

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет математики, фізики і комп'ютерних наук

Кафедра математики та інформатики

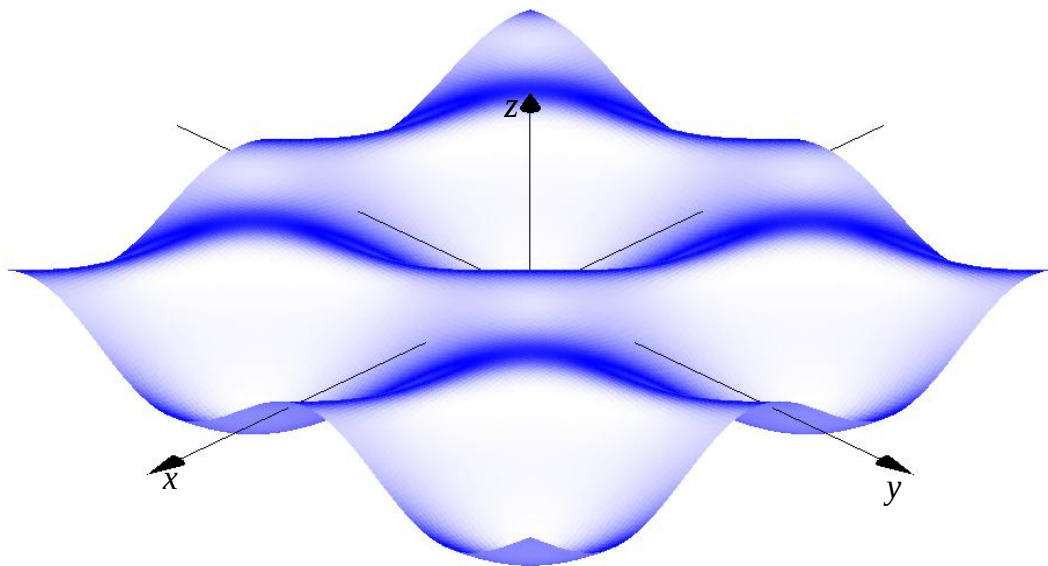
РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА

з математичного аналізу

III семестр

Аналіз функцій багатьох змінних

для студентів предметної спеціальності
014.09 Середня освіта (Інформатика)



Вінниця 2024

Затверджено рішенням кафедри математики та інформатики
ВДПУ імені Михайла Коцюбинського, протокол №1 від 14
серпня 2023 року

Автор-укладач: доктор фізико-математичних наук,
професор **Бак С. М.**

Рецензенти: доктор педагогічних наук,
професор **Ковтонюк М. М.**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Тимошенко О. З.**

Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. III семестр. Аналіз функцій багатьох змінних (для студентів предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика)) [Електронне видання]. Вінниця, 2024. 40 с.

Індивідуальний робочий зошит студента

Дисципліна: математичний аналіз

Розділи: Диференціальне числення функції багатьох змінних.
Інтегральне числення функції багатьох змінних

Передмова

Робочий зошит з математичного аналізу призначений для використання студентами денної і заочної форм навчання предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика) при вивченні розділів «Диференціальне числення функції багатьох змінних» та «Інтегральне числення функції багатьох змінних».

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних тем, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю.

Робочий зошит складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання.

Після кожного розділу подано зразок контрольної роботи. Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

Робочий план студента

Робочий план студента складений на основі навчальної програми з математичного аналізу, затвердженої Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	денна форма					
	усього	зокрема				
		ЛК	ПЗ	ЛЗ	ІЗ	СР
1	2	3	4	5	6	7
Розділ 5. Диференціальне числення функції багатьох змінних						
Тема 1. Границя і неперервність функції багатьох змінних	8	2	2	0	0	4
Тема 2. Диференційовність функції багатьох змінних	8	2	2	0	0	4
Тема 3. Частинні похідні та диференціали вищих порядків	8	2	2	0	0	4
Тема 4. Неявні функції багатьох змінних	8	2	2	0	0	4
Тема 5. Екстремум функції багатьох змінних	8	2	2	0	0	4
Тема 6. Умовний екстремум функції багатьох змінних	8	2	2	0	0	4
Разом за розділом 1	48	12	12	0	0	24
Розділ 6. Інтегральне числення функції багатьох змінних						
Тема 1. Подвійний інтеграл	12	4	4	0	0	4
Тема 2. Потрійний інтеграл	8	2	2	0	0	4
Тема 3. Криволінійний інтеграл першого роду	9	2	2	0	0	5
Тема 4. Криволінійний інтеграл другого роду	13	4	4	0	0	5
Разом за розділом 1	42	12	12	0	0	18
Усього годин	90	24	24	0	0	42

Розподіл балів (за видами діяльності)

№	Вид діяльності	Коефіцієнт вартості (бали)	Кількість робіт	Результат (бали)
1.	Домашні завдання	1	10	10
2.	Конспект	10	1	10
3.	Контрольна робота	20	2	40
4.	Колоквіум/тест	20	1	20
Всього за семестр:				80
Екзамен				20
Підсумковий рейтинговий бал				100

Шкала оцінювання: сто балова, ECTS, розширена

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за розширеною шкалою
		<i>Для екзамену, заліку, курсової роботи, практики</i>
90-100	A	ВІДМІННО
80-89	B	ДУЖЕ ДОБРЕ
75-79	C	ДОБРЕ
60-74	D	ЗАДОВІЛЬНО
50-59	E	ДОСТАТНЬО
35-49	FX	НЕЗАДОВІЛЬНО З МОЖЛИВІСТЮ ПОВТОРНОГО СКЛАДАННЯ
1-34	F	НЕПРИЙНЯТНО З ОБОВ'ЯЗКОВИМ ПОВТОРНИМ ВИВЧЕННЯМ ДИСЦИПЛІНИ

Розділ 5. Диференціальне числення функції багатьох змінних

Практичне заняття №1

Тема: Функції багатьох змінних. Границя і неперервність

✎1. Знайти значення функції $z = f(x; y)$ в точці $(x_0; y_0)$:

а) $z = \left(\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\operatorname{arctg}(x-y)} \right)^2, \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right);$

б) $z = e^{\sin(x+y)}, \left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right);$

в) $z = y^{x^2-1} + x^{y^2-1}, (2; 2), (1; 2), (2; 1);$

г) $z = \sqrt{x^2 - y^2}, (5; -3).$

✎2. Знайти область визначення функції двох змінних:

а) $u = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y};$

е) $u = \ln xy;$

б) $u = \sqrt{1-x^2-y^2};$

є) $u = \ln x - \ln \sin y;$

ж) $u = \ln(x^2 + 4y^2 - 2x - 3);$

в) $u = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}};$

з) $u = \ln \frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}.$

г) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}};$

д) $u = \ln(y^2 - 4x + 8);$

✎3. Виразити площу $S = f(x; y)$ ромба як функцію його периметра x та суми y довжин його діагоналей.

✎4. Знайти функцію $V = f(x; y)$, якщо V – об'єм прямого кругового конуса, x – довжина його твірної, а y :

1) висота конуса; 2) довжина кола основи.

✎5. В кулю радіуса R вписана піраміда з прямокутною основою, вершина якої ортогонально проектується в точку перетину діагоналей основи. Об'єм піраміди є функцією сторін x і y її основи. Чи буде ця функція однозначною? Скласти для неї аналітичний вираз. Знайти область визначення функції.

6. Знайти сім'ї ліній рівня для кожної з функцій і побудувати їх графіки:

а) $z = x + y$;

б) $z = x^2 + y^2$;

в) $z = x^2 - y^2$;

г) $z = \sqrt{y - x}$;

д) $z = \ln(1 - x^2 - y^2)$;

е) $z = \operatorname{arctg} \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}$;

є) $z = \sqrt{1 - 2|x| - |y|}$;

ж) $z = |x| + |y| - |x + y|$;

з) $z = \min(x, y)$;

и) $z = \max(|x|, |y|)$.

7. Знайти область визначення функції трьох змінних, заданих формулами:

а) $u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$;

б) $u = \ln(1 - x - y - z)$;

в) $u = \sqrt{z(2 - z)} + \ln(4 - x^2) - 3y$;

г) $u = \sqrt{8 - x^2 - 2y^2 - 4z^2}$;

д) $u = \sqrt{1 - |x| - |y| - |z|}$;

е) $u = \ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6)$;

є) $u = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2} \cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$;

ж) $u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z - 1}$.

8. Для функції $z = f(x, y)$ знайти повторні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right)$; $\lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right)$; і границю $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$, якщо вони існують у випадках:

а) $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$, $(1; 1)$; $(0; 0)$; $(+\infty; +\infty)$; $(+\infty; -\infty)$;

б) $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$, $(0; 0)$; $\left(\frac{1}{\pi}; 0\right)$; $\left(\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi}\right)$; $(+\infty; +\infty)$;

в) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$, $(0; 0)$; $(+\infty; +\infty)$; $(+\infty; -\infty)$;

г) $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$, $(0; 0)$; $(+\infty; +\infty)$; $(0; +\infty)$; $(0; 1)$;

д) $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}$, $(+\infty; +\infty)$; $(0; +\infty)$; $(+\infty; 0)$; $(+\infty; -\infty)$;

$$\text{е) } f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, \quad (+\infty; +\infty); (0; 0); (\infty; 0); (0; \infty);$$

$$\text{є) } f(x, y) = \frac{\sin \pi x}{2x + y}, \quad (+\infty; +\infty); (+\infty; -\infty); (0; +\infty); (+\infty; 0);$$

$$\text{ж) } f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}, \quad (0; +\infty); (0; 0);$$

$$\text{з) } f(x, y) = \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}, \quad (+\infty; +\infty), (+\infty; 1); (+0; +0); (+0; +\infty).$$

9. Знайти границю функції $z = f(x, y)$ в точці $(0; 0)$, або довести, що вона не існує, якщо:

$$\text{а) } f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1};$$

$$\text{д) } f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)x^2 y^2}{1 - \cos(x^2 + y^2)};$$

$$\text{б) } f(x, y) = \frac{\sin(x^4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\text{е) } f(x, y) = (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}};$$

$$\text{в) } f(x, y) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}}{x^4 + y^4};$$

$$\text{є) } f(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x^3 + y^3} - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\text{г) } f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2};$$

$$\text{ж) } f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

10. Дослідити функції на неперервність і знайти точки розриву, якщо такі є:

$$\text{а) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x, y) = \frac{2x - 3}{x^2 + y^2 - 4};$$

$$\text{в) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x + y}, & x + y \neq 0, \\ 3, & x + y = 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } f(x; y) = \begin{cases} \frac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}, & (x, y) \notin \mathbb{Z}^2, \\ 1, & (x, y) \in \mathbb{Z}^2; \end{cases}$$

$$\text{д) } f(x; y) = \frac{\sin^2 x \sin y}{\sin^4 x + \sin^2 y};$$

$$\text{е) } f(x; y) = x \sin \frac{y^2}{x^2 + y^2};$$

$$\text{є) } f(x; y; z) = \frac{1}{\sin \pi x + \sin \pi y + \sin \pi z};$$

$$\text{ж) } f(x; y; z) = \frac{1}{\sqrt{8 - x^2 - 2y^2 - 4z^2}}.$$

📖 Практичне заняття №2

Тема: Диференційовність функції багатьох змінних. Повний диференціал

Завдання 1. Знайти частинні похідні за кожною з незалежних змінних та повні диференціали функцій:

$$\text{а) } z = x^3 y - y^3 x;$$

$$\text{е) } z = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right);$$

$$\text{б) } z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u};$$

$$\text{є) } z = \arctg \frac{x}{y};$$

$$\text{в) } z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2};$$

$$\text{ж) } z = x^y;$$

$$\text{г) } z = (5x^2 y - y^3 + 7)^3;$$

$$\text{з) } z = \ln(x^2 + y^2).$$

$$\text{д) } z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}};$$

Завдання 2. Дослідити функцію $f(x, y)$ на диференційовність в точці $(0; 0)$:

$$\text{а) } f(x, y) = \sqrt[3]{xy};$$

$$\text{г) } f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3};$$

$$\text{б) } f(x, y) = \cos \sqrt[3]{xy};$$

$$\text{в) } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3};$$

$$\text{д) } f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{е) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{є) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{ж) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

3. Нехай $x = \rho^2 \cos \varphi$, $y = \rho^2 \sin \varphi$. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}.$$

4. Нехай $x = \rho \cos \alpha \cos \beta$, $y = \rho \cos \alpha \sin \beta$, $z = \rho \sin \alpha$. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{vmatrix}.$$

5. Знайти повний диференціал функції $z = f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) , якщо:

а) $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$, $x_0 = 3$, $y_0 = 4$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$;

б) $z = e^{xy}$, $x_0 = y_0 = 1$, $\Delta x = 1,15$, $\Delta y = 0,1$;

в) $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$, $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $\Delta x = 0,01$, $\Delta y = 0,03$;

г) $z = \frac{x+3y}{y-3x}$, $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $\Delta x = 0,5$, $\Delta y = -0,5$.

№6. Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено обчислити:

а) $\sqrt{1,98^2 + 1,01^2}$;

є) $1,94^2 \cdot e^{0,12}$;

б) $\sin 59^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$;

ж) $2,68^{\sin 0,05}$;

в) $0,97^{1,05}$;

з) $\ln(1,05) \cdot \operatorname{arctg} 0,99$;

г) $2,003^2 \cdot 3,998^3 \cdot 1,002^2$;

и) $\frac{\operatorname{tg} 46^\circ \operatorname{arccctg} 0,01}{(4,03)^{\frac{1}{2,02}}}$.

д) $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$;

е) $1,04^{2,02}$;

Практичне заняття №3

Тема: Частинні похідні та диференціали вищих порядків

№1. Знайти всі частинні похідні і диференціали другого порядку для функцій:

а) $z = \ln \frac{2-y-x^2}{2+y+x^2}$, $(1; 0)$;

б) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;

в) $z = \operatorname{zrctg} \frac{x+y}{1-xy}$, $(0; 0)$;

г) $z = \sin^2(ax + by)$, $(0; 0)$;

д) $z = \arcsin xy$;

е) $z = \frac{x-y}{x+y}$;

є) $z = (\sin x)^{\cos y}$, $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$;

ж) $z = \operatorname{arctg} \sqrt{xy}$.

№2. Знайти вказані частинні похідні:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$, якщо $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}$;

б) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, якщо $z = e^{xy^2}$;

в) $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, якщо $z = \ln(x^2 + y^2)$;

г) $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, якщо $u = e^{xyz}$;

д) $\frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^3 \partial z^2}$, якщо $u = x^m y^n z^p$;

е) $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial t}$, якщо $f = \ln \sqrt{(x-y)^2 + (z-t)^2}$;

є) $\frac{\partial^{3n} u}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n}$, якщо $f = x^{n+1} (y-1)^n (z+1)^{n-1}$.

3. Перевірити рівності:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (рівняння Лапласа), якщо $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$;

б) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (рівняння теплопровідності), якщо $u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$;

в) $i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (рівняння Шредінгера), якщо $u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{ix^2}{4t}}$;

г) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k^2 u$ (рівняння Гельмгольца), якщо

$u = \frac{C_1 e^{-kr} + C_2 e^{kr}}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, k, C_1, C_2 – сталі.

4. Знайти всі похідні до другого порядку включно, перші і другі диференціали складної функції f , якщо:

а) $F = f(x^2 + y^2 + z^2)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

б) $F = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

в) $F = f(x, xy, xyz)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

г) $F = f(x+y, x-y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

д) $F = f(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

$$\text{е) } F = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$$

$$\text{є) } F = f(t, t^2 - t, t^3 - t^2), t \in \mathbb{R};$$

$$\text{ж) } F = f(\sin t, \cos t), t \in \mathbb{R};$$

$$\text{з) } F = f(xy, x^2y^2, x^3 + y^3), (x, y) \in \mathbb{R}^2;$$

$$\text{и) } F = f(x^2y, x^y), (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

5. Знайти n -й диференціал функції f , якщо:

$$\text{а) } f(x, y, z) = \sin(x + y) + \cos(y + z), n = 4;$$

$$\text{б) } f(x, y, z) = e^{x+2y+3z}, n = 8;$$

$$\text{в) } f(x, y, z) = \ln(x + y) - \lg z, n = 5;$$

$$\text{г) } f(x, y, z) = (x + y + z)^{10} - (x + y)^9 - (x + z)^8 + x^6 + y^5 + z^4, n = 8;$$

$$n = 9; n = 10.$$

Практичне заняття №4

Тема: Диференціювання неявних функцій, заданих рівнянням $F(x; y) = 0, F(x; y; z) = 0$. Дотична площина і нормаль

1. Виразити з рівняння $F(x; y) = 0$ y як неявну функцію від x :

$$\text{а) } y^4 - 4x^2y^2 + \sin x = 0;$$

$$\text{б) } e^{x^2+y^2} - x^6 - 5 = 0;$$

$$\text{в) } \sin(x^2 + y^2) + 3x = 1;$$

$$\text{г) } x^2y^4 - 3y^3 + 6x^2y^2 - 3y + x^2 = 0$$

$$(\text{заміна } y^2 + 1 = t).$$

2. Дослідити на неперервність і диференційовність неявну функцію $y = y(x)$, задану рівнянням $F(x; y) = 0$. Знайти похідні і диференціали першого і другого порядку в точці $M_0(x_0; y_0)$ або в довільній точці, якщо M_0 не вказана:

$$\text{а) } F(x; y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1, M_0(0; 1);$$

$$\text{б) } F(x; y) = x^2 + xy + y^2 - 3, M_0(1; 1);$$

$$\text{в) } F(x; y) = x^2y^2 - x^4 - y^4 - a^4;$$

$$\text{г) } F(x; y) = e^y + ax^2e^{-y} - 2bx;$$

$$\text{д) } F(x; y) = x^y - y^x - 1, M_0(3; 2);$$

$$\text{е) } F(x; y) = \sin xy - e^{xy} - x^2y;$$

є) $F(x; y) = x^2 \ln y - y^2 \ln x$;

ж) $F(x; y) = xe^{2y} - y \ln x - 8$;

з) $F(x; y) = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad M_0(2; 2)$;

и) $F(x; y) = 1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy})$;

і) $F(x; y) = \lg x \cdot 2^{y+1} \cdot 5^y - 2x^2, \quad x=10$.

З3. Дослідити на неперервність і диференційовність неявну функцію $z = z(x; y)$, задану рівнянням $F(x; y; z) = 0$. Знайти частинні похідні і диференціали першого і другого порядку в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ або в довільній точці, якщо M_0 не вказана:

а) $F(x; y; z) = z^3 + 3x^2z - 2xy$;

б) $F(x; y; z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5$;

в) $F(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14, \quad M(1; 2; 3)$;

г) $F(x; y; z) = z^3 - xyz + y^2 - 8, \quad M(1; 2; 2)$;

д) $F(x; y; z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - 9, \quad M(1; -2; 1)$;

е) $F(x; y; z) = \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1$;

є) $F(x; y; z) = x + y + z - e^{-(x+y+z)}$.

З4. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в заданій точці:

а) $z = xy, \quad M_1(1; 1; 1), \quad M_2(2; 1; 2)$;

б) $z = x^2 + y^2, \quad M(1; 1; 2)$;

в) $z = 2x^2 - 4y^2, \quad M(-2; 1; 4)$;

г) $z = (x - y)^2 - x + 2y, \quad M(1; 1; 1)$;

д) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy, \quad M(-3; 4; 17)$;

е) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad M(0; 1; 0)$;

є) $z = \sin \frac{x}{y}, \quad M(\pi; 1; 0)$;

ж) $z = e^{x \cos y}, \quad M(1; 0; e)$.

З5. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в заданій точці:

- а) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$, $M(1; 2; -1)$;
 б) $xy^2 + z^3 = 12$, $M(1; 2; 2)$;
 в) $x^n + y^n + z^n = a^n$, $M(1; 1; 0)$;
 г) $x^2y^2 + 2x + z^3 = 16$, $M(2; 1; 2)$;
 д) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z - 4$, $M(2; 3; 6)$;
 е) $e^z - z + xy = 3$, $M(2; 1; 0)$;
 є) $z = y + \ln\left(\frac{x}{z}\right)$, $M(1; 1; 1)$;
 ж) $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$, $M(1; 1; 1)$.

№6. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в заданій точці:

- а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (еліпсоїд);
 б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (двохполосний гіперболоїд);
 в) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ (гіперболічний параболоїд);
 г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (однополосний гіперболоїд);
 д) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ (еліптичний параболоїд);
 є) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (конус).

Практичне заняття №5

Тема: Екстремум функції багатьох змінних. Найбільше і найменше значення функції. Умовний екстремум

№1. Знайти стаціонарні точки функцій:

- а) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$; в) $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$,
 б) $z = xy(a - x - y)$;

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4};$$

$$\text{г)} \quad z = (2ax - x^2)(2by - y^2);$$

$$\text{д)} \quad z = e^{2x}(x + y^2 + 2y);$$

$$\text{е)} \quad z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y};$$

$$\text{є)} \quad u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z).$$

2. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$\text{I. а)} \quad z = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y;$$

$$\text{в)} \quad z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10;$$

$$\text{б)} \quad z = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2;$$

$$\text{г)} \quad z = 4(x - y) - x^2 - y^2;$$

$$\text{II. а)} \quad z = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y;$$

$$\text{в)} \quad z = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3;$$

$$\text{б)} \quad z = x^2y(4 - y);$$

$$\text{г)} \quad z = y^3 - x^2 - 27y + 3x + 16;$$

$$\text{III. а)} \quad z = x^4 + y^4 - 2x^2;$$

$$\text{г)} \quad z = xy^4(1 + x - y);$$

$$\text{б)} \quad z = (x^2 - 4y^2 + 2x)^2;$$

$$\text{д)} \quad z = x^2y^3(6 - x - y);$$

$$\text{в)} \quad z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2;$$

$$\text{е)} \quad z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y;$$

$$\text{є)} \quad z = xy^2(12 - x - y), \quad x > 0, \quad y > 0;$$

$$\text{ж)} \quad z = x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^2y + 12xy;$$

$$\text{IV. а)} \quad z = xy \ln(x^2 + y^2);$$

$$\text{д)} \quad z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)};$$

$$\text{б)} \quad z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2);$$

$$\text{е)} \quad z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2 + xy + y^2)}.$$

$$\text{в)} \quad z = xy \ln(x^2 + y^2);$$

$$\text{г)} \quad z = (5 - 2x + y)e^{x^2 - y};$$

3. Дослідити на екстремум функцію трьох змінних:

$$\text{а)} \quad u = x^2 + y^2 + (z + 1)^2 - xy + x;$$

$$\text{в)} \quad u = xy^2z^3(1 - x - y - z);$$

$$\text{б)} \quad u = (x - 2y + 3)^2 + (2x - z)^2;$$

$$\text{г)} \quad u = xyz(16 - x - y - 2z);$$

$$\text{д)} \quad u = x^4 + y^4 + z^4 - 8(x^2 + y^2 + z^2);$$

$$\text{е)} \quad u = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \quad (x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0);$$

$$\text{є)} \quad u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z);$$

$$\text{ж)} \quad u = \frac{2x^2}{y} + \frac{y^2}{z} - 4x + 2z^2.$$

4. Знайти найбільше і найменше значення функції на заданій множині:

$$\text{I. а)} \quad z = x - 2y - 3, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x + y \leq 1;$$

$$\text{б)} \quad z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$\text{в)} \quad z = x^3 + y^3 - 3xy, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad |y| \leq 1;$$

г) $z = x^2 y(4 - x - y), \quad x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 6;$

д) $z = e^{-x^2 - y^2} (2x^2 + 3y^2), \quad x^2 + y^2 \leq 4;$

е) $z = x^2 + y^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (0 < b < a);$

є) $z = x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 2x;$

ж) $z = x^2 y, \quad x^2 + y^2 \leq 1;$

II. а) $u = x + 2y + 3z, \quad x + y \leq 3, x + y \leq z, 3x + 3y \geq z, x \geq 0, y \geq 0;$

б) $u = x + y + z, \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 1;$

в) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 100;$

г) $z = (x - y^2) \sqrt[3]{(x - 1)^2}, \quad y^2 \leq x \leq 2.$

✎5. В кулю радіуса R вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.

✎6. З усіх трикутників з однаковою основою і тим же кутом при вершині знайти найбільший за площею.

✎7. Визначити розміри відкритого прямокутного акваріуму з заданою товщиною стінок d і об'ємом V , на виготовлення якого потрібно найменша кількість матеріалу.

✎8. У півсферу радіуса R вписати прямокутний паралелепіпед так, щоб його об'єм був найбільшим.

✎9. З усіх вписаних у коло радіуса R трикутників знайти той, що має найбільшу площу.

✎10. Дослідити задані функції на умовний екстремум при вказаних умовах зв'язку:

а) $z = xy, \quad x + y - 1 = 0;$

б) $z = x^2 + y^2, \quad 3x + 2y - 6 = 0;$

в) $z = \cos^2 x + \cos^2 y, \quad x - y - \frac{\pi}{4} = 0;$

г) $z = x^2 - y^2, \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0;$

д) $z = 5 - 3x - 4y, \quad x^2 + y^2 = 25;$

е) $z = x^2 + xy + y^2, \quad x^2 + y^2 = 1.$

✎11. Дослідити задані функції на умовний екстремум при вказаних умовах зв'язку:

а) $u = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$, $x + y + z = 13$;

б) $u = x^m y^n z^p$ ($m > 0, n > 0, p > 0$), $x + y + z = 1$;

в) $u = \sin x \sin y \sin z$, $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, $x > 0, y > 0, z > 0$;

г) $u = \cos x \cos y \cos z$, $x + y + z = \pi$;

д) $u = x + y + z$, $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$, $x > 0, y > 0, z > 0$;

е) $u = xy^2 z^3$, $x + 2y + 3z = 6$.

Практичне заняття №6

Контрольна робота №1 (зразок)

1. Знайти другі частинні похідні вказаної функцій. Переконалися в тому, що $z''_{xy} = z''_{yx}$:

$$z = e^{x^2 - y^2}.$$

2. Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено обчислити:

$$\sqrt{1,98^2 + 1,01^2}.$$

3. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні S в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$:

$$S: x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0, \quad M_0(2; 1; -1).$$

4. Дослідити на екстремум функцію: $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

Розділ 6. Інтегральне числення функції багатьох змінних

Практичне заняття №7

Тема: Повторні інтеграли. Обчислення подвійного інтеграла у випадку прямокутної і довільної області

З1. Скласти інтегральну суму для подвійного інтеграла при заданих умовах:

a) $\iint_{(P)} xy dx dy, (P) = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$

область інтегрування розбити на квадрати прямими $x = \frac{i}{n}, y = \frac{j}{n}$,

$i, j = \overline{1, n-1}$ і за точки M_k взяти праві вершини цих квадратів;

$$6) \iint_{(P)} x^2 y^3 dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

область інтегрування розбити прямими $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ на чотири прямокутники, за точки M_k вибрати центри цих прямокутників.

2. Записати подвійні інтеграли $\iint_{(P)} f(x; y) dx dy$ у вигляді повторних

інтегралів з різними порядками інтегрування. Зобразити область інтегрування, якщо вона обмежена лініями:

I. а) $y=0$, $y=x$, $x=5$; б) $y=2$, $3y=2x$, $3y=24-3x$;

б) $x = 2a, y = 2a, x + y = a;$ г) $y = 2kx + y = 2a, k > 0;$

д) (P) – трикутник з вершинами в точках $(-1; -1), (1; 3), (2; -4)$;

II. а) (P) – паралелограм з вершинами в точках $(-3; 1)$, $(2; 1)$, $(2; 4)$, $(6; 4)$;

б) $x = a, y = 0, x + y = 0, x + y = 2a;$

В) $y=0, \quad y=a, \quad x+y=0, \quad x+y=2a;$

г) $2y = x$, $2y = x + 6$, $y = 2x$, $y = 2x - 3$;

III. а) $y = x^2$, $y = 4 - x^2$; б) $y = x^2$, $x + y = 2$;

В) $x=0$, $x=-\sqrt{y}$, $x=-\sqrt{2-y}$;

$$\Gamma) \ x = \sqrt{4 - y^2}, \ x = \sqrt{4y - y^2}, \ y = 2;$$

$$д) x^2 + y^2 = r^2;$$

$$е) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$є) x = 0, \quad x = \sin y, \quad x = \cos y, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

3. Обчислити подвійний інтеграл, взятий по прямокутній області інтегрування:

$$а) \iint_{(P)} xy dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\};$$

$$б) \iint_{(P)} e^{x+y} dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$в) \iint_{(P)} \frac{x^2}{1+y^2} dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$г) \iint_{(P)} \frac{dx dy}{(x+y+1)^2}, \quad (P) = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$д) \iint_{(P)} \frac{y dx dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad (P) = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$$

$$е) \iint_{(P)} x \sin(x+y) dx dy, \quad (P) = \left\{ (x; y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\};$$

$$є) \iint_{(P)} x^2 y e^{xy} dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\};$$

$$ж) \iint_{(P)} x^2 y \cos(xy^2) dx dy, \quad (P) = \left\{ (x; y) | 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 2 \right\}.$$

4. Обчислити подвійний інтеграл, якщо область інтегрування довільна:

$$I. а) \iint_{(P)} xy dx dy, \quad (P): y = 0, \quad y = x, \quad x + y = 2;$$

$$б) \iint_{(P)} (x^2 + y^2) dx dy, \quad (P): y = x, \quad y = x + a, \quad y = a, \quad y = 3a;$$

$$в) \iint_{(P)} (x + 2y) dx dy, \quad (P): y = x, \quad y = 2x, \quad x = 2, \quad x = 3;$$

$$г) \iint_{(P)} \cos(x+y) dx dy, \quad (P): x = 0, \quad y = \pi, \quad y = x;$$

д) $\iint_{(P)} \sin \pi(x-y) dx dy$, (P) – трикутник з вершинами

$$(-4; 1), \left(-1; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{7}{2}; \frac{17}{2}\right);$$

е) $\iint_{(P)} \sqrt{y^2 - x^2} dx dy$, $(P): y=1, y=x, y=-x$;

II. а) $\iint_{(P)} (x^2 + y) dx dy$, $(P): y=x^2, y^2=x$;

б) $\iint_{(P)} \frac{x^2}{y^2} dx dy$, $(P): x=2, y=x, xy=1$;

в) $\iint_{(P)} xy^2 dx dy$, $(P) = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0\}$;

г) $\iint_{(P)} (x^3 + y^3) dx dy$, $(P) = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\}$;

д) $\iint_{(P)} xy dx dy$, $(P) = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq 25, 3x + y \geq 5\}$;

е) $\iint_{(P)} x dx dy$, $(P) = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq 2, x^2 - y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$;

є) $\iint_{(P)} (2y - x) dx dy$, $(P) = \{(x; y) | y(y - x) \leq 2, x(x + y) \leq 3\}$.

Практичне заняття №8

Тема: Заміна змінних у подвійному інтегралі. Застосування подвійного інтеграла

№1. Перейти в $\iint_{(P)} f(x; y) dx dy$ до полярних координат і розставити

межі інтегрування, якщо:

а) $(P) = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq ax\}$, $a > 0$;

б) $(P) = \{(x; y) | a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$, $0 < a < b$;

в) $(P) = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq ax, x^2 + y^2 \leq by\}$, $a > 0, b > 0$;

г) $(P) = \{(x; y) | (x^2 + y^2)^2 \leq a^2(x^2 - y^2), x \geq 0\}$, $a > 0$;

д) $(P) = \{(x; y) | a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 2ay\}$, $a > 0$;

$$\text{е) } (P) = \{(x; y) | 2ay \leq x^2 + y^2 \leq 4ay, y \geq |x|\}, \quad a > 0;$$

$$\text{є) } (P) = \{(x; y) | 0 \leq y \leq 1, y - 2 \leq x \leq -\sqrt{y}\};$$

$$\text{ж) } (P) = \{(x; y) | x + y \geq 0, y - x \geq 0, y \leq 1\};$$

$$\text{з) } \int_0^2 dx \int_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy;$$

$$\text{и) } \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} f(x; y) dy;$$

$$\text{і) } \int_0^{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}} dx \int_0^{Rx} f\left(\frac{y}{x}\right) dy + \int_{\frac{R}{\sqrt{1+R^2}}}^2 dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} f\left(\frac{y}{x}\right) dy.$$

2. Виконати вказану заміну змінних і розставити межі:

$$\text{а) } \int_a^b dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x; y) dy, \quad (0 < a < b, 0 < \alpha < \beta); \quad u = x, v = \frac{y}{x};$$

$$\text{б) } \int_0^1 dx \int_0^1 f(x; y) dy; \quad u = x + y, v = x - y;$$

$$\text{в) } \iint_{(P)} f(x; y) dx dy, \quad (P): \left(x^2 + \frac{1}{3}y^2\right)^2 = x^2 y; \quad x = \rho \cos \varphi, y = \sqrt{3} \rho \sin \varphi;$$

$$\text{г) } \iint_{(P)} dx dy, \quad (P): y = ax^2, y = bx^2, xy = p, xy = q \quad (0 < a < b, 0 < p < q);$$

$$u = \frac{y}{x^2}, v = xy;$$

$$\text{д) } \iint_{(P)} f(x; y) dx dy, \quad (P): x = 0, y = 0, \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \quad (a > 0);$$

$$x = u \cos^4 v, y = u \sin^4 v;$$

$$\text{е) } \iint_{(P)} f(x; y) dx dy, \quad (P): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad x = ar \cos \varphi, y = br \sin \varphi.$$

3. Обчислити інтеграл, перейшовши до полярних координат:

$$\text{а) } \iint_{(P)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq Rx\};$$

$$\text{б)} \iint_{(P)} (x^2 + y^2) dx dy, \quad (P) = \{(x; y) \mid x^2 + (y+2)^2 \leq 4\};$$

$$\text{в)} \iint_{(P)} \cos\left(\pi\sqrt{x^2 + y^2}\right) dx dy, \quad (P) = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\};$$

$$\text{г)} \iint_{(P)} \ln(x^2 + y^2) dx dy, \quad (P) = \{(x; y) \mid e^2 \leq x^2 + y^2 \leq e^4\};$$

$$\text{д)} \iint_{(P)} \frac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad (P) = \left\{(x; y) \mid \frac{\pi^2}{9} \leq x^2 + y^2 \leq \pi^2\right\};$$

$$\text{е)} \iint_{(P)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad (P) = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2y\};$$

$$\text{є)} \iint_{(P)} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (P): x^2 - y^2 = 6, x = 3;$$

$$\text{ж)} \iint_{(P)} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad (P) = \{(x; y) \mid ax \leq x^2 + y^2 \leq a(x + \sqrt{x^2 + y^2})\}.$$

4. Обчислити інтеграл, зробивши заміну:

$$\text{а)} \iint_{(P)} dx dy, \quad (P) = \{(x; y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x\}; \quad x = u(1-v), y = uv;$$

$$\text{б)} \iint_{(P)} xy dx dy, \quad (P): xy = 1, x + y = \frac{5}{2}; \quad x + y = u, xy = v;$$

$$\text{в)} \iint_{(P)} (2x - y) dx dy, \quad (P) =$$

$$= \{(x; y) \mid x + y \geq 1, x + y \leq 2, 2x - y \geq 1, 2x - y \leq 3\}; \quad x + y = u, 2x - y = v;$$

$$\text{г)} \iint_{(P)} e^{k(x+y)^2} dx dy, \quad (P) = \{(x; y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\};$$

$$x = u - uv, y = uv;$$

$$\text{д)} \iint_{(P)} (x^2 - y^2) \sin \pi(x - y)^2 dx dy, \quad (P) = \{(x; y) \mid |y| \leq x \leq 1 - |y|\};$$

$$\text{е)} \iint_{(P)} e^{\frac{x^4}{y^2}} dx dy, \quad (P): y = x, y = 2x, y = x^2;$$

$$\text{є)} \iint_{(P)} (x^4 - y^4) dx dy, \quad (P) = \{(x; y) \mid x > 0, 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 2\};$$

$$\text{ж) } \iint_{(P)} x dx dy, \quad (P) = \left\{ (x; y) \mid x > 0, y > 0, \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} < 1 \right\}.$$

5. Знайти площу фігури, обмеженої кривими:

а) $xy = 4, \quad x + y - 5 = 0;$

б) $x^2 + y^2 = 4, \quad y^2 = 4 - 4x, \quad x < 1;$

в) $4y = x^2 - 4x, \quad x = y + 3;$

г) $y^2 = 10x + 25, \quad y^2 = 9 - 6x;$

д) $y^2 = 2x, \quad y^2 = 4x - x^2, \quad 2x < y^2;$

е) $x^2 + y^2 = 2ax, \quad x^2 + y^2 = 2bx, \quad y = x, \quad y = 0, \quad b > a > 0;$

є) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2);$

ж) $(x^2 + 2y^2)^3 = xy^4;$

з) $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = x^2 y;$

и) $xy = a^2, \quad xy = b^2, \quad x^2 = py, \quad x^2 = qy, \quad 0 < a < b, \quad 0 < p < q;$

і) $x^2 = ay, \quad x^2 = by, \quad x^3 = py^2, \quad x^3 = qy^2, \quad 0 < a < b, \quad 0 < p < q;$

ї) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{y^2}{c^2};$

к) $(x + y)^4 = a^2(x^2 + y^2), \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x > 0, \quad y > 0).$

6. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x = 4, \quad y = 4, \quad z = x^2 + y^2 + 1$
(параболоїд обертання);

б) $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x = a, \quad y = b, \quad z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$

(еліптичний параболоїд);

в) $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (піраміда);

г) $x + y + z = a, \quad 4x + y = a, \quad 4x + 3y = 3a, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad a > 0;$

д) $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y = 1, \quad z = x^2 + y^2;$

е) $y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad z = 0, \quad x + z = 6;$

- є) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y = 0, z = \frac{x}{2}, z = x;$
 ж) $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0;$
 з) $x = \pm 1, y = \pm 1, z = 4 - x^2 - y^2;$
 и) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2;$
 і) $z = 0, 2 - x - y - 2z = 0, y = x, y = x^2;$
 ї) $x^2 + y^2 = 4x, z = x, z = 2x;$
 к) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

7. а) Знайти площу тієї частини площини $6x + 3y + 2z = 12$, яка розміщена в першому октанті.

б) Обчислити площу частини поверхні параболоїда $2z = x^2 + y^2$, яка вирізана циліндром $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

в) Знайти площу частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$, яка розміщена всередині конуса $x^2 + y^2 = z^2$.

г) Знайти площу поверхні $az = xy, x^2 + y^2 \leq a^2$.

д) Знайти площу частини параболоїда $y = x^2 + z^2$, розміщеного в I квадранті і всередині циліндра $x^2 + z^2 = 1$.

е) Знайти площу частини циліндра $z = x^2$, який відтинається площинами $x + y = \sqrt{2}, x = 0, y = 0$.

є) Знайти площу частини конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, розміщеного всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2x$.

ж) Знайти площу частини циліндра $x^2 + y^2 = a^2$, яка відтинається площинами $x \pm z = 0 (x > 0)$.

з) Знайти площу частини поверхні $(x + y)^2 + z = 1, x > 0, y > 0, z > 0$.

и) Знайти площу частини поверхні $(x + y)^2 + 2z^2 = 2a^2, x > 0, y > 0, z > 0$.

8. Знайти координати центра мас плоскої фігури з густиною $\rho = \rho(x; y)$:

а) $\frac{y^2}{a} \leq x \leq 2a - y, a > 0, \rho = 1;$

б) $x^2 + y^2 \leq a^2, |y| \leq x \operatorname{tg} \alpha, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \rho = 1;$

- в) $y \leq \frac{a^2}{x}, \frac{y^2}{8a} \leq x \leq 2a, a > 0, \rho = 1$;
 г) $x = y, x - 3y = 1, y = 1, y = 3, \rho = y$;
 д) $x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 4y, xy \geq 0, \rho = x$;
 е) $r \leq a(1 + \sin \varphi), \rho = 1$.

9. Обчислити момент інерції:

- а) прямокутника зі сторонами a і b відносно його сторін;
 б) квадрата зі стороною a відносно однієї з вершин;
 в) трикутника, обмеженого прямими $x + y = 2, x = 2, y = 2$ відносно осі Ox ;
 г) півкруга відносно його діаметра.

Практичне заняття №9

Тема: Потрійний інтеграл

1. Звести потрійний інтеграл $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$ до повторного

по змінних x, y, z довільним чином, або тим, що вказано в умові, якщо множина (V) обмежена поверхнями:

- а) $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1 - x, z = x, x + y + z = 1$;
 б) $x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4, 2x + y \leq 2; (x, y, z), (y, z, x)$;
 в) $x = 0, y = 0, z = 0, x + 2y + 3z = 3; (x, y, z), (z, x, y)$;
 г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;
 д) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0 (a > 0, b > 0, c > 0)$;
 е) $x = \pm 1, y = 0, y = 4 - x, z = 0, x + y + z = 4$.

2. Обчислити інтеграл $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$, якщо:

- I. а) $f(x; y; z) = x, (V): x = 0, y = 0, z = 0, 2x + y + z = 4$;
 б) $f(x; y; z) = x + y + z,$
 $(V) = \{(x; y; z) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$;
 в) $f(x; y; z) = x, (V): x = 0, y = 0, z = 0, y = h, x + z = a$;
 г) $f(x; y; z) = (1 + x + y + z)^{-3}, (V): x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$;

д) $f(x; y; z) = x^2 - z^2$, $(V): y = -x, z = x, z = y, z = 1$;

II. а) $f(x; y; z) = xy$, $(V): x \geq 0, y \geq 0, z = 0, z = 1, x^2 + y^2 = 1$;

б) $f(x; y; z) = xyz$, $(V): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

в) $f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(V): z = 1, x^2 + y^2 = z^2$;

г) $f(x; y; z) = xy^2z^3$, $(V): x = 1, y = x, z = 0, z = xy$;

д) $f(x; y; z) = xyz$, $(V): y = x^2, x = y^2, z = xy, z = 0$.

3. Обчислити інтеграл $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$, перейшовши до

циліндричних координат, якщо:

а) $f(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$,

$(V) = \{(x; y; z) | x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, 0 \leq z \leq H\}$;

б) $f(x; y; z) = x + y + z$, $(V): x^2 + y^2 = 1, z = 0, x + y + z = 2$;

в) $f(x; y; z) = x^2 + y^2$, $(V) = \{(x; y; z) | \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 2\}$;

г) $f(x; y; z) = z - x + y$, $(V): ay = z^2 + x^2, y^2 = x^2 + z^2, a > 0$;

д) $f(x; y; z) = \frac{xz}{x^2 + y^2 - R^2}$,

$(V): x = 0, y = 0, z = h, z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2), x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;

е) $f(x; y; z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $(V): x^2 + y^2 = 4y, y + z = 4, z \geq 0$.

4. Обчислити інтеграл $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$, перейшовши до

сферичних координат, якщо:

а) $f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(V) = \{(x; y; z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 8\}$;

б) $f(x; y; z) = \frac{x}{R^4 + (x^2 + y^2 + z^2)^2}$,

$(V) = \{(x; y; z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0\}$;

в) $f(x; y; z) = x^2 + y^2 - z^2$,

$(V) = \{(x; y; z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$;

$$\Gamma) f(x; y; z) = yz + zx,$$

$$(V): y = x, x = 0, z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0;$$

$$\Delta) f(x; y; z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$(V) = \left\{ (x; y; z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2} \right\};$$

$$\epsilon) f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, (V) = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq z\};$$

$$\epsilon) f(x; y; z) = x^m y^n z^p, m, n, p \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$(V) = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

I. а) $z = 4 - y^2, z = y^2 + 2, x = -1, x = 2;$

б) $z = x^2 + y^2, z = x^2 + 2y^2, y = x, y = 2x, x = 1;$

в) $z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x^2, y = x;$

г) $y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}, z = 0, x + z = 2;$

д) $y = 5\sqrt{x}, y = \frac{5x}{3}, z = 0, z = 5 + \frac{5\sqrt{x}}{3};$

е) $z = \ln(x + 2), z = \ln(6 - x), x = 0, x + y = 2, x - y = 2;$

є) $(x - 1)^2 + y^2 = z, 2x + z = 2.$ Вказівка: проекція тіла на площину XOY є круг;

II. а) $(x^2 + y^2)^2 = 2xy, z = x + y, z = 0, x > 0;$

б) $x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = x^2 + y^2, z = 0;$

в) $x^2 + y^2 = 1, z = e^{-(x^2 + y^2)}, z = 0;$

г) $x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 + a^2 = 2z^2, a > 0, z > 0;$

д) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, z = 0;$

е) $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, z = 0, c > 0;$

є) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2, a > 0, c > 0;$

III. (можна використати сферичні координати):

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = \sqrt{x^2 + y^2} \left(z < \sqrt{x^2 + y^2} \right);$

$$\text{б)} x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (z > \sqrt{x^2 + y^2});$$

$$\text{в)} (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x, \quad a > 0;$$

$$\text{г)} (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2 - z^2);$$

$$\text{д)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{p}, \quad p > 0;$$

$$\text{е)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

6. Знайти масу тіла (V) з густиною ρ , якщо:

$$\text{а)} (V): 64(x^2 + y^2) = z^2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0,$$

$$\rho = \frac{5(x^2 + y^2)}{4};$$

$$\text{б)} (V): x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (x^2 + y^2 \leq 1), \quad x = 0 \quad (x \geq 0),$$

$$\rho = 4|z|;$$

$$\text{в)} (V): x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 2z, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$\rho = 10x;$$

$$\text{г)} (V): x^2 + y^2 = \frac{16}{49} z^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{4}{7} z, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

$$\rho = 80yz;$$

$$\text{д)} (V): x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4z^2, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0,$$

$$z \geq 0), \quad \rho = 20z.$$

7. Знайти координати центра мас тіла (V) з густиною ρ , якщо:

$$\text{а)} (V) = \{(x; y; z) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}, \quad \rho = \rho_0(x + y + z)^2;$$

$$\text{б)} (V): x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x = 2, \quad y = 4, \quad x + y + z = 8, \quad \rho = 1;$$

$$\text{в)} (V) = \{(x; y; z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0\}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\text{г)} (V): z = \frac{y^2}{2}, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad 2x + 3y - 12 = 0, \quad \rho = 1;$$

$$\text{д)} (V): y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad z = 0, \quad x + z = 6, \quad \rho = 1;$$

$$\text{е)} (V) = \{(x; y; z) | x^2 + y^2 \leq z \leq h\}, \quad \rho = \rho_0 \sqrt{h - z};$$

є) $(V): x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$ (кульовий сектор), $\rho = 1$.

8. Знайти моменти інерції однорідних тіл з масою m :

а) прямокутного паралелепіпеда з ребрами a, b, c відносно кожного з ребер та відносно центра мас;

б) кулі відносно дотичної прямої;

в) еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ відносно кожної з трьох його осей;

г) прямого кругового циліндра з радіусом основи R та висотою H відносно діаметра основи, та відносно діаметра його середнього перерізу;

д) параболоїда обертання з радіусом основи R та висотою H відносно осі, яка проходить через його центр ваги перпендикулярно до осі обертання (екваторіальний момент).

Практичне заняття №10

Тема: Криволінійний інтеграл першого роду

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж плоскої кривої L :

1.1. $\int_L \frac{ds}{x+y}$, де L - відрізок прямої $y = x + 2$, що з'єднує точки $(2;4)$ і $(1;3)$;

1.2. $\int_L \frac{ds}{y-5}$, де L - відрізок з кінцями $(0;-2)$ і $(0;4)$;

1.3. $\int_L \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, де L - відрізок з кінцями $(0;0)$, $(1;2)$;

1.4. $\int_L xy ds$, де L - прямокутник, обмежений прямими $x = 0, x = 4, y = 0, y = 2$;

1.5. $\int_L (2x + 3y) ds$, де L - трикутник з вершинами в точках $O(0;0)$, $A(-1;0)$, $B(0;1)$.

В: 1) $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{3}{2}$; 2) $-\sqrt{5} \ln 2$; 3) $\ln \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 4) 24.

2. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж плоскої кривої L :

2.1. $\int_L y ds$, де L - дуга параболи $y^2 = 2x$ від точки $(0;0)$ до точки $(1;\sqrt{2})$;

2.2. $\int_L x^2 ds$, де L - верхня половина кола $x^2 + y^2 = a^2$;

2.3. $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, де L - коло $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$;

2.4. $\int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}) ds$, де L - дуга астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ між точками $A(1;0)$, $B(0;1)$;

2.5. $\int_L y^2 ds$, де L - арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

2.6. $\int_L (x^2 + y^2) ds$, де L - дуга розгортки кола $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

2.7. $\int_L (x + y) ds$, де L - права пелюстка лемніскати $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

В: 1) $\sqrt{3} - \frac{1}{3}$; 2) $\frac{\pi a^3}{2}$; 3) $2a^2$ 4) 1; 5) $\frac{256a^3}{15}$;
6) $2\pi^2 a^2 (1 + 2\pi^2)$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж просторової кривої L :

3.1. $\int_L f(x, y, z) ds$, де L - перший виток гвинтової лінії $x = a \cos t$,

$$y = a \sin t, \quad z = bt, \quad \text{якщо: а) } f = \frac{z^2}{x^2 + y^2}; \quad \text{б) } f = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\text{в) } f = x^2 + y^2 + z^2;$$

3.2. $\int_L \sqrt{2y^2 + z^2} ds$, де L - коло $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x = y$;

3.3. $\int_L xyz ds$, де L - дуга кривої $x = t, y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}; z = \frac{1}{2}t^2$ між точками $t = 0$ і $t = 1$;

3.4. $\int_L z ds$, де L - дуга кривої $x^2 + y^2 = z^2, y^2 = ax$ від точки $(0, 0, 0)$ до точки $(a; a; a\sqrt{2})$, $a > 0$.

В: 1а) $\frac{8\pi^3 b^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{3a^2}$; 1б) $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \arctg \frac{2\pi b}{a}$;

1в) $\frac{2\pi}{3} \sqrt{a^2 + b^2} (3a^2 + 4\pi^2 b^2)$; 2) $2\pi a^2$; 3) $\frac{16\sqrt{2}}{143}$;

4) $\left(100\sqrt{38} - 72 - 17 \ln \frac{25 + 4\sqrt{38}}{17} \right) \frac{a^2 \sqrt{2}}{512}$.

4. Знайти масу, розподілену з лінійною густиною $\rho(x, y)$ вздовж дуги AB плоскої кривої L , якщо:

4.1. L - відрізок AB , $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $\rho(x, y) = 2x + y$;

4.2. L - відрізок AB , $A(1; 0)$, $B(4; 6)$, $\rho(x, y) = \frac{\sqrt{y+2}}{x}$;

4.3. $L: y = \frac{x^2}{2}$, $A(1; 0.5)$, $B(2; 2)$, $\rho(x, y) = \frac{y}{x}$;

4.4. $L: y^2 = x$, $A(1; 1)$, $B(4; 2)$, $\rho(x, y) = y$;

4.5. $L: y = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}$, $A(0;0)$, $B\left(4; \frac{16}{3}\right)$, $\rho = ks$, де s - довжина дуги від точки $(0;0)$

В: 1) $5\sqrt{5}$; 2) $2\sqrt{10}$; 3) $\frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{6}$; 4) $\frac{17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}}{12}$; 5) $\frac{4k}{9}(63 - 5\sqrt{5})$.

5. Знайти координати центра мас, розподілених вздовж плоскої кривої L з лінійною густиною $\rho = 1$:

5.1. $L: y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $|x| \leq a$;

5.2. $L: y^2 = \frac{1}{3}x^2 + x^3$, $x \leq 0$.

В: 1) $\left(0; \frac{\operatorname{sh} 2 + 2}{4\operatorname{sh} 1} a\right)$; 2) $\left(\frac{8}{45}; 0\right)$.

Практичне заняття №11

Тема: Криволінійний інтеграл другого роду

1. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж кривої L , якщо:

1.1. $\int_L xy dx$, де L – дуга синусоїди $y = \sin x$ від $x=0$ до $x = \pi$;

1.2. $\int_L x dy$, де L – відрізок прямої $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ від точки $(a;0)$ до точки $(0;b)$;

1.3. $\int_L \frac{x}{y} dx - \frac{y-x}{x} dy$, де L – дуга параболи $y = x^2$, $A(2; 4)$, $B(1; 1)$;

1.4. $\oint_L (x^2 + y^2) dy$, де L – контур прямокутника, утвореного прямими $x=1$; $x=3$; $y=1$; $y=5$ в додатному напрямі;

1.5. $\oint_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, де L – межа трикутника з вершинами $(0; 0), (1; 0), (0; 1)$;

1.6. $\oint_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, де L – межа трикутника з вершинами $(1; 1), (1; 3), (2; 2)$;

1.7. $\oint_L \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, де L – межа квадрата з вершинами $(1; 0), (0; 1), (-1; 0), (0; -1)$.

В: 1) π ; 2) $\frac{1}{6}ab^2$; 3) $\frac{1}{3}(5 - \ln 8)$; 4) 32.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L (xy - y^2)dx + xdy$ від точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 2)$ вздовж кривих: а) $y = 2x$; б) $y = 2x^2$; в) $y = 2\sqrt{x}$; г) вздовж ламаної ОВА, де $B\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

В: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{31}{30}$;

3. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж відрізка AB від точки A до точки B , якщо:

3.1. $\int_L x^3 dy - xy dx$; $A(0; -2)$; $B(1; 3)$;

3.2. $\int_L -3x^2 dx + y^3 dy$; $A(0; 0)$; $B(2; 4)$;

3.3. $\int_L (xy - y^2)dx + xdy$; $A(3; -4)$; $B(1; 2)$;

3.4. $\int_L \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + y\right)dx + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x\right)dy$; $A(1; 0)$; $B(3; 4)$;

В: 1) $\frac{7}{12}$; 2) 56; 3) 8; 4) $12 + \ln 5$.

4. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду вздовж просторової кривої в напрямку зростання параметра t або від точки A до точки B :

4.1. $\int_L (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, L : $x = a \sin^2 t$, $y = 2a \sin t \cos^2 t$,

$z = a \cos^2 t$, $0 \leq t \leq \pi$;

4.2. $\int_L xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$,

L : $x = a \sin t$, $y = a \cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

4.3. $\int_L \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$, $L = AB$, $A(1;1;1)$, $B(4;4;4)$;

4.4. $\int_L x(z-y)dx + y(x-z)dy + z(y-x)dz$, L – ламана $ABCA$, $A(a; 0; 0)$,

$B(0; a; 0)$, $C(0; 0; a)$;

4.5. $\int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, L – лінія перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ і

циліндра $x^2 + y^2 = Rx$, яку проходять проти годинникової стрілки, якщо дивитись з точки $(0; 0; 0)$.

В. 1) 0; 2) $-\pi a^2$; 3) $3\sqrt{3}$; 4) a^3 ; 5) $-\frac{\pi R^3}{4}$.

5. Застосовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл вздовж замкненої кривої L :

5.1. $\oint_L (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$, де L – контур трикутника з вершинами

$A(1; 1)$, $B(3; 2)$, $C(2; 5)$ в додатному напрямі. Результат перевірити безпосереднім інтегруванням.

5.2. $\oint_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, де L : а) еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) коло

$x^2 + y^2 = ax$. Результат перевірити безпосереднім інтегруванням.

5.3. $\oint_L \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}$, L : $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.

5.4. $\oint_L e^x ((1 - \cos y)dx + (\sin y - y)dy)$, де L – межа області $0 < x < \pi$;
 $0 < y < \sin x$.

В. 1.1. $-\frac{140}{3}$; 1.2. а) 0; б) $-\frac{\pi a^3}{8}$; 1.3. 0; 1.4. $\frac{(1 - e^\pi)}{5}$.

6. Обчислити дані інтеграли, попередньо впевнившись, що вони не залежать від шляху інтегрування:

6.1. $\int_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy + ydx$;

6.2. $\int_{(1;\pi)}^{(2;\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy$;

6.3. $\int_{(0;0)}^{(-2;-1)} 2xydx + x^2dy$;

6.4. $\int_{(-2;-1)}^{(0;3)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$;

6.5. $\int_L f(x+y)(dx+dy)$, $f(t)$ – неперервна функція, $A(0; 0)$, $B(x_0; y_0)$.

6.6. $\int_L \varphi(x)dx + \psi(y)dy$, $\varphi(t), \psi(t)$ – неперервні функції, $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.

В: 1) 6; 2) $1 + \pi$; 3) -4 ; 4) $-\frac{1148}{5}$; 5) $\int_0^{x_0+y_0} f(t)dt$; 6) $\int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)dt + \int_{y_1}^{y_2} \psi(t)dt$.

Застосування криволінійних інтегралів другого роду

Площа фігури, розміщеної в площині XOY і обмеженої замкненою лінією L , дорівнює:

$$S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx$$

7. Знайти площу області, обмеженої плоскими кривими:

7.1. $y^2 = 4 - x$, $x = 4$, $y = 1$;

7.2. $y = 1 - x^2$, $x - y - 1 = 0$;

7.3. $x = t^2$, $y = t^3$, $x = 1$;

7.4. $x = 12\sin^3 t$, $y = 3\cos^3 t$;

$$7.5. (y-x)^2 + x^2 = 1;$$

$$7.6. (y+x)^2 = ax, y=0;$$

$$7.7. x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3} \text{ (петля декартового листа)}$$

$$7.8. x = a \cos \varphi, y = a \sin 2\varphi, x \geq 0.$$

$$B. 1) \frac{1}{3}; \quad 2) \frac{9}{2}; \quad 3) \frac{4}{5}; \quad 4) \frac{27\pi}{2}; \quad 5) \pi; \quad 6) \frac{a^2}{6}; \quad 7) \frac{3}{2}; \quad 8) \frac{4a^2}{3}.$$

Робота, виконана під дією сили $\vec{F} = \{P; Q; R\}$, яка діє на точку при переміщенні її вздовж кривої AB , дорівнює

$$W = \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \text{ (просторова крива), або}$$

$$W = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \text{ (плоска крива).}$$

8. Знайти роботу поля $\vec{F}$ вздовж дуги AB кривої L , якщо:

$$8.1. \vec{F} = 2xy\vec{i} - y\vec{j}, \quad L: y = x^2 - 1, \quad A(1;0), \quad B(2;3);$$

$$8.2. \vec{F} = 3xy^2\vec{i} - (x+y)\vec{j}, \quad L: y^2 = x+1, \quad A(0;1), \quad B(3;2);$$

8.3.

$$\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}, \quad L: x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad A(0;0), \quad B(2\pi a;0);$$

$$8.4. \vec{F} = (y, -2x), \quad L: x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0, \quad A(1;0), \quad B(-1;0);$$

$$8.5. \vec{F} = (0, 2x), \quad L: x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad y \geq 0, \quad A(a;0), \quad B(-a;0).$$

$$B. 1) 0; \quad 2) \frac{113}{3}; \quad 3) -6\pi a^2; \quad 4) -\frac{3\pi}{2}; \quad 5) \pi ab.$$

Практичне заняття №12

Контрольна робота №2 (зразок)

1. За допомогою подвійного інтеграла обчислити площу плоскої області D , обмеженої заданими лініями: $D: xy=1, x^2=y, y=2, x=0$.

2. Обчислити потрійний інтеграл, якщо тіло (V) обмежене заданими поверхнями:

$$\iiint_{(V)} x^2 dx dy dz, (V): x=0, y=0, z=0, x+3y+z=6.$$

3. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int_L (2xy+3y^2) ds$, де L – відрізок прямої $y=x+1$, що з'єднує точки $(1; 2)$ і $(2; 3)$.

4. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int_L x^3 dx + y^2 dy$, де L – дуга параболи $y=x^2-1$, що з'єднує точки $(0; -1)$ і $(2; 3)$.

Список рекомендованої літератури

Основна

1. Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. III семестр. Аналіз функцій багатьох змінних (для студентів предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика)). Вінниця, 2023. 48 с.
2. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу. Метричні простори. Диференціальне числення функції багатьох змінних. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: «Едельвейс і К», 2008. 228 с.
3. Томусяк А.А., Вотякова Л.А. Аналіз функцій двох і трьох змінних (курс лекцій). Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер», 2007. 229 с.

Додаткова

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: У 3-х ч.: Підр. Київ: Вища школа, 1990. Ч. 1. 383 с.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: У 3-х ч.: Підр. Київ: Вища школа, 1991. Ч. 2. 366 с.
3. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.І. Математичний аналіз: Підручник. Київ: Знання, 2008. 421 с.
4. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по началам анализа. Киев: «Магістр – S», 1998. 416 с.
5. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Київ: Вища школа, 1994. Ч. 1. 423 с.
6. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Київ: Вища школа, 1995. Ч. 2. 509 с.

Інформаційні ресурси

1. Сайт Бака С. М. <https://sites.google.com/site/sajtbakasm/>
2. Сайт Ковтонюк М.М. www.kovtonyuk.inf.ua
3. <http://www.twirpx.com/>

Навчальне видання

Бак Сергій Миколайович

Комп'ютерна верстка та набір Бака С.М.

**РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
з математичного аналізу, III семестр.
Аналіз функцій багатьох змінних**

Для студентів предметної спеціальності
014.09 Середня освіта (Інформатика)

21001, м. Вінниця, вул. Острозького, 32