\, 2;\, 3) = 6 \neq 0.$

Частинні похідні шукаємо за формулами (7.4):

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}, \; z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z},$$

$$z'_x(1;2;3) = -\frac{x}{z} = -\frac{1}{3}, \; z'_y(1;2;3) = -\frac{y}{z} = -\frac{2}{3}. \; \blacksquare$$

Задача 7. 5. *Знайти третю похідну неявної функції, що задана рівнянням* $x^3y^2 - xy^5 + 5x + y = 0$*, у точці* $x = 0$.

Розв'язання.

Із рівняння одразу видно, що $y = 0$, якщо $x = 0$. Знаходимо похідні функції $y(x)$ другим способом, тобто диференціюємо вихідну рівність за змінною x:

$$3x^2y^2 + 2x^3yy' - y^5 - 5xy^4y' + 5 + y' = 0.$$

Вважаючи, що $x = 0$ і $y = 0$, отримуємо: $5 + y' = 0$, $y'(0) = -5$. Далі останню рівність диференціюємо ще раз:

$$6xy^2 + 6x^2yy' + 6x^2yy' + 2x^3y'^2 + 2x^3yy'' - 5y^4y' - 5y^4y' - 20xy^3y'^2 -$$
$$- 5xy^4y'' + y'' = 0.$$

Підставляємо в останню рівність початкові дані: $x = 0$, $y = 0$ і $y'(0) = -5$, знаходимо значення другої похідної $y''(0) = 0$.

І знову останню рівність диференціюємо ще раз:

$$6y^2 + 12xyy' + 24xyy' + 12x^2y'^2 + 12x^2yy'' + 6x^2y'^2 + 4x^3y'y'' +$$
$$+ 6x^2yy' + 2x^3y'y'' + 2x^3y'y'' - 40y^3y'^2 - 10y^4y'' - 20y^3y'^2 -$$
$$- 60xy^2y'^3 - 40xy^3y'y'' - 5y^4y'' - 20xy^3y'y'' - 5xy^4y''' + y''' = 0.$$

Тут y'^2 ми диференціюємо, як складену функцію:

$$\left(y'^2\right)' = 2y' \cdot (y')' = 2y'y''.$$

Підставляємо початкові дані: $x = 0$, $y = 0$, $y = -5$ і $y'' = 0$, знаходимо:

$$y'''(0) = 0. \; \blacksquare$$

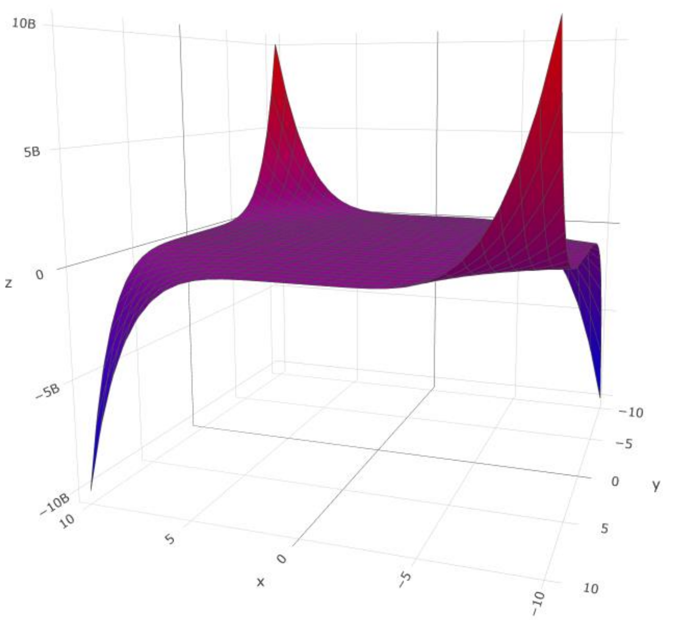


Рис. 7.3

Задача 7. 6. *Дослідити на неперервність і диференційовність неявну функцію* $z = z(x;\, y)$, *задану рівнянням* $F(x;\, y;\, z) = 0$, $F(x;\, y;\, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z$. *Знайти частинні похідні і диференціали першого і другого порядку в довільній точці.*

Розв'язання.

$F(x;\, y;\, z) = 0$.

$$dF = F'_x dx + F'_y dy + F'_z dz = (2x-4)dx + (-4y)dy + (2z+2)dz = 0;$$

$$dz = \frac{2-x}{z+1}dx + \frac{2y}{z+1}dy.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{2-x}{z+1}\right)'_x = \frac{-(z+1)-(2-x)z'_x}{(z+1)^2} = \frac{-(z+1)-(2-x)\cdot\dfrac{2-x}{z+1}}{(z+1)^2} =$$

$$= -\frac{(z+1)^2+(2-x)^2}{(z+1)^3} = -\frac{z^2+2z+1+4-4x+x^2}{(z+1)^3} =$$

$$= \frac{x^2+z^2+2z-4x+5}{(z+1)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{2-x}{z+1}\right)'_y=\frac{x-2}{(z+1)^2}\cdot z'_y=\frac{x-2}{(z+1)^2}\cdot\frac{2y}{z+1}=\frac{2y(x-2)}{(z+1)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(\frac{2y}{z+1}\right)'_y=\frac{2(z+1)-2yz'_y}{(z+1)^2}=\frac{2(z+1)-2y\cdot\dfrac{2y}{z+1}}{(z+1)^2}=2\frac{(z+1)^2-2y^2}{(z+1)^3};$$

$$d^2z=z''_{x^2}dx^2+2z''_{xy}dxdy+z''_{y^2}dy^2=$$

$$=-\frac{(x-2)^2+(z+1)^2}{(z+1)^3}dx^2+\frac{4y(x-2)}{(z+1)^3}dxdy+2\frac{(z+1)^2-2y^2}{(z+1)^3}dy^2.\ \blacksquare$$

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1. [3, с. 130]** *Виразити з рівняння* $F(x;\,y)=0$ y *як неявну функцію від* x*:*

1) $y^4-4x^2y^2+\sin x=0;$ ***2)*** $e^{x^2+y^2}-x^6-5=0;$

3) $\sin\left(x^2+y^2\right)+3x=1;$ ***4)*** $x^2y^4-3y^3+6x^2y^2-3y+x^2=0$ (заміна $y^2+1=t$).

✍**2. [3, с.130-131; 11, с. 350]** *Дослідити на неперервність і диференційовність неявну функцію* $y=y(x)$*, задану рівнянням* $F(x;\,y)=0$*. Знайти частинні похідні і диференціали першого і другого порядку в точці* $M_0(x_0;\,y_0)$ *або в довільній точці, якщо* M_0 *не вказана:*

1) $F(x;\,y)=x^2y^2+x^2+y^2-1,\ M_0(0;1);$

2) $F(x;\,y)=x^2+xy+y^2-3,\ M_0(1;1);$

3) $F(x;\,y)=x^2y^2-x^4-y^4-a^4;$

4) $F(x;\,y)=e^y+ax^2e^{-y}-2bx;$

5) $F(x;\, y) = x^y - y^x - 1,\ \ M_0(3;\, 2);$

6) $F(x;\, y) = \sin xy - e^{xy} - x^2 y;$

7) $F(x;\, y) = x^2 \ln y - y^2 \ln x;$

8) $F(x;\, y) = xe^{2y} - y\ln x - 8;$

9) $F(x;\, y) = \ln\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} - arctg\,\dfrac{y}{x},\ \ M_0(2;\, 2);$

10) $F(x;\, y) = 1 + xy - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right);$

11) $F(x;\, y) = \lg x \cdot 2^{y+1} \cdot 5^y - 2x^2,\ \ x = 10.$

✍**3. [3, с.131; 11, с. 350-351]** *Дослідити на неперервність і диференційовність неявну функцію* $z = z(x;\, y)$*, задану рівнянням* $F(x;\, y;\, z) = 0$*. Знайти частинні похідні і диференціали першого і другого порядку в точці* $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ *або в довільній точці, якщо* M_0 *не вказана:*

1) $F(x;\, y;\, z) = z^3 + 3x^2 z - 2xy;$

2) $F(x;\, y;\, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5;$

3) $F(x;\, y;\, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14,\ \ M(1;\, 2;\, 3);$

4) $F(x;\, y;\, z) = z^3 - xyz + y^2 - 8,\ \ M(1;\, 2;\, 2);$

5) $F(x;\, y;\, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - 9,\ \ M(1;\, -2;\, 1);$

6) $F(x;\, y;\, z) = \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1;$

7) $F(x;\, y;\, z) = x + y + z - e^{-(x+y+z)};$

8) $F(x;\, y;\, z) = z\ln(x + z) - \dfrac{xy}{z};$

9) $F(x;\, y;\, z) = \ln(x + z) - \ln(y + z) + (x + y)^2,\ \ M(0;\, 0;\, e);$

10) $F(x;\, y;\, z) = x\sin y + y\sin z + z\sin x,\ \ M(0;\, \pi;\, 2\pi);$

11) $F(x;\, y;\, z) = \sin\dfrac{x}{z} - \dfrac{\sin y}{\sin z},\ \ M\left(\dfrac{\pi}{2};\, 1;\, \dfrac{\pi}{2}\right).$

✍**4. [11]** *Переконатись, що неявна функція* $y = y(x_1;\, x_2;...;\, x_m)$ *яка визначається з співвідношення* $F(x_1;\, x_2;...;\, x_m;\, y) = 0$, *задовольняє умові (*), якщо:*

1) $F(x_1;\, x_2;\, y) = f\left(\dfrac{x_1 - a}{y - c};\, \dfrac{x_2 - b}{y - c}\right),\ \ \{a, b, c\} \subset \mathbb{R},$

$$(*):\ (x_1 - a)\frac{\partial y}{\partial x_1} + (x_2 - b)\frac{\partial y}{\partial x_2} = y - c;$$

2) $F(x_1;\, x_2;\, y) = x_1^2 + x_2^2 - x_2 f\left(\dfrac{y}{x_2}\right),$

$$(*):\ (x_1^2 - x_2^2 - y^2)\frac{\partial y}{\partial x_1} + 2x_1x_2\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_1 y;$$

3) $F(x_1;\, x_2;\, y) = f\left(x_1 + \dfrac{y}{x_2};\, x_2 + \dfrac{y}{x_1}\right),$

$$(*):\ x_1\frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial y}{\partial x_2} = y - x_1x_2;$$

4) $F(x_1;\, x_2;\, y) = x_2 - x_1 f(y) - f(y),$

$$(*):\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 = 0;$$

5) $F(x_1;\, x_2;\, y) = y - x_2 f\left(\dfrac{y}{x_1}\right),$

$$(*):\ x_1\frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial y}{\partial x_2} = y.$$

§ 8. Дотична площина і нормаль до площини

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Дотична площина до поверхні у точці	The tangent plane to the surface at the point
Нормаль до поверхні у точці	The normal line to the surface at the point
Дотична пряма	The tangent line

1. Навести рівняння дотичної прямої до графіка функції, заданої неявно.

Рівняння дотичної прямої в точці x_0 до графіка функції однієї змінної $y = f(x)$, заданої неявно рівнянням (8.1), записується у вигляді:

$$F'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0)(y - y_0) = 0, \quad \textbf{(8.1)}$$

а нормалі – $$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0)} \quad \textbf{(8.2)}$$

2. Сформулювати означення та теорему про дотичну площину до поверхні. Записати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні.

*Площина π, яка проходить через точку M_0 поверхні, називається **дотичною площиною в цій точці**, якщо кут між цією площиною і січною прямою, що проходить через точки M_0 і M поверхні, є нескінченно малою величиною у випадку $M \to M_0$:*

$$\lim_{M \to M_0} \left(\pi; MM_0\right) = 0 \quad \textbf{(8.3)}$$

Теорема 3. *Нехай функція* $z = f(x; y)$ *визначена в області* $E \subset \mathbb{R}^2$ *і точка* $(x_0; y_0) \in E$. *Якщо функція* $z = f(x; y)$ *диференційовна у точці* $(x_0; y_0)$, *то у точці* $M_0(x_0; y_0; z_0)$, $z_0 = f(x_0; y_0)$ *існує дотична площина до поверхні, яка не паралельна осі* Oz, *і її рівняння має вигляд:*

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad \textbf{(8.4)}$$

Рівняння нормалі: $$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1} \quad \textbf{(8.5)}$$

Якщо поверхня задана неявно рівнянням $F(x; y; z) = 0$, *то рівняння дотичної площини набирає вигляду:*

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0, \quad \textbf{(8.6)}$$

а нормалі – $$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0)} \quad \textbf{(8.7)}$$

На рис. 8.1 подано схему застосування функції багатьох змінних.

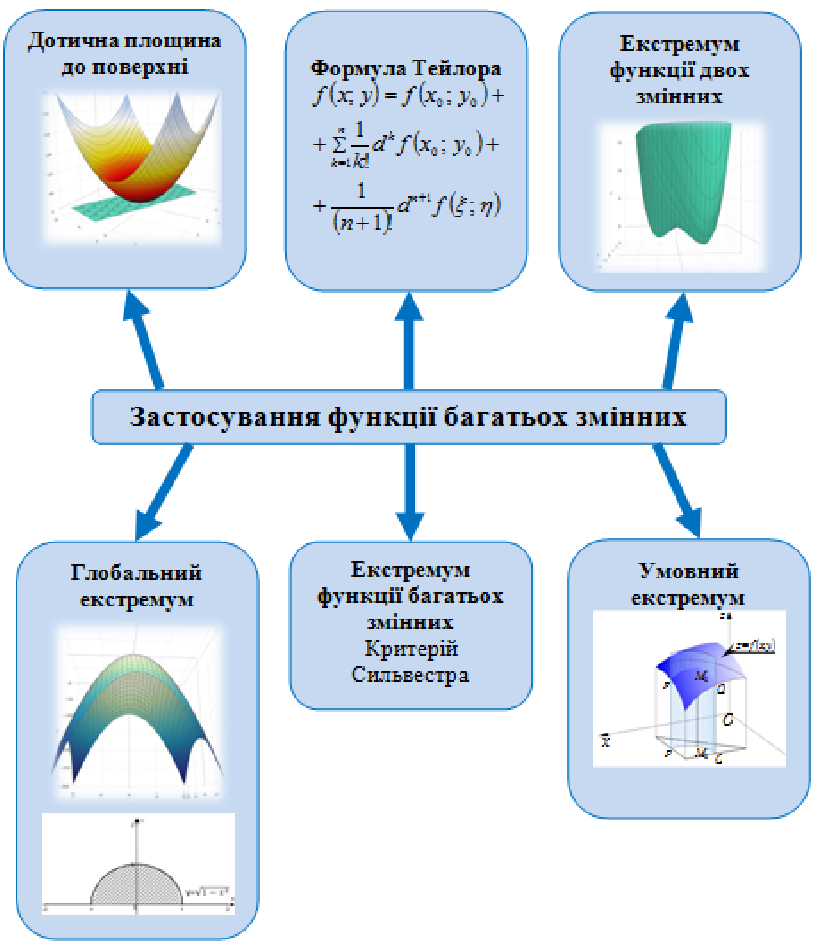


Рис. 8.1. Застосування функції багатьох змінних

Приклади розв'язування вправ

Задача 8.1. *Знайти рівняння дотичної площини і нормалі до еліптичного параболоїда* $z = 2x^2 + y^2$ *у точці* $A(1;-1;3)$.

Розв'язання. Еліптичний параболоїд $z = 2x^2 + y^2$зображено на рис.8.2.

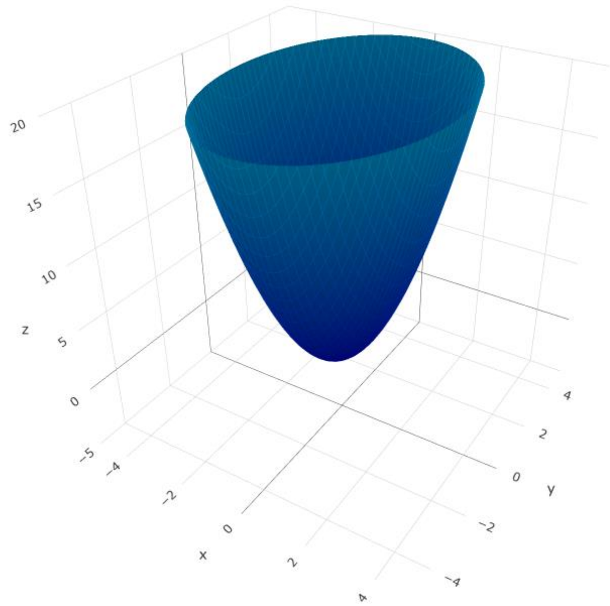


Рис. 8.2

Перетворимо рівняння поверхні до вигляду $2x^2 + y^2 - z = 0$ і позначимо його ліву частину через $F(x;y;z)$, знайдемо частинні похідні $F'_x = 4x, F'_y = 2y, F'_z = -1$. Обчислимо їх числові значення в заданій точці: $F'_x(A) = 4, F'_y(A) = -2, F'_z(A) = -1$ і, підставляючи у загальне рівняння (8.6) і (8.7), одержуємо рівняння дотичної площини (рис. 8.3):

$4(x-1) - 2(x+1) - (z-3) = 0$ або $4x - 2y - z - 3 = 0$,

і рівняння нормалі: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-3}{-1}$. ■

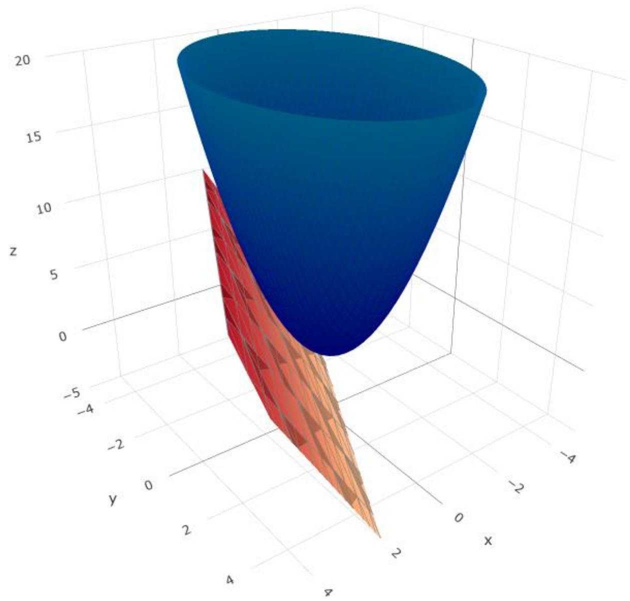


Рис. 8.3

Задача 8.2. *Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в заданій точці* $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy$, $M(-3;4;17)$.

Розв'язання. Поверхня (рис. 8.4) задана явно, тому для знаходження рівняння дотичної площини і нормалі використаємо формули (8.4) і (8.5).

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-y;\ \ z'_x(-3;4)=\frac{-3}{\sqrt{9+16}}-4=\frac{-3}{5}-4=-\frac{23}{5};$$

$$z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-x;\ \ z'_y(-3;4)=\frac{4}{5}+3=3\frac{4}{5}=\frac{19}{5}.$$

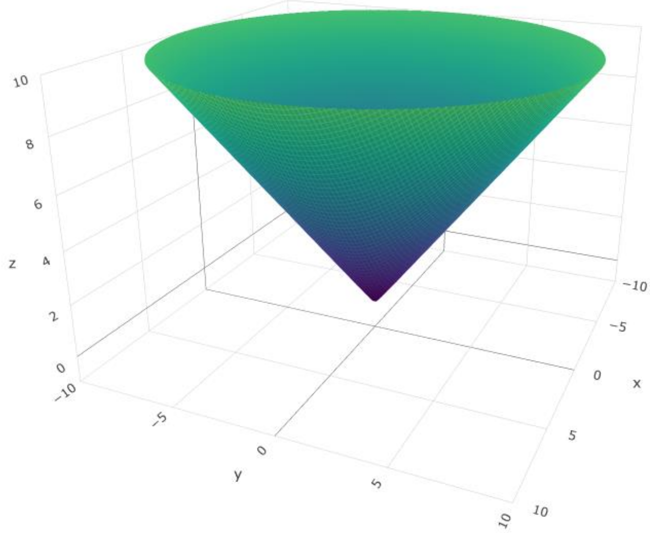


Рис. 8.4

Дотична площина: $-\frac{23}{5}(x+3)+\frac{19}{5}(y-4)=z-17;$

$-23x-69+19y-76=5z-85;$ або $23x-19y+5z+60=0$.

Рівняння нормалі:

$$\frac{x+3}{23}=\frac{y-4}{-19}=\frac{z-17}{5}\text{ (рис. 8.5). }\blacksquare$$

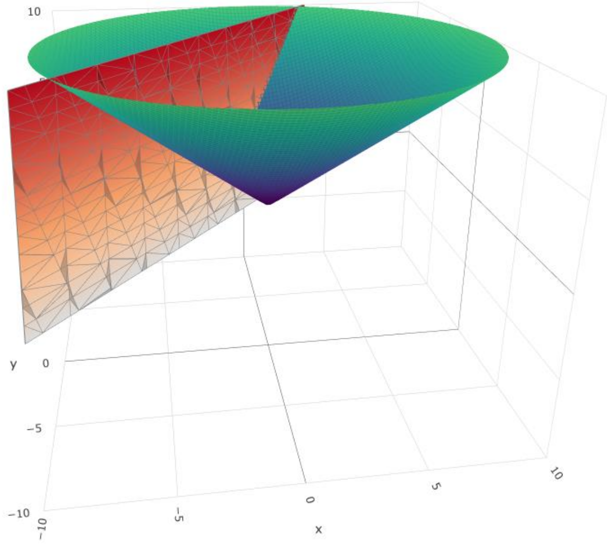


Рис. 8.5

Задача 8.3. *Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в заданій точці* $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $M_0(0;1;0)$.

Розв'язання. Поверхня задана явно (рис. 8.6), тому аналогічно до попередніх задач для знаходження рівняння дотичної площини і нормалі використаємо формули (8.4) і (8.5).

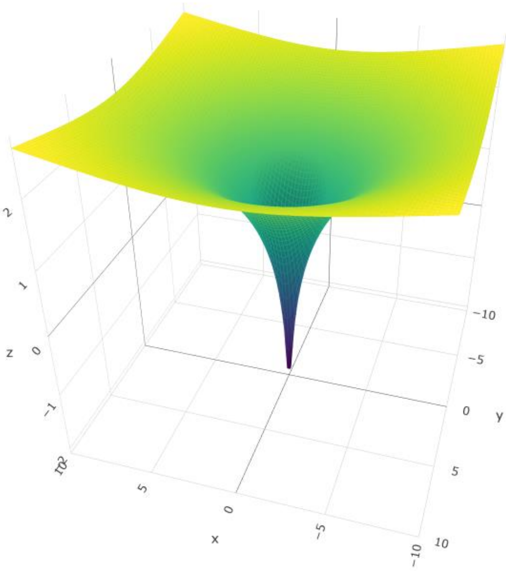


Рис. 8.6

$$z = \ln\left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right),$$

$$z'_x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad z'_y = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$z'_x(0;1) = 0,\ z'_y(0;1) = 1.$$

Дотична площина: $z = 0(x-0) + 1(y-1)$, або $z - y + 1 = 0$.

Нормаль до поверхні: $\dfrac{x-0}{0} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-0}{0}$ (рис. 8.7). ■

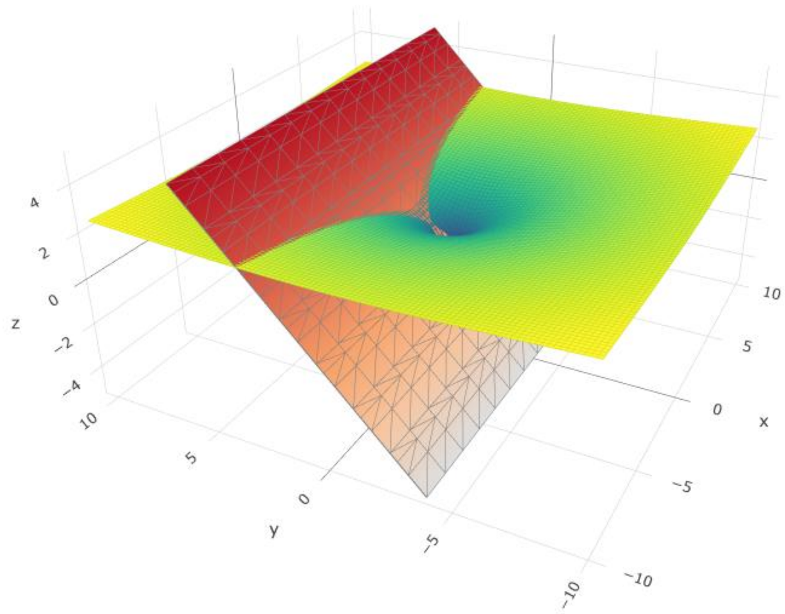


Рис. 8.7

Задача 8.4. *На сфері* $x^2 + y^2 + z^2 = 676$ *знайти точки, де дотична площина паралельна площині* $3x - 12y + 4z = 0$.

Розв'язання. У цьому завданні, на відміну від попередніх, невідомою є точка дотикання $(x_0; y_0; z_0)$. Складемо рівняння дотичної площини до заданої сфери (рис. 8.8) у точці $(x_0; y_0; z_0)$, користуючись рівнянням (8.6):

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0,$$

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0 \text{ або}$$

$$x_0x + y_0y + z_0z = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 676.$$

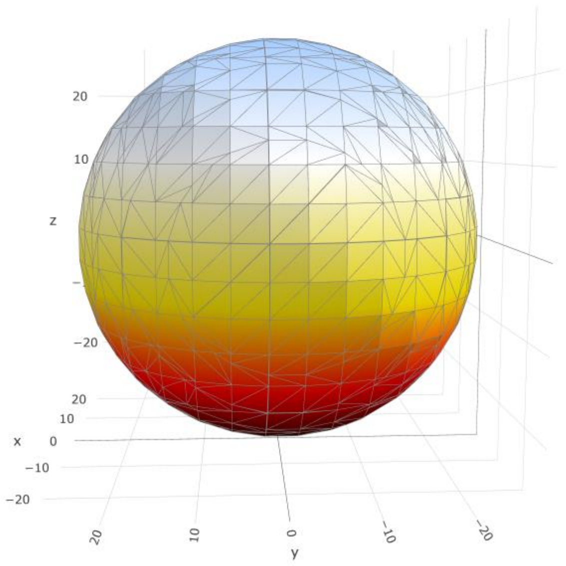


Рис. 8.8

Відповідно умові паралельності двох площин, щоб одна площина була паралельна іншій площині, в їх рівняннях коефіцієнти при відповідних координатах мають бути пропорційними:

$$\frac{x_0}{3}=\frac{y_0}{-12}=\frac{z_0}{4}=\lambda .$$

Визначимо звідси $x_0=3\lambda,\ y_0=-12\lambda,\ z_0=4\lambda$. Оскільки точка дотикання $(x_0;y_0;z_0)$лежить на сфері, то, підставляючи її координати в рівняння сфери, знаходимо:

$$9\lambda^2+144\lambda^2+16\lambda^2=676,$$

$$169\lambda^2=676,\quad \lambda^2=4,\ \lambda=\pm 2 .$$

Одержали дві точки на сфері $M_1(6;-24;8)$ і $M_2(-6;24;-8)$, в яких дотичні площини паралельнізаданій площині (рис. 8.9):

$M_1(6;-24;8)$: $\quad 6x-24y+8z=676,$ або $3x-12y+4z-338=0,$

$M_2(-6;24;-8)$: $-6x+24y-8z=676,$ або $3x-12y+4z+338=0$. ■

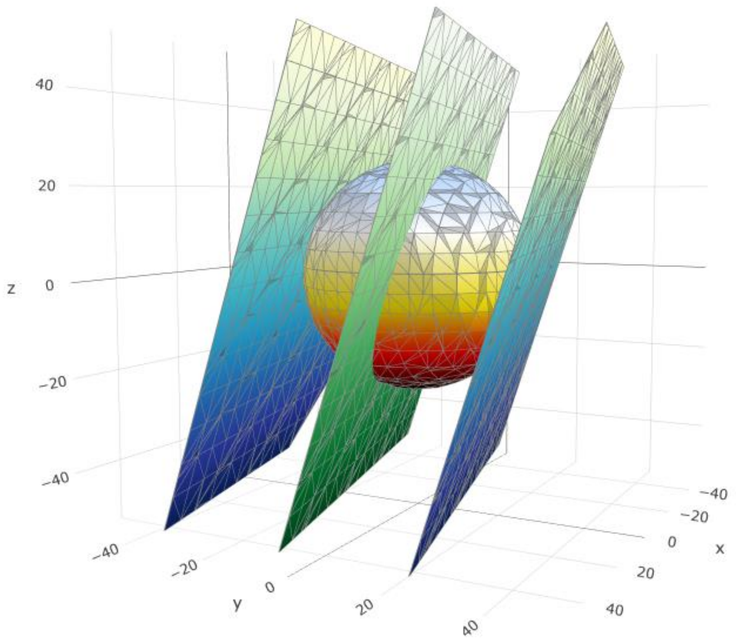


Рис. 8.9

Задача 8.5. *Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в заданій точці (функція задана неявно)* $x^2y^2+2x+z^3=16$, $M(2;1;2)$.

Розв'язання. Спочатку варто перевірити, чи задовольняють координати точки рівняння: $2^2\cdot1^2+2\cdot2+2^3=16$. Щоб написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $F(x;y;z)=x^2y^2+2x+z^3-16$ (рис. 8.10), використаємо формули (8.6) і (8.7). Для цього знайдемо частинні похідні функції $F(x;y;z)$ і обчислимо їх значення в заданій точці $M(2;1;2)$:

$F'_x=2xy^2+2;\ F'_x(M)=6;$

$F'_y=2x^2y;\ F'_y(M)=8;$

$F'_z=3z^2;\ F'_z(M)=12.$

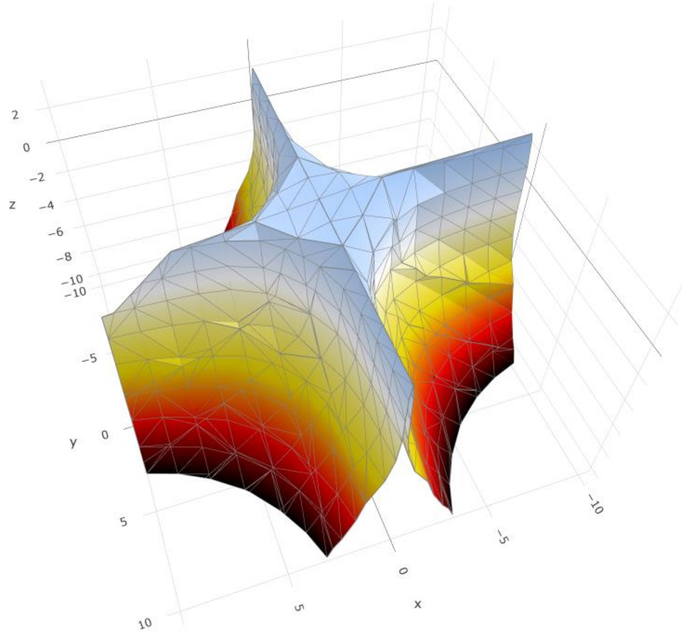


Рис. 8.10

Дотична площина: $6(x-2)+8(y-1)+12(z-2)=0$ або $3x+4y+6z-22=0$.

Нормаль до поверхні:

$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-2}{6}$ (рис. 8.11). ■

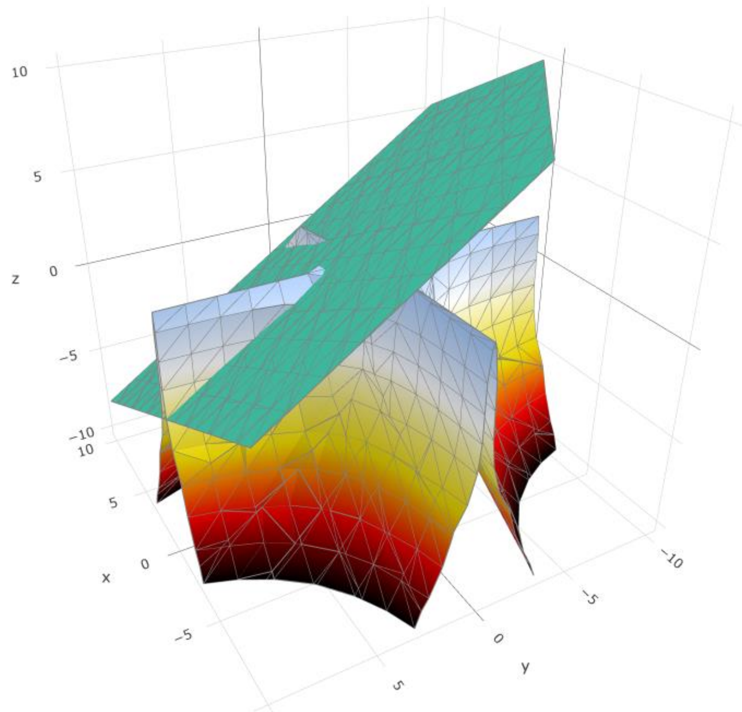


Рис. 8.11

Задача 8.6. *Написати рівняння дотичної і нормалі до поверхні* $z = y + \ln\left(\frac{x}{z}\right)$ *у точці* $M(1;1;1)$.

Розв'язання. Тут поверхня задана неявно (рис. 8.12). Тому рівняння дотичної площини і нормалі знову шукаємо за формулами (8.6), (8.7), а стратегію розв'язання використовуємо з попереднього прикладу:

$$F(x;\, y;\, z) = y + \ln\left(\frac{x}{z}\right) - z = y + \ln x - \ln z - z\,.$$

$$F'_x = \frac{1}{x},\, F'_x(M) = 1;\, F'_y = 1,\, F'_y(M) = 1;\, F'_z = -\frac{1}{x} - 1,\, F'_z(M) = -2\,.$$

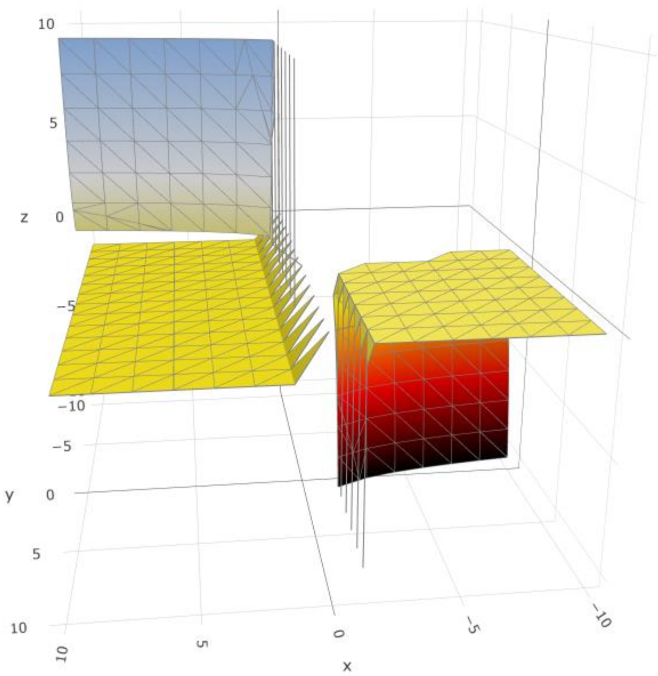


Рис. 8.12

Дотична площина: $1(x-1) + 1(y-1) - 2(z-1) = 0\,,\, x + y - 2z = 0\,.$

Рівняння нормалі: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$ (рис. 8.13). ■

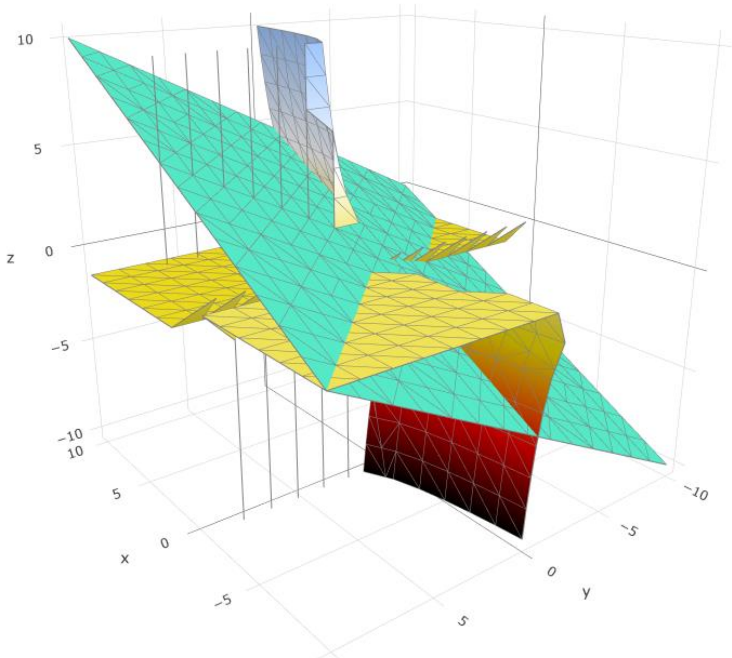


Рис. 8.13

Задача 8.7. *Знайти рівняння дотичної прямої і нормалі до кривої* $x^2 + xy - y^2 = 1$ *у точці* $M_0(2;3)$.

Розв'язання. ***І спосіб.*** Тут функція однієї змінної задана неявно. Знайдемо похідну по змінній x лівої і правої частин рівності, врахувавши, що $y = y(x)$:

$$x^2 + xy - y^2 = 1 \,\Big|'_x$$

$$2x + y + xy' - 2y \cdot y' = 0,\ (x - 2y)\cdot y' = -2x - y;$$

$$y' = \frac{2x+y}{2y-x},\quad y'(x_0) = \frac{2x_0 + y_0}{2y_0 - x_0} = \frac{2\cdot 2+3}{2\cdot 3-2} = \frac{7}{4}.$$

Рівняння дотичної прямої $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, нормалі: $y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$, де $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, маємо:

$$y - 3 = \frac{7}{4}(x-2),\ \text{звідки}\ 7x - 4y - 2 = 0,$$

$$y - 3 = -\frac{4}{7}(x-2),\ \text{звідки}\ 4x + 7y - 29 = 0\ \text{(рис. 8.14).}$$

ІІ спосіб.

Оскільки функція $y(x)$ задана неявно, то рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка кривої знаходимо за формулами (8.1) і (8.2). У нашому випадку $F(x;\, y) = x^2 + xy - y^2 - 1$.

$F'_x = 2x + y, F'_x(2;3) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$;

$F'_y = x - 2y,\ F'_y(2;3) = 2 - 2 \cdot 3 = -4 \neq 0$.

Дотична пряма: $F'_x(x_0;\, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0;\, y_0)(y - y_0) = 0$;

$$7(x-2) - 4(y-3) = 0;$$

$$7x - 4y - 2 = 0.$$

Нормаль: $\dfrac{x - x_0}{F'_x(x_0;\, y_0)} = \dfrac{y - y_0}{F'_y(x_0;\, y_0)}$;

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y-3}{-4};$$

$$4x + 7y - 29 = 0. \blacksquare$$

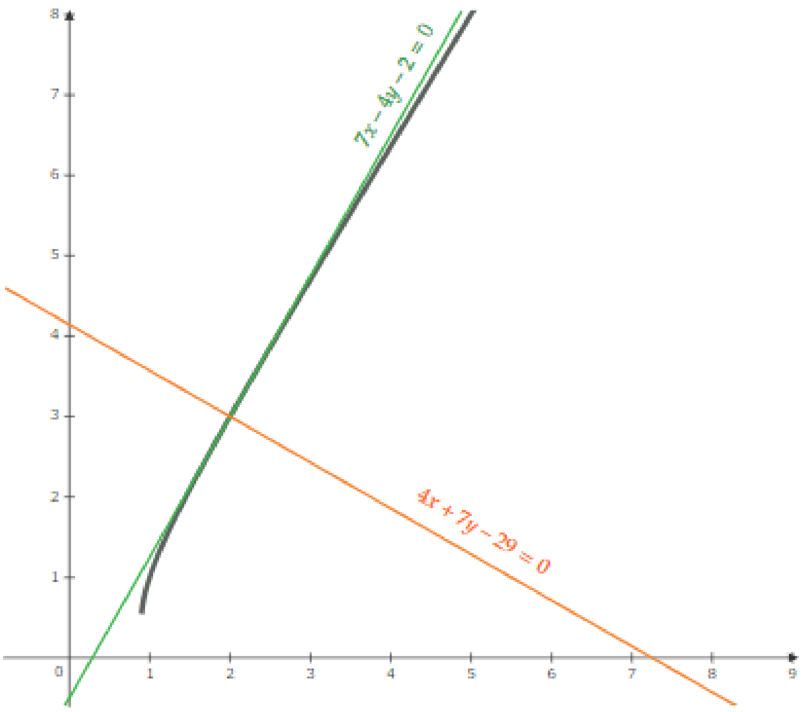


Рис. 8.14

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1. [9]** *Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні у заданій точці:*

1) $z = xy,\ M_1(1;1;1),\ M_2(2;1;2);$

2) $z = x^2 + y^2,\ M(1;1;2);$

3) $z = 2x^2 - 4y^2,\ M(-2;1;4);$

4) $z = (x-y)^2 - x + 2y,\ M(1;1;1);$

5) $z = \sqrt{x^2+y^2} - xy,\ M(-3;4;17);$

6) $z = \ln\sqrt{x^2+y^2},\ M(0;1;0);$

7) $z = \sin\dfrac{x}{y},\ M(\pi;1;0);$

8) $z = e^{x\cos y},\ M(1;0;e).$

✍**2. [9]** *Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні у заданій точці:*

1) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6,\ M(1;2;-1);$

2) $xy^2 + z^3 = 12,\ M(1;2;2);$

3) $x^n + y^n + z^n = a^n,\ M(1;1;0);$

4) $x^2y^2 + 2x + z^3 = 16,\ M(2;1;2);$

5) $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = x + y + z - 4,\ M(2;3;6);$

6) $e^z - z + xy = 3,\ M(2;1;0);$

7) $z = y + \ln\left(\dfrac{x}{z}\right),\ M(1;1;1);$

8) $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8,\ \ M\left(1;1;1\right).$

✍**3. [9]** *Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні у заданій точці:*

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (еліпсоїд);

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ (двохполосний гіперболоїд);

3) $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z$ (гіперболічний параболоїд);

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (однополосний гіперболоїд);

5) $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$ (еліптичний параболоїд);

6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ (конус).

✍**4. [9]** *Довести, що поверхні*

$$z = xy - x^2 + 8x - 5,\ \ z = e^{x+2y+4}$$

дотикаються між собою в точці $\left(2;-3;1\right)$ *і знайти рівняння спільної дотичної площини.*

✍**5.** *Довести, що дотичні площини до поверхні* $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$, *проведені в довільній точці* $\left(x;y;\,z\right)$, $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$, *відтинають на координатних осях відрізки, сума яких дорівнює* a.

✍**6. [9]** *Знайти на поверхні точки, в яких дотичні площини до неї паралельні координатним площинам:*

1) $x^2+y^2+z^2-6y+4z=12;$

2) $x^2+y^2-z^2-2x=0;$

3) $x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz=8.$

✍**7. [9]** *Написати рівняння дотичних площин, які паралельні заданій площині:*

1) $x^2+2y^2+z^2=4,\ \ x-y+2z=0;$

2) $z^2+xy+xz=1,\ \ x-y+2z=1;$

3) $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3,\ \ x+2y.$

✍**8. [14, с. 168]** *Перевірити, чи дана точка знаходиться на кривій, і знайти прямі, які є дотичними та нормальними до кривої у заданій точці:*

1) $x^2+xy-y^2=1, (2;3)$*;*

2) $x^2+y^2=25, (3;-4)$*;*

3) $x^2y^2=9, (-1;3)$*;*

4) $y^2-2x-4y-1=0, (-2;1)$*;*

5) $6x^2+3xy+2y^2+17y-6=0, (-1;0)$*;*

6) $x^2-\sqrt{3}xy+2y^2=5, (\sqrt{3};2)$*;*

7) $2xy+\pi\sin y=2\pi, \left(1;\frac{\pi}{2}\right)$*;*

8) $x\sin 2y=y\cos 2x, \left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$*;*

9) $y=2\sin(\pi x-y), (1;0)$*;*

10) $x^2\cos^2 y-\sin y=0, (0;\pi).$

§ 9. Формула Тейлора

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Формула Тейлора	Taylor's formula
Залишковий член	The remainder term
Розкласти функцію за формулою Тейлора в околі точки	Decomposing the function using Taylor's formula in the vicinity of the point or Decomposing the function using Taylor's formulain the neigh bourhood of a point

1. Сформулювати теореми, які дозволяють записати формулу Тейлора для функції двох змінних та залишковий член формули Тейлора.

Теорема 1. *Якщо функція* $z = f(x, y)$ *неперервна разом зі своїми частинними похідними до* $(n+1)$*-го порядку в деякому околі точки* $M_0(x_0; y_0)$ *і точка* $M(x; y) \in O(M_0)$, *то має місце формула:*

$$f(x;y) = f(x_0;y_0) + df(x_0;y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0;y_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0;y_0) +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(\xi;\eta), \qquad \textbf{(9.1)}$$

де точка $M_c(\xi;\eta)$ *лежить на прямолінійному відрізку, який з'єднує точки* M_0 *і* M. *Тут залишковий член* $R_n(x, y)$ *записано в формі Лагранжа* $R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1} f(\xi;\eta)$.

2. Як можна ще записати залишковий член формули Тейлора?

Теорема 2. *В умовах теореми 1 залишковий член* $R_m(x,y)$ *можна подати у вигляді:*

1. $R_m(x,y)=\sum_{k=0}^{m}\varepsilon_k(\Delta x,\Delta y)\Delta x^k\Delta y^{m-k}$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_k(\Delta x,\Delta y)=0,\ k=\overline{0,m};$

2. $R_m(x,y)=\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\cdot d^m,\ d=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=0;$

3. $R_m(x,y)=o(d^m),\ m=n+1$ *(залишковий член у формі Пеано).*

Приклади розв'язування вправ

Задача 9.1. *Розвинути за формулою Тейлора функцію:*

1) $z=x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ *в околі точки* $M_0(1;-2)$;

2) $f(x;y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4$, $M_0(-2;1)$.

Розв'язання.

1) Графік функції $z=x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ зображено на рис. 9.1.

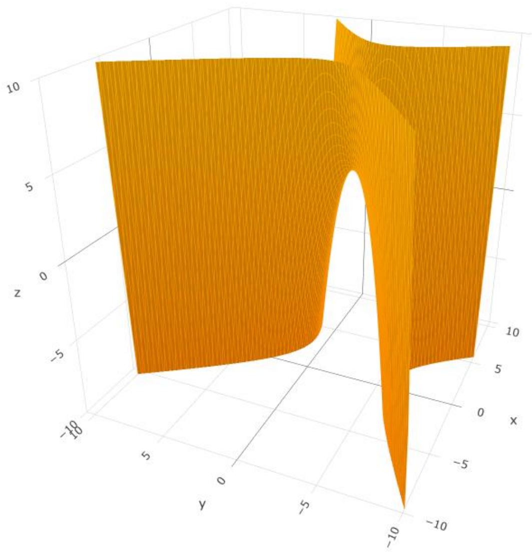


Рис. 9.1

Задана функція має неперервні частинні похідні довільного порядку.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 6;\ \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y - 3;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Частинні похідні вищих порядків $(n \geq 3)$ дорівнюють нулю. У точці $M_0(1;-2)$ прирости незалежних змінних набирають вигляду $\Delta x = x - 1;\ \Delta y = y + 2$.

Знайдемо диференціали першого і другого порядків, диференціали вищих порядків уже дорівнюють нулю:

$$df(1;-2) = (2 + 2 - 6)(x - 1) + (-1 + 4 - 3)(y + 2) = -2(x - 1);$$

$$d^2 f(1;-2) = 2(x-1)^2 + 2(-1)(x-1)(y+2) - 2(y+2)^2 = 2(x-1)^2 - \\ - 2(x-1)(y+2) - 2(y+2)^2.$$

Одержані значення підставимо в формулу (9.1), будемо мати:

$$z(1;-2) = 1^2 - 1\cdot(-2) - (-2)^2 - 6\cdot 1 - 3\cdot(-2) + 5 = 4,$$

$$z = 4 - 2(x-1) + \frac{1}{2}\cdot 2\left((x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2\right);$$

$$z = 4 - 2(x-1) + (x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2.\ \blacksquare$$

2) $f(x;y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4,\ M_0(-2;1)$.

Графік функції $f(x;y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ зображено на рис. 9.2.

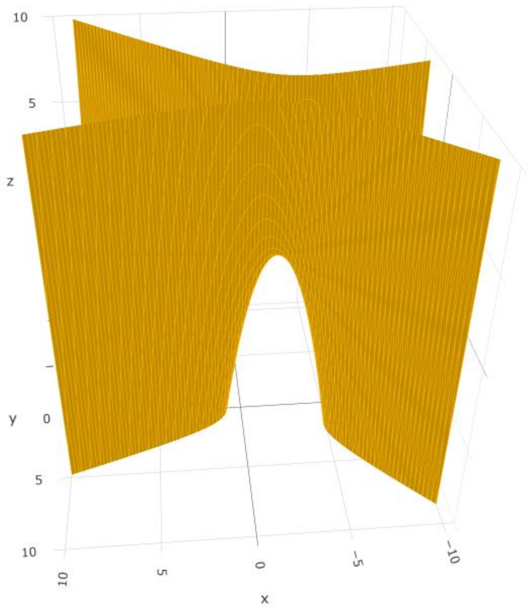


Рис. 9.2

Оскільки дана функція є многочленом другого порядку відносно змінних *x* та *y*, то відмінними від нуля будуть тільки частинні похідні першого та другого порядку, а залишковий член дорівнюватиме нулю. Отже, за формулою Тейлора:

$$f(x;y)=f(-2;1)+\frac{1}{1!}\left(f'_x(-2;1)(x+2)+f'_y(-2;1)(y-1)\right)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(f''_{x^2}(-2;1)(x+2)^2+2f''_{xy}(-2;1)(x+2)(y-1)+f''_{y^2}(-2;1)(y-1)^2\right).$$

Знайдемо частинні похідні першого та другого порядку:

$f'_x(x;y)=-2x+2y-6$; $f'_y(x;y)=2x+6y-2$;

$f''_{x^2}(x;y)=-2$; $f''_{xy}(x;y)=2$; $f''_{y^2}(x;y)=6$.

Обчислимо значення функції та її похідних у точці $M_0(-2;1)$:

$f(-2;1)=1$; $f'_x(-2;1)=0$; $f'_y(-2;1)=0$; $f''_{x^2}(-2;1)=-2$; $f''_{xy}(-2;1)=2$; $f''_{y^2}(-2;1)=6$.

Запишемо формулу Тейлора для заданої функції:

$$f(x,y)=-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4\equiv$$

$$\equiv 1-\frac{2}{2!}(x+2)^2+2\cdot\frac{2}{2!}(x+2)(y-1)+\frac{6}{2!}(y-1)^2.$$

Остаточно маємо розклад

$$-x^2+2xy+3y^2-6x-2y-4\equiv 1-(x+2)^2+2(x+2)(y-1)+3(y-1)^2. \blacksquare$$

***Задача 9.2**. Розкласти функцію f за формулою Тейлора в околі точки M :*

1) $f(x;y)=x^3-5x^2-xy+y^2+10x+5y$, $M(1;-2)$;

2) $f(x;y)=x^3-2y^3+3xy$, $M(1;2)$.

Розв'язання. Задачі розв'язуємо аналогічно до попередньої.

1) $f(x,y)=x^3-5x^2-xy+y^2+10x+5y$, $M(1;-2)$.

Графік функції $f(x,y)=x^3-5x^2-xy+y^2+10x+5y$ зображено на рис. 9.3.

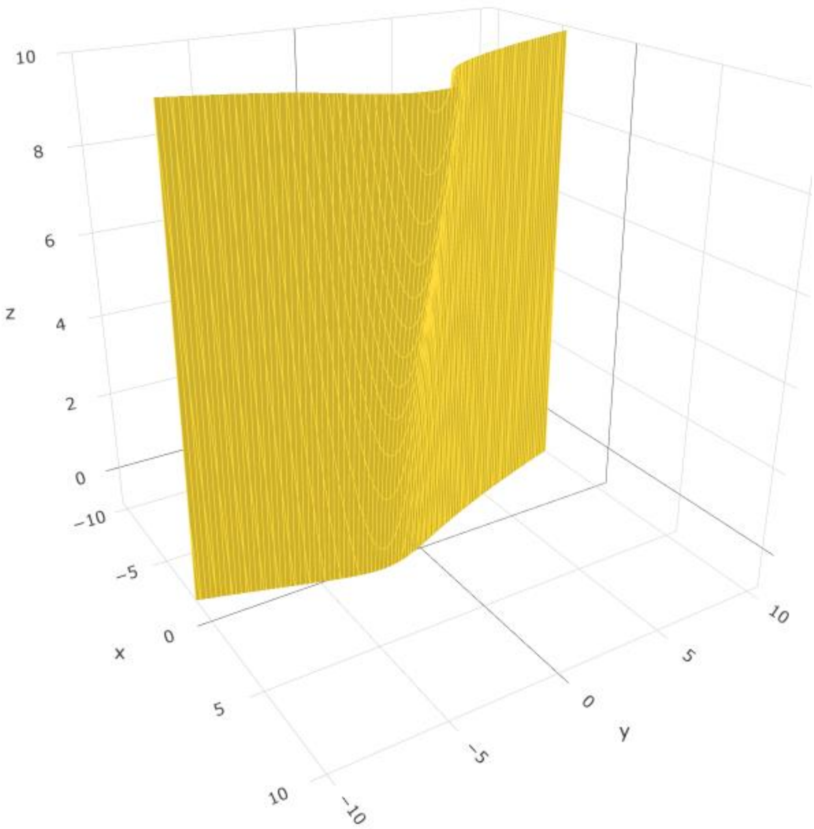


Рис. 9.3

Дана функція також є многочленом третього степеня від двох змінних, знаходимо її частинні похідні:

$f'_x = 3x^2 - 10x - y + 10$; $\quad f'_y = -x + 2y + 5$; $\quad f''_{x^2} = 6x - 10$; $\quad f''_{xy} = -1$;

$f''_{y^2} = 2$; $f'''_{x^3} = 6$; $f'''_{x^2y} = 0$; $f'''_{xy^2} = 0$; $f'''_{y^3} = 0$; …

Обчислюємо значення функції та її частинних похідних у точці $M(1;-2)$.

$f''_{x^2}(2;-1) = 6 \cdot 2 - 10 = 2$;

$f'''_{x^3}(2;-1) = 6$; $f'''_{y^3}(2;-1) = 0$; $f'''_{x^2y}(2;-1) = 0$; $f'''_{xy^2}(2;-1) = 0$.

Частинні похідні порядку 4 і вище дорівнюють нулю.

Отже, маємо розклад многочлена за формулою Тейлора:

$$f(x;y)=f(x_0;y_0)+df(x_0;y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0;y_0)+\frac{1}{3!}d^3f(x_0;y_0)+0=$$

$$=6+\left(f'_x dx+f'_y dy\right)+\frac{1}{2}\left(f''_{x^2}dx^2+2f''_{xy}dxdy+f''_{y^2}dy^2\right)+$$

$$+\frac{1}{6}\left(f'''_{x^3}dx^3+3f'''_{x^2y}dx^2dy+3f'''_{xy^2}dxdy^2+f'''_{y^3}dy^3\right)=6+(3(x-2)+1(y+1))+$$

$$+\frac{1}{2}\left(2(x-2)^2+2\cdot(-1)(x-2)(y+1)+2(y+1)^2\right)+$$

$$+\frac{1}{6}\left(6(x-2)^3\cdot 3\cdot 0\cdot(x-2)^2(y+1)+3\cdot 0\cdot(x-2)(y+1)^2+0\cdot(y+1)^3\right)=$$

$$=6+3(x-2)+(y+1)+(x-2)^2-(x-2)(y+1)+(y+1)^2+(x-2)^3.\ \blacksquare$$

2) $f(x;y)=x^3-2y^3+3xy,\ M(1;2).$

Графік функції $f(x;y)=x^3-2y^3+3xy$ зображено на рис. 9.4.

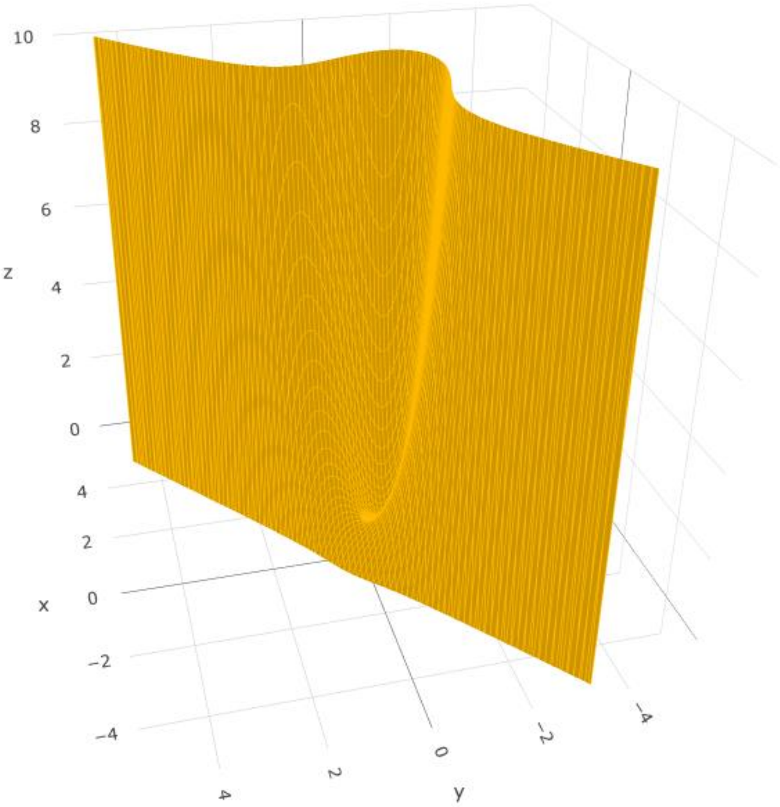


Рис. 9.4

Знайдемо частинні похідні функції:

$f'_x=3x^2+3y$; $f'_y=-6y^2+3x$; $f''_{x^2}=6x$; $f''_{xy}=3$; $f''_{y^2}=-12y$.

$f'''_{x^3}=6$; $f'''_{x^2y}=0$; $f'''_{xy^2}=0$; $f'''_{y^3}=-12$.

Обчислимо значення функції та її похідних у точці $M(1;2)$.

$f(M)=1-2\cdot 8+3\cdot 1\cdot 2=-9$;

$f'_x(M)=3\cdot 1+3\cdot 2=9$; $f'_y(M)=-6\cdot 4+3\cdot 1=-21$;

$f''_{x^2}(M)=6$; $f''_{xy}(M)=3$; $f''_{y^2}(M)=-24$; $f'''_{x^3}(M)=6$;

$f'''_{x^2y}(M)=0$; $f'''_{xy^2}(M)=0$; $f'''_{y^3}(M)=12$.

Отже, запишемо формулу Тейлора для заданої функції:

$$f(x;y)=f(x_0;y_0)+df(x_0;y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0;y_0)+\frac{1}{3!}d^3f(x_0;y_0)+0=$$

$$=-9+\left(f'_x dx+f'_y dy\right)+\frac{1}{2}\left(f''_{x^2}dx^2+2f''_{xy}dxdy+f''_{y^2}dy^2\right)+$$

$$+\frac{1}{6}\left(f'''_{x^3}dx^3+3f'''_{x^2y}dx^2dy+3f'''_{xy^2}dxdy^2+f'''_{y^3}dy^3\right)+0=$$

$$=-9+\left(9(x-1)+(-21)(y-2)\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(6(x-1)^2+2\cdot 3(x-1)(y-2)+(-24)(y-2)^2\right)+$$

$$+\frac{1}{6}\left(6(x-1)^3+3\cdot 0\cdot (x-1)^2(y-1)+3\cdot\left(0\cdot(x-1)(y-1)^2+(-12)\cdot(y-2)^3\right)\right)=$$

$$=-9+9(x-1)-21(y-2)-3(x-1)^2+3(x-1)(y-2)-24(y-2)^2+$$

$$+(x-1)^3-2(y-2)^3. \ \blacksquare$$

Задача 9.3. *Розкласти функцію f за формулою Тейлора в околі точки M до членів n-го порядку. Записати залишковий член* $o\left(d^n\right)$ *у формі Лагранжа:*

1) $f(x;y)=x^y$, $M(1;1)$, $n=3$ *і обчислити* $1{,}1^{1{,}02}$;

2) $f(x,y)=\cos(1-xy)$ *і обчислити* $f(1{,}1;1{,}02)=\cos(1-1{,}1\cdot 1{,}02)$;

3) $f(x,y)=\ln(1+x+y)$, $M(0;0)$.

Розв'язання. ***1)*** Графік функції $f(x;y)=x^y$ зображено на рис. 9.5.

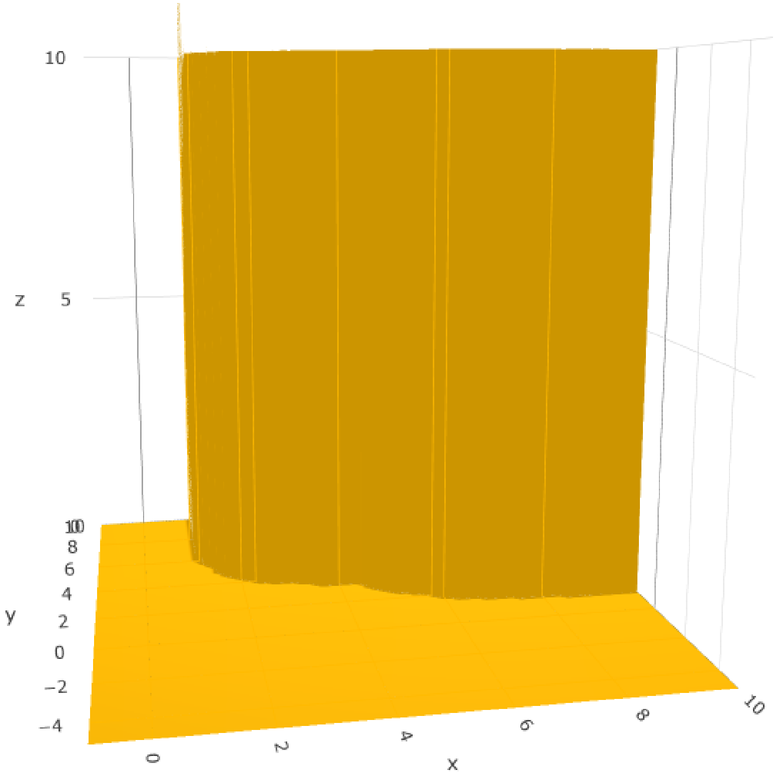


Рис. 9.5

Запишемо формулу Тейлора:

$$f(x;y)=f(x_0;y_0)+df(x_0;y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0;y_0)+\frac{1}{3!}d^3f(\xi;\eta).$$

Знайдемо частинні похідні першого, другого і третього порядку даної функції та їх значення у точці $M(1;1)$:

$$f'_x=yx^{y-1};\quad f'_y=x^y\ln x;$$

$$f''_{x^2}=y(y-1)x^{y-2};\quad f''_{xy}=x^{y-1}(1+y\ln x);\quad f''_{y^2}=x^y\ln^2 x;$$

$$f'''_{x^3}=y(y-1)(y-2)x^{y-3};\quad f'''_{x^2y}=x^{y-2}\left(2y-1+y(y-1)\ln x\right);$$

$$f'''_{xy^2}=x^{y-1}\ln x(2+y\ln x);\quad f'''_{y^3}=x^y\ln^3 x.$$

$$f(M)=1;\quad f'_x(M)=1;\quad f'_y(M)=0;$$

$$f''_{x^2}(M)=0; \quad f''_{xy}(M)=1; \quad f''_{y^2}(M)=0;$$

$$f'''_{x^3}(\xi,\eta)=\eta(\eta-1)(\eta-2)\xi^{\eta-3}; \quad f'''_{x^2y}(\xi,\eta)=\xi^{\eta-2}\left(2\eta-1+\eta(\eta-1)\ln\xi\right)$$

$$; \quad f'''_{xy^2}(\xi,\eta)=\xi^{\eta-1}\ln\xi\left(2+\eta\ln\xi\right); \quad f'''_{y^3}(\xi,\eta)=\xi^{\eta}\ln^3\xi .$$

Розкладемо функцію f за формулою Тейлора:

$$x^y=1+\left(f'_x dx+f'_y dy\right)+\frac{1}{2}\left(f''_{x^2}dx^2+2f''_{xy}dxdy+f''_{y^2}dy^2\right)+R_3(x;y)=$$

$$=1+\left(1\cdot(x-1)+0\cdot(y-1)\right)+\frac{1}{2}\left(0\cdot(x-1)^2+2\cdot1\cdot(x-1)(y-1)+0\cdot(y-1)^2\right)+$$

$$+R_3(x;y)=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+R_3(x;y).$$

$$R_2(x,y)=\frac{1}{3!}\Big(f'''_{x^3}(\xi,\eta)(\xi-1)^3+3f'''_{x^2y}(\xi,\eta)(\xi-1)^2(\eta-1)+$$

$$+f'''_{xy^2}(\xi,\eta)(\xi-1)(\eta-1)^2+f'''_{y^3}(\xi,\eta)(\eta-1)^3\Big)=$$

$$=\frac{1}{3!}\Big(\eta(\eta-1)(\eta-2)\xi^{\eta-3}(\xi-1)^3+3\xi^{\eta-2}\left(2\eta-1+\eta(\eta-1)\ln\xi\right)(\xi-1)^2(\eta-1)+$$

$$+\xi^{\eta-1}\ln\xi\left(2+\eta\ln\xi\right)(\xi-1)(\eta-1)^2+\xi^{\eta}\ln^3\xi(\eta-1)^3\Big).$$

Обчислимо наближено $1{,}1^{1{,}02}$, скориставшись попередньою формулою. Тут покладемо:

$$x_0=1,\ x=1{,}1,\ x-x_0=1{,}1-1=0{,}1,$$

$$y_0=1,\ y=1{,}02,\ y-y_0=1{,}02-1=0{,}02.$$

Отже, $1{,}1^{1{,}02}\approx1+(1{,}1-1)+(1{,}1-1)(1{,}02-1)=1{,}102$. ■

2) $f(x,y)=\cos(1-xy)$.

Графік функції $f(x,y)=\cos(1-xy)$ зображено на рис. 9.6.

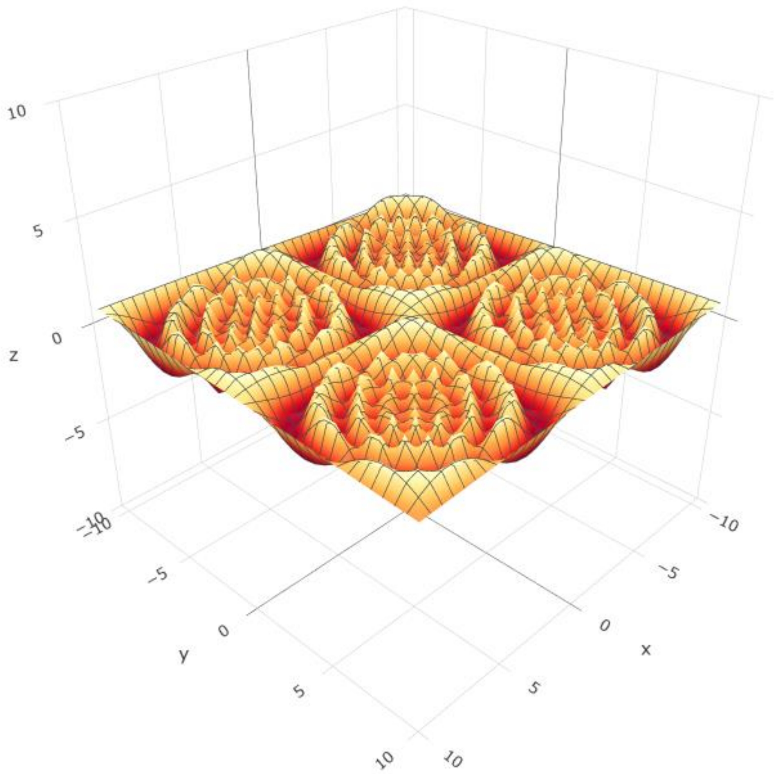


Рис. 9.6

Обчислити $f(1{,}1;1{,}02)=\cos(1-1{,}1\cdot 1{,}02)$

Формула Тейлора:

$$f(x;y)=f(x_0;y_0)+df(x_0;y_0)+\frac{1}{2!}d^2 f(x_0;y_0)+\frac{1}{3!}d^3 f(\xi;\eta).$$

Знайдемо частинні похідні першого і другого порядку даної функції та значення цих похідних і функції у точці $M_0(1;1)$.

$$f'_x=-\sin(1-xy)(-y)=y\sin(1-xy);$$

$$f'_y=-\sin(1-xy)(-x)=x\sin(1-xy);$$

$$f''_{x^2}=y\cos(1-xy)(-y)=-y^2\cos(1-xy);$$

$$f''_{xy}=\sin(1-xy)+y\cos(1-xy)(-x)=\sin(1-xy)-xy\cos(1-xy);$$

$$f''_{y^2}=-x^2\cos(1-xy).$$

$$f(M_0)=1;\ f'_x(M_0)=0;\ f'_y(M_0)=0;$$

$$f''_{x^2}(M_0)=-1;\ f''_{xy}(M_0)=-1;\ f''_{y^2}(M_0)=-1.$$

За формулою Тейлора дана функція має вигляд:

$$\cos(1-xy)=1+0\cdot(x-1)+0\cdot(y-1)+$$

$$+\frac{1}{2}\left((-1)(x-1)^2-2(x-1)(y-1)-(y-1)^2\right)+R_3(x;\,y)=1-\frac{1}{2}(x-1)^2-$$

$$-(x-1)(y-1)-\frac{1}{2}(y-1)^2+R_3(x;y).$$

Обчислимо $f(1{,}1;1{,}02)=\cos(1-1{,}1\cdot 1{,}02)$.

$$x_0=1,\ x=1{,}1,\ x-x_0=1{,}1-1=0{,}1,$$

$$y_0=1,\ y=1{,}02,\ y-y_0=1{,}02-1=0{,}02.$$

Отже,

$$\cos(1-1{,}1\cdot 1{,}02)\approx 1-\frac{1}{2}(1{,}1-1)^2-(1{,}1-1)(1{,}02-1)-\frac{1}{2}(1{,}02-1)^2=$$

$$=1-0{,}005-0{,}002-0{,}0002=0{,}9928.\ \blacksquare$$

3) $f(x,y)=\ln(1+x+y),\ M(0;0)$.

Графік функції $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ зображено на рис. 9.7.

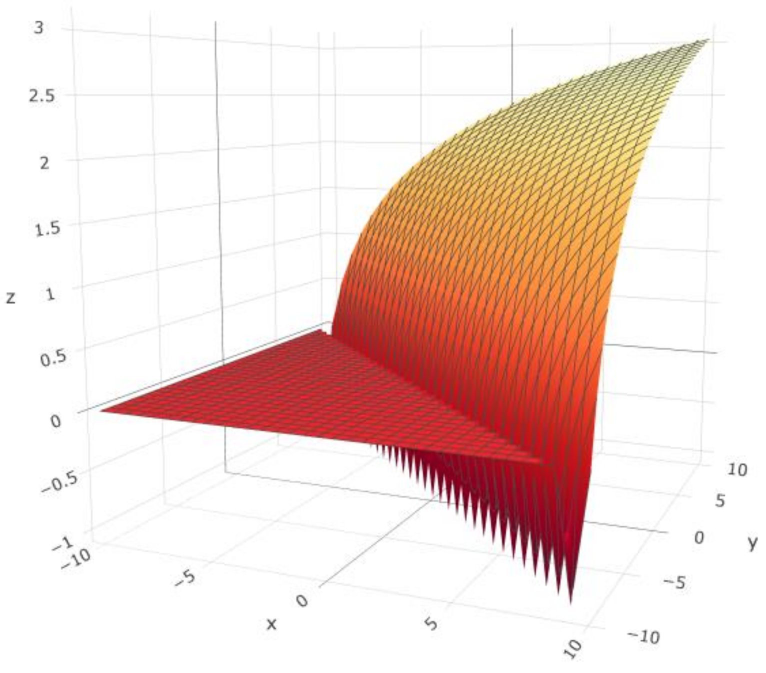


Рис. 9.7

Знайдемо частинні похідні першого і другого порядку:

$$f'_x=\left(\ln(1+x+y)\right)'_x=\frac{1}{1+x+y};\ f'_y=\frac{1}{1+x+y};$$

$$f''_{x^2} = f''_{xy} = f''_{y^2} = -1\cdot(1+x+y)^{-2};$$

$$f'''_{x^3} = f'''_{x^2y} = f'''_{xy^2} = f'''_{y^3} = 2(1+x+y)^{-3}.$$

Обчислимо значення функції та її похідних у точці $M(0;0)$:

$$f(M) = \ln(1+0+0) = 0;\ f'_x(M) = f'_y(M) = 1;$$

$$f''_{x^2}(M) = f''_{xy}(M) = f''_{y^2}(M) = -1;$$

$$f'''_{x^3}(M) = f'''_{x^2y}(M) = f'''_{xy^2}(M) = f'''_{y^3}(M) = 2.$$

Отже, функцію можна записати за формулою Тейлора так:

$$f(x;\,y) = f(0;\,0) + df(0;\,0) + \frac{1}{2}d^2 f(0;\,0) + \frac{1}{6}d^3 f(0;\,0) + R_3(x;\,y).$$

$$\ln(1+x+y) = 0 + (1\cdot(x-0) + 1\cdot(y-0)) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(-1\cdot(x-0)^2 - 2(x-0)(y-0) - (y-0)^2\right) +$$
$$+\frac{1}{6}\left(2(x-0)^3 + 3\cdot 2(x-0)^2(y-0) + 3\cdot 2\cdot(x-0)(y-0)^2 + 2(y-0)^3\right) +$$
$$+R_3(x;\,y).$$

$$\ln(1+x+y) = x + y - \frac{1}{2}x^2 - xy - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 +$$
$$+\frac{1}{3}y^3 + R_3(x;\,y).\ \blacksquare$$

Задача 9.4. *Розкласти функцію* $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ *за формулою Тейлора в околі точки* $M(1;1;1)$.

Розв'язання.

Оскільки задана функція є многочленом третього степеня, то вона розкладається за формулою Тейлора, тобто залишковий член дорівнюватиме нулю:

$$f(x;\,y;\,z) = f(1;1;1) + df(1;1;1) + \frac{d^2 f(1;1;1)}{2!} + \frac{d^3 f(1;1;1)}{3!},$$

тому що всі частинні похідні вище третього порядку для даної функції, а отже, й відповідні диференціали, дорівнюють нулю.

Знайдемо частинні похідні:

$$f'_x = 3x^2 - 3yz; \quad f'_y = 3y^2 - 3xz; \quad f'_z = 3z^2 - 3xy;$$

$$f''_{x^2} = 6x; \quad f''_{xy} = -3z; \quad f''_{xz} = -3y; \quad f''_{yz} = -3x; \quad f''_{y^2} = 6y; \quad f''_{z^2} = 6z;$$

$$f'''_{x^3} = f'''_{y^3} = f'''_{z^3} = 6; \quad f'''_{x^2y} = f'''_{x^2z} = f'''_{xy^2} = f'''_{xz^2} = f'''_{yz^2} = f'''_{y^2z} = 0; \quad f'''_{xyz} = -3.$$

Обчислимо значення функції та знайдених частинних похідних у точці $(1;1;1)$.

$$f(1;1;1) = 0; \; f'_x(1;1;1) = f'_y(1;1;1) = f'_z(1;1;1) = 0;$$

$$f''_{x^2}(1;1;1) = f''_{y^2}(1;1;1) = f''_{z^2}(1;1;1) = 6;$$

$$f''_{xy}(1;1;1) = f''_{xz}(1;1;1) = f''_{yz}(1;1;1) = -3;$$

$$f'''_{x^3}(1;1;1) = f'''_{y^3}(1;1;1) = f'''_{z^3}(1;1;1) = 6; \; f'''_{xyz}(1;1;1) = -3;$$

$$f'''_{x^2y}(1;1;1) = f'''_{x^2z}(1;1;1) = f'''_{xy^2}(1;1;1) = f'''_{xz^2}(1;1;1) = f'''_{yz^2}(1;1;1) =$$
$$= f'''_{y^2z}(1;1;1) = 0.$$

Обчислимо диференціали, які входять до формули Тейлора:

$$df(1;1;1) = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + 0 \cdot \Delta z = 0;$$

$$d^2 f(1;1;1) = 6\Delta x^2 + 6\Delta y^2 + 6\Delta z^2 - 6\Delta x\Delta y - 6\Delta x\Delta z - 6\Delta y\Delta z;$$

$$d^3 f(1;1;1) = 6\Delta x^3 + 6\Delta y^3 + 6\Delta z^3 - 18\Delta x\Delta y\Delta z.$$

Підставимо знайдені диференціали в формулу Тейлора, одержимо:

$$f(x;y;z) = 3\left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right) - 3\left(\Delta x\Delta y + \Delta x\Delta z + \Delta y\Delta z\right) +$$
$$+ \Delta x^3 + \Delta y^3 + \Delta z^3 - 3\Delta x\Delta y\Delta z.$$

Враховуючи, що $\Delta x = x - 1$, $\Delta y = y - 1$, $\Delta z = z - 1$, остаточно маємо:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz =$$
$$= 3\left((x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) - (y-1)(z-1)\right) +$$
$$+ (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1). \; \blacksquare$$

Задача 9.5. *Розкласти за формулою Тейлора функцію* $f(x;y) = e^x \sin y$ *у точці* $O(0;0)$ *до доданків третього порядку включно.*

Розв'язання.

Графік функції $f(x;y) = e^x \sin y$ зображено на рис. 9.8.

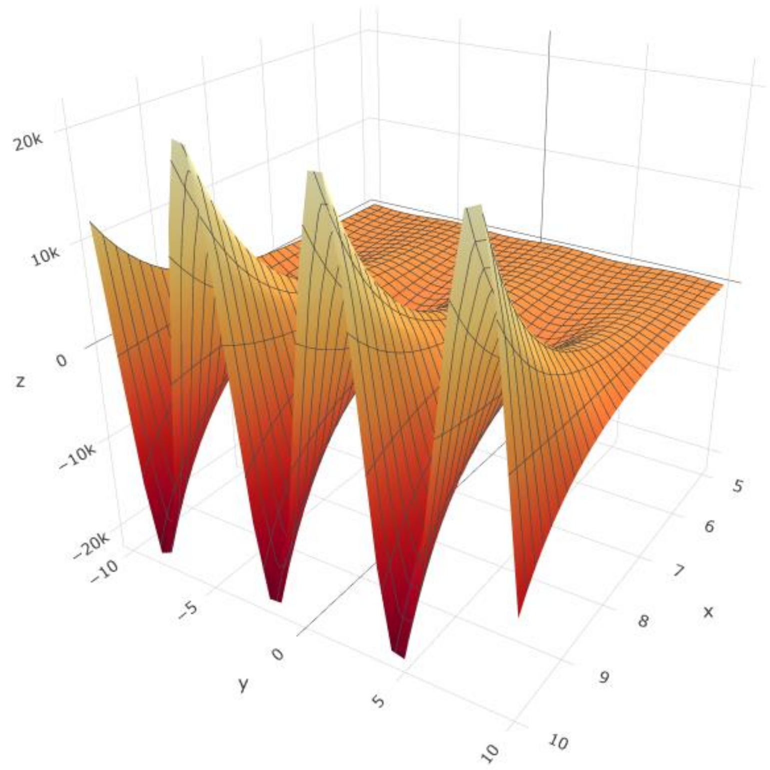


Рис. 9.8

Значення функції у точці $O(0;\,0)$: $f(0;\,0)=e^0\sin 0=0$.

Знайдемо частинні похідні першого порядку для даної функції та їх значення у точці $O(0;\,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=e^x\cos y;\quad \frac{\partial f}{\partial x}=e^x\sin y;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0;\,0)=0;\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0;\,0)=1.$$

Частинні похідні другого порядку дорівнюють:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^x\sin y;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=e^x\cos y;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-e^x\sin y;$$

а їх значення в точці $O(0;\,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0;\,0)=0;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0;\,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0;\,0)=1;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0;\,0)=0.$$

Знайдемо частинні похідні третього порядку:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=e^x\sin y;\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=e^x\cos y;\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=-e^x\sin y;\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=-e^x\cos y;$$

їх значення в точці $O(0;\,0)$:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0;\,0)=0;\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0;\,0)=1;\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0;\,0)=0;\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0;\,0)=-1\,.$$

Формула Тейлора, враховуючи доданки до третього порядку включно, матиме вигляд:

$$f(x;\,y)=e^x\sin y\approx 0+0\cdot(x-0)+1\cdot(y-0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left(0\cdot(x-0)^2+2\cdot1\cdot(x-0)(y-0)+0\cdot(y-0)^2\right)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(0\cdot(x-0)^3+3\cdot1\cdot(x-0)^2(y-0)+3\cdot0\cdot(x-0)(y-0)^2+(-1)\cdot(y-0)^3\right)=$$

$$=y+xy+\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{6}y^3.\ \blacksquare$$

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1. [9]** *Розкласти функцію* f *за формулою Тейлора в околі точки* M *:*

I. 1) $f(x;\,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y,\ M(1;\,-2);$

2) $f(x;\,y)=x^3-5x^2-xy+y^2+10x+5y,\ M(2;\,-1);$

3) $f(x;\,y)=\dfrac{xy^3}{4}-yx^3+\dfrac{x^2y^2}{2}-2x+3y-4,\ M(1;\,2);$

II. 1) $f(x;\,y;\,z)=(x+y+z)^2,\ M(1;\,1;\,-2);$

2) $f(x;\,y;\,z)=x^2+3z^2-2yz-3z,\ M(0;\,1;\,2);$

3) $f(x;\,y;\,z)=xyz,\ M(1;\,2;\,3);$

✍**2. [11]** *Розкласти функцію* f *за формулою Тейлора в околі точки* M *до членів* n*-го порядку. Записати залишковий член* $o\left(d^n\right)$ *у формі Лагранжа:*

I. $M(1;1)$, $n=3$ *і:*

1) $f(x;\ y)=\cos(1-xy)$; ***2)*** $f(x;\ y)=\dfrac{x}{y}$;

3) $f(x;\ y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

II. $M(0;0)$, $n=3$ *і:*

1) $f(x;\ y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$; ***2)*** $f(x;\ y)=e^x\cos y$;

3) $f(x;\ y)=e^x\ln(1+y)$; ***4)*** $f(x;\ y)=\sin x\operatorname{ch} y$;

5) $f(x;\ y)=\ln(1+x+y)$; ***6)*** $f(x;\ y)=(1+x)^p(1+y)^q$;

7) $f(x;\ y)=\operatorname{arctg}\dfrac{x-y}{1+xy}$; ***8)*** $f(x;\ y)=\operatorname{tg}\left(x\sin y\right)$;

9) $f(x;\ y)=\dfrac{1}{1-x-y+xy}$; ***10)*** $f(x;\ y)=\ln\dfrac{1-x-y+xy}{1-x-y}$;

III. $M(0;0;0)$, $n=3$ *і:*

1) $f(x;\ y;\ z)=2^x\ln(1+y)\sin z$;

2) $f(x;\ y;\ z)=e^{1-x}\ln(e+y)\cos z$;

3) $f(x;\ y;\ z)=\operatorname{arcctg} x-\arcsin y\cdot\operatorname{tg} z$;

4) $f(x;\ y;\ z)=\sin(x+y+z)-\sin(x+y)-\sin z$.

✍**3. [11]** *Написати розклад неявної функції* $z=z(x;\ y)$, *заданої рівнянням* $F(x;y;z)=0$, *за степенями* $(x-a)^i(y-b)^j$ *до* n*-го степеня* $(i+j\le n)$ *в околі точки* $M(a;b)$, *якщо* $z(a;b)=c$ *і:*

1) $F(x;\ y;\ z) = z^3 - 2xz + y,\ \ a = b = c = 1,\ n = 2;$

2) $F(x;\ y;\ z) = z^5 - zx^2 + x + y + 1,\ \ a = 1,\ b = 2,\ c = 1,\ n = 2;$

3) $F(x;\ y;\ z) = z^3 - yz - xy^2 - x^3,\ \ a = b = c = 1,\ n = 2;$

4) $F(x;\ y;\ z) = z^4 - 2zx + y^2 - 3,\ \ a = 1,\ b = 2,\ c = 1,\ n = 2.$

✍**4. [14, с. 738]** ***Коефіцієнт охолодження від вітру.*** *Охолодження від вітру – міра видимої температури, що відчувається на відкритих ділянках шкіри – є функцією температури повітря та швидкості вітру. Точна формула, оновлена Національною службою погоди в 2001 році та заснована на сучасній теорії теплообміну, моделі людського обличчя та опорі тканин шкіри, має вигляд*

$$W = W(v, T) = 35{,}74 + 0{,}6215T - 35{,}75v^{0{,}16} + 0{,}4275T \cdot v^{0{,}16},$$

де T — температура повітря в °F і швидкість вітру подана в милях на годину. У таблиці наведено часткову діаграму охолодження вітром.

		T (°F)								
		30	**25**	**20**	**15**	**10**	**5**	**0**	**–5**	**–10**
V (милі/год)	**5**	25	19	13	7	1	–5	–11	–16	–22
	10	21	15	9	3	–4	–10	–16	–22	–28
	15	19	13	6	0	–7	–13	–19	–26	–32
	20	17	11	4	–2	–9	–15	–22	–29	–35
	25	16	9	3	–4	–11	–17	–24	–31	–37
	30	15	8	1	–5	–12	–19	–26	–33	–39
	35	14	7	0	–7	–14	–21	–27	–34	–41

1) *за допомогою таблиці знайти:*

$W(20;25)$, $W(30;-10)$, $W(15;15)$; ;

2) *використовуючи формулу, знайти:*

$W(10;-40)$, $W(50;-40)$, $W(60;30)$;

3) *знайти лінеаризацію* $L(v;T)$ *функції* $W(v;T)$ *у точці* $(25;5)$*;*

4) *використати* $L(v;T)$ *з попереднього пункту для оцінки наступних значень охолодження від вітру:*

a)$W(24;6)$;

b)$W(27;2)$;

c)$W(5;-10)$ *(пояснити, чому це значення відрізняється від значення, знайденого в таблиці).*

✍**5. [14, с. 738]** *Знайти лінеаризацію* $L(v;T)$ *функції* $W(v;T)$ *(див. завдання 4) в точці* $(50;-20)$. *Використайте отримані дані для оцінки наступних значень охолодження від вітру:*

1) $W(49;-22)$*;*

2) $W(53;-19)$*;*

3) $W(60;-30)$.

§ 10. Екстремум функції багатьох змінних

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Точка максимуму	Maximum point
Точка мінімуму	Minimum point
Точка екстремуму	Extremum
Максимум, мінімум, екстремум	Maximum, minimum, extremum
Локальний екстремум	Local extremum
Стаціонарні точки	Stationary points
Додатно (від'ємно) визначена квадратична форма	Positive-definite (negative-definite) quadratic form
Критерій Сильвестра	Sylvester's criterion
Симетрична матриця	Symmetric matrix
Головні мінори	Principal minors

1. Сформулювати означення екстремуму функції.

Нехай функція $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ визначена в області $D \subset \mathbb{R}^n$ і точка $M_0(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$ є внутрішньою точкою цієї області.

Означення 1. *Точка M_0 називається* ***точкою максимуму*** *(мінімуму) функції $y = f(M)$, $M(x_1, x_2, ..., x_n)$, якщо існує окіл $O(M_0)$ точки M_0 такий, що $\forall M \in O(M_0)$ значення функції $f(M_0)$ більше або дорівнює (менше або дорівнює) від значення функції в точці M.*

$$\left(M_0 - \text{точка строгого максимуму функції } y = f(M)\right) \overset{df}{\Leftrightarrow} \left(\exists O^*(M_0),\right.$$
$$\left.\forall M \in O^*(M_0): f(M) < f(M_0)\right).$$

$$\left(M_0 - \text{точка строгого мінімуму функції } y = f(M)\right) \overset{df}{\Leftrightarrow} \left(\exists O^*(M_0),\right.$$
$$\left.\forall M \in O^*(M_0): f(M) > f(M_0)\right).$$

Точки максимуму і мінімуму функції $y = f(x)$ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *називаються* ***точками екстремуму****, а значення функції в точках екстремуму називаються відповідно* ***максимумами і мінімумами*** *або* ***екстремумами*** *функції.* *Екстремум функції в точці називають ще* ***локальним екстремумом****, оскільки функція розглядається в околі точки* M_0.

2. Сформулювати правило знаходження екстремуму функції двох змінних.

Теорема 1. *Для того, щоб знайти точки екстремуму і екстремальні значення функції* $z = f(x, y)$ *двох змінних у заданій області, потрібно:*

1) прирівняти частинні похідні до нуля: $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) = 0, \end{cases}$

знайти дійсні розв'язки системи рівнянь (стаціонарні точки), які належать області;

2) обчислити значення визначника $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$*, де*

$a_{11} = f''_{x^2}(x_0, y_0),\ a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_o),\ a_{22} = f''_{y^2}(x_0, y_0).$

При цьому:

а) якщо $\Delta > 0$*, то маємо екстремум: максимум при* $a_{11} < 0$ *і мінімум при* $a_{11} > 0$*;*

б) якщо $\Delta < 0$, *то екстремуму немає;*

в) якщо $\Delta = 0$, *то маємо сумнівний випадок, і тут потрібні додаткові дослідження;*

3) *знайти екстремальні значення функції; для цього у функцію підставити координати точок екстремуму.*

3. Що таке додатно (від'ємно) визначена квадратична форма? Сформулювати критерій Сильвестра.

Квадратична форма $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} y_i y_k \ (a_{ik} = a_{ki})$ *від змінних* y_1, y_2, ..., y_n *називається* ***додатно (від'ємно) визначеною****, якщо вона має додатні (від'ємні) значення* $\forall y_1, y_2, ..., y_n$, *які одночасно не дорівнють нулеві. Квадратична форма називається* ***знакозмінною****, якщо вона приймає як додатні, так і від'ємні значення.*

Головними мінорами *симетричної матриці* A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ a_{ik} = a_{ki},$$

називаються ***<u>визначники</u>****:*

$$A_1 = a_{11}, \ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \ A_n = |A|.$$

Теорема 2 (Критерій Сильвестра додатної визначеності квадратичної форми).

1°. *Для того, щоб квадратична форма* $\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} y_i y_k$ *із симетричною матрицею* A $(a_{ik} = a_{ki})$ *була додатно визначеною,* *необхідно і достатньо, щоб всі головні мінори матриці* A *були додатні, тобто:*

$$A_1 > 0,\ A_2 > 0\ ,\ldots,\ A_n > 0.$$

2°. *Для того, щоб квадратична форма* $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} y_i y_k$ *з симетричною матрицею* A *була від'ємно визначеною, необхідно і достатньо, щоб знаки головних мінорів матриці* A *чергувались, причому знак* A_1, *був від'ємним, тобто:* $A_1 < 0,\ A_2 > 0,\ A_3 < 0,$ $A_4 > 0,\ldots.$

4. Сформулювати достатні умови існування екстремуму функції багатьох змінних.

Теорема 3. *Якщо для визначеної, неперервної разом з частинними похідними до другого порядку включно функції* $y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ *в околі стаціонарної точки* $M_0\left(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}\right)$ *другий диференціал, або квадратична форма* $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik} \Delta x_i \Delta x_k = d^2 f\left(M_0\right)$, *в якій коефіцієнти визначаються з формули* $f''_{x_i x_k}\left(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}\right) = a_{ik}$, $i, k = \overline{1,n}$, *виявляється додатно визначеною (від'ємно визначеною) формою, то у точці* M_0 *буде локальний мінімум (максимум).*

Приклади розв'язування вправ

Задача 10. 1. *Дослідити функцію* $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y - 5$ *на екстремум.*

Розв'язання.

Графік функції зображено на рис. 10.1.

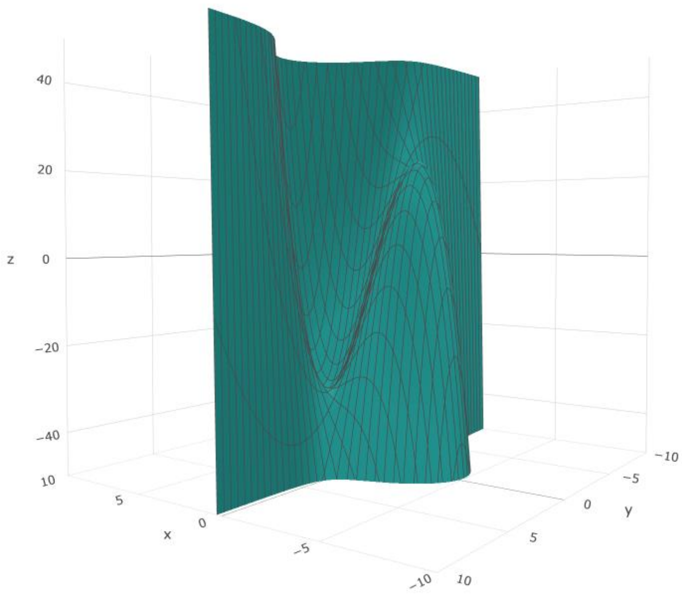


Рис. 10.1

Скористаємося правилом знаходження екстремуму для функції двох змінних. Для початку складемо систему рівнянь, розв'язками якої є стаціонарні точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 6xy - 12 = 0. \end{cases}$$

Якщо цю систему записати у вигляді: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2, \end{cases}$ а друге рівняння у вигляді $x^2y^2 = 4$, то очевидно, що $x^2 = 4$ і $y^2 = 1$ або $x^2 = 1$, $y^2 = 4$. Отже, точки $(2;1)$, $(-2;-1)$, $(1;2)$, $(-1;-2)$ є стаціонарні точки, підозрілі на екстремум.

Перевіримо достатні умови існування екстремуму і знайдемо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x.$$

У точці $M_1(2;1)$ $a_{11} = 12 > 0,$ $a_{12} = 6,$ $a_{22} = 12,$ $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 12 \cdot 12 - 6^2 = 144 - 36 > 0$.

У точці $M_2(-2;-1)$ $a_{11}=-12<0$, $a_{12}=-6$, $a_{22}=-12$, $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=144-36>0$.

У точці $M_3(1;2)$ $a_{11}=6$, $a_{12}=12$, $a_{22}=6$, $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=36-144<0$.

У точці $M_4(-1;-2)$ $a_{11}=-6$, $a_{12}=-12$, $a_{22}=-6$, $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=36-144<0$.

А тому точка $M_1(2;1)$ є точкою мінімуму, точка $M_2(-2;-1)$ є точкою максимуму, у точках $M_3(1;2)$, $M_4(-1;-2)$ екстремуму немає,

$z_{\min}=z(2;1)=2^3+3\cdot 2\cdot 1^2-15\cdot 2-12\cdot 1-5=-33$,

$z_{\max}=z(-2;-1)=(-2)^3+3\cdot(-2)\cdot(-1)^2-15\cdot(-2)-12\cdot(-1)-5=23$. ■

Задача 10.2. *Дослідити на екстремум функцію*

$$z=-\frac{1}{9}(3x+5y)^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2}y^2+5xy-2y$$

Розв'язання. Графік функції зображено на рис. 10.2.

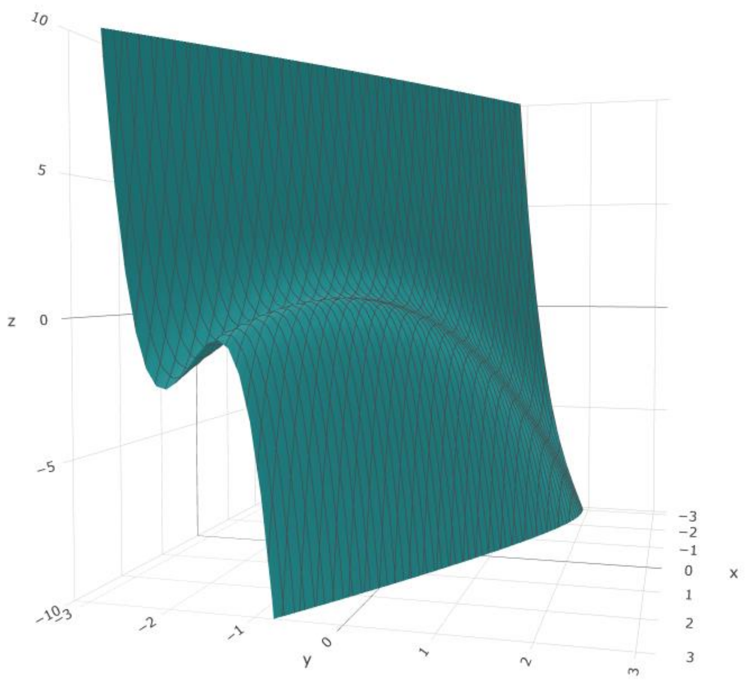


Рис. 10.2

Маємо функцію двох змінних, і спочатку перевіряємо необхідні умови: знаходимо частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-(3x+5y)^2+3x+5y;\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{5}{3}(3x+5y)^2+5y+5x-2.$$

Для визначення стаціонарних точок згідно з необхідними умовами екстремуму, прирівнюємо до нуля ці похідні. Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases}-(3x+5y)^2+3x+5y=0,\\ -\frac{5}{3}(3x+5y)^2+5y+5x-2=0.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}(3x+5y)(-(3x+5y)+1)=0,\\ -\frac{5}{3}(3x+5y)^2+(3x+5y)+2x-2=0.\end{cases}$$

Ця система розкладається на дві системи рівнянь:

$$\begin{cases}3x+5y=0,\\ -\frac{5}{3}\cdot 0+0+2x-2=0,\end{cases}\quad \text{та} \quad \begin{cases}3x+5y=1,\\ -\frac{5}{3}\cdot 1+1+2x-2=0.\end{cases}$$

Для першої системи маємо:

$$\begin{cases}3x+5y=0,\\ 2x=2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5y=-3,\\ x=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\ y=-\frac{3}{5}.\end{cases}$$

Для другої системи маємо:

$$\begin{cases}3x+5y=1,\\ 2x=\frac{8}{3}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{5}\left(1-3\cdot\frac{4}{3}\right),\\ x=\frac{4}{3}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{4}{3},\\ y=-\frac{3}{5}.\end{cases}$$

Отримали дві стаціонарні точки: $M_1\left(1;-\frac{3}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{4}{3};-\frac{3}{5}\right)$.

Для перевірки достатніх умов екстремуму можна використати теорему 1, тобто працювати за алгоритмом розв’язування попередньої задачі.

А можна використати теорему 2 (Критерій Сильвестра). Тут ми також знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6(3x+5y)+3, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -10(3x+5y)+5,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{50}{3}(3x+5y)+5.$$

Дослідимо на екстремум точку M_1. Обчислимо частинні похідні другого порядку у точці M_1:

$$\frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial x^2} = (-6(3x+5y)+3)\Big|_{y=-\frac{3}{5}}^{x=1} = -6(3-3)+3=3,$$

$$\frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial x \partial y} = (-10(3x+5y)+5)\Big|_{y=-\frac{3}{5}}^{x=1} = -10(3-3)+5=5,$$

$$\frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial y^2} = \left(-\frac{50}{3}(3x+5y)+5\right)\Bigg|_{y=-\frac{3}{5}}^{x=1} = -\frac{50}{3}(3-3)+5=5.$$

Далі застосуємо загальний підхід для перевірки достатніх умов екстремуму, пов’язаних безпосередньо з матрицею квадратичної форми, що відповідає другому диференціалу функції.

Маємо $a_{11}=3,\ \ a_{12}=a_{21}=5,\ \ a_{22}=5.$

Складемо матрицю A: $\ A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$

Її головні мінори $\Delta_1 = 3 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = -10 < 0.$

Отже, достатні умови екстремуму не виконуються, тому що $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 < 0.$ У точці M_1 функція не має екстремуму.

Дослідимо на екстремум точку $M_2\left(\frac{4}{3};-\frac{3}{5}\right).$

Обчислимо частинні похідні другого порядку в точці M_2:

$$\frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial x^2} = (-6(3x+5y)+3)\Big|_{y=-\frac{3}{5}}^{x=\frac{4}{3}} = -6(4-3)+3 = -3,$$

$$\frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial x \partial y} = (-10(3x+5y)+5)\Big|_{y=-\frac{3}{5}}^{x=\frac{4}{3}} = -10(4-3)+5 = -5,$$

$$\frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial y^2} = \left(-\frac{50}{3}(3x+5y)+5\right)\Bigg|_{y=-\frac{3}{5}}^{x=\frac{4}{3}} = -\frac{50}{3}(4-3)+5 = -\frac{35}{3}.$$

Маємо $a_{11} = -3,\ a_{12} = a_{21} = -5,\ a_{22} = -\frac{35}{3}.$

Матриця A має вигляд: $A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -5 & -\frac{35}{3} \end{pmatrix}.$

Її головні мінори $\Delta_1 = -3 < 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -5 & -\frac{35}{3} \end{vmatrix} = 10 > 0.$

Отже, $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0$. У точці M_2 функція z має максимум.

Знайдемо значення функції в цій точці:

$$z_{\max} = z(M_2) = \left(-\frac{1}{9}(3x+5y)^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 5xy - 2y\right)\Bigg|_{y=-\frac{3}{5}}^{x=\frac{4}{3}} =$$

$$= -\frac{1}{9}(4-3)^3 + \frac{3}{2}\cdot\frac{16}{9} + \frac{5}{2}\cdot\frac{9}{25} + 5\cdot\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) - 2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) =$$

$$= -\frac{1}{9} + \frac{8}{3} + \frac{9}{10} - 4 + \frac{6}{5} = \frac{59}{60}. \ \blacksquare$$

Задача 10.3. *Дослідити на екстремум функцію* $z = x^3 + y^3 - 3xy.$

Розв'язання.

Графік функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ зображено на рис. 10.3.

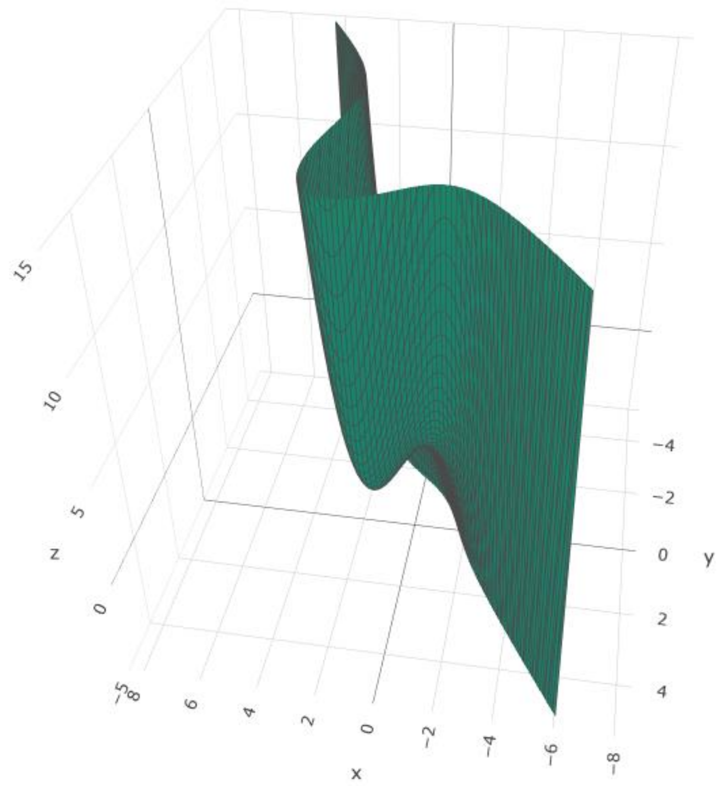


Рис. 10.3

Знаходимо частинні похідні функції z першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3(x^2-y); \quad \frac{\partial z}{\partial y}=3(y^2-x).$$

Прирівнюючи нулю ці похідні, одержуємо систему для визначення стаціонарних точок:

$$\begin{cases} x^2-y=0, \\ y^2-x=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^4-y=0, \\ x=y^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(y^3-1)=0, \\ x=y^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0, \\ x=0, \end{cases} \text{або} \begin{cases} y=1, \\ x=1. \end{cases}$$

Маємо дві стаціонарні точки: $M_1(0;0)$ та $M_2(1;1)$.

Для перевірки достатніх умов екстремуму знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y.$$

Тоді для точки $M_1(0;0)$ маємо:

$$a_{11}=\frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial x^2}=0, \; a_{12}=\frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial x \partial y}=-3, \; a_{22}=\frac{\partial^2 z(M_1)}{\partial y^2}=0;$$

Матриця A має вигляд $A=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Її головні мінори $\Delta_1=0$, $\Delta_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=-9<0 \Rightarrow$ точка M_1 не є точкою екстремуму.

Для точки $M_2(1;1)$ маємо:

$$a_{11}=\frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial x^2}=6, \qquad a_{12}=\frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial x \partial y}=-3, \qquad a_{22}=\frac{\partial^2 z(M_2)}{\partial y^2}=6.$$

Матриця A має вигляд: $A=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\Delta_1=a_{11}=6>0, \quad \Delta_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=36-9=27>0.$$

Отже, точка $M_2(1;1)$ – точка локального мінімуму. Знайдемо значення функції z в цій точці:

$$z_{\min}=z(M_2)=(x^3+y^3-3xy)\Big|_{y=1}^{x=1}=1+1-3=-1.$$

Зауважимо, що для встановлення типу стаціонарної точки можна також безпосередньо досліджувати знак другого диференціала як квадратичної форми змінних dx і dy, використовуючи метод виділення повного квадрата.

Для точки M_2 це виглядає так:

$$d^2z\left(M_2;dx,dy\right)=6dx^2-3dxdy+6dy^2=6\left(dx-\frac{1}{4}dy\right)^2+\frac{45}{8}dy^2,$$

Звідки видно, що для будь-яких dx, dy, які одночасно не дорівнюють нулю, $d^2z>0$, отже, точка M_2 – точка мінімуму. ■

Задача 10.4. *Знайти екстремуми функції* $z=x^3+y^3-3axy$.

Розв'язання.

Ця задача є узагальненням попередньої, вона містить параметр. Графік функції $z=x^3+y^3-3axy$ $(a=1)$ зображено на рис. 10.3.

Графік функції $z = x^3 + y^3 - 3axy$ $(a = -1)$ зображено на рис. 10.4.

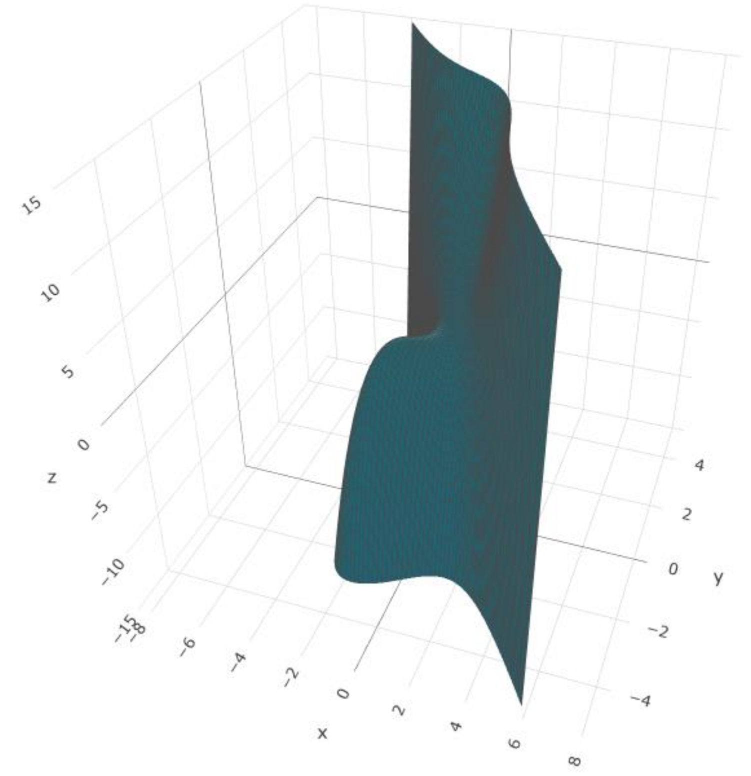


Рис. 10.4

Знаходимо частинні похідні: $z'_x = 3x^2 - 3ay, z'_y = 3y^2 - 3ax$.

Шукаємо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - ay = 0, \\ y^2 - ax = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - ay + ax = 0, \\ y^2 - ax = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y+a) = 0, \\ y^2 - ax = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 - ax = 0, \end{cases} \text{або} \Rightarrow \begin{cases} x + y + a = 0, \\ y^2 - a(-y-a) = 0, \end{cases}$$

звідси знаходимо дві стаціонарні точки $M_1(0;0)$ і $M_2(a;a)$ і, відповідно до необхідних умов існування екстремуму, він може існувати тільки у цих точках (частинні похідні неперервні і тому інших точок, підозрілих на екстремум, немає).

Перевіримо виконання достатніх умов за теоремою 1, для цього знайдемо похідні другого порядку: $z''_{x^2} = 6x$, $z''_{y^2} = 6y$, $z''_{xy} = -3a$.

У точці $M_1(0;0)$ маємо $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = z''_{x^2} \cdot z''_{y^2} - \left(z''_{xy}\right)^2 = 0 - 9a^2 < 0$, відповідно, у точці M_1 екстремуму немає.

У точці $M_2(a;a)$ маємо екстремум, оскільки

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = z''_{x^2} \cdot z''_{y^2} - \left(z''_{xy}\right)^2 = 6a \cdot 6a - 9a^2 = 27a^2 > 0.$$

Характер екстремуму залежить від знаку числа a; якщо $a > 0$, то функція має мінімум (оскільки $a_{11} = z''_{x^2}(M_2) = 6a > 0$) $z_{\min} = z(a,a) = a^3 + a^3 - 3a^3 = -a^3$, і якщо $a < 0$, то функція має максимум $z_{\max} = z(a,a) = -a^3$. ■

Задача 10.5. *Знайти екстремум функції* $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

Розв'язання.

Графік функції $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$ зображено на рис. 10.5.

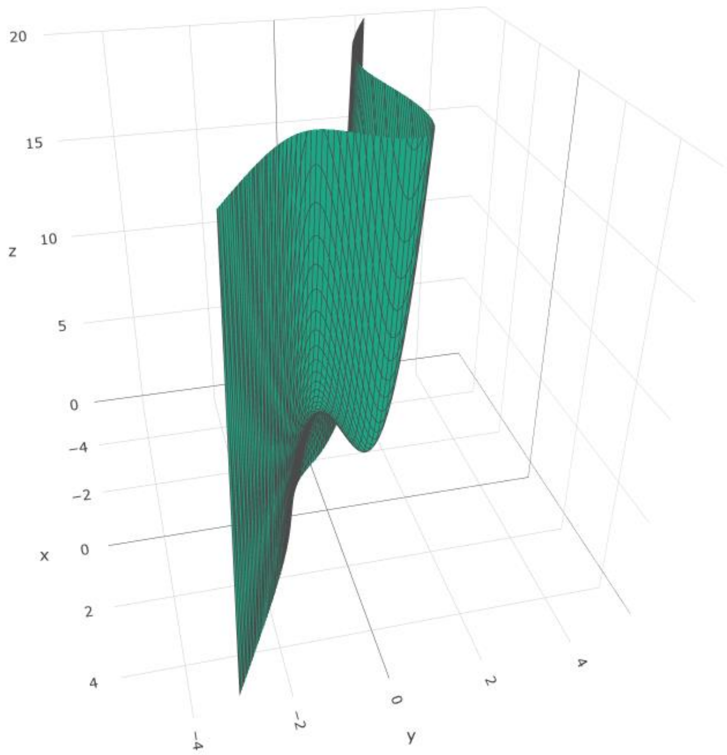


Рис. 10.5

Знаходимо частинні похідні першого порядку z'_x і z'_y та стаціонарні точки: $z'_x = 3x^2 - 6y$; $z'_y = 24y^2 - 6x$.

$\begin{cases}3x^2-6y=0,\\24y^2-6x=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2y(8y^3-1)=0,\\x=4y^2,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=0,\\y_1=0,\end{cases}$ або $\begin{cases}x_2=1,\\y_2=\dfrac{1}{2},\end{cases}$ отримали

дві стаціонарні точки $M_1(0;0)$ і $M_2\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Для перевірки достатніх умов знаходимо частинні похідні другого порядку: $z''_{xx}=a_{11}=6x;\ z''_{xy}=a_{12}=-6;\ z''_{yy}=a_{22}=48y.$

Для точки $M_1(0;0)$ одержуємо $a_{11}=0,\ \ a_{12}=-6,\ \ a_{22}=0$ і визначник $\Delta\left(M_1\right)=a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$. Отже, згідно з достатніми умовами, у точці M_1 екстремуму немає.

Для точки $M_2\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$. маємо $a_{11}=6,\ \ a_{12}=-6,\ \ a_{22}=24$ і визначник $\Delta\left(M_2\right)>0$. Згідно з достатніми умовами, M_2 є точкою мінімуму $z_{\min}=z\left(M_2\right)=4$. ■

Задача 10.6. *Дослідити на екстремум функцію* $z=x^4+y^4-(x+y)^2$.

Розв'язання.

Графік функції $z=x^4+y^4-(x+y)^2$ зображено на рис. 10.6.

Знайдемо частинні похідні першого порядку $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Потім складемо систему рівнянь, розв'язками якої є стаціонарні точки.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=4x^3-2(x+y)=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=4y^3-2(x+y)=0.\end{cases}$$

Якщо від першого рівняння відняти друге, то з рівності $x^3-y^3=0$ маємо $x=y$. Тоді перше рівняння $4x^3-4x=0$ системи має розв'язки $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$, а точки $M_1(-1;-1),\ M_2(0;0),\ M_3(1;1)$ є стаціонарними точками.

Знайдемо частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 2$ і обчислимо визначник Δ.

У точці $M_1(-1;-1)$ $a_{11} = 10,$ $a_{12} = -2,$ $a_{22} = 10,$ $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 100 - 4 > 0,$ отож робимо висновок, що точка M_1 є точка екстремуму, а оскільки $a_{11} > 0$, то це є точка мінімуму.

У точці $M_3(1;1)$ $a_{11} = 10,$ $a_{12} = -2,$ $a_{22} = 10,$ $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 100 - 4 > 0$, звідки маємо, що M_3 також є точкою мінімуму:

$$z_{\min} = z(1,1) = z(-1,-1) = 1 + 1 - 4 = -2.$$

У точці $M_2(0;0)$ $a_{11} = -2,$ $a_{12} = -2,$ $a_{22} = -2,$ $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 4 - 4 = 0$, отже теорема відповіді на існування екстремуму не дає, тому для вияснення питання про існування екстремуму розглянемо приріст функції z у точці M_2:

$\Delta z(0;0) = z(x;y) - z(0;0).$

Якщо покласти $y = -x,$ то $f(x,-x) = 2x^4 > 0$ для всіх $x \neq 0.$ Якщо ж покласти $y = 0{,}1x$, то $f(x;0{,}1x) = x^4 + 10^{-4}x^4 - 1{,}21x^2.$

Очевидно, що для всіх x, які задовольняють нерівність $0 < |x| < 0{,}1$, $f(x;0{,}1x) < 0.$ Таким чином, у довільному околі точки M_2 існують точки, у яких функція набирає значень, різних за знаком. Отже, приріст $\Delta z(0;0)$ приймає значення різних знаків, а тому у цій точці екстремуму немає. ■

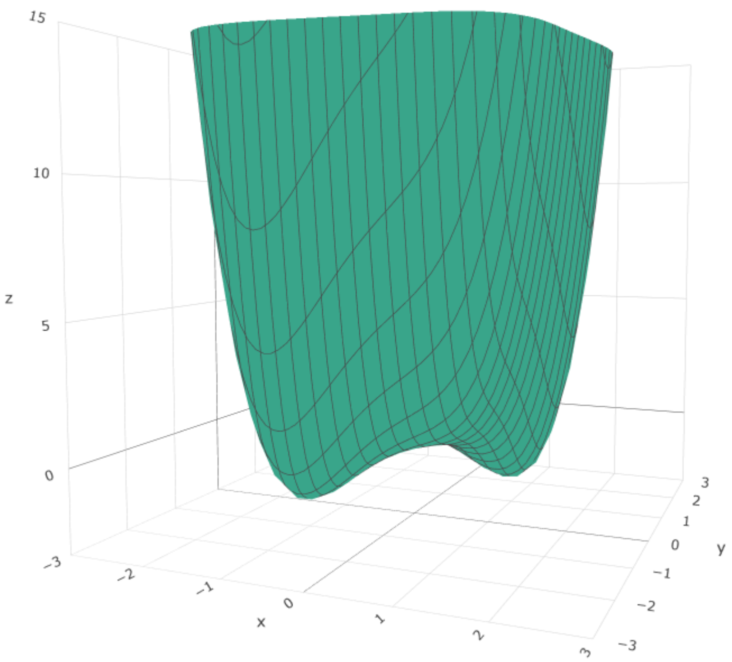


Рис. 10.6

Задача 10.7. *Дослідити на екстремум функцію:*

$$f(x;\,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Розв'язання.

$$\begin{cases} f'_x = 4x^3 - 4y = 0, \\ f'_y = 4y^3 - 4x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3 - y = 0, \\ y^3 - x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3, \\ x^9 - x = 0. \end{cases}$$

$$x^9 - x = 0 \Rightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 1, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_3 = -1, \\ y_3 = -1. \end{cases}$$

$M_0(0;\,0)$, $M_1(1;1)$, $M_2(-1;-1)$ – стаціонарні точки.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$f''_{x^2} = 12x^2, \; f''_{xy} = -4, \; f''_{y^2} = 12y^2.$$

Перевіримо достатні умови.

Для точки $M_0(0;0)$: $\Delta = \begin{vmatrix} 12\cdot 0 & -4 \\ -4 & 12\cdot 0 \end{vmatrix} = 0-16 < 0$, отже екстремуму в цій точці немає.

Для точки $M_1(1;1)$: $\Delta = \begin{vmatrix} 12\cdot 1 & -4 \\ -4 & 12\cdot 1 \end{vmatrix} = 144-16 > 0$, тому маємо екстремум, а саме мінімум, тому що $a_{11} = f''_{x^2}(M_0) = 12 > 0$: $z_{\min} = z(1;1) = 1+1-4+1 = -1$.

Аналогічно доводимо, що і точка $M_2(-1;-1)$ є точкою мінімуму і $z_{\min} = z(-1;-1) = -1$.

Поверхня та лінії рівня зображено на рис. 10.7, рис. 10.8.

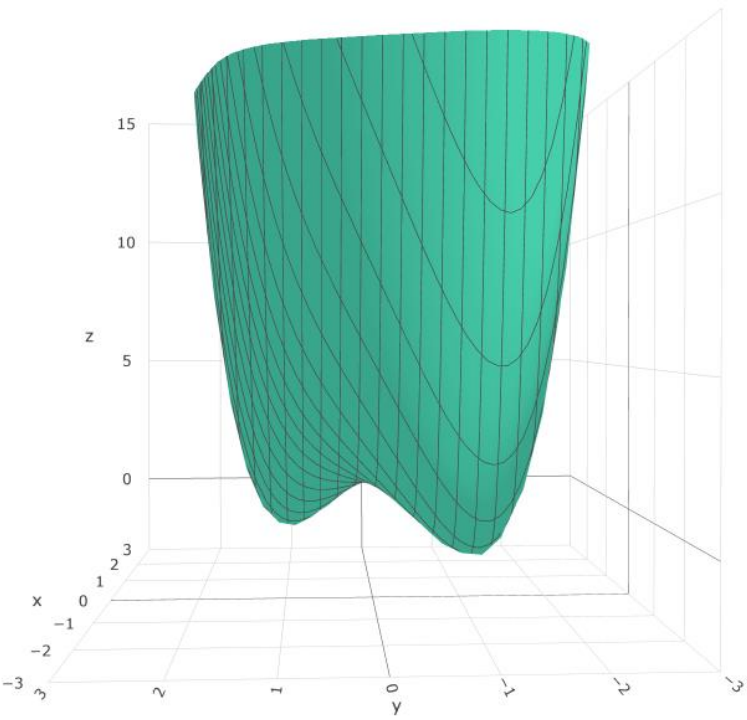


Рис. 10.7

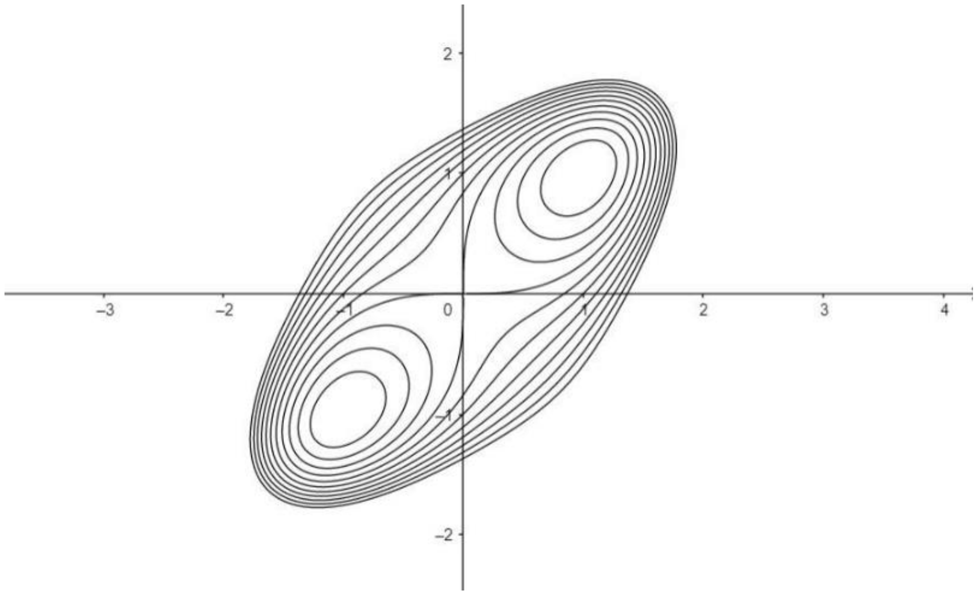


Рис. 10.8

Задача 10.8. *Дослідити на екстремум функцію трьох змінних* $f(x,y,z)=2x^2-xy+2xz-y+y^3+z^2$.

Розв'язання.

Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$. Потім складемо систему рівнянь, розв'язками якої є стаціонарні точки, підозрілі на екстремум.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x-y+2z=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=-x-1+3y^2=0,\quad \frac{\partial f}{\partial z}=2x+2z=0.$$

З третього рівняння знаходимо $z=-x$, підставимо це значення z у перше рівняння, дістанемо систему

$$\begin{cases}2x-y=0,\\ -x+3y^2=1,\end{cases}\quad \text{або} \quad \begin{cases}6y^2-y-2=0,\\ x=3y^2-1.\end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримуємо стаціонарні точки $M_1\left(-\frac{1}{4};-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

Оскільки маємо функцію від трьох змінних, то для дослідження достатніх умов використаємо критерій Сильвестра.

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(4x-y+2z\right)'_x=4,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\left(-x-1+3y^2\right)'_y=6y,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\left(2x+2z\right)'_z=2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(4x - y + 2z\right)'_y = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \left(4x - y + 2z\right)'_z = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \left(-x - 1 + 3y^2\right)'_z = 0.$$

У точці $M_1\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ знаходимо головні мінори:

$$A_1 = f''_{xx} = 4, \qquad A_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14.$$

Квадратична форма знакозмінна, а тому точка $M_1\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ не є точкою екстремуму.

У точці $M_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ маємо: $f''_{xx} = 4,$

$$\begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 13 > 0, \quad \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$

Точка $M_2\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ є точкою мінімуму і $f_{\min} = f\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) = -\frac{13}{27}$. ■

Задача 10.9. *Дослідити на екстремум функцію трьох змінних* $u = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1.$

Розв'язання.

Знайдемо частинні похідні першого порядку:

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=9x^2+6y;\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=2y+6x;\quad \dfrac{\partial u}{\partial z}=2z-2.$

$$\begin{cases}3x^2+2y=0,\\ y+3x=0,\\ z-1=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x^2-6x=0,\\ y=-3x,\\ z=1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0,\\ y=0,\\ z=1,\end{cases}\text{або}\begin{cases}x=2,\\ y=-6,\\ z=1.\end{cases}$$

Отримали стаціонарні точки $(2;-6;1)$ і $(0;0;1)$.

Знайдемо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=18x,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=6,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0,$$

і будуємо матрицю $A=\begin{pmatrix}18x & 6 & 0\\ 6 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$

У точці $M_1(2;-6;1)$ її головні мінори $\Delta_1=18x=36>0$, $\Delta_2=36(x-1)=36>0$, $\Delta_3=72(x-1)=72>0$ додатні. Відповідно, у цій точці функція має мінімум $u_{\min}=u(2;-6;1)=-12$.

Для дослідження функції у точці $M_2(0;0;1)$ не можна використовувати критерій Сильвестра, бо $\Delta_1=0$. Легко бачити, що у цій точці екстремуму немає. Дійсно $u(0;0;1)=0$, а в довільному малому околі точки $(0;0;1)$ функція приймає як додатнє, так і від'ємне значення.

Наприклад $u(\varepsilon;0;1)>0$, якщо $\varepsilon>0$, і $u(\varepsilon;0;1)<0$, якщо $\varepsilon<0$. ■

Задача 10.10. Дослідити на екстремум функцію $z(x;y)$, задану неявно рівнянням $2(x^2+z^2)+3(2y^2+1)+8(xz-y)-4x=0$.

Розв'язання.

Графік функції $2(x^2+z^2)+3(2y^2+1)+8(xz-y)-4x=0$ зображено на рис. 10.9.

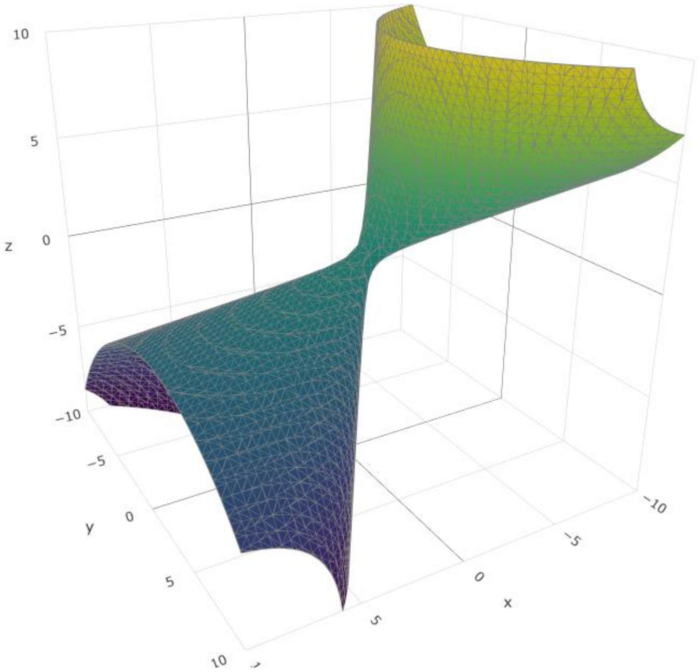


Рис. 10.9

Знайдемо частинні похідні z'_x і z'_y, користуючись формулою для обчислення похідних неявних функцій:

$$z'_x = -\frac{4x+8z-4}{4z+8x} = \frac{1-2z-x}{z+2x},$$

$$z'_y = -\frac{12y-8}{4z+8x} = \frac{2-3y}{z+2x}.$$

Для знаходження стаціонарних точок розв’яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 1-2z-x=0, \\ 2-3y=0,\ z+2x\neq 0, \\ 2\left(x^2+z^2\right)+3\left(2y^2+1\right)+8\left(xz-y\right)-4x=0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=1-2z, \\ y=\dfrac{2}{3},\ z+2x\neq 0, \\ 2\left(\left(1-2z\right)^2+z^2\right)+\dfrac{17}{3}+8\left(\left(1-2z\right)z-\dfrac{2}{3}\right)-\left(1-2z\right)=0. \end{cases}$$

Одержуємо стаціонарні точки:

$$M_1\left(-\frac{1+\sqrt{6}}{3};\frac{2}{3};\frac{4+\sqrt{6}}{6}\right) \quad \text{і} \quad M_2\left(\frac{\sqrt{6}-1}{3};\frac{2}{3};\frac{4-\sqrt{6}}{6}\right).$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$z''_{x^2}=\frac{(z+2x)(-2z'_x-1)-(1-2z-x)(z'_x+2)}{(z+2x)^2},$$

$$z''_{xy}=\frac{(z+2x)(-2z'_y)-(1-2z-x)z'_y}{(z+2x)^2},$$

$$z''_{y^2}=\frac{(z+2x)(-3)-(2-3y)z'_y}{(z+2x)^2}.$$

Враховуючи, що в стаціонарних точках частинні похідні z'_x і z'_y дорівнюють нулю, одержуємо:

$$z''_{x^2}=\frac{3z-2}{(z+2x)^2}, \quad z''_{xy}=0, \quad z''_{y^2}=-\frac{3}{z+2x}.$$

Знайдемо значення цих похідних у стаціонарних точках, M_1:

$$a_{11}=z''_{x^2}(M_1)=\frac{3\cdot\frac{4+\sqrt{6}}{6}-2}{\left(\frac{4+\sqrt{6}}{6}+\frac{2+2\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$a_{12}=z''_{xy}(M_1)=0, \qquad a_{22}=z''_{y^2}(M_1)=-\frac{3\cdot 6}{-3\sqrt{6}}=\sqrt{6},$$

і M_2:

$$a_{11}=z''_{x^2}(M_2)=\frac{3\cdot\frac{4-\sqrt{6}}{6}-2}{\left(\frac{4-\sqrt{6}}{6}+\frac{2\sqrt{6}-2}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$a_{12}=z''_{xy}(M_2)=0, \qquad a_{22}=z''_{y^2}(M_2)=-\frac{3}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=-\sqrt{6}.$$

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 2 > 0$ і $a_{11} > 0$. Таким чином, у точці M_1 мінімум $z_{\min} = z(M_1) = \dfrac{4+\sqrt{6}}{6}$.

Для точки M_2 маємо: $a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2 = 2 > 0$ і $a_{11} < 0$, тому у точці M_2 максимум $z_{\max} = z(M_2) = \dfrac{4-\sqrt{6}}{6}$. ■

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1. [1]** *Знайти стаціонарні точки функцій:*

1) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;

2) $z = xy(a - x - y)$; $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$, $0 \le y \le \dfrac{\pi}{4}$;

3) $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$,

4) $z = (2ax - x^2)(2by - y^2)$;

5) $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$;

6) $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$;

7) $u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$.

✍**2. [14, с. 745]** *Дослідити на екстремум функцію:*

1) $f(x;\, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$;

2) $f(x;\, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$;

3) $f(x;\, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$;

4) $f(x;\, y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2$;

5) $f(x;\, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4$;

6) $f(x;\, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6y + 2$;

7) $f(x;\,y)=2x^2+3xy+4y^2-5x+2y;$

8) $f(x;\,y)=x^2-2xy+2y^2-2x+2y+1;$

9) $f(x;\,y)=x^2-y^2-2x+4y+6;$

10) $f(x;\,y)=x^2+2xy$**;**

11) $z=x^2+xy+y^2-12x-3y;$

12) $z=3+2x-y-x^2+xy-y^2;$

13) $z=2xy-3x^2-2y^2+10;$

14) $z=4(x-y)-x^2-y^2;$

✍**3. [3; 9; 11]** *Дослідити на екстремум функцію двох змінних:*

I. 1) $z=3(x^2+y^2)-x^3+4y;$ ***2)*** $z=x^2y(4-y);$

3) $z=3x^2y+y^3-12x-15y+3;$ ***4)*** $z=y^3-x^2-27y+3x+16;$

II. 1) $z=x^4+y^4-2x^2;$ ***2)*** $z=(x^2-4y^2+2x)^2;$

3) $z=2x^4+y^4-x^2-2y^2;$ ***4)*** $z=xy^4(1+x-y);$

5) $z=x^2y^3(6-x-y);$ ***6)*** $z=x^4+y^4+2x^2y^2-8x+8y;$

7) $z=xy^2(12-x-y),\ x>0,\ y>0;$

8) $z=x^2y^2-2xy^2-6x^2y+12xy;$

III. 1) $z=3x^2-2x\sqrt{y}+y-8x;$ ***2)*** $z=\sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-a)};$

3) $z=y\sqrt{1+x}+x\sqrt{1+y};$ ***4)*** $z=1+x^2+\sqrt[3]{(y+2)^2};$

IV. 1) $z=xy\ln(x^2+y^2);$ ***2)*** $z=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2);$

3) $z=xy\ln(x^2+y^2);$ ***4)*** $z=(5-2x+y)e^{x^2-y};$

5) $z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)};$ ***6)*** $z=(5x+7y-25)e^{-(x^2+xy+y^2)};$

V. 1) $z=\sin x+\cos y+\cos(x-y),\quad 0<x<\dfrac{\pi}{2},\ 0<y<\dfrac{\pi}{2};$

2) $z=\sin x\sin y\sin(x+y),\ \ 0<x<\pi,\ 0<y<\pi;$

3) $z=x+y+4\sin x\sin y;$

4) $z=(1+e^{y})\cos x-ye^{y}.$

✍**4. [9; 11]** *Дослідити на екстремум функцію трьох змінних:*

1) $u=x^2+y^2+(z+1)^2-xy+x;$

2) $u=(x-2y+3)^2+(2x-z)^2;$

3) $u=xy^2z^3(1-x-y-z);$

4) $u=xyz(16-x-y-2z);$

5) $u=x^4+y^4+z^4-8(x^2+y^2+z^2);$

6) $u=\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{x+z}+\dfrac{z}{x+y}\ \ \left(x>0,\ y>0,\ z>0\right);$

7) $u=3\ln x+2\ln y+5\ln z+\ln(22-x-y-z);$

8) $u=\dfrac{2x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}-4x+2z^2.$

✍**5. [3]** *Дослідити на екстремум функцію* $z=z(x;\ y)$*, задану неявно рівнянням* $F(x;\ y;\ z)=0$*, якщо:*

1) $F(x;\ y;\ z)=\dfrac{x^3}{3}+2y^2-z^2x+z;$

2) $F(x;\ y;\ z)=x^2+y^2+4xz+4+\dfrac{z^2+z}{2};$

3) $F(x;\ y;\ z)=z^2+xyz-xy^2-x^3;$

4) $F(x;\ y;\ z)=x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10.$

§ 11. Найбільше та найменше значення функції багатьох змінних

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Найбільше (найменше) значення функції	The maximum (minimum) value of the function

1. Як розв'язується задача про знаходження найменшого та найбільшого значення функції багатьох змінних в області?

Правило. Для того, щоб знайти найбільше і найменше значення функції $y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ в області D, потрібно знайти:

1) *всі стаціонарні точки з* D, *обчислити значення функції в них;*

2) *значення функції на межі області;*

3) *з отриманих значень вибрати найбільше і найменше значення функції.*

Приклади розв'язування вправ

Задача 11.1. Знайти найбільше та найменше значення функції у прямокутнику $\overline{\quad}$:

1) $z = xy - x^2 y - \dfrac{xy^2}{2}$, $\overline{D}: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$;

2) $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $\overline{D}: 0 \le x \le 2, |y| \le 1$.

Розв'язання.

1) $z = xy - x^2 y - \frac{xy^2}{2}$, $\overline{D}: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$.

Графік функції $z = xy - x^2 y - \frac{xy^2}{2}$, $\overline{D}: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$ зображено на рис. 11.1.

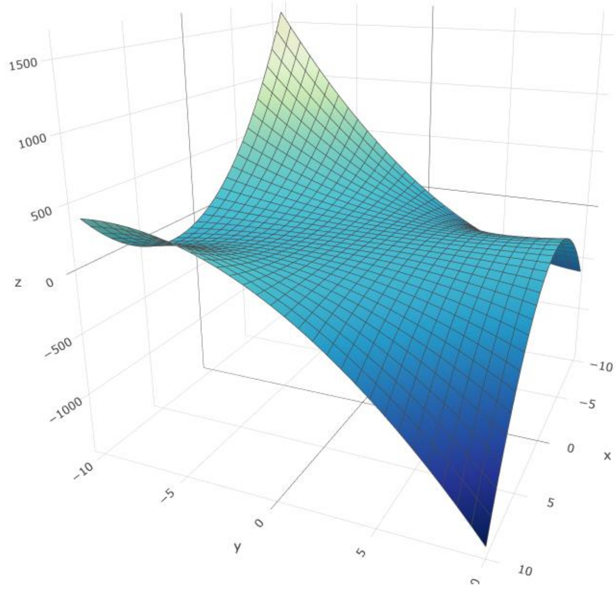


Рис. 11.1

I. Знаходимо стаціонарні точки, які належать області $\overline{}$ (рис.11.2):

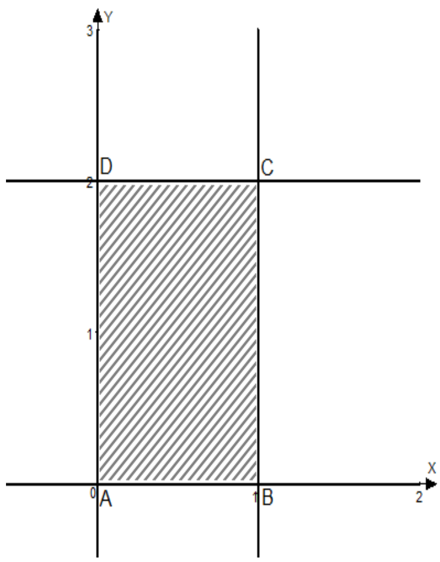


Рис. 11.2

$$z'_x = y - 2xy - \frac{y^2}{2} = y\left(1 - 2x - \frac{y}{2}\right);\ z'_y = x - x^2 - xy = x(1 - x - y).$$

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\left(1-2x-\dfrac{y}{2}\right)=0, \\ x(1-x-y)=0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=0, \\ x=0, \end{cases} \vee \begin{cases} y=0, \\ 1-x-y=0, \end{cases} \vee \begin{cases} 1-2x-\dfrac{y}{2}=0, \\ x=0, \end{cases} \vee \begin{cases} 1-2x-\dfrac{y}{2}=0, \\ 1-x-y=0. \end{cases}$$

Розв'язуючи ці системи, одержуємо чотири точки $A(0;\,0)$, $B(1;\,0)$, $D(0;\,2)$, $M\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. Ці точки належать області $\overline{}$, тому знайдемо значення функції в них: $z(0;0)=0$, $z(1,0)=0$, $z(0;2)=0$,

$$z\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9\cdot 2}=\frac{2}{27}.$$

II. Дослідимо зміну функції на межі області. Використовуючи рівняння межі, зведемо задану функцію до функції однієї змінної і обчислимо значення функції в усіх «підозрілих на екстремум» точках. Межа складається з чотирьох відрізків, тому проведемо дослідження окремо на кожній стороні прямокутника.

1) Дослідження на стороні AB. Рівнянням цієї сторони є $y=0$; $x\in[0;1]$ оскільки нас цікавить зміна заданої функції тільки на прямій AB, то підставляючи $y=0$ у функцію, знаходимо: на стороні AB досліджувана функція приймає вигляд $z=0$.

2) *Дослідження на стороні* BC. Рівнянням цієї сторони є $x=1$, $y\in[0;2]$, підставивши у формулу для z, знаходимо, що на BC функція має вигляд: $z=y-y-\dfrac{y^2}{2}=-\dfrac{y^2}{2}$. Оскільки $0\le y\le 2$ (рух від точки B до C) функція $z=-\dfrac{y^2}{2}$ монотонно спадає, то свого найменшого значення вона досягає у точці C: $\min\limits_{[0;2]} z=z(1;2)=-2$, а найбільшого у точці B: $\max\limits_{[0;2]} z=z(1;0)=0$.

3) Дослідження на стороні CD. Рівнянням цієї сторони є $y=2$, $x\in[0;1]$, $z=-2x^2$. Оскільки $0\le x\le 1$ (рух від точки C до D) функція $z=-2x^2$ монотонно спадає, тому $\max\limits_{[0;1]} z(x)=z(0)=0$, $\min\limits_{[0;1]} z(x)=z(1)=-2$.

4) Дослідження на стороні AD. Рівнянням цієї сторони є $x=0$, $y\in[0;2]$, підставивши в формулу для z, знаходимо, що на AD функція приймає вигляд: $z=0$.

III. Серед одержаних значень на межі та значення функції у внутрішній точці $M\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ виберемо найбільше та найменше:

$$z(0;2)=0,\quad z(0;0)=0,\quad z(1;\,0)=0,\quad z\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{27},\quad z(1;\,2)=-2.$$

Отже, $\max\limits_{D} z(x;\,y)=z\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{27}$, $\min\limits_{D} z(x;\,y)=z(1;\,2)=-2$. ■

2) $z=x^3+y^3-3xy$, $\overline{D}:0\le x\le 2, |y|\le 1.$

Графік функції $z=x^3+y^3-3xy$, $\overline{D}:0\le x\le 2, |y|\le 1$ зображено на рис. 11.3.

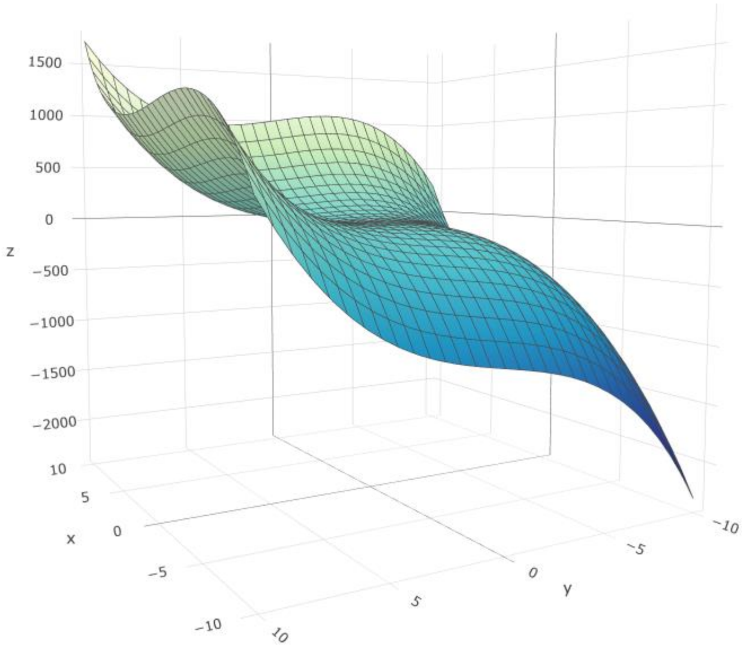


Рис. 11.3

I. Знаходимо стаціонарні точки, які належать області $\overline{D}$ (рис.11.4):

$z'_x = 3x^2 - 3y, \quad z'_y = 3y^2 - 3x.$

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^4 - x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \text{або} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Точки $O(0;0) \in \overline{D}$, $M_0(1;1) \in \overline{D}$, знаходимо значення функції в цих точках $z(0;0) = 0$, $z(1,1) = -1$.

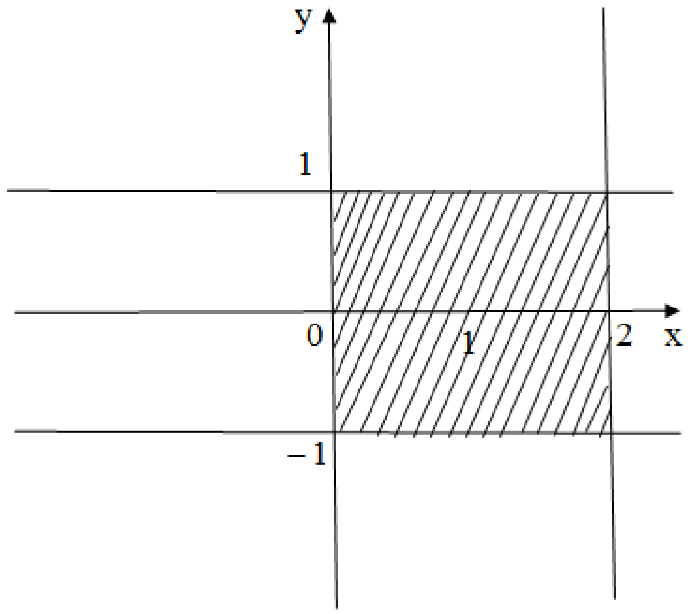


Рис. 11.4

II. Аналогічно, як і в попередньому прикладі, дослідимо зміну функції на межі області $\overline{D}$, яка складається з чотирьох відрізків.

1) AB: $x = 0$, $y \in [-1;1]$, $z = y^3$.

Знайдемо найбільше і найменше значення функції $z(y)$ на відрізку $[-1;1]$.

$$z'(y) = 3y^2; \; z'(y) = 0 \Rightarrow y = 0, \; 0 \in [-1;1] \; ;$$

$$z(0) = 0, \; z(-1) = -1, \; z(1) = 1.$$

2) BC: $y = 1$, $x \in [0;2]$, $z = x^3 + 1 - 3x$.

$$z'(x) = 3x^2 - 3; \; z'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1, -1 \notin [0;2];$$

$$z(1) = -1, \; z(0) = 1, \; z(2) = 3.$$

3) $CD: x=2,\ y\in[-1;1],\ z=8+y^3-6y.$

$$z'(y)=3y^2-6;\ z'(y)=0\ \Rightarrow\ y=\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2}\notin[-1;1];$$

$$z(1)=3,\ z(-1)=13.$$

4) $DA: y=-1,\ x\in[0;2],\ z=x^3-1+3x.$

$z'(x)=3x^2+3>0$, функція зростає, тому $\max\limits_{[0;\,2]} z(x)=z(2)=13$,

$\min\limits_{[0;\,2]} z(x)=z(0)=-1.$

III. Серед одержаних значень на межі виберемо найбільше та найменше.

$z(0;\,0)=0,\ z(1;1)=-1,\ z(0;1)=1,\ z(2;1)=3,\ z(2;-1)=13,\ z(0;-1)=-1.$

Отже, $\max\limits_{D} z(x;y)=z(2;-1)=13,$

$\min\limits_{D} z(x;\,y)=z(1;1)=z(0;-1)=-1.$ ■

Задача 11.2. Знайти найбільше та найменше значення функції у замкнутій області $\overline{}$:

1) $z=x^2y+xy^2+xy,\ \overline{D}: y=\dfrac{1}{x},\ x=1,\ x=2,\ y=-1{,}5;$

2) $z=x^3+y^3-3xy,\ \overline{D}: -1\le x\le 2,\ y=-1,\ y=3-x;$

3) $z=x^2+y^2+xy+3x,\ \overline{D}: x\le 0,\ y\ge 0,\ y\le x+4;$

4) $z=x^2+y^2-xy-x-2y,\ \overline{D}: x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+2y-6\le 0;$

5) $z=2x^3+4x^2+y^2-2xy,\ \overline{D}: y=x^2,\ y=4;$

6) $z=4-2x^2-y^2,\ \overline{D}: y=0,\ y=\sqrt{1-x^2}.$

Розв'язання.

1) $z = x^2y + xy^2 + xy$, $\overline{D}: y = \dfrac{1}{x},\ \ x = 1,\ \ x = 2,\ \ y = -1{,}5.$

Графік функції $z = x^2y + xy^2 + xy$, $\overline{D}: y = \dfrac{1}{x},\ \ x = 1,\ \ x = 2,\ \ y = -1{,}5$ зображено на рис. 11.5.

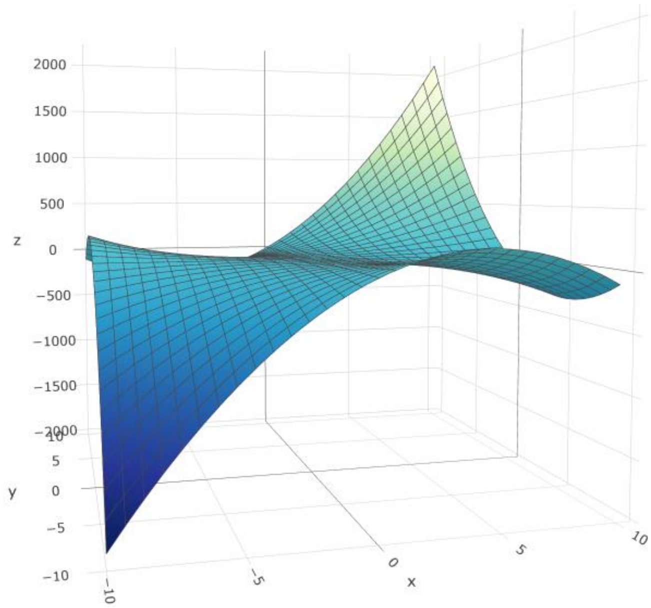


Рис. 11.5

I. Знаходимо стаціонарні точки, які належать області — (рис.11.6):

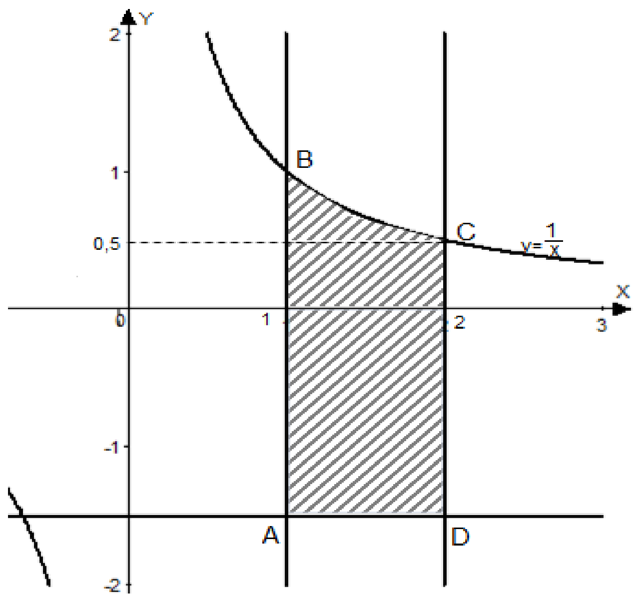


Рис. 11.6

$$z'_x = 2xy + y^2 + y = y\left(2x + y + 1\right),\ z'_y = x^2 + 2xy + x = x\left(x + 2y + 1\right).$$

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y\left(2x + y + 1\right) = 0, \\ x\left(x + 2y + 1\right) = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_3 = 0, \\ y_3 = -1, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_4 = -\dfrac{1}{3}, \\ y_4 = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Жодна із цих точок не належить області $\overline{}$.

II. Досліджимо зміну функції на межі області $\overline{}$, яка складається з чотирьох кривих AB, BC, CD, AD.

1) AB: $x = 1,\ y \in \left[-\dfrac{3}{2}; 1\right],\ z = y^2 + 2y.$

$$z'(x) = 2y + 2;\ z'(x) = 0\ \Rightarrow y = -1 \in \left[-\dfrac{3}{2}; 1\right].$$

$$z\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{3}{4},\ z\left(-1\right) = -1,\ z\left(1\right) = 3, \text{ тобто } z\left(1;1\right) = 3.$$

2) $BC: y = \dfrac{1}{x},\ x \in \left[1;2\right],\ z = x + \dfrac{1}{x} + 1.$

$$z'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2};\quad z'(x) = 0\ \Rightarrow\ x = \pm 1, -1 \notin \left[1;2\right];\qquad z(1) = 3,\ z(2) = 3{,}5,$$

тобто $z\left(1;1\right) = 3$, $z\left(2;\dfrac{1}{2}\right) = 3{,}5$.

3) CD: $x = 2,\ y \in \left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{2}\right],\ z = 6y + 2y^2.$

$$z'\left(y\right) = 4y + 6;\ z'\left(y\right) = 0\ \Rightarrow\ y = -\dfrac{3}{2};\ z\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -4{,}5;\ z\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3{,}5.$$

4) $DA: y = -\dfrac{3}{2},\ x \in \left[1;2\right],\ z = -\dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{3}{4}x.$

$$z'(x) = -3x + \frac{3}{4}; \;\; z'(x) = 0 \;\Rightarrow x = \frac{1}{4}, \; \frac{1}{4} \notin [1;\, 2];$$

$$z(1) = -\frac{3}{4}, \; z(2) = -4{,}5.$$

III. Серед одержаних значень на межі виберемо найбільше та найменше:

$$z\left(1; -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} = -0{,}75, \;\; z(1; -1) = -1, \;\; z(1;1) = 3, \; z\left(2; \frac{1}{2}\right) = 3{,}5.$$

$$z(1;\, 1) = 3, \qquad z\left(2; \frac{1}{2}\right) = 3{,}5, \; z\left(2; -\frac{3}{2}\right) = -4{,}5.$$

Отже, $\max\limits_{D} z(x;\, y) = z\left(2; \frac{1}{2}\right) = 3{,}5, \; \min\limits_{D} z(x;\, y) = z\left(2; -\frac{3}{2}\right) = -4{,}5.$ ■

2) $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $\quad \overline{D}: -1 \le x \le 2, \;\; y = -1, \;\; y = 3 - x.$ Ми вже досліджували цю функцію на глобальний екстремум у задачі 11.1. Однак там областю $\overline{D}$ був прямокутник. Дослідимо цю ж функцію на іншій області.

I. Стаціонарні точки $O(0;\, 0) \in \overline{D}$, $M_0(1;1) \in \overline{D}$ належать області і $z(0;\, 0) = 0, \; z(1;\, 1) = -1.$

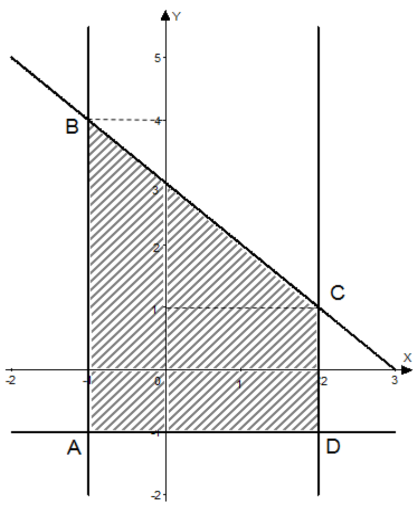


Рис. 11.7

II. Аналогічно як і в попередньому прикладі, дослідимо зміну функції на межі області $\overline{}$, яка складається з чотирьох відрізків.

1) $AB:\ x=1,\ y\in[-1;\ 4],\ z=y^3+3y-1.$

Знайдемо найбільше та найменше значення функції $z(y)$ на відрізку $[-1;\ 4]$, $z'(y)=3y^2+3>0$ функція зростає, тому $\max\limits_{[-1;\ 4]} z(y)=z(4)=75$, $\min\limits_{[-1;\ 4]} z(y)=z(-1)=-5$.

2) $BC:\ y=3-x, x\in[-1;2], z=x^3+(3-x)^3+3(x^2-3x).$

$$z'(x)=3x^2-3(3-x)^2+6x-9=24x-36; z'(x)=0\Rightarrow x=\frac{3}{2},$$

$$z(-1)=75,\ z\left(\frac{3}{2}\right)=0,\ z(2)=3.$$

3) $CD: x=2, y\in[-1;1], z=8+y^3-6y.$

$$z'(y)=3y^2-6; z'(y)=0\Rightarrow y=\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}\notin[-1;1]$$

$$z(1)=3, z(-1)=13.$$

4) $DA: y=-1,\ x\in[-1;2],\ z=x^3-1+3x$.

$z'(x)=3x^2+3>0$, функція зростає, тому: $\max\limits_{[-1;\ 2]} z(x)=z(2)=13,$

$$\min\limits_{[-1;\ 2]} z(x)=z(-1)=-5.$$

III. Серед одержаних значень на межі та у внутрішніх точках виберемо найбільше та найменше.

$$z(0;0)=0,\ z(1,1)=-1,\ z(-1;-1)=-5,\ z(-1;4)=75,\ z\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)=0.$$

Отже, $\max\limits_{D} z(x,y)=z(-1;4)=75$, $\min\limits_{D} z(x,y)=z(-1;-1)=-5$. ■

3) $z=x^2+y^2+xy+3x$, $\overline{D}:\ x\le 0,\ y\ge 0,\ y\le x+4$.

Графік функції $z=x^2+y^2+xy+3x$, $\overline{D}:\ x\le 0,\ y\ge 0,\ y\le x+4$ зображено на рис. 11.8.

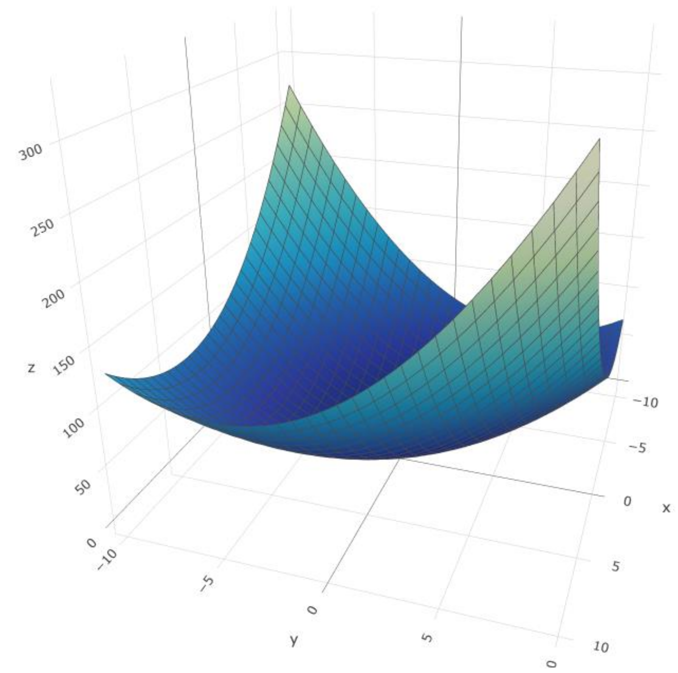


Рис. 11.8

I. Знаходимо стаціонарні точки, які належать області $\overline{D}$ (рис.11.9): $z'_x = 2x + y + 3,\ z'_y = 2y + x$.

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 3 = 0, \\ 2y + x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 1. \end{cases}$$

Точка $M_0(-2;1) \in \overline{D}$, $z(-2,1) = -3$.

II. Дослідимо зміну функції на межі області , яка складається з трьох відрізків.

1) $AB: y = x + 4,\ x \in [-4;0]$,

$$z = x^2 + (x+4)^2 + x(x+4) + 3x = 3x^2 + 15x + 16.$$

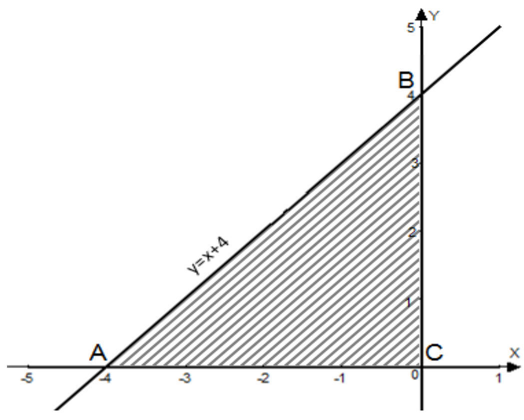


Рис. 11.9

$$z'(x)=6x+15;\ \ z'(x)=0\ \Rightarrow\ x=-2,5;$$

$$z(-2,5)=-2,75,\ z\left(-4\right)=4,\ \ z(0)=16\,.$$

2) $BC: x=0,\ \ y\in\left[0;4\right],\ \ z=y^2.$

$$z'(y)=2y;\ \ z'(y)=0\ \Rightarrow\ y=0\,;$$

$$z(0)=0,\ \ z(4)=16\,.$$

3) $AC: y=0,\ \ x\in\left[-4;0\right],\ \ z=x^2+3x\,.$

$$z'(x)=2x+3;\ \ z'(x)=0\ \Rightarrow\ x=-1,5\,;$$

$$z\left(-1,5\right)=-2,25,\ \ z\left(-4\right)=4,\ \ z\left(0\right)=0\,.$$

III. Серед одержаних значень на межі та у внутрішній точці виберемо найбільше та найменше.

$$z(0;0)=0,\ \ z(0,4)=16,\ \ z(-1,5;0)=-2,25,\ \ z(-4;0)=4,$$

$$z(-2,5;1,5)=-2,75,\ \ z(-2,1)=-3.$$

Отже, $\max\limits_{D} z\left(x;\,y\right)=z\left(0;\,4\right)=16$, $\min\limits_{D} z\left(x;\,y\right)=z\left(-\,2;\,1\right)=-3$. ■

4) $z=x^2+y^2-xy-x-2y$, $\overline{D}$: $x\geq0,\ \ y\geq0,\ \ x+2y-6\leq0\,.$

Графік функції $z=x^2+y^2-xy-x-2y$, $\overline{D}\!: x\geq0, y\geq0, x+2y-6\leq0$ зображено на рис. 11.10.

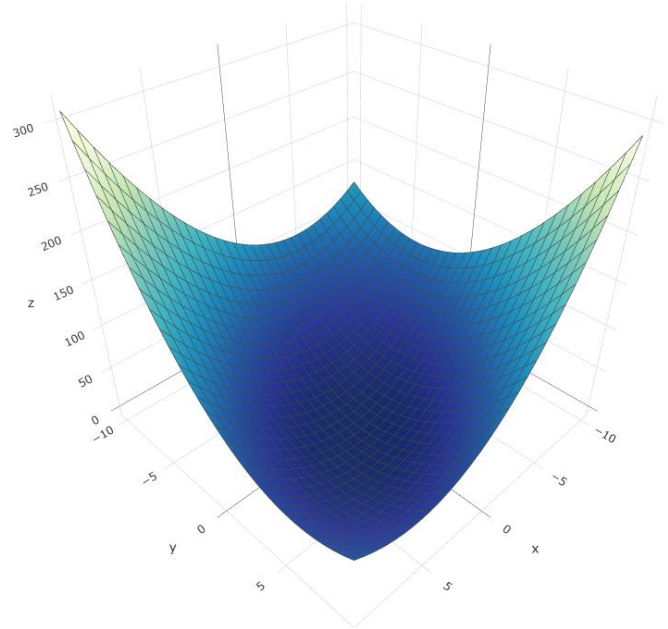


Рис. 11.10

I. Знаходимо стаціонарні точки, які належать області $\overline{D}$ (рис.11.11): $z'_x = 2x - y - 1$, $z'_y = 2y - x - 2$.

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 1 = 0, \\ 2y - x - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3}, \\ y_1 = \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

Точка $M_0\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right) \in \overline{D}$, $z\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right) = -\frac{7}{3}$.

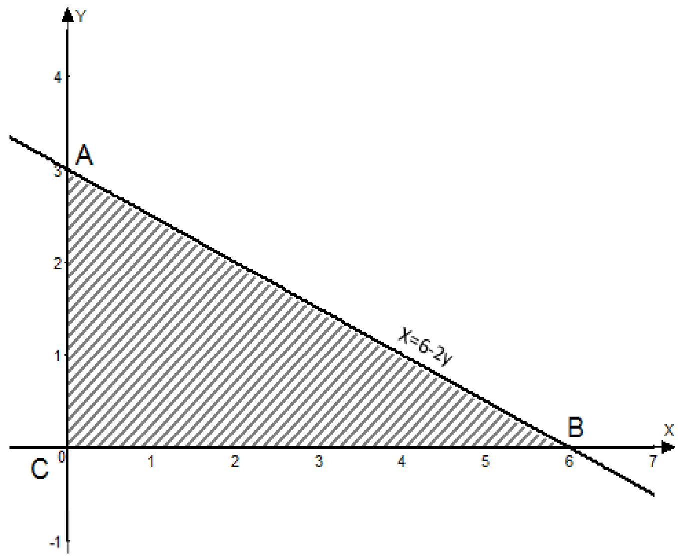


Рис. 11.11

II. Аналогічно як і в попередньому прикладі, дослідимо зміну функції на межі області $\overline{D}$, яка складається з трьох відрізків.

1) $AB: x=6-2y,\ \ y\in[0;3]$,

$$z=(6-2y)^2+y^2-(6-2y)y-(6-2y)-2y=7y^2-30y+30.$$

$$z'(y)=14y-30;\ \ z'(y)=0\ \Rightarrow y=\frac{15}{7}.$$

$$z\left(\frac{15}{7}\right)=-\frac{15}{7},\ \ z(0)=30,\ \ z(3)=3.$$

2) $BC: y=0,\ \ x\in[0;6],\ \ z=x^2-x.$

$$z'(x)=2x-1;\ \ z'(x)=0\ \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

$$z\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4},\ z(0)=0,\ z(6)=30.$$

3) $CA: x=0,\ \ y\in[0;3],\ \ z=y^2-2y.$

$z'(y)=2y-2;\ \ z'(y)=0\ \Rightarrow\ y=1,\ y=1\in[0;3];$

$z(1)=-1$, решту точок межі було знайдено вище.

III. Серед одержаних значень на межі виберемо найбільше та найменше.

$$z\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)=-\frac{7}{3},\ \ z(6;0)=30,\ \ z(0;3)=3,\ \ z\left(\frac{12}{7};\frac{15}{7}\right)=-\frac{15}{7},$$

$$z(0;0)=0,\ \ z\left(\frac{1}{2};0\right)=-\frac{1}{4},\ \ z(0,1)=-1.$$

Отже, $\max\limits_{D} z(x;y)=z(6;0)=30$, $\min\limits_{D} z(x;y)=z\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)=-\frac{7}{3}$. ■

5) $z=2x^3+4x^2+y^2-2xy,\ \ \overline{D}: y=x^2, y=4.$

Графік функції $z=2x^3+4x^2+y^2-2xy$, $\overline{D}: y=x^2, y=4$ зображено на рис. 11.12.

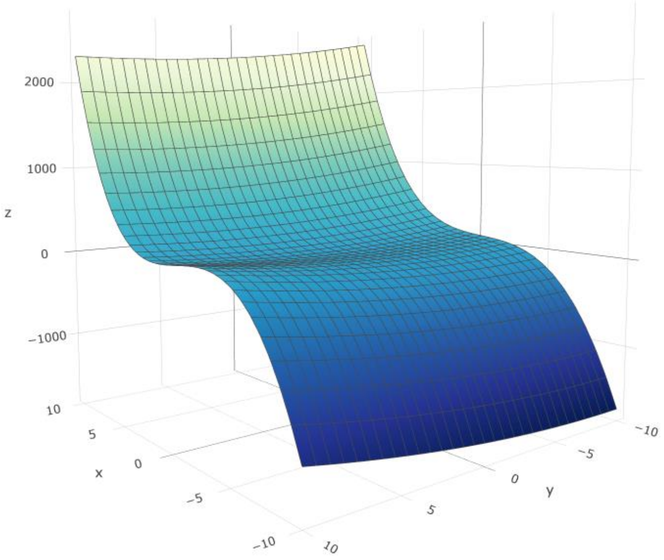


Рис. 11.12

I. Знаходимо стаціонарні точки, які належать області $\overline{D}$ (рис.11.13): $z'_x = 6x^2 + 8x - 2y$, $z'_y = 2y - 2x$.

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 8x - 2y = 0, \\ 2y - 2x = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \text{або} \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -1. \end{cases}$$

Точки $O(0;\,0) \in \overline{D}$, $M_0(-1;-1) \notin \overline{D}$, $z(0;0) = 0$.

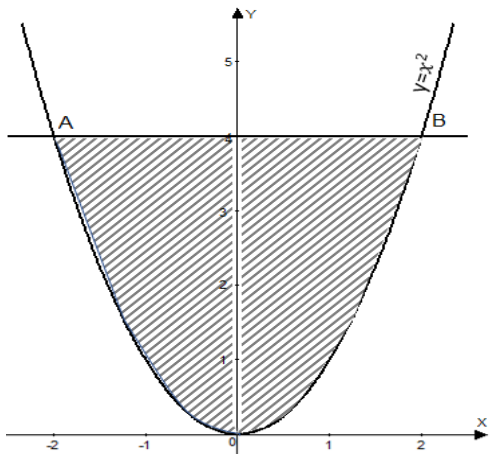


Рис. 11.13

II. Дослідимо зміну функції на межі області $\overline{D}$, яка складається з 2 ділянок.

1) $AB: y=4,\ x\in[-2;2],\ z=2x^3+4x^2+16-8x.$

$$z'(x)=6x^2+8x-8;\ z'(x)=0\ \Rightarrow x_1=-2,\ x_2=\frac{2}{3};$$

$$z(-2)=32,\ z(2)=32,\ z\left(\frac{2}{3}\right)=13\frac{1}{27}.$$

2) $AOB: y=x^2,\ x\in[-2;2],\ z=2x^3+4x^2+x^4-2x^3.$

$$z'(x)=4x^3+8x;\ z'(x)=0\ \Rightarrow x=0;\ z(0)=0,$$

а значення в точках -2, 2 знайдено в попередньому пункті.

III. Серед одержаних значень на межі виберемо найбільше та найменше.

$$z(0;0)=0,\ z(-2;4)=32,\ z(2;4)=32,\ z\left(\frac{2}{3};4\right)=13\frac{1}{27};$$

Отже, $\max\limits_D z(x;y)=z(-2;4)=z(2;4)=32$, $\min\limits_D z(x;y)=z(0;0)=0$. ■

6) $z=4-2x^2-y^2,\ \overline{D}: y=0, y=\sqrt{1-x^2}$.

Графік функції $z=4-2x^2-y^2,\ \overline{D}: y=0, y=\sqrt{1-x^2}$ зображено на рис. 11.14.

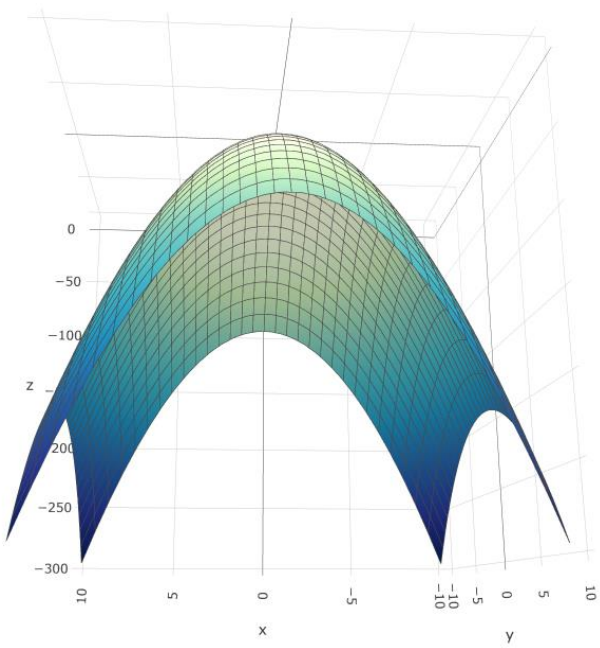


Рис. 11.14

I. Знаходимо стаціонарні точки, які належать області $\overline{D}$ (рис.11.15): $z'_x = -4x,\ z'_y = -2y$.

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x = 0, \\ -2y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Точки $O(0;\,0) \in \overline{D}$, $z(0;0) = 4$.

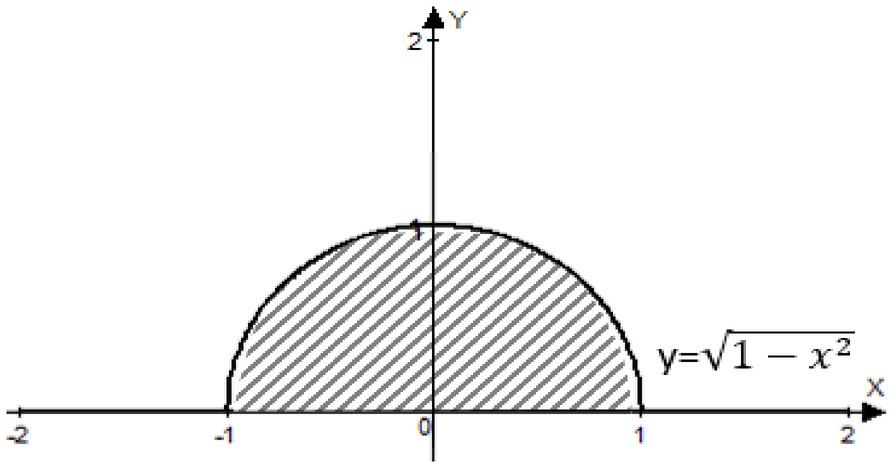


Рис. 11.15

II. Дослідимо зміну функції на межі області $\overline{D}$, яка складається з двох ділянок.

1) $y = 0,\ x \in [-1;1],\ z = 4 - 2x^2.$

$$z'(y) = -4x;\ z'(y) = 0\ \Rightarrow\ x = 0,\ 0 \in [-1;1]\ ;$$

$$z(0) = 4,\ z(-1) = 2,\ z(1) = 2.$$

2) $y = \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1;1],\ z = 4 - 2x^2 - (1 - x^2) = 3 - x^2$

$$z'(x) = -2x; z'(x) = 0 \Rightarrow x = 0;\quad z(0) = 3, z(-1) = 2, z(1) = 2.$$

III. Серед одержаних значень на межі виберемо найбільше та найменше.

$$z(0;0) = 4,\ z(-1;0) = 2,\ z(1;0) = 2,\ z(0;1) = 3.$$

Отже, $\max\limits_D z(x;\,y) = z(0;\,0) = 4$, $\min\limits_D z(x;\,y) = z(-1;\,0) = 2$. ■

Задача 11.3. *Знайти найбільше і найменше значення функції в замкнутій області* $\overline{D}$, *де* a, b *– довільні числа:*

1) $z = x^2 + y^2$, $\overline{D}: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1,\ (0 < b < a)$;

2) $z = x^2 - y^2 + 2a^2$, $\overline{D}: x^2 + y^2 \le a^2$.

Розв'язання.

1) $z = x^2 + y^2$, $\overline{D}: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$, $(0 < b < a)$.

Графік функції $z = x^2 + y^2$, $\overline{D}: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$, $(0 < b < a)$ зображено на рис. 11.16.

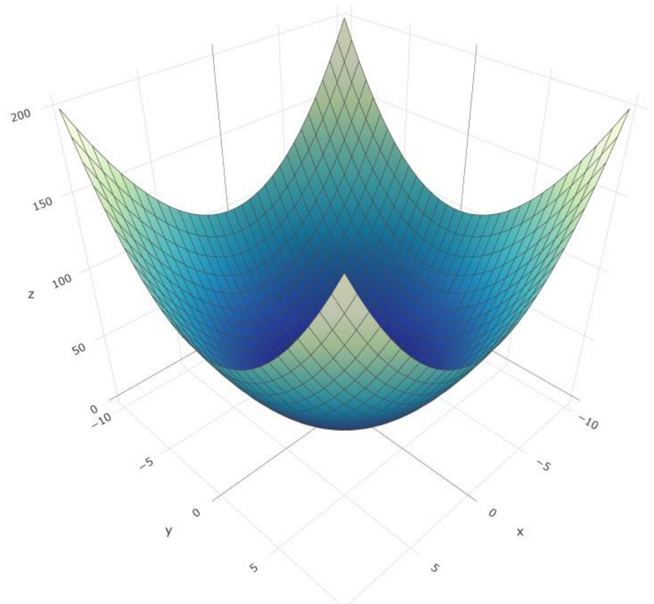


Рис. 11.16

I. Знаходимо стаціонарні точки, які належать області $\overline{D}$ (рис.11.17): $z'_x = 2x$, $z'_y = 2y$.

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

Точка $O(0;\,0) \in \overline{D}$, $z(0;\,0) = 0$.

II. $\overline{D}: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$, $(0 < b < a)$.

Тому задамо нашу функцію параметрично:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases} \Rightarrow$$

$$z = a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t = (a^2 - b^2)\cos^2 t + b^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t = (a^2 - b^2)\cos^2 t + b^2,$$

де $t \in [0; 2\pi]$.

Таким чином, одержали функцію однієї змінної, дослідимо її :

$$z'(t) = (a^2 - b^2) 2\cos t(-\sin t) = (b^2 - a^2)\sin 2t;$$

$$z'(y) = 0 \Rightarrow (b^2 - a^2)\sin 2t = 0 \Rightarrow \sin 2t = 0 \Rightarrow 2t = \pi n \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} n.$$

При

$$n = 0,\ t = 0 \in [0; 2\pi];$$

$$n = 1,\ t = \frac{\pi}{2} \in [0; 2\pi];$$

$$n = 2,\ t = \pi \in [0; 2\pi];$$

$$n = 3,\ t = \frac{3\pi}{2} \in [0; 2\pi];$$

$$n = 4,\ t = 2\pi \in [0; 2\pi];$$

$$n = 5,\ t = \frac{5\pi}{2} \notin [0; 2\pi].$$

Обчислимо значення функції в цих точках:

$$z(0) = a^2,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right) = b^2,\ z(\pi) = a^2,\ z\left(\frac{3\pi}{2}\right) = b^2,\ z(2\pi) = a^2.$$

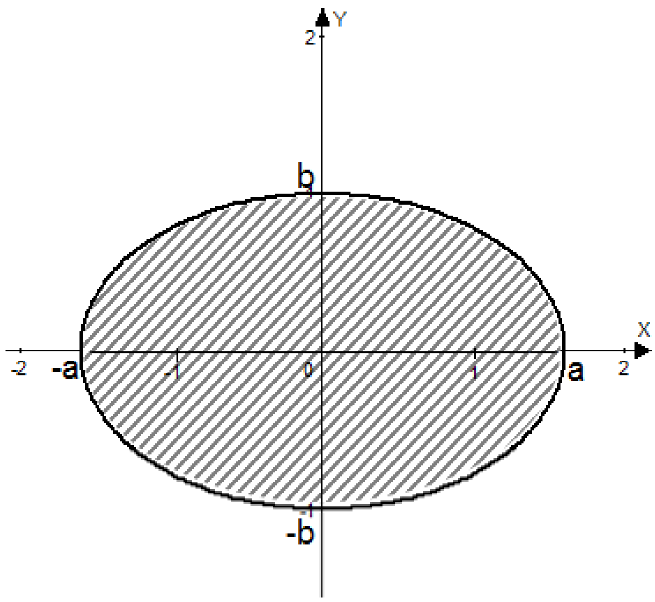


Рис. 11.17

III. Серед одержаних значень на межі та всередині області виберемо найбільше та найменше.

$z(0;0)=0,\ z(-a,0)=a^2,\ z(a;0)=a^2,\ z(0;-b)=b^2,\ z(0;b)=b^2.$

Отже, $\max\limits_D z(x;\ y)=z(-a;\ 0)=z(a;\ 0)=a^2,$

$\min\limits_D z(x;\ y)=z(0;\ 0)=0.$ ■

2) $z=x^2-y^2+2a^2,\ \overline{D}: x^2+y^2\le a^2.$

Графік функції $z=x^2-y^2+2a^2,\ \overline{D}: x^2+y^2\le a^2$ зображено на рис. 11.18.

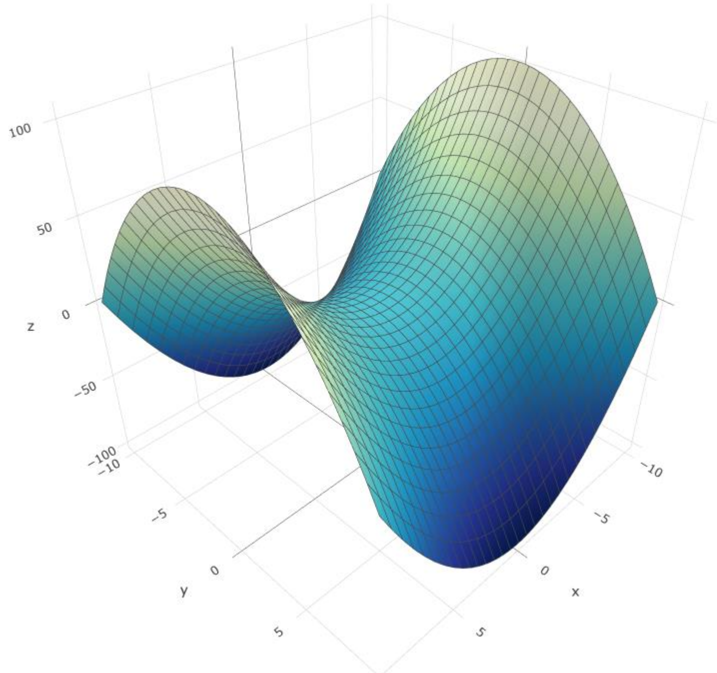


Рис. 11.18

I. Знаходимо стаціонарні точки, які належать області $\overline{D}$ (рис.11.19): $z'_x=2x,\ z'_y=-2y.$

$$\begin{cases} z'_x=0, \\ z'_y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=0, \\ -2y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$$

Точка $O(0;0)\in\overline{D},\ z(0;0)=2a^2.$

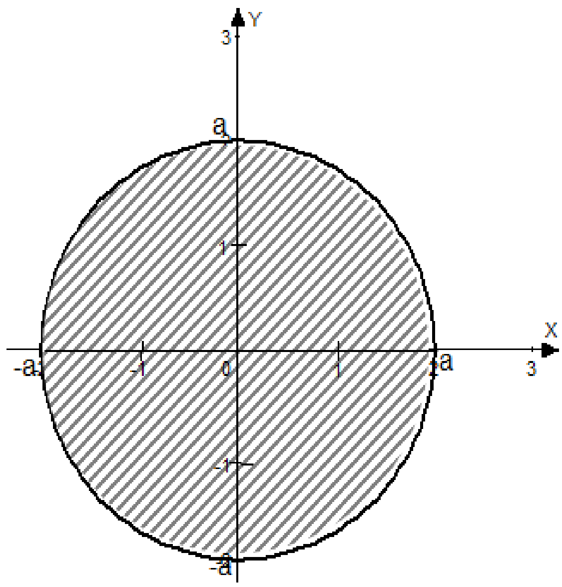


Рис. 11.19

II. Дослідимо зміну функції на межі області $\overline{D}: x^2 + y^2 = a^2$.

Виразимо з рівняння області одну змінну через іншу: $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$, підставивши це значення в задану функцію одержуємо:

$z = 2x^2 + a^2$, де $x \in [-a; a]$.

Дослідимо одержану функцію $z(x)$ на відрізку $[-a; a]$:

$z'(x) = 4x; z'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \in [-a; a]$;

Знайдемо значення функції в цій точці та на кінцях відрізка:

$z(0) = a^2, z(-a) = z(a) = 3a^2$.

III. Серед одержаних значень на межі та всередині області виберемо найбільше і найменше.

$z(0;0) = 2a^2,\ \ z(-a;0) = z(a;0) = 3a^2,\ \ z(0;-a) = z(0;a) = a^2,$

де ординати точок ми одержали, підставивши значення x:

$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$. Отже, $\max\limits_{D} z(x,y) = z(-a;0) = z(a;0) = 3a^2$,

$\min\limits_{D} z(x,y) = z(0;-a) = z(0;a) = a^2$. ■

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1. [3; 9; 11]** *Знайти найбільше і найменше значення функції на заданій множині:*

I. 1) $z = x - 2y - 3,\ \ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le x + y \le 1;$

2) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y,\ \ 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2;$

3) $z = x^3 + y^3 - 3xy,\ \ 0 \le x \le 2, |y| \le 1;$

4) $z = x^2 y(4 - x - y),\ \ x \ge 0,\ y \ge 0, 0 \le x + y \le 6;$

5) $z = e^{-x^2 - y^2}(2x^2 + 3y^2),\ \ x^2 + y^2 \le 4;$

6) $z = x^2 + y^2,\ \ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1\,(0 < b < a);$

7) $z = x^2 - y^2,\ \ x^2 + y^2 \le 2x;$

8) $z = x^2 y,\ \ x^2 + y^2 \le 1;$

II. 1) $u = x + 2y + 3z,\ \ x + y \le 3, x + y \le z, 3x + 3y \ge z, x \ge 0,\ y \ge 0;$

2) $u = x + y + z,\ \ x^2 + y^2 \le z \le 1;$

3) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2,\ \ x^2 + y^2 + z^2 \le 100;$

4) $z = (x - y^2)\sqrt[3]{(x-1)^2},\ \ \ y^2 \le x \le 2.$

✍**2.** *В кулю радіуса* R *вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.*

✍**3.** *З усіх трикутників з однаковою основою і тим же кутом при вершині знайти найбільший за площею.*

✍**4.** *Визначити розміри відкритого прямокутного акваріуму з заданою товщиною стінок* d *і об'ємом* V*, на виготовлення якого потрібно найменша кількість матеріалу.*

✍**5.** *У півсферу радіуса* R *вписати прямокутний паралелепіпед так, щоб його об'єм був найбільшим.*

✍**6.** *З усіх вписаних у коло радіуса* R *трикутників знайти той, що має найбільшу площу.*

§ 12. Умовний екстремум

Термінологічний словник ключових понять і тверджень

Умовний екстремум функції багатьох змінних	Conditional extremum of multivariable functions
Безумовний екстремум	Unconditional extremum
Метод множника Лагранжа	The methodof Lagrange multipliers

1. Пояснити поняття умовного екстремуму на прикладі функції двох змінних.

При дослідженні функції двох змінних $z = f(x, y)$ *на екстремум ми не накладали ніяких додаткових обмежень на змінні* x *і* y. *Важливо було лише те, щоб точка* (x, y) *не виходила за межі області задання цієї функції. Такі екстремуми називають* ***безумовними або вільними***.

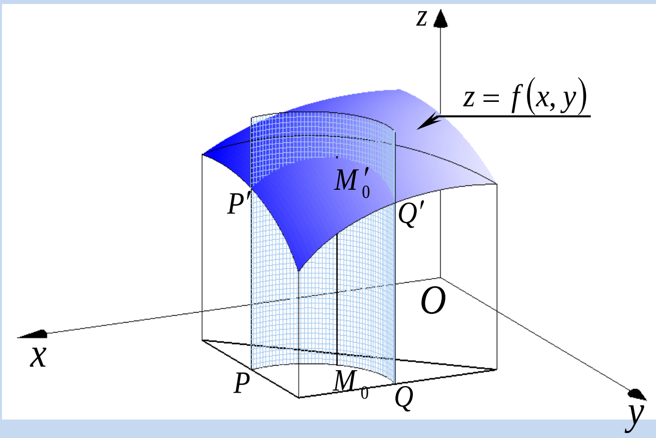


Рис. 12.1

Однак часто зустрічаються задачі на відшукання так званих ***умовних*** *екстремумів. Розглянемо функцію* $z = f(x, y)$, *і знайдемо екстремум при умові* $\varphi(x, y) = 0$.

Геометрично це означає знайти екстремум функції $z = f(x, y)$, *коли точка* (x, y) *рухається у площині* xOy *тільки вздовж кривої* $\varphi(x, y) = 0$ *(на рисунку 12.1 це крива* PM_0Q*). В цей час відповідна точка на поверхні буде рухатись вздовж кривої*

$P'M_0'Q'$, яка є лінією перетину поверхні $z=f(x,y)$ і циліндра $\varphi(x,y)=0$. Найвище положення точки на лінії $P'M_0'Q'$ і буде умовним максимумом.

2. Пригадати способи знаходження умовного екстремуму функції двох змінних.

Перший спосіб. *Припустимо, що при заданих x та y рівняння $\varphi(x;y)=0$ визначає змінну y як однозначну диференційовну функцію від змінної $x: y=y(x)$. Підставимо одержане значення y в функцію $z=f(x;y)$, одержуємо функцію однієї змінної $x: z=f(x;y(x))=\Phi(x)$.*

Другий спосіб. *Якщо розглядати функцію $z=f(x;y)$ як складену, в якої $y=y(x)$ і $f_y'(x;y)\neq 0$, то необхідна умова екстремуму набере вигляду:*

$$0=df(x;y)=f_x'dx+f_y'dy=f_x'dx+f_y'\frac{dy}{dx}dx=f_x'dx+f_y'\left(-\frac{\varphi_x'}{\varphi_y'}\right)dx,$$

тобто $\left(f_x'-f_y'\dfrac{\varphi_x'}{\varphi_y'}\right)dx=0$.

Оскільки $dx\neq 0$, то перший множник повинен дорівнювати нулю. Отже, маємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} f_x'dx-f_y'\dfrac{\varphi_x'}{\varphi_y'}=0, \\ \varphi(x;y)=0. \end{cases}$$

для визначення невідомих x та y.

Проте такий спосіб незручний у тому розумінні, що немає симетрії щодо змінних x та y, адже одна з них тлумачиться як незалежна змінна, а друга залежна.

3. У чому полягає метод Лагранжа для функції двох змінних?

Третій спосіб. *Цей метод запропонував свого часу Лагранж. Тут змінні зберігають однакову роль.*

Нехай $M_0(x_0; y_0)$ *– точка умовного екстремуму функції* $z = f(x; y)$ *з рівнянням зв'язку* $\varphi(x; y) = 0$. *Якщо* $y = y(x)$ *– розв'язок останнього рівняння, то* $\varphi(x; y(x)) = 0$, *а диференціал функції* $z = f(x; y)$ *в точці* $M_0(x_0; y_0)$ *повинен дорівнювати нулю:*

$$df(M_0) = 0 \Leftrightarrow f'_x(M_0)dx + f'_y(M_0)dy = 0 \quad \textbf{(12.1)}$$

З рівняння зв'язку також знаходимо диференціал у точці $M_0(x_0; y_0)$*:*

$$d\varphi(M_0) = 0 \Leftrightarrow \varphi'_x(M_0)dx + \varphi'_y(M_0)dy = 0 \quad \textbf{(12.2)}$$

Домножимо (12.2) на невизначений поки множник λ *і додамо до (12.1), одержимо:*

$$df(M_0) + \lambda d\varphi(M_0) = 0 \Leftrightarrow (f'_x(M_0) + \lambda d\varphi'_x(M_0))dx +$$
$$+ (f'_y(M_0) + \lambda d\varphi'_y(M_0))dy = 0,$$

звідки $f'_x(M_0) + \lambda d\varphi'_x(M_0) = 0$, $f'_y(M_0) + \lambda d\varphi'_y(M_0) = 0$ **(12.3)**

Умови (12.3) виражають необхідні умови безумовного екстремуму функції $f(x; y) + \lambda\varphi(x; y)$.

Отже, точка умовного екстремуму функції $z = f(x; y)$ *з рівнянням зв'язку* $\varphi(x; y) = 0$ *є обов'язково стаціонарною точкою функції* $F(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y)$, *де* λ *– деякий коефіцієнт.*

Правило знаходження умовного екстремуму. *Для того, щоб знайти точки, які можуть бути точками умовного екстремуму функції* $z = f(x; y)$ *з рівнянням зв'язку* $\varphi(x; y) = 0$, *потрібно скласти допоміжну функцію* $F(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y)$, *і знайти її стаціонарні точки з системи рівнянь:*

$$\begin{cases} F'_x(x; y; \lambda) = 0, \\ F'_y(x; y; \lambda) = 0, \\ F'_\lambda(x; y; \lambda) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(M_0) + \lambda\varphi'_x(M_0) = 0, \\ f'_y(M_0) + \lambda\varphi'_y(M_0) = 0, \quad (12.4) \\ \varphi(x; y) = 0. \end{cases}$$

Цей спосіб називається методом невизначеного множника Лагранжа. Розв'язки системи (12.4), тобто пари $(x;\, y)$*, будуть точками можливого умовного екстремуму. Тому це необхідно дослідити, адже (12.4) є лише необхідними умовами, але не достатніми.*

4. Пригадати способи знаходження умовного екстремуму функції багатьох змінних.

Задача визначення умовного екстремуму функції $f(x_1;\, x_2;...;\, x_n)=0$ *при наявності умов зв'язку* $\varphi_n(x_1,\, x_2,...,\, x_n)=0$ *зводиться до знаходження звичайного екстремуму для функції Лагранжа:*

$$L(x_1;\, x_2;...;\, x_n)=f(x_1;\, x_2;...;\, x_n)+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k(x_1;\, x_2;...;\, x_n),$$

де $\lambda_k(k=1;...;\, n)$ *– константи. Тут припускається, що всі, включені до розгляду функції мають диференціали другого порядку. Таким чином, питання про існуванні та характер умовного екстремуму в найпростішому випадку розв'язується на основі дослідження знаку другого диференціалу* $d^2L(x_1;\, x_2;...;\, x_n)$ *в стаціонарній точці* $(x_1;\, x_2;...;\, x_n)$ *функції* $L(x_1;\, x_2;...;\, x_n)$ *за умови, що змінні* $dx_1,\, dx_2,...,\, dx_n$ *пов'язані співвідношеннями* $d\varphi_n(x_1;\, x_2;...;\, x_n)=0$*, тобто:*

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial\varphi_n(x_1;...;\, x_n)}{\partial x_i}dx_i=0.$$

Приклади розв'язування вправ

Задача 12.1. *Дослідити задані функції на умовний екстремум при вказаних умовах зв'язку:*

1) $z=xy,\, x+y-1=0$;

2) $z=x^2+y^2,\, 3x+2y-6=0$;

3) $z = 5 - 3x - 4y,\ x^2 + y^2 = 25$;

4) $z = xy,\ x^2 + y^2 = 1$;

5) $z = 2\cos 2x + 3\cos 2y,\ x - y = \dfrac{\pi}{4}$;

6) $u = 2x + y - z + 1,\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 22$.

Розв’язання.

1) $z = xy,\ x + y - 1 = 0$.

Графік функції $z = xy,\ x + y - 1 = 0$ зображено на рис. 12.2.

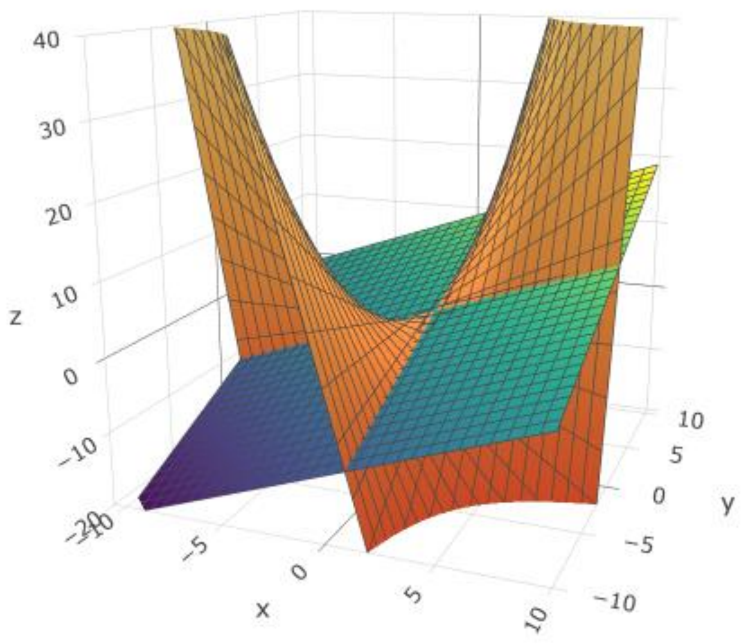


Рис. 12.2

Використаємо перший спосіб знаходження умовного екстремуму. З умови зв’язку $x + y - 1 = 0$ виразимо y через x і підставимо у функцію $z = xy$, яку досліджуватимемо уже на безумовний екстремум.

Маємо: $y = 1 - x \Rightarrow z = x(1 - x) = x - x^2$. Одержали функцію однієї змінної, досліджуємо її на безумовний екстремум, тобто знаходимо критичні точки і досліджуємо зміну знаку похідної і поведінку функції при переході через критичні точки.

$$z'(x)=1-2x,\quad z'(x)=0\ \Rightarrow 1-2x=0,\quad -2x=-1,\quad x=\frac{1}{2}.$$

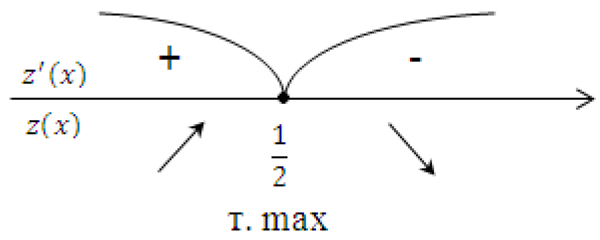


Рис. 12.2

$$z_{\max}=z\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Отже, $z_{\max}=z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$. ■

2) $z=x^2+y^2, 3x+2y-6=0$.

Графік функції $z=x^2+y^2, 3x+2y-6=0$ зображено на рис. 12.3.

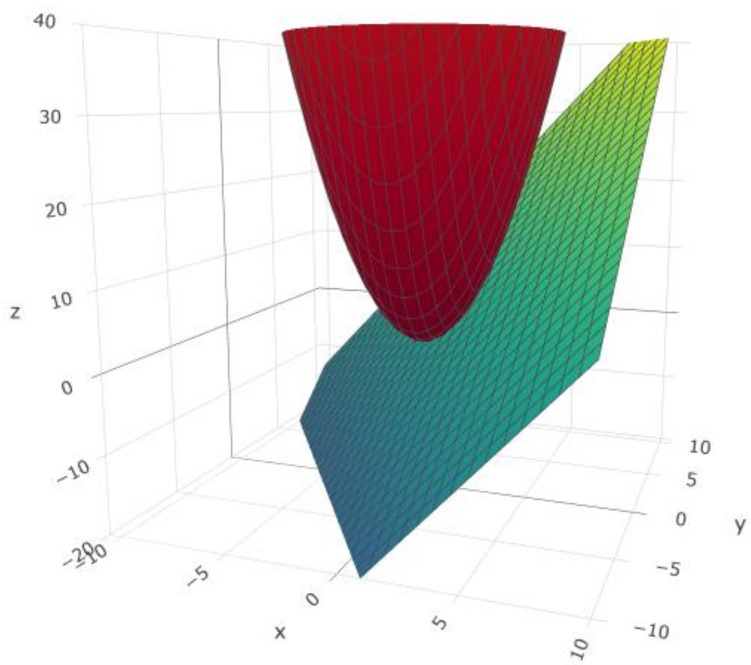


Рис. 12.3

Скористаємося першим способом знаходження умовного екстремуму, аналогічно до прикладу 1), маємо з умови зв'язку:

$$3x+2y-6=0 \Rightarrow y=\frac{6-3x}{2}.$$

Функція набирає вигляду:

$$z=x^2+\left(\frac{6-3x}{2}\right)^2=x^2+\frac{36-36x+9x^2}{4}=\frac{13x^2-36x+36}{4}=\frac{13}{4}x^2-9x+9.$$

Одержали функцію однієї змінної, тому знаходимо похідну функції та її критичні точки, що допоможе визначити умовний екстремум початкової функції.

Знаходимо критичні точки:

$$z'=\frac{13}{2}x-9,\quad \frac{13}{2}x-9=0,\quad \frac{13}{2}x=9,\quad x=\frac{18}{13}.$$

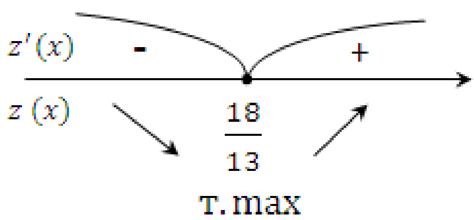


Рис. 12.4

$$z_{\min}=z\left(\frac{18}{13}\right)=\frac{13}{4}\cdot\left(\frac{18}{13}\right)^2-9\cdot\frac{18}{13}+9=\frac{81}{13}-\frac{162}{13}+\frac{117}{13}=\frac{36}{13}.$$

Отже, умовний екстремум досягається у точці з координатами

$$x=\frac{18}{13},\, y=\frac{6-3x}{2}=\frac{6-3\cdot\frac{18}{13}}{2}=\frac{78-54}{26}=\frac{12}{13},\ z_{\min}=z\left(\frac{18}{13};\frac{12}{13}\right)=\frac{36}{13}.\blacksquare$$

3) $z=5-3x-4y,\ x^2+y^2=25.$

Графік функції $z = 5 - 3x - 4y,\ x^2 + y^2 = 25$ зображено на рис. 12.5.

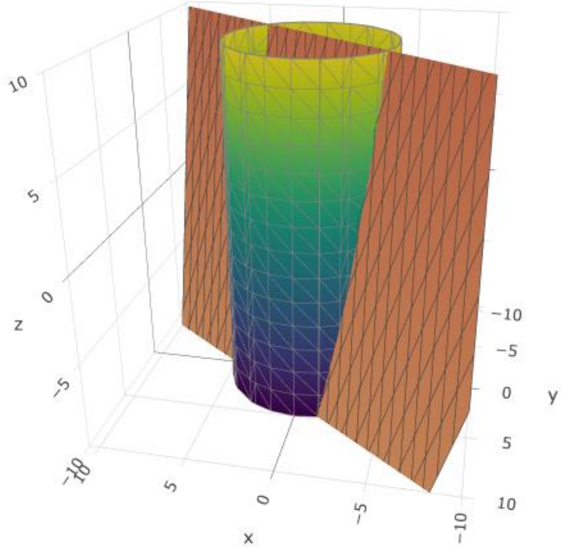


Рис. 12.5

Використаємо метод Лагранжа. Утворимо функцію:

$F(x;\, y;\, \lambda) = 5 - 3x - 4y + \lambda(x^2 + y^2 - 25).$

I. Спочатку знаходимо точки можливого умовного екстремуму, тобто частинні похідні утвореної функції прирівнюємо до нуля:

$$F'_x(x;\, y;\, \lambda) = -3 + 2\lambda x;$$

$$F'_y(x;\, y;\, \lambda) = -4 + 2\lambda y;$$

$$F'_\lambda(x;\, y;\, \lambda) = x^2 + y^2 - 25.$$

$$\begin{cases} -3 + 2\lambda x = 0, \\ -4 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 25 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2\lambda}, \\ y = \dfrac{2}{\lambda}, \\ \dfrac{9}{4\lambda^2} + \dfrac{4}{\lambda^2} - 25 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2\lambda}, \\ y = \dfrac{2}{\lambda}, \\ \dfrac{9}{4\lambda^2} + \dfrac{16}{4\lambda^2} - \dfrac{100}{4\lambda^2} = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2\lambda}, \\ y = \dfrac{2}{\lambda}, \\ \dfrac{25 - 100\lambda^2}{4\lambda^2} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2\lambda}, \\ y = \dfrac{2}{\lambda}, \\ -100\lambda^2 = -25,\ \lambda \neq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2\lambda}, \\ y = \dfrac{2}{\lambda}, \\ \lambda^2 = \dfrac{1}{4}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2\lambda}, \\ y = \dfrac{2}{\lambda}, \\ \lambda_1 = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \text{або} \begin{cases} x = \dfrac{3}{2\lambda}, \\ y = \dfrac{2}{\lambda}, \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 4, \\ \lambda_1 = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \text{або} \begin{cases} x_2 = -3, \\ y_2 = -4, \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Отже, одержали дві стаціонарні точки $M_1(3;\,4)$ і $M_2(-3;-4)$, в яких функція може мати екстремум при $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ і $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$ відповідно.

II. Перевіримо достатні умови існування умовного екстремуму, тут знаходимо диференціал другого порядку:

$$F''_{x^2} = 2\lambda,\ F''_{xy} = 0,\ F''_{y^2} = 2\lambda,\ d^2F = 2\lambda\left(dx^2 + dy^2\right).$$

Знайдемо диференціал першого порядку функції $\varphi = x^2 + y^2 - 25$: $d\varphi = 2xdx + 2ydy.$

У точці $M_1(3;\,4)$ і $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ маємо:

$$d\varphi(M_1) = 0 \Rightarrow 6dx + 8dy = 0 \Rightarrow dy = -\frac{3}{4}dx.$$

$$d^2F(M_1) = 2\cdot\frac{1}{2}\left(dx^2 + \frac{9}{16}dx^2\right) = \frac{25}{16}dx^2 > 0 \Rightarrow$$

$M_1(3;\,4)-$ точка умовного мінімуму.

У точці $M_2(-3;-4)$ і $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$ маємо:

$$d\varphi(M_2) = 0 \Rightarrow -6dx - 8dy = 0 \Rightarrow dy = -\frac{3}{4}dx.$$

$$d^2F(M_2)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(dx^2+\frac{9}{16}dx^2\right)=-\frac{25}{16}dx^2<0\Rightarrow$$

$M_2(-3;-4)-$ точка умовного максимуму. ■

4) $z=xy,\ x^2+y^2=1.$

Графік функції $z=xy,\ x^2+y^2=1$ зображено на рис. 12.6.

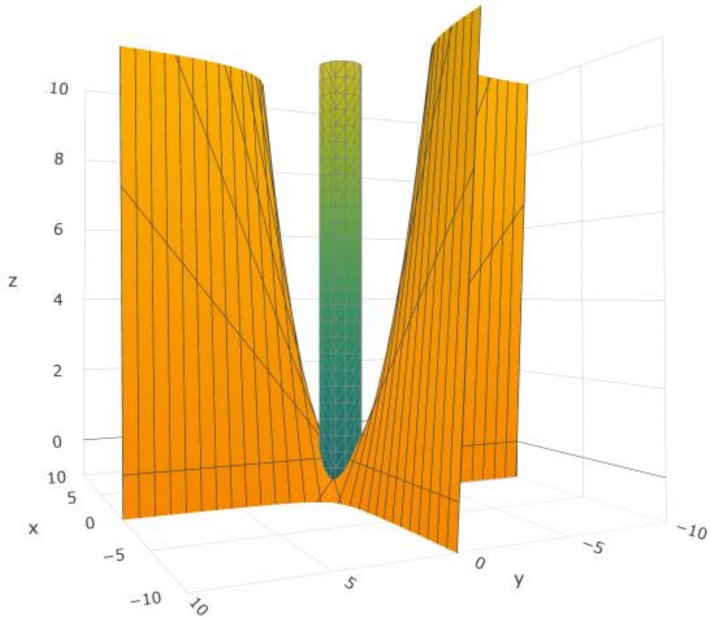


Рис. 12.6

Оскільки у даному прикладі умовою зв'язку є многочлен другого порядку, то нам зручніше використати метод Лагранжа. Послідовність дій аналогічна до попереднього прикладу. Нехай маємо функцію:

$$F(x;\,y;\,\lambda)=xy+\lambda\left(x^2+y^2-1\right).$$

I. Знаходимо частинні похідні:

$$F'_x(x;\,y;\,\lambda)=y+2\lambda x;\ \ F'_y(x;\,y;\,\lambda)=x+2\lambda y;\ \ F'_\lambda(x;\,y;\,\lambda)=x^2+y^2-1.$$

Прирівняємо знайдені похідні до нуля, в результаті одержимо можливі точки умовного екстремуму:

$$\begin{cases} y+2\lambda x=0, \\ x+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2-1=0, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=-2\lambda y, \\ y+2\lambda(-2\lambda y)=0, \\ x^2+y^2-1=0, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=-2\lambda y, \\ y\left(1-4\lambda^2\right)=0, \\ x^2+y^2-1=0, \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=0,\\x=-2\lambda y,\\x^2+y^2-1=0,\end{cases}\\\begin{cases}1-4\lambda^2=0,\\x=-2\lambda y,\\x^2+y^2-1=0,\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=0,\\x=0,\\0=1,\end{cases}\\\begin{cases}\lambda^2=\frac{1}{4},\\x=-2\lambda y,\\x^2+y^2-1=0,\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\lambda_1=\frac{1}{2},\\x_1=-y,\\2y^2=1,\end{cases}\\\begin{cases}\lambda_2=-\frac{1}{2},\\x_2=y,\\2y^2=1,\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\lambda_1=\frac{1}{2},\\x_1=-y,\\y^2=\frac{1}{2},\end{cases}\\\begin{cases}\lambda_2=-\frac{1}{2},\\x_2=y,\\y^2=\frac{1}{2},\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda_{11}=\frac{1}{2},\\x_{11}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\\y_{11}=\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}\text{ або }\begin{cases}\lambda_{12}=\frac{1}{2},\\x_{12}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\y_{12}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}\text{ або}\begin{cases}\lambda_{21}=-\frac{1}{2},\\x_{21}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\y_{21}=\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}\text{або}\begin{cases}\lambda_{22}=-\frac{1}{2},\\x_{22}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\\y_{22}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

Отже, одержали чотири точки:

$$M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right), M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right), M_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

в яких функція може мати екстремум при $\lambda_1=\frac{1}{2}$ і $\lambda_2=-\frac{1}{2}$ відповідно.

II. Перевіримо достатні умови:

$$F''_{x^2}=2\lambda,\ \ F''_{xy}=1,\ \ F''_{y^2}=2\lambda,\ \ d^2F=2\lambda dx^2+1dxdy+2\lambda dy^2.$$

Знайдемо диференціал першого порядку функції φ:

$d\varphi=2xdx+2ydy.$

У точці $M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ і $\lambda_1=\frac{1}{2}$ маємо:

$$d\varphi(M_1)=0\Rightarrow 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}dy=0\Rightarrow dy=dx.$$

$$d^2F(M_1)=2\cdot\frac{1}{2}dx^2+dx\cdot dx+2\cdot\frac{1}{2}dx^2=3dx^2>0\Rightarrow$$

$M_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-$ точка умовного мінімуму.

У точці $M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ і $\lambda_1=\frac{1}{2}$ маємо:

$$d\varphi(M_2)=0\Rightarrow 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}dx+2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dy=0\Rightarrow dy=dx.$$

$$d^2F(M_2)=2\cdot\frac{1}{2}dx^2+dx\cdot dx+2\cdot\frac{1}{2}dx^2=3dx^2>0\Rightarrow$$

$M_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-$ також є точкою умовного мінімуму.

У точці $M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ і $\lambda_2=-\frac{1}{2}$ маємо:

$$d\varphi(M_3)=0\Rightarrow 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}dx+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}dy=0\Rightarrow dy=-dx.$$

$$d^2F(M_3)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dx^2+dx\cdot(-dx)+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dx^2=-3dx^2<0\Rightarrow$$

$M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-$ точка умовного максимуму.

У точці $M_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, і $\lambda_2=-\frac{1}{2}$ маємо:

$$d\varphi(M_4)=0\Rightarrow 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dx+2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)dy=0\Rightarrow dy=-dx.$$

$$d^2F(M_4)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dx^2+dx\cdot(-dx)+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dx^2=-3dx^2<0\Rightarrow$$

$M_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-$ точка умовного максимуму. ■

5) $z = 2\cos 2x + 3\cos 2y,\ x - y = \dfrac{\pi}{4}.$

Графік функції $z = 2\cos 2x + 3\cos 2y,\ x - y = \dfrac{\pi}{4}$ зображено на рис. 12.7.

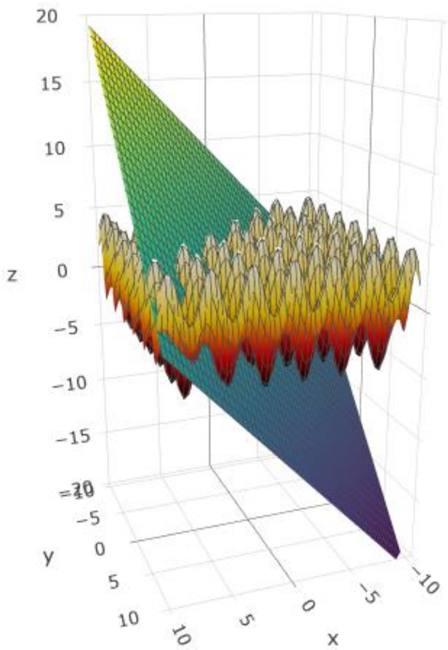


Рис. 12.7

Використаємо перший спосіб знаходження умовного екстремуму. З умови зв'язку $x - y = \dfrac{\pi}{4}$ виразимо y через x і підставимо у функцію $z = 2\cos 2x + 3\cos 2y$, маємо:

$$y = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = 2\cos 2x + 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\cos 2x + 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 2\cos 2x + 3\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right) = 2\cos 2x + 3\sin 2x.$$

Одержали функцію однієї змінної, тому досліджуємо її на безумовний екстремум, тобто знаходимо похідну та критичні точки, визначаємо, як змінюється одержана функція на проміжках числової прямої. Зауважимо, що наша функція є періодичною з періодом $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$, тому достатньо дослідити зміну знаку похідної на проміжку довжиною π:

$$z'(x) = -4\sin 2x + 6\cos 2x \Rightarrow -4\sin 2x + 6\cos 2x = 0;$$

$$\frac{-4\sin 2x}{2\cos 2x} + \frac{6\cos 2x}{2\cos 2x} = 0; \quad 2\,\mathrm{tg}\,2x - 3 = 0; \quad \mathrm{tg}\,2x = \frac{3}{2};$$

$$2x = \mathrm{arctg}\frac{3}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}; \qquad x = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{3}{2} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

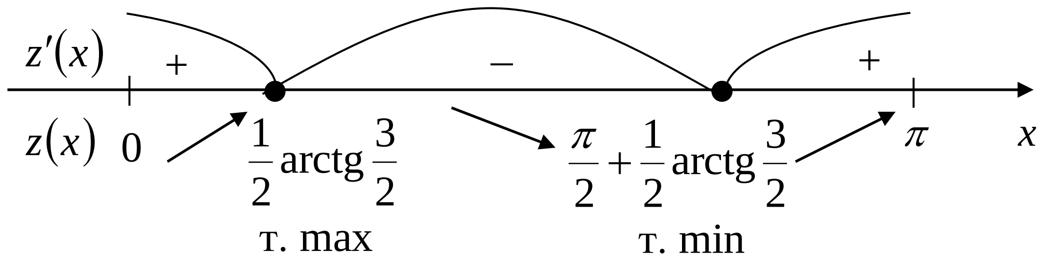


Рис. 12.8

Обчислимо значення функції у точках екстремумів:

$$z_{\max} = z\left(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{3}{2} + \pi n\right) = 2\cos\left(\mathrm{arctg}\frac{3}{2}\right) + 3\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{3}{2}\right) =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} \\ \sin\alpha = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} \end{array}\right| = \frac{2}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\left(\mathrm{arctg}\dfrac{3}{2}\right)}} + \frac{3\,\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\dfrac{3}{2}\right)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\left(\mathrm{arctg}\dfrac{3}{2}\right)}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{9}{4}}} + \frac{3\cdot\dfrac{3}{2}}{\sqrt{1+\dfrac{9}{4}}} = \frac{2+\dfrac{9}{2}}{\dfrac{\sqrt{13}}{2}} = \sqrt{13}.$$

$$z_{\min} = z\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{3}{2} + \pi n\right) = 2\cos\left(\pi + \mathrm{arctg}\frac{3}{2}\right) + 3\sin\left(\pi + \mathrm{arctg}\frac{3}{2}\right) =$$

$$= -2\cos\left(\mathrm{arctg}\frac{3}{2}\right) - 3\sin\left(\mathrm{arctg}\frac{3}{2}\right) = -\sqrt{13}. \ \blacksquare$$

6) $u = 2x + y - z + 1,\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 22.$

Дана функція є функцією трьох змінних. Для знаходження умовного екстремуму функції використаємо метод невизначених множників Лагранжа. Послідовність дій згадується в наведеному прикладі 4).

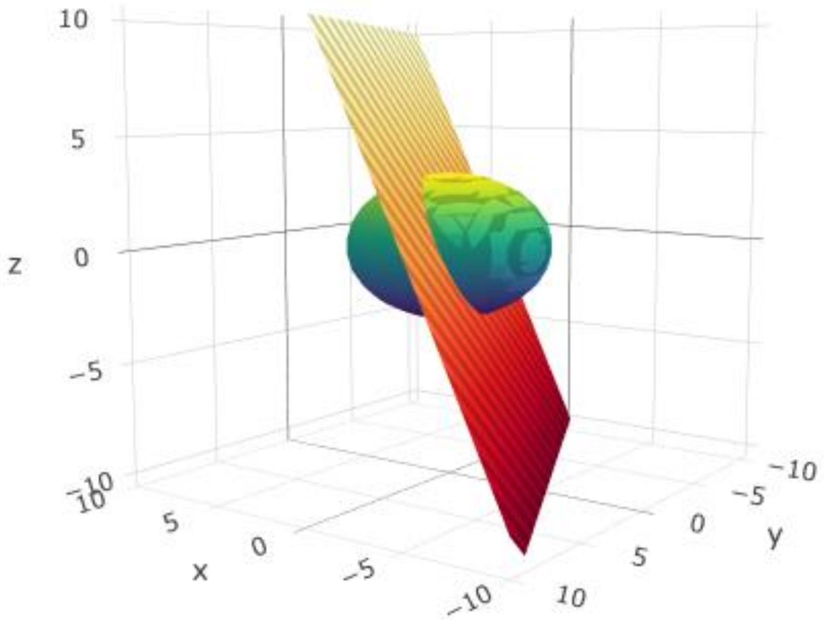


Рис. 12.9

Нехай маємо функцію:

$$F(x;\, y;\, z;\, \lambda) = 2x + y - z + 1 + \lambda\left(x^2 + y^2 + 2z^2 - 22\right).$$

I. Знаходимо частинні похідні:

$$F'_x(x;\, y;\, z;\, \lambda) = 2 + 2\lambda x;$$

$$F'_y(x;\, y;\, z;\, \lambda) = 1 + 2\lambda y;$$

$$F'_z(x;\, y;\, z;\, \lambda) = -1 + 4\lambda z;$$

$$F'_\lambda(x;\, y;\, z;\, \lambda) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 22.$$

Прирівняємо знайдені похідні до нуля, в результаті одержимо можливі точки умовного екстремуму:

$$\begin{cases} 2+2\lambda x=0, \\ 1+2\lambda y=0, \\ -1+4\lambda z=0, \\ x^2+y^2+2z^2-22=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{\lambda}, \\ y=-\dfrac{1}{2\lambda}, \\ z=\dfrac{1}{4\lambda}, \\ x^2+y^2+2z^2-22=0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{\lambda}, \\ y=-\dfrac{1}{2\lambda}, \\ z=\dfrac{1}{4\lambda}, \\ \dfrac{1}{\lambda^2}+\dfrac{1}{4\lambda^2}+2\cdot\dfrac{1}{16\lambda^2}-22=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{\lambda}, \\ y=-\dfrac{1}{2\lambda}, \\ z=\dfrac{1}{4\lambda}, \\ \dfrac{11-22\cdot 8\lambda^2}{8\lambda^2}=0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=-4, \\ y_1=-2, \\ z_1=1, \\ \lambda_1=\dfrac{1}{4}, \end{cases} \text{або} \begin{cases} x_2=4, \\ y_2=2, \\ z_2=-1, \\ \lambda_2=-\dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

Отже, одержали дві точки: $M_1(-4;-2;1)$ і $M_2(4;2;-1)$, в яких функція може мати екстремум при $\lambda_1=\dfrac{1}{4}$ і $\lambda_2=-\dfrac{1}{4}$ відповідно.

II. Перевіримо достатні умови.

Оскільки характер екстремуму в знайдених точках визначають не тільки за допомогою знаку другого диференціала, а й за допомогою головних мінорів матриці A, яка має вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Знаходимо потрібні частинні похідні та підставляємо їх в матрицю А:

$$F''_{x^2}=2\lambda,\quad F''_{y^2}=2\lambda,\quad F''_{z^2}=4\lambda,\quad F''_{xy}=0,\quad F''_{xz}=0,\quad F''_{yz}=0,$$

$$u'_x=2x,\quad u'_y=2y,\quad u'_z=4z.$$

Відповідно матриця А набуває такого вигляду:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y & 4z \\ 2x & 2\lambda & 0 & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda & 0 \\ 4z & 0 & 0 & 4\lambda \end{pmatrix}.$$

Тепер необхідно найти знаки головних мінорів цієї матриці, в результаті скористаємося таким правилом (критерій Сильвестра):

- якщо головні мінори цієї матриці одночасно додатні або від'ємні, то досліджувана стаціонарна точка є точкою умовного мінімуму заданої функції;
- якщо знаки головних мінорівчергуються, то досліджувана стаціонарна точка є точкою умовного максимуму заданої функції.

В даному прикладі маємо одну умову зв'язку та три змінних, тому необхідно знайти знаки третього та четвертого головних мінорів:

$$A_3=\begin{vmatrix}0 & 2x & 2y\\ 2x & 2\lambda & 0\\ 2y & 0 & 2\lambda\end{vmatrix}=0\cdot 2\lambda\cdot 2\lambda+2x\cdot 0\cdot 2y+2y\cdot 2x\cdot 0-2y\cdot 2\lambda\cdot 2y-$$

$$-2x\cdot 2x\cdot 2\lambda-0\cdot 0\cdot 0=-8\lambda y^2-8\lambda x^2=-8\lambda\left(x^2+y^2\right).$$

$$A_4=\begin{vmatrix}0 & 2x & 2y & 4z\\ 2x & 2\lambda & 0 & 0\\ 2y & 0 & 2\lambda & 0\\ 4z & 0 & 0 & 4\lambda\end{vmatrix}=-4z\cdot\begin{vmatrix}2x & 2y & 4z\\ 2\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2\lambda & 0\end{vmatrix}+4z\begin{vmatrix}0 & 2x & 2y\\ 2x & 2\lambda & 0\\ 2y & 0 & 2\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-4z\cdot 16\lambda^2 z+4\lambda\cdot\left(-8\lambda\left(x^2+y^2\right)\right)=-32\lambda^2\cdot\left(x^2+y^2+2z^2\right).$$

Обчислимо значення головних мінорів:

$$A_3(M_1)=-8\lambda\left(x^2+y^2\right)=-8\cdot\frac{1}{4}\cdot(16+4)=-40,$$

$$A_4(M_1)=-32\lambda^2\left(x^2+y^2+2z^2\right)=-32\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot(16+4+2)=-44,$$

$$A_3(M_2)=-8\lambda\left(x^2+y^2\right)=-8\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(16+4)=40,$$

$$A_4(M_2)=-32\lambda^2\left(x^2+y^2+2z^2\right)=-32\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2\cdot(16+4+2)=-44.$$

За правилом про умовний екстремум, маємо:

- точка $M_1(-4;-2;1)$ є точкою умовного мінімуму, тому що знаки головних мінорів матриці А не змінюються;
- точка $M_2(4;2;-1)$ є точкою умовного максимуму, тому що знаки головних мінорів матриці А чергуються.

Отже, дана функція має умовний мінімум у точці $M_1(-4;-2;1)$:

$$u_{\min}=u(M_1)=-10,$$

а в точці $M_2(4;2;-1)$ – умовний максимум: $u_{\max}=u(M_2)=12$. ■

Завдання для самостійного розв'язування

✍**1.** *Дослідити задані функції на умовний екстремум при вказаних умовах зв'язку:*

1) $z = \cos^2 x + \cos^2 y,\ x - y - \dfrac{\pi}{4} = 0;$

2) $z = x^2 - y^2,\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} - 1 = 0;$

3) $z = x^2 + xy + y^2,\ x^2 + y^2 = 1;$

4) $z = x^2 + y^2,\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1,\ ab \neq 0;$

5) $z = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1,\ x^2 + y^2 = 1\ (a > 0,\ b > 0);$

6) $z = e^{xy},\ x + y = 1;$

7) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y},\ xy \neq 0,\ x + y = 2a;$

8) $u = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2,\ x + y + z = 13;$

9) $u = \sin x \sin y \sin z,\ x + y + z = \dfrac{\pi}{2},\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0;$

10) $u = \cos x \cos y \cos z,\ x + y + z = \pi;$

11) $u = xy^2z^3,\ x + 2y + 3z = 6;$

12) $u = xyz,\ x + y - z = 3,\ x - y - z = 8.$

Творчих успіхів!

§ 13. Завдання для самостійних і контрольних робіт

Самостійна робота на тему: «Похідна функції багатьох змінних»

✍**1.** *Знайти область визначення вказаних функцій та зобразити їх на координатній площині:*

1) $z=\dfrac{3xy}{2x-5y}$;	**13)** $z=\dfrac{\sqrt{xy}}{x^2+y^2}$;	**24)** $z=\dfrac{5}{4-x^2-y^2}$;
2) $z=\arcsin(x-y)$;	**14)** $z=\arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right)$;	**25)** $z=\ln(2x-y)$;
3) $z=\sqrt{x^2-y^2}$;	**15)** $z=\ln\left(y^2-x^2\right)$;	**26)** $z=\dfrac{7x^3y}{x-4y}$;
4) $z=\ln\left(4-x^2-y^2\right)$;	**16)** $z=\dfrac{x^3y}{3+x-y}$;	**27)** $z=\sqrt{1-x-y}$;
5) $z=\dfrac{2}{6-x^2-y^2}$;	**17)** $z=\arccos(x+2y)$;	**28)** $z=e^{\sqrt{x^2+y^2-1}}$;
6) $z=\sqrt{x^2+y^2-5}$;	**18)** $z=\arcsin(2x-y)$;	**29)** $z=\dfrac{1}{x^2+y^2-6}$;
7) $z=\arccos(x+y)$;	**19)** $z=\ln\left(9-x^2-y^2\right)$;	**30)** $z=\dfrac{4xy}{x^2-y^2}$.
8) $z=3x+\dfrac{y}{2-x+y}$;	**20)** $z=\sqrt{3-x^2-y^2}$;	
9) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$;	**21)** $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-5}}$	
10) $z=\ln\left(x^2+y^2-3\right)$;		
11) $z=\sqrt{2x^2-y^2}$;		

12) $z=\dfrac{4xy}{x-3y+1}$;	**22)** $z=4x+\dfrac{y}{2x-5y}$; **23)** $z=\dfrac{\sqrt{3x-2y}}{x^2+y^2+4}$;	

✍**2.** *Знайти частинні похідні і повні диференціали вказаних функцій:*

1) $z=\ln\left(y^2-e^{-x}\right)$; **2)** $z=\operatorname{arctg}\left(x^2+y^2\right)$; **3)** $z=\arcsin\sqrt{xy}$; **4)** $z=\cos\left(x^3-2xy\right)$; **5)** $z=\sin\sqrt{\dfrac{y}{x^3}}$; **6)** $z=\operatorname{tg}\left(x^3+y^2\right)$; **7)** $z=\operatorname{ctg}\sqrt{xy^3}$; **8)** $z=e^{-x^2+y^2}$; **9)** $z=\ln\left(3x^2-y^4\right)$; **10)** $z=\arccos\left(\dfrac{y}{x}\right)$; **11)** $z=\operatorname{arcctg}\left(xy^2\right)$; **12)** $z=\cos\sqrt{x^2+y^2}$;	**13)** $z=\sin\sqrt{x-y^3}$; **14)** $z=\operatorname{tg}\left(x^3y^4\right)$; **15)** $z=ctg\left(3x-2y\right)$; **16)** $z=e^{2x^2-y^3}$; **17)** $z=\ln\left(\sqrt{xy}-1\right)$; **18)** $z=\arcsin\left(2x^3y\right)$; **19)** $z=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x^2}{y^3}\right)$; **20)** $z=\cos\left(x-\sqrt{xy^3}\right)$; **21)** $z=\sin\dfrac{x+y}{x-y}$; **22)** $z=\operatorname{tg}\dfrac{2x-y^2}{x}$; **23)** $z=\operatorname{ctg}\sqrt{\dfrac{x}{x-y}}$;	**24)** $z=e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$; **25)** $z=\ln\left(3x^2-y^2\right)$; **26)** $z=\arccos\left(x-y^2\right)$; **27)** $z=\operatorname{arcctg}\dfrac{x^3}{y}$; **28)** $z=\cos\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$; **29)** $z=\sin\sqrt{\dfrac{y}{x+y}}$; **30)** $z=e^{-\left(x^3+y^3\right)}$.

✍**3.** *Обчислити значення похідної складеної функції* $u=u(x;\, y)$*, де* $x=x(t),\ y=y(t)$*, при* $t=t_0$ *з точністю до двох знаків після коми:*

1) $u=e^{x-2y},\ \ x=\sin t,\ \ y=t^3,\ \ t_0=0$**;**

2) $u=\ln\left(e^{x}+e^{-y}\right),\ \ x=t^2,\ \ y=t^3,\ \ t_0=-1$**;**

3) $u=y^{x},\ \ x=\ln(t-1),\ \ y=e^{\frac{t}{2}},\ \ t_0=2$**;**

4) $u=e^{y-2x+2},\ \ x=\sin t,\ \ y=\cos t,\ \ t_0=\dfrac{\pi}{2}$**;**

5) $u=x^2e^{y},\ \ x=\cos t,\ \ y=\sin t,\ \ t_0=\pi$**;**

6) $u=\ln\left(e^{x}+e^{y}\right),\ \ x=t^2,\ \ y=t^3,\ \ t_0=1$**;**

7) $u=x^{y},\ \ x=e^{t},\ \ y=\ln t,\ \ t_0=1$**;**

8) $u=e^{y-2x},\ \ x=\sin t,\ \ y=t^3,\ \ t_0=0$**;**

9) $u=x^2e^{-y},\ \ x=\sin t,\ \ y=\sin^2 t,\ \ t_0=\dfrac{\pi}{2}$**;**

10) $u=\ln\left(e^{-x}+e^{y}\right),\ \ x=t^2,\ \ y=t^3,\ \ t_0=-1$**;**

11) $u=e^{y-2x-1},\ \ x=\cos t,\ \ y=\sin t,\ \ t_0=\dfrac{\pi}{2}$**;**

12) $u=\arcsin\left(\dfrac{x}{y}\right),\ \ x=\sin t,\ \ y=\cos t,\ \ t_0=\pi$**;**

13) $u=\arccos\left(\dfrac{2x}{y}\right),\ \ x=\sin t,\ \ y=\cos t,\ \ t_0=\pi$**;**

14) $u = \dfrac{x^2}{y+1}, \ \ x = 1-2t, \ \ y = \operatorname{arctg} t, \ \ t_0 = 0$**;**

15) $u = \dfrac{x}{y}, \ \ x = e^t, \ \ y = 2 - e^{2t}, \ \ t_0 = 0$**;**

16) $u = \ln\left(e^{-x} + e^{-2y}\right), \ \ x = t^2, \ \ y = \dfrac{1}{3}t^3, \ \ t_0 = 1$**;**

17) $u = \sqrt{x + y^2 + 3}, \ \ x = \ln t, \ \ y = t^2, \ \ t_0 = 1$**;**

18) $u = \arcsin\left(\dfrac{x^2}{y}\right), \ \ x = \sin t, \ \ y = \cos t, \ \ t_0 = \pi$**;**

19) $u = \dfrac{y^2}{x}, \ \ x = 1-2t, \ \ y = 1 + \operatorname{arctg} t, \ \ t_0 = 0$**;**

20) $u = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}, \ \ x = \sin t, \ \ y = \cos t, \ \ t_0 = \dfrac{\pi}{4}$**;**

21) $u = \sqrt{x^2 + y + 3}, \ \ x = \ln t, \ \ y = t^2, \ \ t_0 = 1$**;**

22) $u = \arcsin \dfrac{x}{2y}, \ \ x = \sin t, \ \ y = \cos t, \ \ t_0 = \pi$**;**

23) $u = \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}, \ \ x = \sin 2t, \ \ y = \operatorname{tg}^2 t, \ \ t_0 = \dfrac{\pi}{4}$**;**

24) $u = \sqrt{x + y + 3}, \ \ x = \ln t, \ \ y = t^2, \ \ t_0 = 1$**;**

25) $u = \dfrac{y}{x}, \ \ x = e^t, \ \ y = 1 - e^{2t}, \ \ t_0 = 1$**;**

26) $u = \arcsin\left(\dfrac{2x}{y}\right), \ \ x = \sin t, \ \ y = \cos t, \ \ t_0 = \pi$**;**

27) $u=\ln\left(e^{2x}+e^{y}\right),\ \ x=t^2,\ \ y=t^4,\ \ t_0=1$**;**

28) $u=\operatorname{arctg}(x+y),\ \ x=t^2+2,\ \ y=4-t^2,\ \ t_0=1$**;**

29) $u=\sqrt{x^2+y^2+3},\ \ x=\ln t,\ \ y=t^3,\ \ t_0=1$**;**

30) $u=\operatorname{arctg}(xy),\ \ x=t+3,\ \ y=e^t,\ \ t_0=0$**.**

✍***4.*** *Обчислити значення частинних похідних функції* $z(x;\,y)$*, заданої неявно, в даній точці* $M_0(x_0;\,y_0;\,z_0)$ *з точністю до двох знаків після коми:*

1) $x^3+y^3+z^3-3xyz=4,\ \ M_0(2;\,1;\,1)$**;**

2) $x^2+y^2+z^2-xy=2,\ \ M_0(-1;\,0;\,1)$**;**

3) $3x-2y+z=xz+5,\ \ M_0(2;\,1;\,-1)$**;**

4) $e^z+x+2y+z=4,\ \ M_0(1;\,1;\,0)$**;**

5) $x^2+y^2+z^2-z-4=0,\ \ M_0(1;\,1;\,-1)$**;**

6) $z^3+3xyz+3y=7,\ \ M_0(1;\,1;\,1)$**;**

7) $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=\dfrac{3}{2},\ \ M_0\left(\dfrac{\pi}{4};\,\dfrac{3\pi}{4};\,\dfrac{\pi}{4}\right)$**;**

8) $e^{z-1}=\cos x\cos y+1,\ \ M_0\left(0;\,\dfrac{\pi}{2};\,1\right)$**;**

9) $x^2+y^2+z^2-6x=0,\ \ M_0(1;\,2;\,1)$**;**

10) $xy=z^2-1,\ \ M_0(0;\,1;\,-1)$**;**

11) $x^2-2y^2+3z^2-yz+y=2,\ \ M_0(1;\,1;\,1)$**;**

12) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5,\ \ M_0(0;\ 2;\ 1)$**;**

13) $x\cos y + y\cos z + z\cos x = \dfrac{\pi}{2},\ \ M_0\left(0;\ \dfrac{\pi}{2};\ \pi\right)$**;**

14) $3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4,\ \ M_0(2;1;\ 2)$**;**

15) $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0,\ \ M_0(1;1;1)$**;**

16) $x + y + z + 2 = xyz,\ \ M_0(2;-1;-1)$**;**

17) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2,\ \ M_0(0;1;-1)$**;**

18) $e^x - xyz - x + 1 = 0,\ \ M_0(2;1;\ 0)$**;**

19) $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 15 = 0,\ \ M_0(1;-1;\ 2)$**;**

20) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0,\ \ M_0(0;-2;\ 2)$**;**

21) $x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3,\ \ M_0(1;\ 2;\ 0)$**;**

22) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z = 0,\ \ M_0(1;-1;1)$**;**

23) $x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x - 4y + 12 = 0,\ \ M_0(0;1;-1)$**;**

24) $\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z = 3,\ \ M_0(4;\ 3;1)$**;**

25) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 59,\ \ M_0(3;1;\ 4)$**;**

26) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 17,\ \ M_0(-2;-1;\ 2)$**;**

27) $x^3 + 3xyz - z^3 = 27,\ \ M_0(3;1;\ 3)$**;**

28) $\ln z = x + 2y - z + \ln 3,\ \ M_0(1;1;\ 3)$**;**

29) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 6 = 0,\ \ M_0(2;1;1)$**;**

30) $z^2 = xy - z + x^2 - 4,\ \ M_0(2;1;1)$.

✍**5.** *Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні* S *в точці* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$*:*

1) $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0,\ \ M_0(2;1;-1)$;

2) $S: x^2 - 4y^2 + z^2 - xy = -2xy,\ \ M_0(-2;1;2)$;

3) $S: x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z = 7,\ \ M_0(1;2;1)$;

4) $S: x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x = 8,\ \ M_0(-1;1;2)$;

5) $S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13,\ \ M_0(2;1;-1)$;

6) $S: x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0,\ \ M_0(2;1;-1)$;

7) $S: x^2 + z^2 - 5yz + 3y = 46,\ \ M_0(1;2;-3)$;

8) $S: x^2 + y^2 - xz - yz = 0,\ \ M_0(0;2;2)$;

9) $S: x^2 + y^2 + 2yz - z^2 + y - 2z + 2 = 0,\ \ M_0(1;1;1)$;

10) $S: y^2 - z^2 + x^2 - 2xz + 2x = z,\ \ M_0(1;1;1)$;

11) $S: z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y,\ \ M_0(-1;-1;-1)$;

12) $S: z = y^2 - x^2 + 2xy - 3y,\ \ M_0(1;-1;1)$;

13) $S: z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y,\ \ M_0(-1;1;1)$;

14) $S: x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y = 13,\ \ M_0(3;1;2)$;

15) $S: 4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z = 9,\ \ M_0(1;-2;1)$;

16) $S: z = x^2 + y^2 - 3xy - x + y + 2,\ \ M_0(2;1;0)$;

17) $S: 2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3,\ \ M_0(1;\ 2;\ 1)$**;**

18) $S: x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y = 14,\ \ M_0(3;\ 1;\ 4)$**;**

19) $S: x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y = 4,\ \ M_0(1;\ 1;\ 2)$**;**

20) $S: x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x = -5,\ \ M_0(-2;\ 1;\ 0)$**;**

21) $S: x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11,\ \ M_0(1;\ 4;\ -1)$**;**

22) $S: x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xz = 8,\ \ M_0(0;\ 2;\ 0)$**;**

23) $S: x^2 - y^2 - 2z^2 - 2y = 0,\ \ M_0(-1;\ -1;\ 1)$**;**

24) $S: x^2 + y^2 - 3z^2 + xy = -2z,\ \ M_0(1;\ 0;\ 1)$**;**

25) $S: 2x^2 - y^2 + z^2 - 6x + 2y + 6 = 0,\ \ M_0(1;\ -1;\ 1)$**;**

26) $S: x^2 + y^2 - z^2 + 6xy - z = 8,\ \ M_0(1;\ 1;\ 0)$**;**

27) $S: z = 2x^2 - 3y^2 + 4x - 2y + 10,\ \ M_0(-1;\ 1;\ 3)$**;**

28) $S: z = x^2 + y^2 - 4xy + 3x - 15,\ \ M_0(-1;\ 3;\ 4)$**;**

29) $S: z = x^2 + 2y^2 + 4xy - 5y - 10,\ \ M_0(-7;\ 1;\ 8)$**;**

30) $S: z = 2x^2 - 3y^2 + xy + 3x + 1,\ \ M_0(1;\ -1;\ 2)$**.**

✍**6.** *Знайти другі частинні похідні вказаних функцій. Переконатися в тому, що* $z''_{xy} = z''_{yx}$*:*

1) $z = e^{x^2-y^2}$**;** ***2)*** $z = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$**;**	***11)*** $z = e^{2x^2+y^2}$**;** ***12)*** $z = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$**;**	***21)*** $z = e^{\sqrt{x+y}}$**;** ***22)*** $z = \arcsin(4x + y)$**;** ***23)*** $z = \arccos(x - 5y)$**;**

3) $z=\operatorname{ctg}(x+y)$;	***13)*** $z=\operatorname{tg}\sqrt{xy}$;	***24)*** $z=\sin\sqrt{xy}$;
4) $z=\cos\left(xy^2\right)$;	***14)*** $z=\cos\left(x^2y^2-5\right)$;	***25)*** $z=\cos\left(3x^2-y^3\right)$;
5) $z=\sin\left(x^2-y\right)$;	***15)*** $z=\sin\sqrt{x^3y}$;	***26)*** $z=\operatorname{arctg}(3x+2y)$;
6) $z=\operatorname{arctg}(x+y)$;	***16)*** $z=\arcsin(x-2y)$;	***27)*** $z=\ln\left(5x^2-3y^4\right)$;
7) $z=\arcsin(x-y)$;	***17)*** $z=\arccos(4x-y)$;	***28)*** $z=\operatorname{arcctg}(x-4y)$;
8) $z=\arccos(2x+y)$;	***18)*** $z=\operatorname{arctg}(5x+2y)$;	***29)*** $z=\ln(3xy-4)$;
9) $z=\operatorname{arcctg}(x-3y)$;	***19)*** $z=\operatorname{arctg}(2x-y)$;	***30)*** $z=\operatorname{tg}\left(xy^2\right)$.
10) $z=\ln\left(3x^2-2y^2\right)$;	***20)*** $z=\ln\left(4x^2-5y^3\right)$;	

Контрольна робота
на тему: «Диференціальне числення функцій багатьох змінних»

✍**1.** *Перевірити, чи задовольняє вказаному рівнянню дана функція:*

1) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad u=\dfrac{y}{x}$;

2) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=3\left(x^3-y^3\right),\quad u=\ln\dfrac{x}{y}+x^3-y^3$;

3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad u=\ln\left(x^2+(y+1)^2\right)$;

4) $y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(1+y\ln x)\dfrac{\partial u}{\partial x},\quad u=x^y$;

5) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u,\;\; u=x^y$**;**

6) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\;\; u=e^{xy}$**;**

7) $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\;\; u=\sin^2\left(x-ay\right)$**;**

8) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\;\; u=y\sqrt{\frac{y}{x}}$**;**

9) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\;\; u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$**;**

10) $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\;\; u=e^{-\cos(x+ay)}$**;**

11) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0,\;\; u=\left(x-y\right)\left(y-z\right)\left(z-x\right)$**;**

12) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u,\;\; u=x\ln\frac{y}{x}$**;**

13) $y\frac{\partial u}{\partial x}-x\frac{\partial u}{\partial y}=0,\;\; u=\ln\left(x^2+y^2\right)$**;**

14) $x^2\frac{\partial u}{\partial x}-xy\frac{\partial u}{\partial y}+y^2=0,\;\; u=\frac{y^2}{3x}+\arcsin\left(xy\right)$**;**

15) $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2xy=0,\;\; u=e^{xy}$**;**

16) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,\;\; u=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$**;**

17) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \ u=\ln\left(x^2+y^2+2x+1\right)$**;**

18) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+u=0,\ \ u=\dfrac{2x+3y}{x^2+y^2}$**;**

19) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2=1,\ \ u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ **;**

20) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=2u,\ \ u=\left(x^2+y^2\right)tg\,\dfrac{x}{y}$**;**

21) $9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \ u=e^{-(x+3y)}\sin\left(x+3y\right)$**;**

22) $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \ u=xe^{\frac{y}{x}}$**;**

23) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \ u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$**;**

24) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ \ u=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$**;**

25) $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ \ u=\ln\left(x+e^{-y}\right)$**;**

26) $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0,\ \ u=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$**;**

27) $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u}{y^2},\ \ u=\dfrac{y}{\left(x^2-y^2\right)^5}$**;**

28) $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{u},\ \ u=\sqrt{2xy+y^2}$**;**

29) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x+y}{x-y},\ \ u=\frac{x^2+y^2}{x-y}$**;**

30) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \ u=\ln\left(x^2-y^2\right)$**.**

✍**2.** *Дослідити на екстремум функції:*

1) $z=y\sqrt{x}-2y^2-x+14y$**;**

2) $z=x^3+8y^3-6xy+5$**;**

3) $z=1+15x-2x^2-xy-2y^2$**;**

4) $z=1+6x-x^2-xy-y^2$**;**

5) $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$**;**

6) $z=2x^3+2y^3-6xy+5$**;**

7) $z=3x^3+3y^3-9xy+10$**;**

8) $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$**;**

9) $z=4\left(x-y\right)-x^2-y^2$**;**

10) $z=6\left(x-y\right)-3x^2-3y^2$**;**

11) $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$**;**

12) $z=\left(x-2\right)^2+2y^2-10$**;**

13) $z=\left(x-5\right)^2+y^2+1$**;**

14) $z=x^3+y^3-3xy$**;**

15) $z=2xy-2x^2-4y^2$**;**

16) $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$**;**

17) $z=2xy-5x^2-3y^2+2$**;**

18) $z=xy\left(12-x-y\right)$**;**

19) $z=xy-x^2-y^2+9$**;**

20) $z=x^3+8y^3-6xy+1$**;**

21) $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$**;**

22) $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$

23) $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$

24) $z=xy\left(6-x-y\right)$**;**

25) $z=x^2+y^2-xy+x+y$**;**

26) $z=x^2+xy+y^2-2x-y$**;**

27) $z=\left(x-1\right)^2+2y^2$**;**

28) $z=xy-3x^2-2y^2$**;**

29) $z=x^2+3\left(y+2\right)^2$**;**

30) $z=2\left(x+y\right)-x^2-y^2$**.**

✍**3.** *Знайти найбільше і найменше значення функції* $z = z(x,\ y)$ *в області* $\overline{D}$*, обмеженій заданими лініями:*

1) $z = 3x + y - xy,\ \ \overline{D}: y = x,\ y = 4,\ x = 0$**;**

2) $z = xy - x - 2y,\ \ \overline{D}: x = 3,\ y = x,\ y = 0$**;**

3) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y,\ \ \overline{D}: x = 0,\ x = 1,\ y = 0$**;**

4) $z = 5x^2 - 3xy + y^2,\ \ \overline{D}: x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1$**;**

5) $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x,\ \ \overline{D}: x - y + 1 = 0,\ x = 3,\ y = 0$**;**

6) $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8,\ \ \overline{D}: x = 0,\ y = 0,\ x + y - 1 = 0$**;**

7) $z = 2x^3 - xy^2 + y^2,\ \ \overline{D}: x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 6$**;**

8) $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2,\ \ \overline{D}: x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1$**;**

9) $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1,\ \ \overline{D}: x = 0,\ y = 0,\ x + y - 3 = 0$**;**

10) $z = x^2 + 2xy - 10,\ \ \overline{D}: y = 0,\ y = x^2 - 4$**;**

11) $z = xy - 2x - y,\ \ \overline{D}: x = 0,\ x = 3,\ y = 0,\ y = 4$**;**

12) $z = \frac{1}{2}x^2 - xy,\ \ \overline{D}: y = 8,\ y = 2x^2$**;**

13) $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2,\ \ \overline{D}: x = 0,\ y = 0,\ x + y - 1 = 0$**;**

14) $z = 2x^2 + 3y^2 + 1,\ \ \overline{D}: y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2},\ y = 0$**;**

15) $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1,\ \ \overline{D}: x = -3,\ y = 0,\ x + y + 1 = 0$**;**

16) $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1,\ \ \overline{D}: x = 5,\ y = 0,\ x - y - 1 = 0$**;**

17) $z=2x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2-4x,\ \overline{D}: y=2x,\ y=2,\ x=0$**;**

18) $z=x^2-2xy+\frac{5}{2}y^2-2x,\ \overline{D}: x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=x^2+1$**;**

19) $z=xy-3x-2y,\ \overline{D}: x=0,\ x=4,\ y=0,\ y=4$**;**

20) $z=x^2+xy-2,\ \overline{D}: y=4x^2-4,\ y=0$**;**

21) $z=x^2y(4-x-y),\ \overline{D}: x=0,\ y=0,\ y=6-x$**;**

22) $z=x^3+y^3-3xy,\ \overline{D}: x=0,\ x=2,\ y=-1,\ y=2$**;**

23) $z=4(x-y)-x^2-y^2,\ \overline{D}: x+2y=4,\ x-2y=4$**;**

24) $z=x^2+2xy-y^2-4x,\ \overline{D}: x=3,\ y=0,\ y=x+1$**;**

25) $z=6xy-9x^2-9y^2+4x+4y,\ \overline{D}: x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=2$**;**

26) $z=x^2+2xy-y^2-2x+2y,\ \overline{D}: y=x+2,\ y=0,\ x=2$**;**

27) $z=4-2x^2-y^2,\ \overline{D}: y=0,\ y=\sqrt{1-x^2}$**;**

28) $z=5x^2-3xy+y^2+4,\ \overline{D}: x=-1,\ x=1,\ y=-1,\ y=1$**;**

29) $z=x^2+2xy+4x-y^2,\ \overline{D}: x+y+2=0,\ x=0,\ y=0$**;**

30) $z=2x^2y-x^3y-x^2y^2,\ \overline{D}: x=0,\ y=0,\ x+y=6$**.**

✍***4.*** *Дослідити на умовний екстремум функцію* $z=z(x,\ y)$ *з умовою зв'язку* $\varphi(x,\ y)=0$.

1) $z=-x^2-y^2+40x+60y+800,\ \ x+y=100$**;**

2) $z=250-x^2-y^2+30x+100,\ \ x+y=150$**;**

3) $z = -x^2 - 2y^2 + 40x + 120y + 900, \;\; x + y = 200$**;**

4) $z = -2x^2 - 4y^2 + 60x + 80y + 1000, \;\; x + y = 100$**;**

5) $z = -2x^2 - 4y^2 + 50x + 120y + 700, \;\; x + y = 150$**;**

6) $z = -2x^2 - 2y^2 + 30x + 40y + 800, \;\; x + y = 80$**;**

7) $z = -2x^2 - 4y^2 + 2xy + 140x + 600, \;\; x + y = 200$**;**

8) $z = -2x^2 - 4y^2 + 2xy + 60x + 40y + 700, \;\; x + y = 100$**;**

9) $z = -2x^2 - 4y^2 + 2xy + 140x - 200, \;\; x + y = 200$**;**

10) $z = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 160x + 140y - 400, \;\; x + y = 200$**;**

11) $z = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 40x - 200, \;\; x + y = 200$**;**

12) $z = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 100x - 300, \;\; x + y = 400$**;**

13) $z = -3x^2 - 3y^2 + 60x + 120y + 400, \;\; x + y = 300$**;**

14) $z = -3x^2 - 3y^2 + 120x + 60y + 400, \;\; x + y = 300$**;**

15) $z = -x^2 - 2y^2 + 40x + 80y - 300, \;\; x + y = 400$**;**

16) $z = -2x^2 - y^2 + 80x + 40y - 400, \;\; x + y = 500$**;**

17) $z = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 40x + 60y - 300, \;\; x + y = 400$**;**

18) $z = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 70x + 80y - 400, \;\; x + y = 300$**;**

19) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 40x + 60y + 300, \;\; x + y = 200$**;**

20) $z = 2xy - 2x^2 - 3y^2 + 40x + 60y + 400, \;\; x + y = 200$**;**

21) $z = -x^2 - y^2 + 20x + 80y - 100, \;\; x + y = 400$**;**

22) $z = -x^2 - y^2 + 30x + 40y - 80, \quad x + y = 300$**;**

23) $z = -x^2 - 2y^2 + 30x + 80y - 100, \quad x + y = 400$**;**

24) $z = -2xy - 3x^2 - 2y^2 + 100x - 400, \quad x + y = 200$**;**

25) $z = -x^2 - y^2 + 40x + 50y - 100, \quad x + y = 300$**;**

26) $z = -x^2 - 3y^2 + 10x + 150y - 200, \quad x + y = 200$**;**

27) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 100x - 400, \quad x + y = 600$**;**

28) $z = -x^2 - y^2 + 40x + 80y - 100, \quad x + y = 400$**;**

29) $z = -x^2 - y^2 + 20x + 160y - 400, \quad x + y = 500$**;**

30) $z = -x^2 - 3y^2 + 30x + 60y - 100, \quad x + y = 150$**.**

✍***5.*** *Обчислити наближено:*

1) $2,01^{0,97}$**;**

2) $\ln 2,73 - 1,03^{2,73}$**;**

3) $\sin 29^0 \cdot tg 46^0$**;**

4) $\left(2\sqrt{0,97}\right)^{3,2}$**;**

5) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1,97}{1,02} - 1\right)$**;**

6) $\frac{2,03}{2,03^4 + 2,97^2}$**;**

7) $1,002^2 + 2,003^3$**;**

8) $\sqrt{4,05^2 + 2,93^2}$**;**

16) $\ln\left(\sqrt{4,02} - \sqrt[3]{0,97}\right)$**;**

17) $\sqrt{3,98} \cdot 1,03^{3,98}$**;**

18) $\sqrt{2,03^2 + 5 \cdot e^{0,02}}$**;**

19) $\ln\left(0,01^3 + 0,99^3\right)$**;**

20) $\sqrt{8,04^2 + 6,03^2}$**;**

21) $1,02^{4,05}$**;**

22) $\sqrt{6,02^2 + 7,97^2}$**;**

23) $1,02^{2,04} - \ln 1,02$**;**

24) $\ln\left(\sqrt[3]{0,98} + \sqrt{1,03} - 1\right)$**;**

9) $\ln\sqrt{1,02^2+0,03^2}$ **;**

10) $\sqrt[3]{3,01^2+0,98}$**;**

11) $\sqrt{4,02^2+3,01^2}$ **;**

12) $\sqrt{4,03^2+2,97^2}$ **;**

13) $\sin 44^0\cdot tg59^0$**;**

14) $4,03^{0,98}$**;**

15) $\left(2-\sqrt{0,98}\right)^{4,02}$ **;**

25) $\operatorname{arctg}\dfrac{1,04^2}{0,98}$ **;**

26) $\sqrt{3,03^4+1,983}$**;**

27) $\sqrt{2,98^2-1,03}$**;**

28) $\left(2-\sqrt{1,03}\right)^{2,98}$ **;**

29) $1,04^{2,02}$**;**

30) $\operatorname{arctg}\dfrac{0,98}{1,01}$**.**

ПРЕДМЕТНО-ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

С

Т

У

Ф

Ч

Список використаних джерел

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 1958. 436 с.
2. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Вища математика: Навчальний посібник. Ч.2. Київ: КНЕУ, 2002. 451 с.
3. Виленкин Н. Я.,Бохан К. А., Марон И. А. и др. Задачник по курсу математического анализа. Ч.2. М.: Просвещение, 1971. 336 с.
4. Грималюк В. П., Бойчук О. П., Мартиненко В. С., Ясінський А. В. Лекції, збірник задач, типові розрахунки з вищої математики і теорії ймовірностей. Навчальний посібник. К.: НМЦВО, 2000, 244 с.
5. Давидов М. О. Курс математичного аналізу. К.: Вища школа, 1979. Ч. 1, 2. 366 с.
6. Дороговцев А. Я. Математический анализ: Сборник задач. К.: Вища школа, 1987. 408 с.
7. Дюженкова Л. І., Колесник Т. В., Ляшенко М. Я., Михалін Г. О., Шкіль М. І. Математичний аналіз у задачах і прикладах. К.: Вища школа, 2003. Ч. 2. 470с.
8. Ковтонюк М. М. Лекції з математичного аналізу (Метричні простори. Диференціальне числення функції багатьох змінних) для студентів математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ. Вінниця: «Едельвейс і К», 2008. 210 с.
9. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин В. И. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных. М.: Наука, Физматгиз, 1995. 496 с.

10. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Справочное пособие по математическому анализу. Ч.2. К.: Высшая школа, 1979. 734 с.

11. Ляшко С. И., Боярчук А. К., Александрович И. Н., Молодцов А. И., Номировский Д. А., Рублев Б. В. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Часть 1. М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. 432 с.

12. Тевяшев А. Д., Литвин О. Г., Кривошеєва Г. М., Обухова Л. В., Середа О. Г. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функції багатьох змінних. Харків: ХНУРЕ, 2002. 440 с.

13. Тестові завдання з вищої математики: Навчальний посібник /С. І.Гургула, В. М.Мойсишин, В. О.Воробйова та ін.; За ред. С. І. Гургули, В. М. Мойсишина. Івано-Франківськ: Факел, 2008. 737 с.

14. Hass J., Weir M., Thomas G. University Calculus. Early transcendentals. Second Edition. Boston, 2012. 1083 p.

Електронне навчальне видання

Ковтонюк Мар'яна Михайлівна
Клімішина Аліна Яківна
Леонова Іванна Миколаївна
Соя Олена Миколаївна

Практикум з диференціального числення функцій багатьох змінних

Навчальний посібник для студентів СВО Бакалавр
спеціальностей 111 Математика
та 014 Середня освіта (Математика)

Підписано до видання 21.12.2023 р.
Гарнітура Times New Roman.
Замовлення № Р2024-054.

Видавець та виготовлювач –
Вінницький національний технічний університет,
Редакційно-видавничий відділ.
ВНТУ, ГНК, к. 114, Хмельницьке шосе, 95,
м. Вінниця, 21021.
press.vntu.edu.ua
email: irvc.vntu@gmail.com
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 3516 від 01.07.2009 р.

Рівняння дотичної прямої у точці x_0:

$$F'_{x_0}(x_0; y_0)(x - x_0) + F'_{y_0}(x_0; y_0)(y - y_0) = 0$$

Рівняння нормалі:

$$\frac{x - x_0}{F'_{x_0}(x_0; y_0)} + \frac{y - y_0}{F'_{y_0}(x_0; y_0)} = 0$$