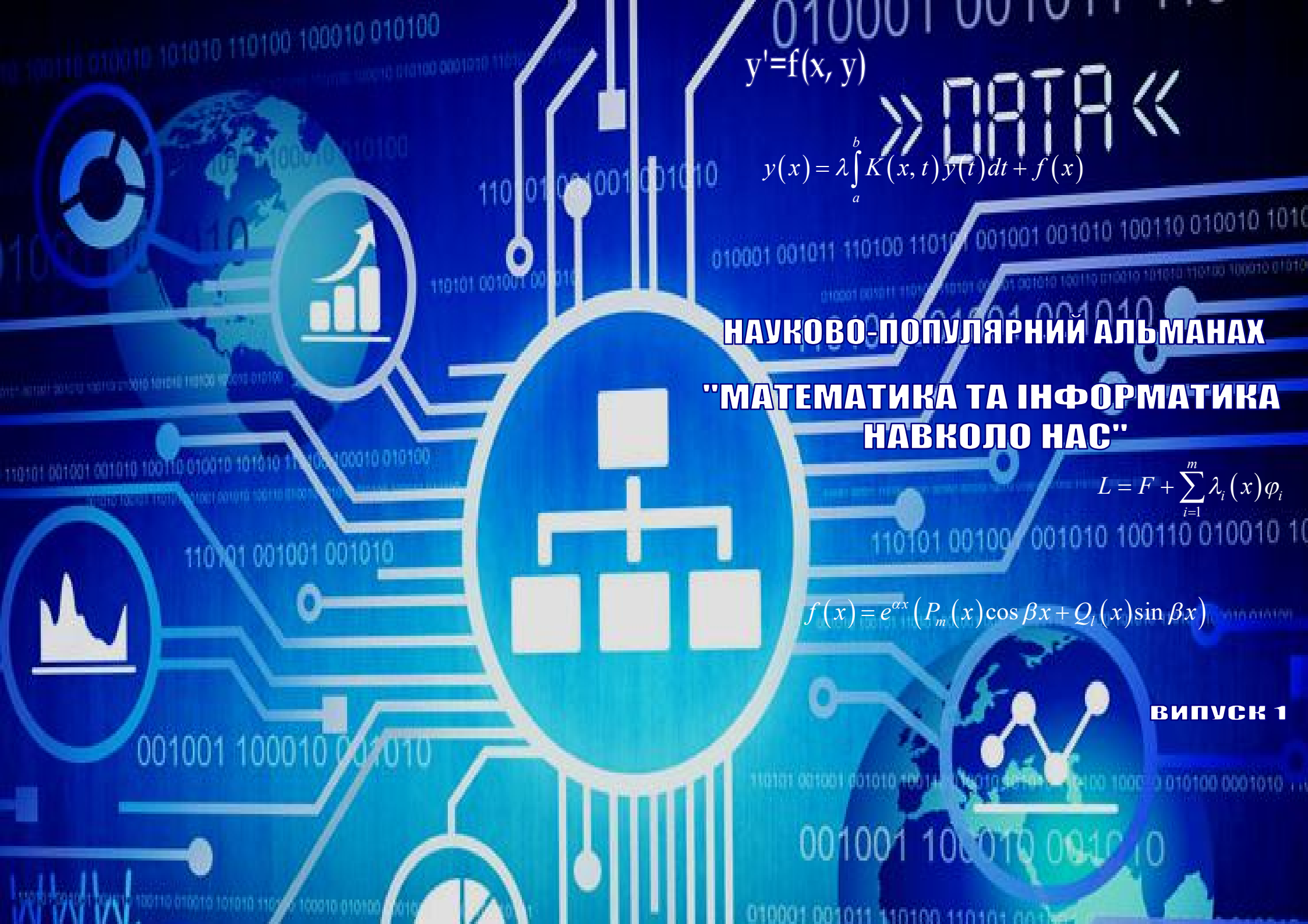

y'=f(x, y)
» DATA «
$y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt+f(x)$
НАУКОВО-ПОПУЛЯРНИЙ АЛЬМАНАХ
"МАТЕМАТИКА ТА ІНФОРМАТИКА НАВКОЛО НАС"
$L=F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i$
$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_m(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x\right)$
ВИПУСК 1

ВІННИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ МИХАЙЛА КОЦЮБИНСЬКОГО

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

Науково-популярний альманах

«МАТЕМАТИКА ТА ІНФОРМАТИКА НАВКОЛО НАС»

Випуск 1

Вінниця – 2018

УДК 378:[51+004](06)
М 34

Рекомендовано до друку вченою радою факультету математики, фізики і технологій (протокол №11 від 29 травня 2018 р.)

Рецензенти:

Коломієць Алла Миколаївна – доктор педагогічних наук, професор, проректор з наукової роботи Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського;

Михалевич Володимир Маркусович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету.

Редакційна колегія:

Ковтонюк Мар'яна Михайлівна – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики та інформатики (головний редактор);

Захарченко Наталія Вікторівна – кандидат педагогічних наук, доцент (відповідальний секретар);

Бак Сергій Миколайович – кандидат фізико-математичних наук, доцент (відповідальний за випуск);

Вотякова Леся Андріївна – кандидат фізико-математичних наук, доцент;

Ковтонюк Галина Миколаївна – кандидат педагогічних наук;

Соя Олена Миколаївна – кандидат педагогічних наук;

Тимошенко Олександр Захарович – кандидат фізико-математичних наук, доцент;

Туржанська Оксана Степанівна – кандидат педагогічних наук;

Тютюн Любов Андріївна – кандидат педагогічних наук, доцент.

Науково-популярний альманах «Математика та інформатика навколо нас» / Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського; [редкол.: М.М. Ковтонюк (голова) та ін.]. – Вінниця: ФОП Рогальська І.О., 2018. – Вип. 1. – 240 с.

В альманасі друкуються науково-популярні статті, які стосуються математики та інформатики, їх становлення, розвитку, вивчення, застосування, нових досліджень тощо.

© ВДПУ ім. М. Коцюбинського, 2018

УДК 373.5.091.33:514.112

Бабюк Діана

студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРАКТИВНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ПЛАНІМЕТРІЇ ЯК ЗАСІБ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЇ ЗНАНЬ УЧНІВ

Анотація: *У статті розглядаються переваги та недоліки активної, пасивної та інтерактивної моделі навчання; розкривається ефективність упровадження інтерактивних технологій навчання на уроках узагальнення та систематизації знань учнів з планіметрії.*

Ключові слова: *інтерактивні технології, «коло ідей», урок однієї задачі.*

Abstract: *The article considers the advantages and disadvantages of an active, passive and interactive learning model; reveals the effectiveness of the introduction of interactive learning technologies in the lessons of generalization and systematization of students' knowledge from planimetry.*

Keywords: *interactive technologies, "circle of ideas", lesson of one task.*

Сучасні умови розвитку загальноосвітньої школи вимагають нових підходів до організації навчання і впровадження нових освітніх технологій, які б сприяли загальному розвитку особистості учня, формуванню його світоглядної культури і творчості.

Перш ніж перейти до розгляду інтерактивних навчальних технологій та інтерактивного уроку з’ясуємо загальну суть інтерактивного навчання і порівняємо його із загальновідомими, традиційними підходами до навчання. Скористаємось підходами, запропонованими Я. Голантом ще у 60-х рр. ХХ ст. Він виділяв активну і пасивну моделі навчання, залежно від участі учнів у навчальній діяльності [1, с. 8].

До цієї класифікації додамо інтерактивне навчання як певний різновид активного і порівняємо їх.

1. Пасивна модель навчання.

За даною моделлю учень виступає у ролі «об'єкта» навчання. Він повинен засвоїти й відтворити матеріал, переданий йому вчителем, текстом підручника тощо – джерелом правильних знань. За такої моделі використовуються методи, коли учні або дивляться, або слухають, або читають (лекція-монолог, читання, пояснення, демонстрація) [1, с. 8].

Визначимо переваги пасивної моделі навчання:

- ✓ витрачається незначна кількість часу на пояснення;
- ✓ усі учні одночасно сприймають матеріал;
- ✓ можна подати великий за обсягом матеріал за короткий час.

Недоліками пасивної моделі навчання є:

- ✓ учні, як правило, не спілкуються між собою і не виконують творчих завдань;
- ✓ відсутність контролю за знаннями;
- ✓ важко зрозуміти рівень засвоєння знань учнями поданого матеріалу.

2. Активна модель навчання.

Такий тип навчання передбачає застосування методів, які стимулюють пізнавальну активність і самостійність учнів. Учень виступає «суб'єктом» навчання, вступає в діалог з учителем. Основні методи: самостійна робота, проблемні та творчі завдання, запитання від учня до вчителя і навпаки, що розвивають творче мислення [1, с. 8].

Переваги активної моделі навчання:

- ✓ високий рівень засвоєння знань;
- ✓ майстерність учителя відіграє велику роль в організації такого навчання;
- ✓ вчитель може проконтролювати надані учням знання;
- ✓ учні виконують творчі завдання.

Недоліком активної моделі навчання є те, що учні спілкуються тільки з учителем.

3. Інтерактивна модель навчання.

Слово «інтерактив» походить від англійського слова «interact», де «inter» –

взаємний і «act» – діяти. Згідно з визначенням О. Пометун, інтерактивне навчання – це «співнавчання, взаємонавчання (колективне, групове, навчання у співпраці), де і учень, і вчитель є рівноправними, рівнозначними суб'єктами навчання, розуміють, що вони роблять, рефлектують з приводу того, що вони знають, вміють і здійснюють. Воно ефективно сприяє формуванню навичок і вмінь, виробленню цінностей, створенню атмосфери співробітництва» [1, с. 9].

Інтерактивне навчання передбачає постійну, активну взаємодію, взаєморозуміння вчителя й усіх учнів класу – учасників процесу навчання; розв'язування загальних, але значущих для кожного учасника завдань, проблем; рівноправність учителя й учнів як суб'єктів навчального процесу [2, с. 14].

Організація інтерактивного навчання передбачає моделювання життєвих ситуацій, використання рольових ігор, формування в учнів позитивної мотивації до математики, усвідомлення значущості цієї науки в практичній діяльності [2, с. 14].

Система навчання вимагає від учителя охоплення великого обсягу інформації та орієнтована на рівні «знання» і «розуміння». Для вирішення цього завдання і потрібні інтерактивні технології. Для того, щоб навчити учнів самостійно і творчо вчитися, потрібно виробити в них мотиви і цілі навчальної діяльності, навчити способам їх здійснення.

Значне місце в системі формування інтелектуальної та творчої особистості учня відводиться вивченню геометрії як навчальної дисципліни.

Для реалізації інтерактивного навчання на уроках геометрії застосовуються такі інтерактивні технології [1, с. 10]:

1. Інтерактивні технології кооперативного навчання: робота в парах; робота в малих групах; ротаційні (змінювані) трійки; два – чотири – всі разом; карусель; акваріум; коло ідей.

2. Технології колективно-групового навчання: мікрофон; мозковий штурм; навчаючи учусь; ажурна пилка; дерево рішень; навчаючись – учи; незакінчені речення.

3. Технології ситуативного моделювання: симуляція або імітаційні ігри;

судове слухання.

4. Технології опрацювання дискусійних питань: метод ПРЕС; займи позицію; дискусія; дискусія в стилі телевізійного ток-шоу; дебати.

Застосування на уроках геометрії інтерактивних технологій, інтерактивних методів, форм, засобів навчання дозволяє модернізувати процес навчання, підвищити в учнів рівень мотивації до вивчення геометрії, самостійно оволодівати конкретними знаннями, сформувати у них практичні навички, розвинути мотивацію учнів до пізнання навколишнього світу, виробляти партнерські відносини між учнями і вчителем.

Засобом узагальнення і систематизації знань учнів з геометрії може бути окрема задача, яку можна розв'язати кількома способами, під час розв'язування якої можна повторити широке коло теоретичних питань. У процесі розв'язання однієї задачі декількома способами, учні намагаються відшукати більш оригінальне, економне розв'язання. Для цього вони згадують багато теоретичних фактів, методи і прийоми, аналізують їх з точки використаності до даної задачі, ситуації, накопичують певний досвід використання одних і тих самих знань до різних питань [4, с. 16].

Досить часто в процесі вивчення якогось розділу шкільного курсу планіметрії вчителі вважають за раціональне, проводити урок «однієї задачі», зокрема, відбирається задача, яка розв'язується кількома способами і охоплює великий об'єм теоретичного матеріалу.

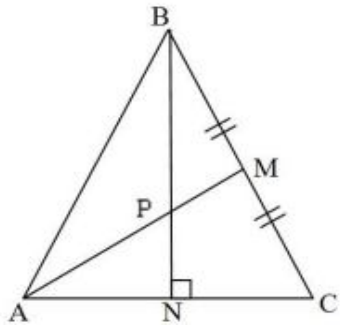
Розглянемо більш детально технологію кооперативного навчання «коло ідей». Метою цієї технології є вирішення гострих суперечливих питань, створення переліку ідей та залучення всіх до обговорення проблеми. Технологію застосовують, коли всі групи мають виконувати одне й те саме завдання, що складається з кількох питань, які групи представлять по черзі [3].

Технологія «коло ідей» є доцільною на уроці узагальнення та систематизації знань учнів, а саме на уроці «однієї задачі».

Розглянемо, наприклад, задачу: у рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 6 см. З вершини на основу провели перпендикуляр довжиною 12 см. Знайти довжину медіани, проведеної до бічної сторони [5].

Розв'язання.

Спосіб 1 (використання формули $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$).



Пов'яз

1. За властивістю рівнобедреного трикутника (BN - висота, медіана, бісектриса) $AN = NC = AC : 2 = 6 : 2 = 3$ (см) (рис. 1).

2. $\triangle ABN = \triangle CBN$ (за катетом і гіпотенузою). З цих трикутників, за теоремою Піфагора маємо: $AB = BC = 3\sqrt{17} см.$

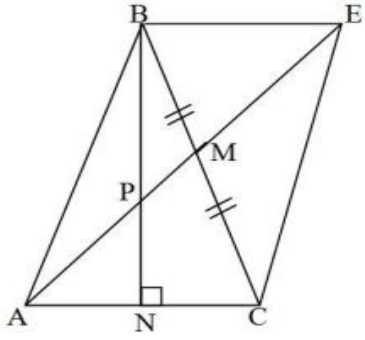
3. Застосуємо формулу $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ до трикутника ABC, тобто $AM = \frac{1}{2}\sqrt{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}$,

$$AM = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 9 \cdot 17 + 2 \cdot 36 - 9 \cdot 7} = \frac{15}{2} = 7{,}5 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 7,5 см.

Оскільки вивчення попередньої формули у навчальній програмі не передбачено та не всі учні її пам'ятають, то під час розв'язування багатьох задач, де в умові або дано, або потрібно знайти медіану, доцільним є використання прийому добудови трикутника до паралелограма.

Спосіб 2 (добудова до паралелограма).



Неігр

1. Добудуємо трикутник ABC до паралелограма $ABEC$ (рис. 2).

2. За властивістю діагоналей паралелограма маємо: $AE^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$,

$$AM = \frac{1}{2}AE = x.$$

2. Тоді $\Delta ABN = \triangle CBN$ (за катетом і гіпотенузою). З цих трикутників, за теоремою Піфагора маємо: $AB = BC = 3\sqrt{17} см.$

3. Складемо і розв'яжемо рівняння:

$$4x^2 + 9 \cdot 17 = 2(9 \cdot 17 + 36);$$
$$4x^2 + 153 = 378;$$
$$x^2 = 56;$$
$$x = 7,5.$$

Відповідь: 7,5 см.

Спосіб 3 (векторний метод).

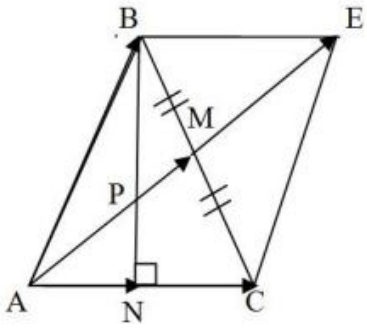


Рис. 3

1. За правилом трикутника знайдемо вектор $\overrightarrow{AB}$ як суму векторів $\overrightarrow{AN}$ і $\overrightarrow{NB}$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB}$ (рис. 3). Піднесемо до квадрату і отримаємо:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AN}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AN}\right| \cdot \left|\overrightarrow{NB}\right| \cdot 0 + \left|\overrightarrow{NB}\right|^2. \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$$

2. Знайдемо $\overrightarrow{AE}$ за правилом паралелограма: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, тоді матимемо $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, знову піднесемо до квадрату і одержимо $\left|\overrightarrow{AM}\right| = 7,5$ (см).

Відповідь: 7,5 см.

Дану задачу можна розв'язати й іншими способами, використовуючи: теорему косинусів, означення медіани, подібність трикутників, теорему Фалеса та координатний метод.

Висновки. Використання на уроках геометрії інтерактивних технологій забезпечує позитивну мотивацію здобуття знань з планіметрії, дає відчуття потреби в самоосвіті, формує стійкий інтерес до матеріалу, що вивчається, сприяє розвитку творчої особистості учня. Під час реалізації інтерактивних технологій на уроках узагальнення та систематизації знань модернізується процес навчання, підвищується в учнів рівень мотивації до вивчення геометрії,

формуються практичні навички учнів, виробляються партнерські відносини між учнями і вчителем.

Література:

1. Пометун О.І. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання. Наук.-метод. посібн. / О.І. Пометун, Л.В. Пироженко. – К.: А.С.К., 2004. – 192 с.
2. Паладко О.В. Сучасний урок: інтерактивні технології навчання / О.В. Паладко // Завучу. Усе для роботи: науково-методичний журнал. – 2015. – №7/8. – С. 14.13 - 14.17. – Методист: журнал в журналі; №45.
3. Інтерактивна технологія: Коло ідей [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://metodichka.at.ua/interactiv_upr/19colo_idey.html.
4. Бойко В.В. Удосконалення умов формування знань та умінь учнів про властивості геометричних фігур // Конструювання задач та їх систем у методичній діяльності вчителя математики. – 2017. – №7. – С. 16-22.
5. Учительський журнал on-line / Сайт [Електронний ресурс] – режим доступу: https://www.teacherjournal.in.ua.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Тютюн Любов Андріївна

УДК 534:517.9

Бак Сергій

канд. фіз.-мат. наук, доцент
кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ЦЕЙ НАДЗВИЧАЙНИЙ СОЛІТОН

Анотація. *Стаття присвячена надзвичайному явищу, яке виникає як в природі, так і в техніці – солітону. Наведено коротку історію його відкриття, основні види та властивості солітонів.*

Ключові слова*: біжучі хвилі, відокремлені хвилі, солітони, рівняння Кортевега-де Фріза.*

Annotation *The article is devoted to an extraordinary phenomenon that occurs both in nature and in technology. The brief history of his discovery, the main types and properties of the soliton are given.*

Keywords: *travelling waves, solitary waves, solitons, Korteweg-de Vries equation.*

Як відомо, одним із найпоширеніших явищ у природі та техніці є коливання, які є часто причиною як аварій і катастроф, так і основою цілих галузей науки і техніки ([1, с. 8]).

Процес передачі збурень середовища (зокрема, коливального процесу) від однієї точки до іншої прийнято називати хвилею. Слово «хвиля» виникло давно і означало почергову появу «горбів» і «западин», які «бігли» по поверхні моря.

Природа механізму поширення хвилі може бути різною. У простому випадку зв'язки між ділянками в середовищі можуть бути обумовлені силами пружності, які виникають через деформації в середовищі. До таких хвиль належать хвилі, які виникають як у твердих пружних середовищах, так і в рідинах або газах. Добре відомий приклад хвиль, які виникають через пружність повітря – звукові хвилі.

Серед хвиль іншої природи особливе місце займають електромагнітні хвилі, передача збурень у яких відбувається через коливання електричного і магнітного полів. До них відносяться радіохвилі, застосування яких у техніці загальновідомо. До електромагнітних явищ, тільки в іншому частотному діапазоні, відноситься також і світло.

Дуже важливим і цікавим типом хвиль є хвилі на поверхні води, які здавна привертали до себе увагу дослідників. Так у 1834 році шотландський вчений Дж. Рассел відкрив цікаву хвилю на воді ([2, с. 7]). Він спостерігав переміщення по каналу баржі, яку тягла пара коней. Несподівано баржа зупинилася, але маса води, яку баржа привела в рух, не зупинилася, а зібралася біля носу судна, а потім відірвалася від нього. Далі ця маса води покотилася по каналу з великою швидкістю у вигляді відокремленого підвищення, не змінюючи своєї форми і не знижуючи швидкості.

Впродовж усього життя Рассел неодноразово повертався до спостереження за цією хвилею і встановив ще деякі її властивості, зокрема, виявив, що можливий розпад однієї великої хвилі на кілька хвиль. Також він відзначив, що в експериментах спостерігаються тільки хвилі підвищення. Одного разу він звернув увагу, що відокремлені хвилі проходять одна через одну без будь-яких

змін, як і малі хвилі, утворені на поверхні води. Однак на останню дуже важливу властивість він не звернув істотної уваги. Результати спостережень Рассела було опубліковано в 1844 році в статті «Доповідь про хвилі». Проте, Дж. Ейрі та Дж. Стокс піддали сумніву правильність спостережень Рассела. Через тривалий час певну ясність в спостереження Рассела внесли французький вчений, механік Ж. Буссінеск (1872 рік) і британський фізик Дж. Стрет (Релей) (1876 рік), які незалежно один від одного знайшли аналітичну формулу для підвищення вільної поверхні на воді у вигляді квадрату гіперболічного секансу та обчислили швидкість поширення відокремленої хвилі на воді. Пізніше досліди Рассела були повторені іншими дослідниками і отримали підтвердження.

Остаточна ясність в проблемі, яка виникла після дослідів Рассела по відокремленій хвилі, настала після роботи датських учених Д. Кортевега і Г. де Фріза (де Вріза), які спробували розібратися в суті спостережень Рассела. Узагальнивши метод Релея, ці вчені в 1895 році вивели рівняння для опису довгих хвиль на воді. Кортевег і де Фріз, використовуючи рівняння гідродинаміки, розглянули відхилення $u(x,t)$ від стану рівноваги поверхні води при відсутності вихорів і при сталості густини води. Вони припустили, що при поширенні хвилі виконуються дві умови для безрозмірних параметрів

$$e=\frac{a}{h}\ll 1,\ d=\frac{h}{l}\ll 1. \qquad (1)$$

Тут a – амплітуда хвилі, h – глибина басейну, в якому розглядаються хвилі, l – довжина хвилі (рис. 1). Суть умов (1) полягала в тому, що амплітуда розглянутих хвиль була набагато меншою, ніж глибина басейну, але в той же час довжина хвилі була набагато більше, ніж глибина басейну. Таким чином, Кортевег і де Фріз розглядали довгі хвилі.

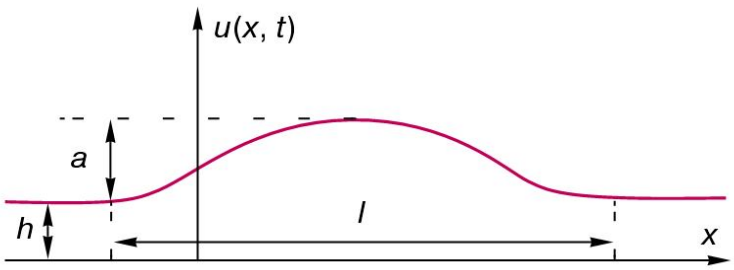


Рис. 1. Відокремлена хвиля

Рівняння, яке було ними отримано, має вигляд

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{2}$$

Тут $u(x,t)$ – відхилення від положення рівноваги поверхні води (форма хвилі) – залежить від координати x і часу t. Рівняння (2) має хвильовий розв'язок, який виражається через спеціальну еліптичну функцію, вивчену К. Якобі. За певних умов еліптична функція Якобі переходить в гіперболічний секанс і розв'язок має вигляд

$$u(x,t) = 2k^2 ch^{-2}\left(k\left(x - 4k^2 t\right) + j_0\right), \tag{3}$$

де j_0 – довільна стала. Розв'язок (3) рівняння (2) є граничним випадком хвилі нескінченно великого періоду. Саме цей граничний випадок є відокремленою хвилею, що відповідає спостереженню Рассела в 1834 році.

Зазначимо, що розв'язок (3) рівняння Кортевега-де Фріза є *біжучою хвилею*. Це означає, що він залежить від координати x і часу t через змінну $s = x - ct$. Ця змінна характеризує положення точки координат, що рухається зі швидкістю хвилі c, тобто вона позначає положення спостерігача, який постійно знаходиться на гребені хвилі.

Ці роботи виявилися забутими на довгі десятиліття. Лише у 1953 році один із найвидатніших фізиків XX століття Е. Фермі попросив двох своїх колег (по Лос-Аламоській лабораторії) С. Улама і Дж. Пасту розв'язати одну з нелінійних задач на ЕОМ. Вони повинні були дослідити питання про термалізацію енергії в нелінійних дискретно навантажених струнах на прикладі коливання 64 важків, пов'язаних один з одним пружинками, які при відхиленні від положення рівноваги на Δl отримували силу повернення, рівну $k\Delta l + \alpha(\Delta l)^2$.

Тут k і α – сталі коефіцієнти. При цьому нелінійний доданок передбачався малим у порівнянні з основною силою $k\Delta l$. Створюючи початкове коливання, дослідники хотіли подивитися, як ця початкова мода буде розподілятися по всіх інших модах. Передбачалося, що енергія в кінці кінців рівномірно розподілиться між модами, тобто по всій довжині хвилі, тим самим відбудеться термалізація енергії. У 1954 році після проведення розрахунків цієї задачі на ЕОМ очікуваного результату вони не отримали, але виявили, що перекачування енергії в дві або три моди на початковому етапі розрахунку дійсно відбувається, але потім спостерігається повернення до початкового стану. Про цей парадокс, пов'язаний з поверненням початкового коливання, стало відомо кільком математикам і фізикам. Зокрема, про цю задачу дізналися американські фізики М. Крускал і Н. Забускі, які вирішили продовжити обчислювальні експерименти з моделлю, запропонованою Фермі. Виявилося, що в ланцюжку виникають особливі хвилі – солітони, які не дають енергії рівномірно розподілятися по всій її довжині. Це було виявлено тільки через 11 років.

Після розрахунків і пошуку аналогій ці вчені встановили, що рівняння, яке використовували Фермі, Паста і Улам, при зменшенні відстані між важками і при необмеженому зростанні їх числа переходить в рівняння Кортевега-де Фріза. Тобто по суті задача, запропонована Фермі, зводилася до чисельного розв'язання рівняння Кортевега-де Фріза, запропонованого в 1895 році для опису відокремленої хвилі Рассела. Приблизно в ті ж роки було показано, що для опису іонно-звукових хвиль в плазмі використовується також рівняння Кортевега-де Фріза. Тоді стало ясно, що це рівняння зустрічається в багатьох областях фізики і, отже, відокремлена хвиля, яка описується цим рівнянням, є широко поширеним явищем.

Продовжуючи обчислювальні експерименти з моделювання розповсюдження таких хвиль, Крускал і Забускі розглянули їх зіткнення (рис. 2). З формули для відокремлених хвиль (3) випливає, що швидкість руху таких хвиль тим вище, чим більше їх амплітуда, а ширина піку зменшується зі зростанням амплітуди. Таким чином, високі відокремлені хвилі рухаються

швидше. Хвиля з більшою амплітудою наздожене рухому попереду хвилю з меншою амплітудою. Далі протягом деякого часу дві хвилі будуть рухатися разом як єдине ціле, взаємодіючи між собою, а потім вони роз'єднаються. Чудовою властивістю цих хвиль є те, що після своєї взаємодії форма і швидкість цих хвиль відновлюються. Обидві хвилі після зіткнення лише зміщуються на деяку відстань в порівнянні з тим, що якби вони рухалися без взаємодії.

Процес, у якого після взаємодії хвиль зберігаються форма і швидкість, нагадує пружне зіткнення двох частинок. Тому Крускал і Забускі такі відокремлені хвилі назвали *солітонами* (від англ. solitary – відокремлений). Ця спеціальна назва відокремлених хвиль, співзвучна електрону, протону та багатьом іншим елементарним частинкам, у даний час загальноприйнята.

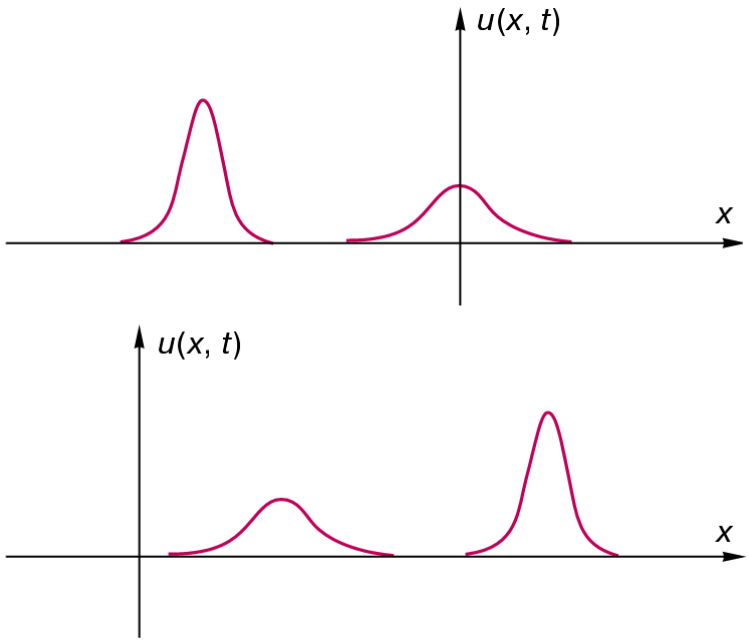


Рис.2. Два солітони до взаємодії (вгорі) і після (внизу)

У 1967 році Т. Бенжамен і Дж. Фейєр теоретичними розрахунками показали, що проста періодична хвиля на глибокій воді нестійка, і тому хвилі розбиваються на групи. Рівняння, за допомогою якого описується поширення груп хвиль на воді, було отримано В. Захаровим в 1968 році. На той час це рівняння вже було відоме у фізиці і носило назву *нелінійного рівняння Шредінгера*. У 1971 році В. Захаров і А. Шабат показали, що це нелінійне

рівняння має розв’язок також у вигляді солітонів, які відрізняються від солітонів Кортевега-де Фріза тим, що вони відповідають формі огинаючої групи хвиль (рис. 3). Ці солітони називаються *груповими солітонами*, а іноді солітонами огинаючої. При цьому форма огинаючої описується залежністю

$$a(x,t) = a_0 ch^{-1}\left(\frac{x - c_0 t}{l}\right),$$

де a_0 – амплітуда, а l – половина розміру солітона. Зазвичай під огинаючою солітона знаходиться від 14 до 20 хвиль, причому середня хвиля найбільша. З цим пов'язаний добре відомий факт, що найвища хвиля в групі на воді знаходиться між сьомою та десятою (*«дев'ятий вал»*). Якщо в групі хвиль утворилося більша кількість хвиль, то відбудеться її розпад на кілька груп.

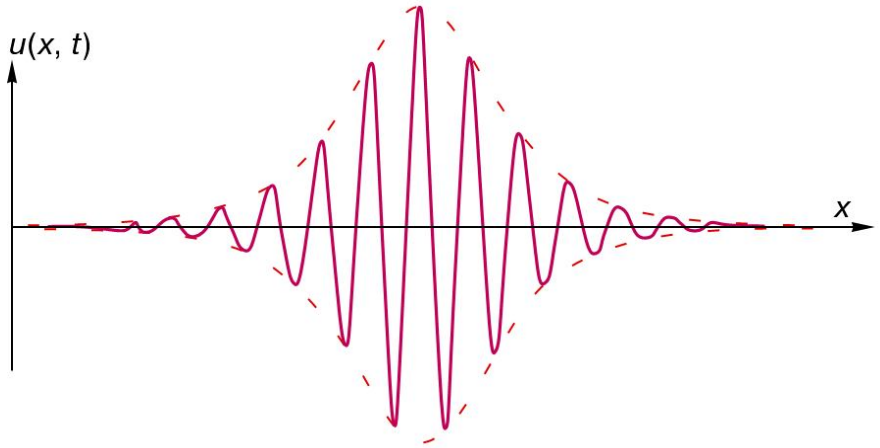


Рис. 3. Приклад групового солітона (штрихова лінія)

Солітон Кортевега-де Фріза і груповий солітон, звичайно, не вичерпує всього різноманіття цих дивовижних нелінійних об'єктів. Не менш популярним, ніж перелічені вище солітони, є так званий топологічний солітон, який також має цікаву історію і велику область застосувань [3]. Цей солітон з'являється у всіх процесах, які описуються нелінійним рівнянням вигляду

$$u_{xt} = \sin u. \qquad (4)$$

Рівняння (4) вперше з'явилося в минулому столітті в геометрії Лобачевського при описі поверхонь постійної від’ємної кривизни і в даний час називається рівнянням sin-Ґордона.

Аналогічне рівняння було використано Я. Френкелем і Т. Конторовою для опису дислокацій в кристалі. Вони знайшли розв'язок, який мав властивості солітона, але чіткого розуміння, що це таке, в той час ще не було.

На завершення зазначимо, що солітони інтенсивно вивчаються фізиками та математиками (наприклад, у статтях [4], [5] і [6] досліджено питання існування такого типу розв'язків в системах осциляторів), оскільки вони знаходять широке застосування в науці та техніці.

Література:

1. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху: Підручник. К.: Вища школа, 2004. 525 с.
2. Новокшенов В. Ю. Введение в теорию солитонов: Учеб. пособие. Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2002. 96 с.
3. Филиппов А.Т. Многоликий солитон. М.: Наука, 1990. 288 с. (Б-чка «Квант»; изд. 2-е; Вып. 48).
4. Bak S. M. Traveling waves in chains of oscillators // Mat. Studii. 2006. Vol. 26, № 2. P. 140–153.
5. Bak S. N., Pankov A.A, Traveling waves in systems of oscillators on 2D-lattices // Journal of Mathematical Sciences. 2011. Vol. 174, № 4 (April). P. 437–452.
6. Bak S. M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice // Ukrainian mathematical Journal. 2017. Vol. 69, №4. P.509-520.

УДК 514.112

Бевз Дар'я

студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛАНІМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ВВЕДЕННЯ ДОПОМІЖНОГО ВІДРІЗКА ТА ПЛОЩІ

***Анотація**: Розглянуто метод розв'язування планіметричних задач за допомогою введення допоміжного відрізку та допоміжної площі. З'ясовано в яких саме задачах краще застосовувати ці методи і як це робити. Наведено приклади таких задач із їх розв'язанням.*

***Ключові слова**: допоміжний відрізок, допоміжна площа, геометрична задача.*

***Annotation**: The method of solving planimetric problems is considered with the help of introduction of auxiliary segment and auxiliary area. It is explained in what tasks it is better to apply such methods and how to do it. Examples of such problems with their solution are given.*

***Key words**: auxiliary segment, auxiliary area, geometric problem.*

Існує багато різних методів розв'язування геометричних задач. Серед аналітичних методів можна виділити два таких, як метод допоміжного відрізка та метод допоміжної площі. Вони полягають у тому, що за допомогою введення допоміжного елемента складається рівняння, де невідомим буде шуканий елемент або елемент, потрібний для його пошуку.

Допоміжний відрізок зручно вводити, якщо фігури подібні. Тоді за допомогою пропорцій або геометричних побудов складається рівняння, в якому цей елемент як член рівняння скорочується, а знайти шуканий стає неважко. [1, с. 222]

Введення площі як допоміжного елемента аналогічне введенню відрізка. Порівнюючи площі фігур, можна дістати рівняння відносно невідомих задачі або необхідне співвідношення у вигляді формули. Краще знаходити чи порівнювати ті площі, сума чи різниця яких дає площу заданої фігури або відношення площ тих фігур, у яких лінійні елементи – шукані, або є компонентами співвідношення у вигляді формули. [1, с. 233]

Розглянемо дві задачі, де введемо допоміжні відрізки, а саме висоти; та дві задачі, де введемо допоміжні площі.

Задача №1. [1, с. 222] У трапеції $ABCD$ основа $AB < DC$, $AB = a$, $DC = b$. Пряма, яка перетинає бічні сторони трапеції в точках G і F, проходить через точку перетину діагоналей трапеції паралельно її основам. Знайти довжину відрізка GF.

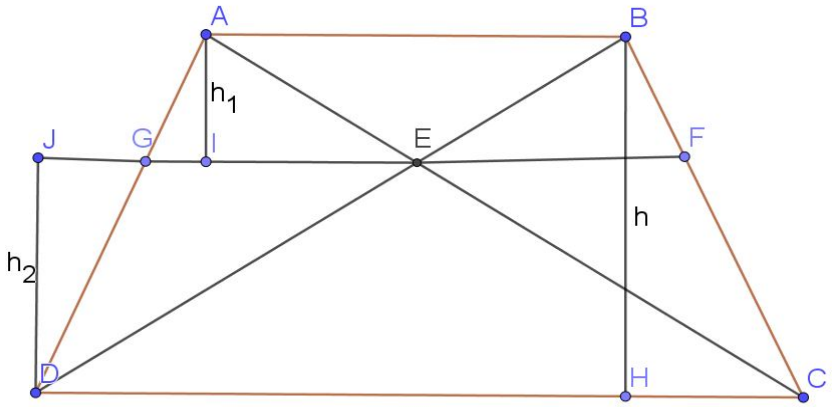


Рис. 1

Розв'язання. Введемо як допоміжні елементи h_1, h_2, h – висоти трикутників відповідно $\mathbf{GAE, DGE}$ і $\mathbf{DAB}$ (рис. 1). Позначимо відрізок GE як x. Трикутники GAE і DAC – подібні, тому маємо таке співвідношення:

$$\frac{x}{a} = \frac{h_1}{h}.$$

З подібності трикутників DGE і DAB випливає:

$$\frac{x}{b} = \frac{h_2}{h}.$$

Отже, додаючи почленно дві попередні рівності, отримаємо:

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{h_1 + h_2}{h}.$$

Так як $h_1 + h_2 = h$, будемо мати :

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{h_1 + h_2}{h} = \frac{h}{h} = 1.$$

Виразимо звідси x:

$$\frac{x(a+b)}{ab} = 1 \to x = \frac{ab}{a+b}.$$

Аналогічно попереднім міркуванням можна обчислити й EF:

$$EF = y = \frac{ab}{a+b}.$$

Отже довжина відрізка GF:

$$GE + EF = x + y = \frac{2ab}{a+b}.$$

Задача №2. [1, с. 224] Площа трикутника ABC дорівнює S. Відрізок DE, паралельний стороні BC, відтинає трикутник, площа якого дорівнює S_1. Нехай F – довільна точка на стороні BC. Знайти площу чотирикутника $ADFE$.

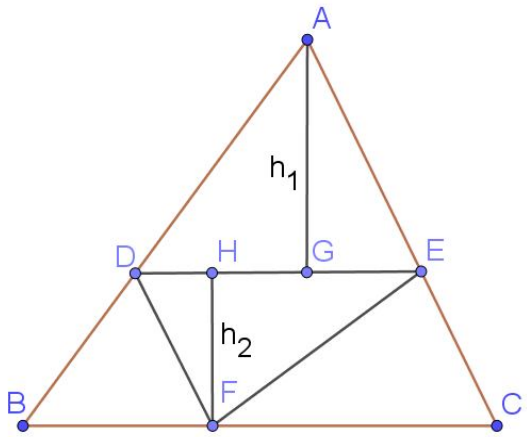


Рис. 2

Розв'язання. Позначимо висоти трикутників ADE, ABC і DFE $-h_1, h, h_2$ відповідно (рис. 2). Оскільки трикутники DFE і ADE мають спільну основу, то:

$$\frac{S_x}{S_1} = \frac{h_2}{h_1} \quad (S_x = MN \cdot h_2,\ S_1 = MN \cdot h_1), \qquad (1)$$

де S_x – площа трикутника DFE.

Оскільки трикутники BAC і DAE – подібні, то:

$$\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S_1}} = \frac{h}{h_1} = \frac{h_1 + h_2}{h_1} = \frac{h_2}{h_1} + 1.$$

Враховуючи співвідношення (1), дістаємо:

$$\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S_1}} = \frac{S_x}{S_1} + 1,\ \ \frac{S_x}{S_1} = \frac{\sqrt{S} - \sqrt{S_1}}{\sqrt{S_1}}.$$

Звідки $S_x = \sqrt{SS_1} - S_1$. Отже $S_{ADFE} = S_1 + S_x = S_1 + \sqrt{SS_1} - S_1 = \sqrt{SS_1}$.

Задача №3. [1, с. 235] У трикутнику ABC d_1, d_2, d_3 – відстані від довільної точки E до сторін AB, AC, BC. Довести, що

$$\frac{d_1}{h_c} + \frac{d_2}{h_b} + \frac{d_3}{h_a} = 1.$$

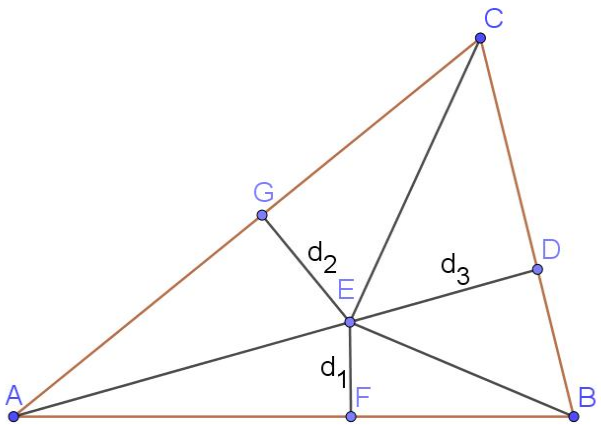


Рис. 3

Доведення: У трикутнику BEA висота $EF = d_1$ (рис. 3). Оскільки трикутники BEA і ABC мають спільну сторону AB, то

$$\frac{S_{BEA}}{S_{ABC}} = \frac{d_1}{h_c}.$$

Аналогічно:

$$\frac{S_{BEC}}{S_{ABC}} = \frac{d_3}{h_a}, \qquad \frac{S_{AEC}}{S_{ABC}} = \frac{d_2}{h_b}.$$

Отже, додаючи три попередні рівності, отримаємо:

$$\frac{d_1}{h_c} + \frac{d_2}{h_b} + \frac{d_3}{h_a} = \frac{S_{BEA} + S_{AEC} + S_{BEC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1 \ \blacksquare$$

Задача №4. [1, с. 240] У трикутнику ABC точки G, F, K належать сторонам AC, BC, AB. Прямі CK, BG, AF перетинаються у точці E. Довести, що

1) $\frac{EK}{CK} + \frac{EG}{BG} + \frac{EF}{AF} = 1;$

2) $\frac{CE}{CK} + \frac{BE}{BG} + \frac{AE}{AF} = 2;$

3) $\frac{CF}{FB} \cdot \frac{BK}{KA} \cdot \frac{AG}{GC} = 1.$

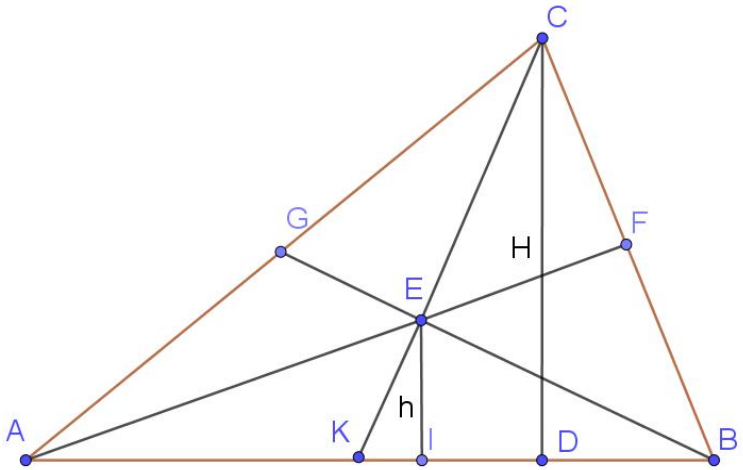


Рис. 4

Доведення: 1) У трикутниках ABC і AEB опустимо висоти CD і EI та назвемо їх H і h. Тоді, так як у цих трикутників спільна основа, маємо:

$$\frac{h}{H}=\frac{S_{AEB}}{S_{ABC}},\quad \frac{EK}{CK}=\frac{h}{H}\rightarrow\frac{EK}{CK}=\frac{S_{AEB}}{S_{ABC}}.$$

Аналогічно можна довести й такі рівності:

$$\frac{EG}{BG}=\frac{S_{AEC}}{S_{ABC}},\frac{EF}{AF}=\frac{S_{BEC}}{S_{ABC}}.$$

Додамо отримані рівності:

$$\frac{EK}{CK}+\frac{EG}{BG}+\frac{EF}{AF}=\frac{S_{AEB}+S_{AEC}+S_{BEC}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1\ \blacksquare$$

2) $\frac{CE}{CK}=\frac{CK-EK}{CK}=1-\frac{EK}{CK}$, $\frac{BE}{BG}=1-\frac{EG}{BG}$, $\frac{AE}{AF}=1-\frac{EF}{AF}$.

Додамо три отримані рівності:

$$\frac{CE}{CK}+\frac{BE}{BG}+\frac{AE}{AF}=3-\left(\frac{EK}{CK}+\frac{EG}{BG}+\frac{EF}{AF}\right)=3-1=2\ \blacksquare$$

3) Так як в трикутників CEF і BEF, ECG і EAG, AEK і EBK спільна висота, то:

$$\frac{S_{CEF}}{S_{BEF}}=\frac{CF}{FB};\ \frac{S_{AEG}}{S_{CEG}}=\frac{AG}{GC};\ \frac{S_{BEK}}{S_{AEK}}=\frac{BK}{AK}.$$

Отже, перемножуючи попередні три рівності, отримаємо:

$$\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BK}{KA}\cdot\frac{AG}{GC}=\frac{S_{CEF}\cdot S_{BEK}\cdot S_{AEG}}{S_{BEF}\cdot S_{AEK}\cdot S_{CEG}}=\frac{CE\cdot EF\cdot BE\cdot EK\cdot AE\cdot EG}{BE\cdot EF\cdot AE\cdot EK\cdot CE\cdot EG}=1\ \blacksquare$$

Висновок. Розглянуті методи розв'язання геометричних задач є цікавими для подання їх в школі на уроках геометрії. З їх допомогою можна розв'язати задачу зрозумілим для дітей способом. Також для розв'язування однієї задачі можна використовувати й обидва способи, цим самим поглиблюючи знання й уміння учнів із геометрії.

Література:

1. Кушнір І.А. Методи розв'язування задач з геометрії / І.А. Кушнір – Київ: Абрис, 1994 – 463 с.
2. Фільчаков П.Ф. Справочник по элементарной математике / П.Ф. Фільчаков – Київ: Наукова думка, 1966 – 440 с.
3. Готман Е.Г. Решение геометрических задач аналитическим методом / Е.Г. Готман, З.А. Скопець – Москва: Просвещение, 1979 – 128 с.
4. Абрамчук В.С. Посібник з шкільного курсу математики / В.С. Абрамчук, Л.А. Тютюн, Н.М. Шунда – К.: Техніка, 2008 – 736 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Тютюн Любов Андріївна

УДК 519.11/.16

Бех Тетяна

студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

МЕТОДИ ДОВЕДЕННЯ КОМБІНАТОРНИХ ТОТОЖНОСТЕЙ

Анотація. *Стаття присвячена комбінаторним тотожностям, а саме методам їх доведення. Наведено алгоритми доведення комбінаторних тотожностей методом Малікова та за допомогою похідної. На прикладах проілюстровано ці методи.*

Ключові слова*: комбінаторна тотожність, рівність Паскаля, рівність Вандермонда, метод Малікова.*

Annotation *The article is devoted to combinatorial identities, namely, the methods of their proof. The algorithms for bringing combinatorial identities by the Malikov method and using the derivative are given. The examples illustrate these methods.*

Keywords: *Combined Identity, Pascal Equality, Vandermont Equality, Malikov's Method.*

Комбінаторні тотожності з'являються у багатьох галузях математики: алгебрі, математичній статистиці, теорії ймовірностей, теорії графів тощо, тому їм присвячено чимало праць видатних математиків минулого та сучасності. Зокрема, в монографії Ріордана [2] проаналізовано та класифіковано значну частину комбінаторних тотожностей.

Комбінаторними тотожностями називають тотожності, які містять біномні коефіцієнти – C_n^k.

Для конструювання та доведення комбінаторних тотожностей використовують багатий арсенал засобів: метод математичної індукції, метод Малікова, комбінаторні міркування, тотожні перетворення, похідна та інтеграл, зворотні послідовності, комплексні числа. У своїй статті ми продемонструємо деякі з цих методів для доведення кількох важливих комбінаторних тотожностей.

Найпростішими і разом з тим найважливішими комбінаторними тотожностями є формула бінома Ньютона та правило Паскаля.

Теорема 1. Для будь-якого натурального n і довільних a, b виконується тотожність:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^{n-k} a^k \qquad (1)$$

Цю теорему називають біномною. Вираз $(a+b)^n$ називають біномом Ньютона, а праву частину формули (1) – розкладом бінома Ньютона.

Доведемо рівність (1) за допомогою комбінаторних міркувань.

Розглянемо ліву частину формули (1). $(a+b)^n$ – це добуток n однакових співмножників:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{n \text{ разів}}.$$

Після розкриття дужок одержимо суму 2^n доданків виду $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, де $p_i = a$ або b $(i = 1,2,\ldots,n)$. Кожен з цих доданків має вигляд

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-k \text{ разів}} \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{k \text{ разів}} = a^{n-k} \cdot b^k, \; k = 0,1,2,\ldots,n.$$

При фіксованому k таких доданків є C_n^k, бо із n співмножників добутку $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ можна вибрати k множників, що дорівнюють b – C_n^k способами. Тому справедлива формула (1).

Доведемо формулу (1) методом математичної індукції.

1. При $n = 0$: $(a+b)^0 = C_0^0 a^0 b^0 = 1$, що справедливо (нагадаємо, що $C_0^0 = 1$ за означенням).

2. Нехай формула (1) справедлива.

Доведемо для $n + 1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_n^k a^{n+1-k} b^k = \sum_{k=0}^{n+1} \left(C_n^k + C_n^{k-1}\right) \cdot a^{n+1-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^{n+1-k} b^k =$$

$$= a\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k + b\sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1} = a\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k + b\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= a(a+b)^n + b(a+b)^n = (a+b)^{n+1}.$$

Отже, $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k$, тобто при $n + 1$ формула (1) справедлива, що і завершує індуктивне доведення.

При доведенні формули (1) методом математичної індукції, ми користувались рівністю Паскаля:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \tag{2}$$

Доведемо рівність (2), користуючись факторіальною формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k) + (n-1)!k}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Рівність (2) доведено.

Доведемо рівність (1), використовуючи рекурентні рівняння.

Нехай $u_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$, тоді

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k = \sum_{k=0}^{n+1} \left(C_n^k + C_n^{k-1} \right) \cdot a^{n+1-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^{n+1-k} b^k =$$

$$= a \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k + b \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1} = a \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = (a+b) u_n .$$

Таким чином, ми отримали рекурентне рівняння:

$$u_{n+1} = (a+b) u_n \tag{3}$$

Це лінійне однорідне рівняння. Знайдемо його загальний розв'язок. Для цього складаємо та розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$r = a + b .$$

Отже, загальним розв'язком рівняння (3) є послідовність

$$u_n = B(a+b)^n \tag{4}$$

Знайдемо сталу *B*, задавши початкову умову: $u_0 = C_0^0 a^0 b^0 = 1$.

Підставляючи $u_0 = 1$ в загальний розв'язок (4), знаходимо, що B = 1.

Отже, $u_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = (a+b)^n$. Рівність (1) доведено.

Розглянемо ще один метод для доведення комбінаторних тотожностей – метод Малікова. Суть цього методу розкриває наступна теорема.

Теорема 2. Нехай (a_n) та (b_n) – дві послідовності. Якщо виконуються умови:

1) $a_p = b_p$;

2) $a_{k+1} - a_k = b_{k+1} - b_k$ при $k \geq p$,

то $a_n = b_n$ при $n \geq p$.

Зі шкільного курсу математики нам відома формула суми *n* членів геометричної прогресії:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_1 \cdot q^{k-1} = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1) \tag{5}$$

Проілюструємо метод Малікова, довівши формулу (5).

Нехай $a_n = \sum_{k=1}^{n} b_1 \cdot q^{k-1}$, $b_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

1. $a_1 = b_1,\ \ b_1 = b_1$.

2. $a_{k+1} - a_k = b_1 q^k;\ b_{k+1} - b_k = b_1 \cdot \dfrac{1-q^{k+1}}{1-q} - b_1 \cdot \dfrac{1-q^k}{1-q} = \dfrac{b_1}{1-q}\left(1 - q^{k+1} - (1-q^k)\right) =$

$$= \frac{b_1}{1-q} q^k (1-q) = b_1 \cdot q^k .$$

Отже, $a_{k+1} - a_k = b_{k+1} - b_k$, тому формула (5) справедлива.

Розглянемо ще один метод доведення комбінаторних тотожностей: за допомогою похідної. Цей метод проілюструємо при доведенні формули (1).

Нехай $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ – многочлен *n*-го степеня. Помітимо, що $a_0 = F(0)$. Знайдемо похідну:

$$F'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + k a_k x^{k-1} + \ldots + n a_n x^{n-1}.$$

Звідси $a_1 = F'(0)$. Далі

$$F''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + \ldots + k(k-1) a_k x^{k-2} + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Звідси $a_2 = \dfrac{F''(0)}{2!}$. Продовжуючи це процес, дістанемо:

$$a_3 = \frac{F'''(0)}{3!},\ \ a_4 = \frac{F^{(IV)}(0)}{4!}, \ldots,\ a_k = \frac{F^{(k)}(0)}{k!}, \ldots, a_n = \frac{F^{(n)}(0)}{n!}.$$

Підставляючи ці значення коефіцієнтів у формулу многочленна, дістанемо:

$$F(x) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} x + \frac{F''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^k + \ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad (6)$$

Рівність (6) справедлива для будь-якого многочлена *n*-го степеня. Візьмемо многочлен *n*-го степеня $F(x) = (1+x)^n$. Послідовно знаходимо:

$F(0) = 1$,

$F'(x) = n(1+x)^{n-1},\ F'(0) = n$;

$F''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2},\ F''(0) = n(n-1)$;

……

$F^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)(1+x)^{n-k},\ F^{(k)}(0) = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$;

……

$F^{(n)}(x)=n!,\ F^{(n)}(0)=n!.$

Підставляючи ці значення похідних у формулу (6), отримаємо:

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k+\ldots+x^n=$$

$$=1+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\ldots+C_n^kx^k+\ldots+C_n^nx^n$$

або

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k \qquad (7)$$

Підставимо в рівність (7) $x=\frac{b}{a}$, тоді $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{b}{a}\right)^k$, звідки

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k.$$

У даній статті ми розглянули шість методів доведення комбінаторних тотожностей, але це ще не все. Комбінаторні тотожності можна доводити ще з використанням інтегралів, комплексних чисел та за допомогою геометричних міркувань. Усі ці методи ми розглянемо у своїй дипломній роботі.

Література:

1. Виленкин Н.Я. Комбінаторика / Виленкин Н.Я. – М.: Наука, 1969. – 323 с.
2. Дж. Риордан. Комбинаторные тождества / Дж. Риордан. – М.: Наука, 1982. 256 с.
3. Нікольський Ю.В. Дискретна математика / Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. – Львів: магнолія плюс, 2005. – 608 с.
4. Ушаков Р.П. Метод Малікова. // Математика в школах України / Ушаков Р.П. 2002. - № 9 (9).
5. Ядренко М.Й. Дискретна математика / Ядренко М.Й. – Київ: Вид. – поліграф. Центр «Експрес», 2003. – 244 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Захарченко Наталія Вікторівна

УДК 517.972.5

Боднар Олена

студентка магістратури
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

КРИВА НЕХАРІ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Анотація. *У статті розглядається крива Нехарі та вказані з доведенням її властивості. Крива Нехарі вивчається як гладка крива, на якій лежить будь-який нетривальний розв'язок рівняння* $Ax = f(x)$.

Ключові слова: *Крива Нехарі, нетривіальний розв'язок, функція.*

Annotation. *In the article the curve of Nechari is considered and indicated with proof of its properties. The curve of Nechari is studied as a smooth curve, on which are any non-trivial solution of the equation* $Ax = f(x)$.

Key words: *curve of Nehari, non-trivial solution, function.*

Для знаходження критичних точок розроблена велика кількість різних методів. Більшість з них в тій чи іншій мірі використовують топологічні міркування. Однак, для функціоналів був запропонований інший підхід, що не використовує топологічних методів. Метод Нехарі оснований на вивченні допоміжної екстремальної задачі з обмеженнями для функціоналу *Ф*. В загальному випадку рівняння Ейлера-Лагранжа для такої задачі містить множники Лагранжа і, отже, не співпадає з початковою задачею. В підході Нехарі обмеження підбираються таким чином, що множники Лагранжа обертаються в нуль і, тим самим, розв'язок допоміжної задачі автоматично дає розв'язок початкової.

Розглянемо функцію $\Psi: R^2 \to R$ за формулою

$$\Psi(x) = (\text{grad } \Phi(x), x) = (Ax, x) - (f(x), x)$$

функція Ψ неперервно диференційовна. Множина

$$N = \{x \in R^2 : \Psi(x) = 0, x \neq 0\} \quad (1)$$

називається кривою Нехарі функції $\Phi(x)$, або рівняння

$$Ax = f(x) \quad (2)$$

Теорема 1. Будь-який нетривіальний розв'язок рівняння (2) лежить на кривій Нехарі.

Доведення. Необхідне твердження одразу випливає з означення $\mathbf{N}$ і того, що

$$\Psi(x) = (Ax, x) - (f(x), x).$$

Теорема 2. Крива Нехарі $\mathbf{N}$ являється гладкою кривою.

Доведення. Функція $\Psi(x)$ неперервно диференційовна. Обчислимо $\mathbf{grad}\ \Psi$. Маємо

$$\mathbf{grad}\ (Ax,x) = 2Ax.$$

Дійсно,

$$(Ax,x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(Ax,x) = 2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}(Ax,x) = 2a_{22}x_2 + 2a_{12}x_2.$$

Крім того,

$$(f(x),x) = f_1x_1 + f_2x_2.$$

Отже,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(f(x),x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}x_2 + f_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(f(x),x) = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}x_2 + f_2.$$

Тоді

$$\mathbf{grad}\ (f(x),x) = J(x)x + f.$$

Таким чином,

$$\mathbf{grad}\ \Psi = 2Ax - J(x)x - f(x). \tag{3}$$

Нехай $x \in N$. Відмітимо, що за означенням $x \neq 0$. Покажемо, що $\mathbf{grad}\ \Psi(x) \neq 0$.

Маємо

$$(\mathbf{grad}\ \Psi(x),x) = (2Ax,x) - (J(x)x,x - (f(x),x).$$

За означенням кривої Нехарі $(Ax,x) = (f(x),x)$. Отже,

$$(\mathbf{grad}\ \Psi(x),x) = 2(f(x),x) - (J(x)x,x) - (f(x),x) = (f(x),x) - (J(x)x,x)$$

В силу нерівності

$$0 < (f(x),x) \leq \theta(J(x),x), x \in R^2, x \neq 0, \quad (4)$$

матимемо

$(J(x)x,x) \geq \theta^{-1}(f(x),x)$.

Тоді

$(\text{grad}\ \Psi(x),x) \leq (f(x),x) - \theta^{-1}(f(x),x) = (1-\theta^{-1})(f(x),x)$.

Так як $\theta \in (0,1)$, то $(1-\theta^{-1}) < 0$. Тому,

$(\text{grad}\ \Psi(x),x) < 0$ і $\text{grad}\ \Psi(x) \neq 0$.

Отже, за теоремою про неявну функцію, множина N являється гладкою кривою і твердження доведено. [2]

Для подальшого міркування знадобляться наступні твердження про диференційовні нерівності (доведення можна знайти в [1]).

Лема 1. Нехай $U(t,y)$ — неперервно диференційовна функція в деякому околі точки $(t_0,y_0) \in R^2$.

Нехай функція $y(t)$ визначена на $[t_0,t_0+a]$,

$$\frac{\partial y}{\partial t} \geq U(t,y), y(t_0) = y_0,$$

а $z(t)$- розв'язок задачі Коші

$$\frac{\partial z}{\partial t} = U(t,z),\ z(t_0) = y_0.$$

Тоді на загальному інтервалі існування функції $y(t)$ і $z(t)$ справедлива нерівність $y(t) \geq z(t)$.

Теорема 3. Нехай $x \neq 0 \in R^2$ — довільна точка площини. Тоді існує єдине $t_0 > 0$ для якого $t_0 x \in N$.

Доведення. Розглянемо функцію

$$\psi(t) = t^{-2}\,\Psi(tx), t > 0.$$

Очевидно, що функція $\psi(t)$ неперервна (і навіть неперервно диференційовна). Тому для доведення достатньо встановити наступні три властивості функції $\psi(t)$:

1. $\psi(t) > 0$ при достатньо малих $t > 0$.
2. $\psi(t) < 0$ при достатньо великих $t < 0$.

3. $\psi(t)$ строго спадна функція.

Дійсно, властивості 1 і 2 разом з неперервністю забезпечують існування такого $t_0 > 0$, що

$$\psi(t_0) = t_0^{-2}\,\Psi(t_0 x), = 0.$$

Властивість 3 гарантує єдиність такого t_0.

Для доведення властивості 1 обрахуємо

$$\lim_{t\to 0}\psi(t) = \lim_{t\to 0} t^{-2}\,\psi(tx) = \\ = \lim_{t\to 0} t^{-2}[(Atx, tx) - (f(tx), tx)] == (Ax, x) - \lim_{t\to 0}(t^{-1} f(tx, x)$$

Враховуючи, що

$$\lim_{t\to 0}(t^{-1} f(tx, x)) = 0.$$

Отже,

$$\lim_{t\to 0}\psi(t) = (Ax, x).$$

Так як матриця А достатньо визначена і $x \neq 0$, то $(Ax, x) > 0$ і

$$\lim_{t\to 0}\psi(t) > 0.$$

Звідси випливає властивість 1.

Доведемо властивість 2.

Нехай $h(t) = (f(tx), x)$. Тоді $h'(t) = (J(tx)x, x)$.

Підставимо $\sigma = \frac{1}{\theta} > 1$. Маємо

$$\left(t^{-\sigma} h(t)\right)' = -\sigma t^{-(\sigma+1)} h(t) + t^{-\sigma} h'(t) = \\ = -\sigma t^{-(\sigma+2)}(f(tx), tx) + t^{-(\sigma+2)}(J(tx)tx, tx) = \\ = t^{-(\sigma+2)}[-\sigma(f(tx), tx) + (J(tx)tx, tx)].$$

Отже,

$$t^{-\sigma}\left[h'(t) - \sigma\frac{h(t)}{t}\right] \geq 0$$

і

$$h'(t) \geq \sigma\frac{h(t)}{t}, t \geq 1.$$

$h(t) \geq z(t)$, де z — рішення задачі Коші

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sigma \frac{z}{t}, z(1) = h(1).$$

В останньому рівнянні розподіляються змінні і розв'язок виписується в явному вигляді:

$$z = h(1)t^{\sigma} = (f(x), x)t^{\sigma}.$$

Отже,

$$h(t) = (f(tx), x) \geq (f(x), x)t^{\sigma}, t \geq 1.$$

Тепер маємо

$$\psi(t) = t^{-2}[(Atx, tx) - (f(tx), tx)] = (Ax, x) - t^{-1}(f(tx), x) \leq$$
$$\leq (Ax, x) - (f(x), x)t^{\sigma-1}.$$

Так як $\sigma > 1$, то права частина останньої нерівності від'ємна при всіх достатньо великих t. Отже, властивість доведена.

Для доведення властивості 3 обрахуємо похідну $\psi'(t)$. Маємо

$$\psi'(t) = [(Ax,x) - t^{-1}(f(tx),x)]' = [(Ax,x) - t^{-1}h(t)]' = -(t^{-1}h(t))' =$$
$$= t^{-2}h(t) - t^{-1}h'(t) = t^{-2}(f(tx),x) - t^{-1}(J(tx)x,x) =$$
$$= t^{-3}[(f(tx),tx) - (J(tx)tx, tx)].$$

В силу нерівності (4),

$$\psi'(t) \leq t^{-3}[\theta(J(tx)tx, tx) - (J(tx)tx, tx)] = (\theta - 1)t^{-3}(J(tx)tx, tx).$$

Так як $x \neq 0, t > 0$, то $(J(tx)tx, tx) > 0$. Оскільки $\theta \in (0,1)$, звідси випливає, що $\psi'(t) < 0$ і властивість 3 встановлено.

Отже, твердження доведено.

Встановлені властивості кривої Нехарі показують, що

Теорема 4. Крива Нехарі являється гладкою замкненою кривою, що охоплює початок координат. Кожний промінь, що виходить з початку координат перетинає криву Нехарі рівно в одній точці. У внутрішній області, обмеженої кривою Нехарі (за винятком початку координат), $\Psi(x) > 0$, а в зовнішній $\Psi(x) < 0$.

Отож, крива Нехарі розташована в кільцевій області

$$D = \{x \in R^2 : 0 < r_1 \leq |x| \leq r_2\}.$$

При цьому можна дати ефективні оцінки радіусів r_1 і r_2. [3]

Література:

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. — Москва: Наука, 1969. — 607 с.
2. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Москва: Мир, 1970. — 720с.
3. Nehari Z. Characteristics value associated with a class of nonlinear second-order differential equations. — Acta Math. — 1961. — M. 105, №3 — 4. — p. 141 —175.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Бак Сергій Миколайович

УДК 378.014.6: [001.891:004.9]

Ваколюк Ганна

студентка магістратури
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ЗАСТОСУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЙ DATA MINING ДЛЯ АНАЛІЗУ ДАНИХ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ

Анотація*: Стаття присвячена опису технологій інтелектуального аналізу даних (Data mining), що використовується в різних галузях науки, в тому числі, для аналізу даних освітнього процесу ВНЗ.*

Ключові слова: *інтелектуальний аналіз, дані, Data mining, навчальний процес, освітній процес, OLAP-аналіз.*

Annotation*: The article is devoted to the description of data mining technologies used in various fields of science, including for the analysis of data of educational process of universities.*

Key words: *intellectual analysis, data, data mining, educational process, educational process, OLAP-analysis.*

Спершу розглянемо визначення Data mining. *Data mining (інтелектуальний аналіз даних)* – це процес виявлення в сирих даних раніше невідомих,

нетривіальних, фактично корисних і доступних інтерпретації знань, необхідних для прийняття рішень у різних сферах людської діяльності.

До задач методів Data mining відносяться наступні: класифікація, прогнозування, візуалізація, аналіз виявлення відхилень, оцінювання, аналіз зв'язків, підведення підсумків. Тобто, інтелектуальний аналіз дозволяє обробляти дані з будь-якої сфери людської діяльності. Ми розглянемо принцип роботи Data mining, коли необхідно обробити дані, отримані у ході навчального процесу ВНЗ. Адже у ході навчання в базу навчальних даних вводиться певна інформація. Завдання вищих навчальних закладів – виявлення знань студентів, прихованих у таких базах. Проблемами аналізу даних навчального процесу уже займалися Райан Шон Бейкер[6], Леонід Григор'єв та інші [1].

На даний момент в Україні діє кредитно-модульна організація навчального процесу. На протязі семестру успіхи студентів фіксуються за допомогою контрольних точок, а підсумковий бал обраховується за формулою:

$$П.Б. = 0{,}6 \cdot \frac{ПК_1 + ПК_2}{2} + 0{,}4 \cdot Е,$$

де $ПК_1$, $ПК_2$ – цифрові еквіваленти оцінок першого і другого підсумкового контролю відповідно; Е– цифровий еквівалент оцінки на екзамені.

Щороку у ВУЗах України накопичуються великі об'єми інформації про навчальну діяльність та досягнення студентів, які в основному використовуються для статистичної звітності і при ранжуванні студентів за сумарним середнім балом, отриманим ними протягом всього періоду навчання.

Необхідно використовувати інтелектуальні алгоритми обробки інформації, котрі могли б дати наглядні та зрозумілі результати для того, аби прийняти рішення в цілях удосконалення навчального процесу.

Метою таких досліджень є аналіз результатів навчання та діяльності студентів для вирішення управлінських та організаційних питань з використання методології оперативного та інтелектуального аналізу даних.

Основні результати дослідження. Для управління якості освіти авторами запропоновано підхід, що включає методи технологій OLAP та "Data Mining", котрий дозволяє:

- виявити закономірності і тренди, які існують в системах даних освіти;

- сформувати кластери, які містять об’єкти освіти з характеристиками що сходяться;

- знаходити залежності у великих масивах даних;

- виявляти показники освіти, які найкращим образом дозволяють спрогнозувати результати навчального процесу;

- будувати моделі для прогнозування результатів освітньої діяльності;

- виявляти слабкі та сильні сторони освітньої політики;

- генерувати рекомендації для прийняття управлінських рішень[2].

Рекомендований алгоритм аналізу даних представлений графічно на рис.1.

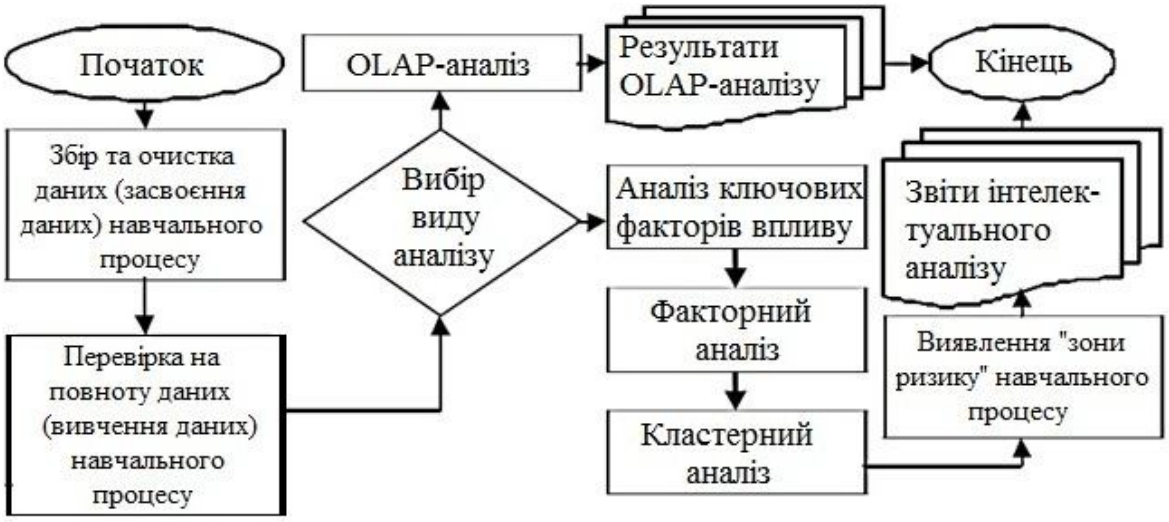


Рис. 1 Алгоритм аналізу даних навчального процесу

Основною вимогою до інформаційної системи, яка орієнтована на аналіз даних, є вчасне забезпечення аналітика всією необхідною інформацією для того, аби прийняти рішення [5]. Для реалізації оперативного та інтелектуального аналізу даних в якості первинних даних виступають відомості навчального процесу ВУЗу, джерелом яких є база даних університету). Зібранні дані, як правило, потребують додаткової обробки, так званої очистки. В процесі очистки за необхідності може відбуватися видалення «викидів» (нехарактерних

та помилкових значень), обробка відсутніх значень параметрів, числове перетворення (наприклад, нормалізація) і т.д. Таким чином, першим кроком аналізу є зібрання та очистка даних навчального процесу.

Другим кроком запропонованого підходу є вивчення даних, яке дозволить зрозуміти, наскільки адекватно підготовлений набір представляє навчальний процес ВУЗу. Тут може проводитись пошук мінімальних і максимальних значень параметрів, аналіз розподілу значень та інших статистичних характеристик, порівняння отриманих результатів про діяльність навчального закладу.

Далі обирають вид аналізу: OLAP – аналіз або інтелектуальний аналіз даних. Розв'язання на базі OLAP дозволяє реалізувати швидкі операції агрегування (деталізації) даних з довільного набору показників, надаючи, таким чином, аналітику деталізовану або узагальнену оперативну інформацію з показників навчального процесу, які його цікавлять [3].

Крім OLAP-аналізу, деякі системи дозволяють реалізувати інтелектуальний аналіз, що включає наступні етапи: аналіз впливу факторів, факторний аналіз, кластерний аналіз.

Аналіз впливу факторів дозволяє визначити залежність результату навчального процесу від інших параметрів (факторів навчання). Таким чином, цей етап дозволяє оцінити ступінь впливу різних параметрів навчального процесу один на одного, при цьому не варто брати до уваги повністю незалежні і, навпаки, повністю залежні фактори. Даний етап аналізу даних виявляє показники освітнього процесу, що найбільшою мірою впливають на результати навчання.

На другому кроці інтелектуального аналізу даних виконується генерація варіантів, що узагальнюють фактор, а потім – їх порівняння між собою і поділ на групи.

Третій етап – класифікація за кількома узагальнюючими показниками (головними компонентами), отриманими за допомогою методів факторного аналізу.

При класифікації використовувались методи кластерного аналізу. Його перевага полягає у тому, що розподіл об’єктів можна проводити не за однією змінною, а за набором ознак. Це дозволяє не лише виявляти групи схожих об’єктів, але й створює передумови для встановлення того, що означає такий розподіл на кластери та чим він викликаний [4].

Література:

1. Григорьев Л.И., Научно-методические и технологические основы информационной системы управления качеством учебного процесса / Л.И.Григорьев – Москва: Нефть и газ, РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2008. – 132 с.
2. Агранович М.Л., Дымарская О.Я. От сбора статистических данных – к информационному обеспечению принятия решений / Д.Л. Константиновский – 2-е изд., доп. и перераб. – Москва: Логос, 2006. –160с.
3. Барсегян А.А., Методы и модели анализа данных: OLAP и Data Mining / А.А. Барсегян, М.С. Куприянов и др. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 336 с.
4. Нейский И.М. Классификация и сравнение методов кластеризации // Интеллектуальные технологии и системы: Сборник учебно-методических работ и статей аспирантов и студентов. – Вып. 8. – Москва, 2006. – 130–142 с.
5. Паклин Н.Б., Орешков В.И. Бизнес-аналитика: от данных к знаниям / Н.Б. Паклин: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп.– СПб.: Питер, 2010. – 704 с.
6. Baker, R.S.J.d., Yacef, K. (2009). The State of Educational Data Mining in 2009: A Review and Future Visions.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Тимошенко О.З.

УДК 514.122

Ворошило Юрій

студент факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ФОРМУЛА ПІКА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

***Анотація**. У статті розглядається формула Піка та її доведення. Також наведено застосування цієї формули до розв’язування деяких прикладних задач на обчислення площ геометричних фігур.*

***Ключові слова:** Формула Піка, вузли сітки, решітка, багатокутник, прямокутник, трикутник.*

Annotation. *The paper examines Pic's formula and its proof. Also, the application of this formula to the solution of some applied problems in calculating the areas of geometric shapes is given.*

Key words*: Peak formula, mesh nodes, lattice, polygon, rectangle, triangle.*

Постановка проблеми. На ДПА і ЗНО з математики з кожним роком збільшується число геометричних завдань, що займають зазвичай більше часу на обдумування рішення, ніж алгебраїчні. Їх можна розділити на такі типи:

- Завдання на застосування формул площі.
- Завдання на обчислення площі фігури, яка зображена на клітчатому папері.
- Завдання на обчислення площі фігури, яка зображена на координатній площині.
- Завдання на поняття координатної площини.
- Завдання із векторами.

Наша робота присвячена розв'язуванню завдань другого типу, а саме: задачам на знаходження площ багатокутників, зображених на картатому папері і вершини яких лежать у вузлах сітки. У цих завданнях вказано масштаб: розміри сторін однієї клітинки 1 см, відповідно, площа однієї клітинки дорівнює 1 $см^2$. Тому відповідь у квадратних сантиметрах рівносильна відповіді у клітинках.

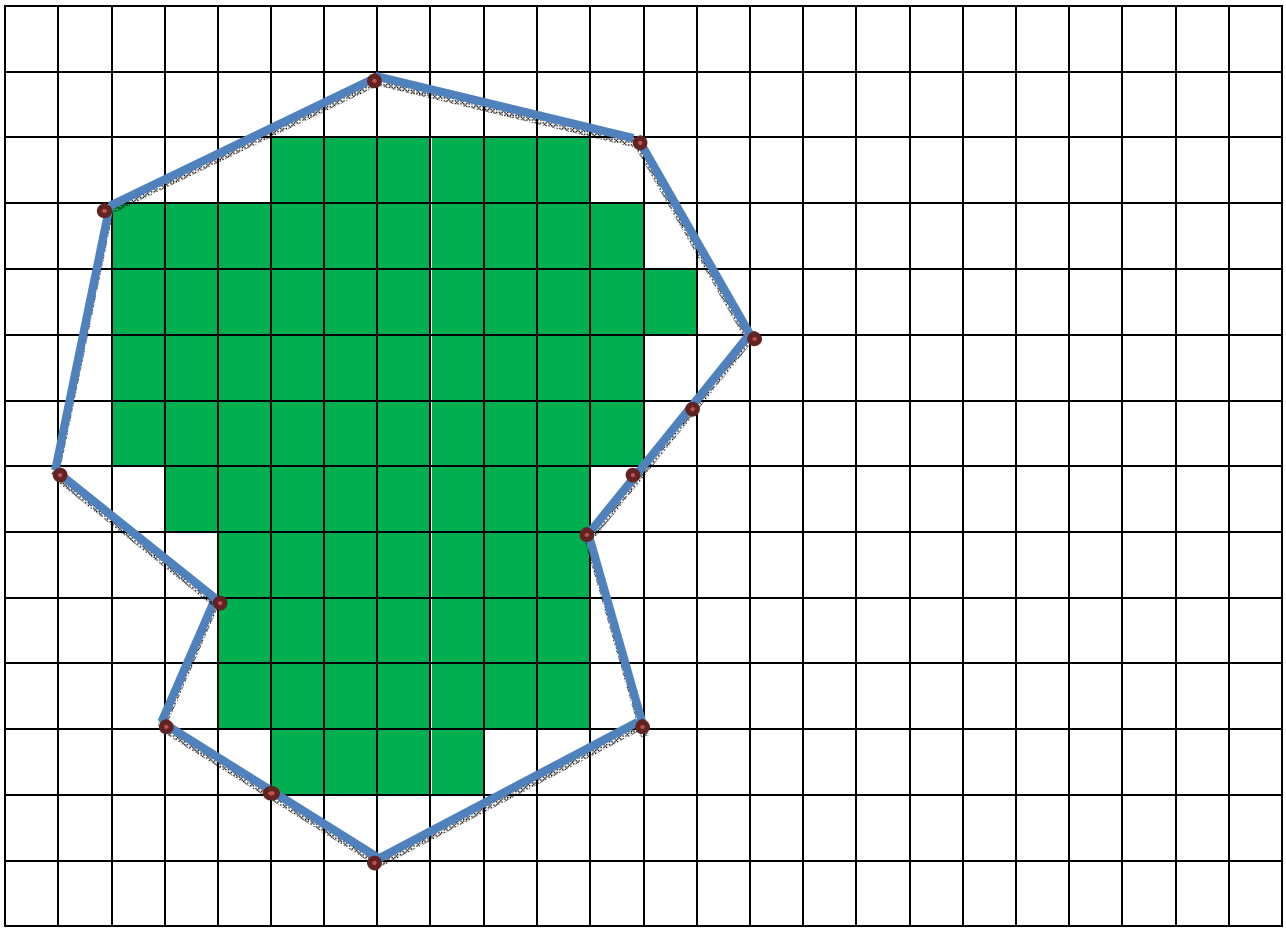
Навички, необхідні для вирішення таких завдань, ми почали набувати ще в дитячому садку, коли вперше взяли в руки ножиці і папір. Питання лише в тому, наскільки ефективно ми зможемо розпорядитися своїм екзаменаційним часом**.**

Формула Піка. Розглянемо багатокутник, вершини якого знаходяться у вузлах цілочисельної решітки.

Існує формула, яка дозволяє знайти його площу шляхом підрахунку кількості вузлів що знаходяться у ньому.

$$S=В+Г-1,$$

де В - число вузлів всередині багатокутника і Г - число вузлів на сторонах, включаючи вершини. Цю формулу відкрив і довів австрійський математик Георг Олександр Пік у 1899 р.

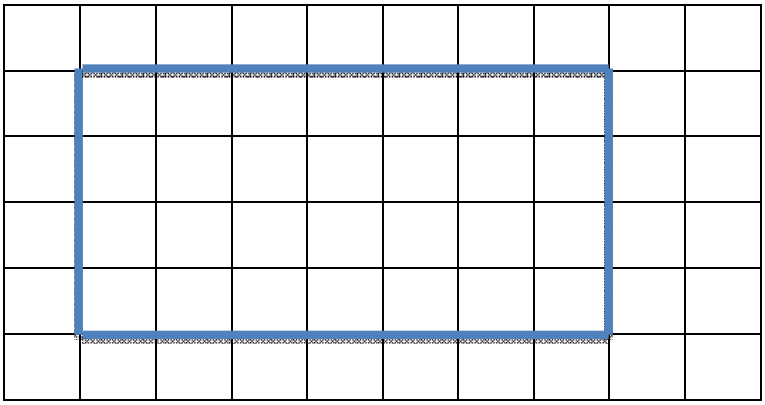


Доведення.

Доведемо цю формулу двома способами.

Спосіб 1.

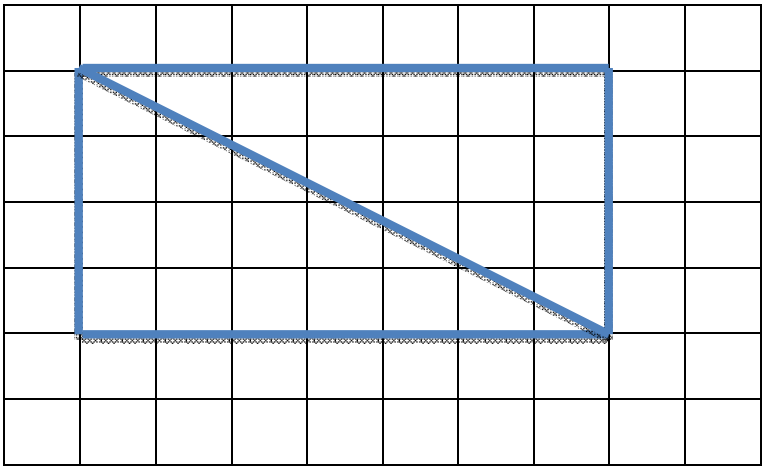
Розглянемо прямокутник зі сторонами, що лежать на лініях решітки. Нехай довжини його сторін рівні a і b.



У цьому випадку, В=(a-1)(b-1) , Г=2a+2b, тоді за формулою Піка,

S=(a-1)(b-1)+a+b-1=ab.

Розглянемо тепер прямокутний трикутник із катетами, що лежать на лініях решітки. Такий трикутник отримано із прямокутника зі сторонами a і b, розглянутого в попередньому випадку, розрізанням його по діагоналі.



Нехай на діагоналі трикутника лежать c цілочисельних точок.

Тоді для цього випадку

$$В=\frac{(a-1)(b-1)-(c-1)}{2},$$

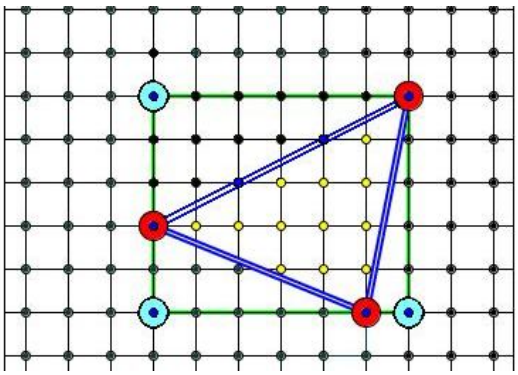
$$Г=(a+1)+(b+1)-1+c-2=a+b+c-1$$

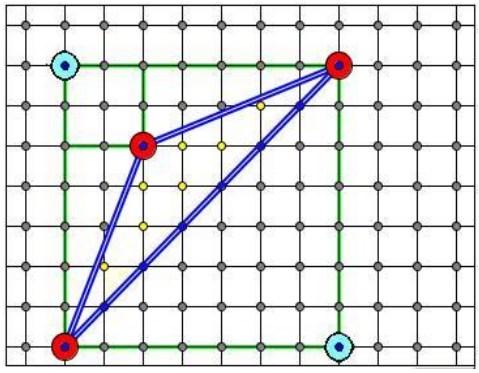
і тоді одержимо:

$$S=\frac{(a-1)(b-1)-(c-1)}{2}\ \text{QUOTE}\ -1^{?}-(c-2)2^{?}+\frac{a+b+c-1}{2}\ \text{QUOTE}\ +b+c-1\ \ 2^{?}\ -1=$$

$$\frac{ab-a-b+1-c+2+a+b+c-1}{2}-1=ab/2.$$

Тепер розглянемо довільний трикутник. Його можна отримати, відрізавши від прямокутника кілька прямокутних трикутників і, можливо, прямокутник.



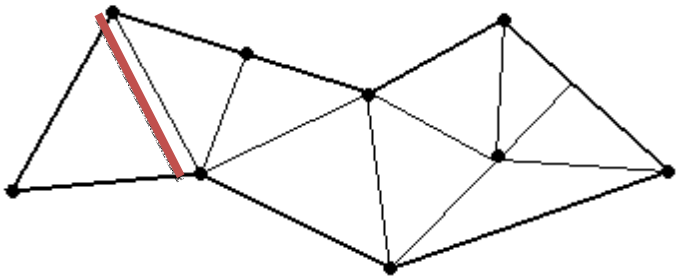


Оскільки і для прямокутника, і для прямокутного трикутника формула Піка вірна, ми отримуємо, що вона буде справедлива і для довільного трикутника.

Доведемо формулу Піка для багатокутника.

Будь-який багатокутник можна розбити на трикутники (наприклад, діагоналями). Тому потрібно лише довести, що при додаванні будь-якого трикутника до довільного багатокутника формула Піка залишається вірною.

Нехай багатокутник M і трикутник T мають спільну сторону. Припустимо, що для M формула Піка справедлива, доведемо, що вона буде вірна і для багатокутника, отриманого з M додаванням T.



Так як M і T мають спільну сторону, то всі цілочисельні точки, що лежать на цій стороні, крім двох вершин, стають внутрішніми точками нового багатокутника. Вершини ж будуть граничними точками. Позначимо число спільних точок через c. Тоді отримаємо:

$B(MT) = B(M) + B(T) + (c - 2)$ — число внутрішніх цілочисельних точок нового багатокутника,

$Г(MT)=Г(M) –(c -2)+Г(T)-(c-2)-2= Г(M))+Г(T)-2c + 2$ — число граничних точок нового багатокутника.

Так як ми припустили, що теорема правильна для M і для T, то

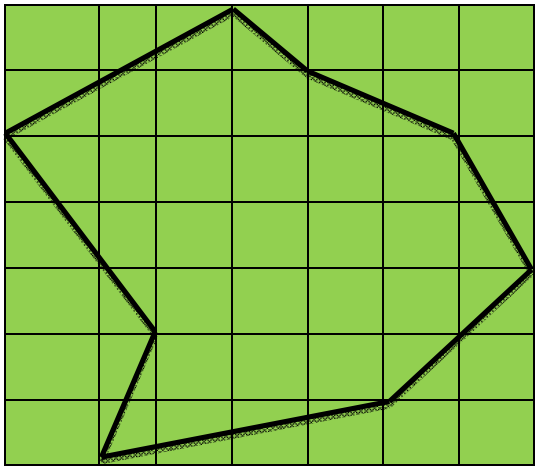
$$S(MT) = S(M)+S(T)=(B(M)+-1)+(B(T)+-1)=$$

$$=(B(M)+B(T))+(\frac{\Gamma(M)}{2}+\frac{\Gamma(T)}{2})-2=B(MT)-(c-2)+-2=B(MT)+\frac{\Gamma(MT)}{2}-1.$$

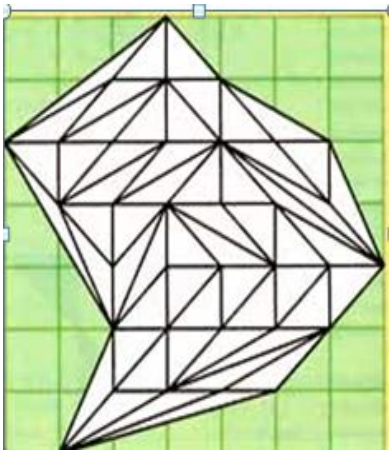
Тим самим, формула Піка доведена.

Спосіб 2.

Розглянемо багатокутник, вершини якого знаходяться у вузлах цілочисельної решітки.

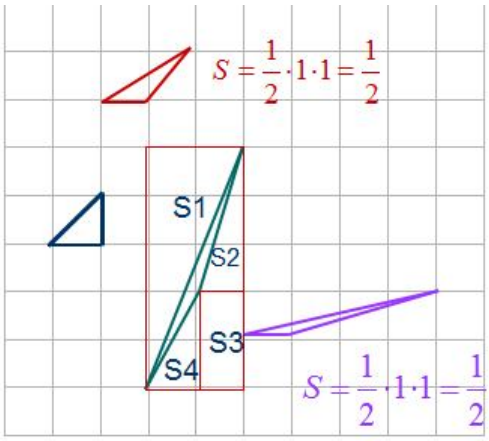


Будь-який такий багатокутник легко розбити на трикутники з вершинами у вузлах решітки, що не містять вузлів ні всередині, ні на сторонах.



Трикутники, які не мають внутрішніх вузлів, називаються простими. Площа простого трикутника дорівнює ½.

Отже, площа S багатокутника дорівнює половині їх числа Т, тобто $S=\frac{\Gamma}{2}$.



Знайдемо цю кількість трикутників. Позначимо через *n* число сторін багатокутника, через В —число вузлів у його середині і через Г —число вузлів на сторонах, включаючи вершини. Загальна сума кутів усіх трикутників дорівнює πТ.

Тепер знайдемо цю суму іншим способом.

Сума кутів із вершиною в будь-якому внутрішньому вузлі становить 2π, загальна сума таких кутів дорівнює 2πВ; загальна сума кутів при вузлах на сторонах, але не в вершинах дорівнює (Г – n)π, а сума кутів при вершинах багатокутника— (n – 2) π. Таким чином,

$$\pi T = 2B\pi + (Г - n)\,\pi + (n - 2)\pi, \quad T=2B+Г-n+n-2, \quad T=2B+Г-2.$$

Так як S=½T , то отримуємо вираз для площі S багатокутника $S=\frac{T}{2}=B+\frac{Г}{2}-1$.

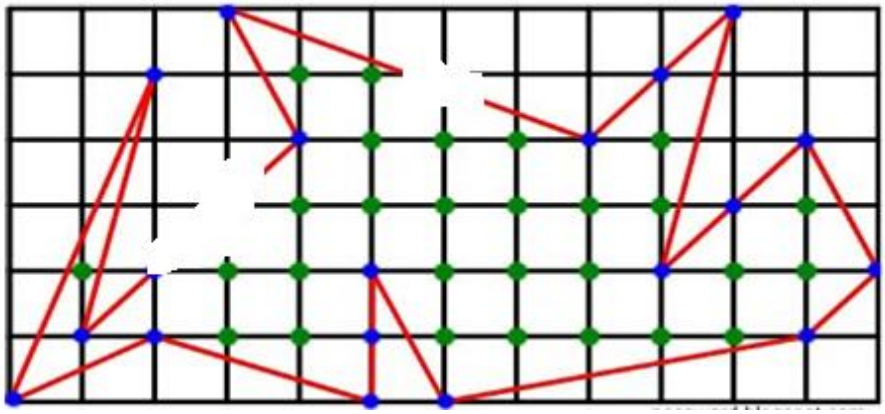
Отже, $S=B+\frac{Г}{2}-1$.

Задача №1.

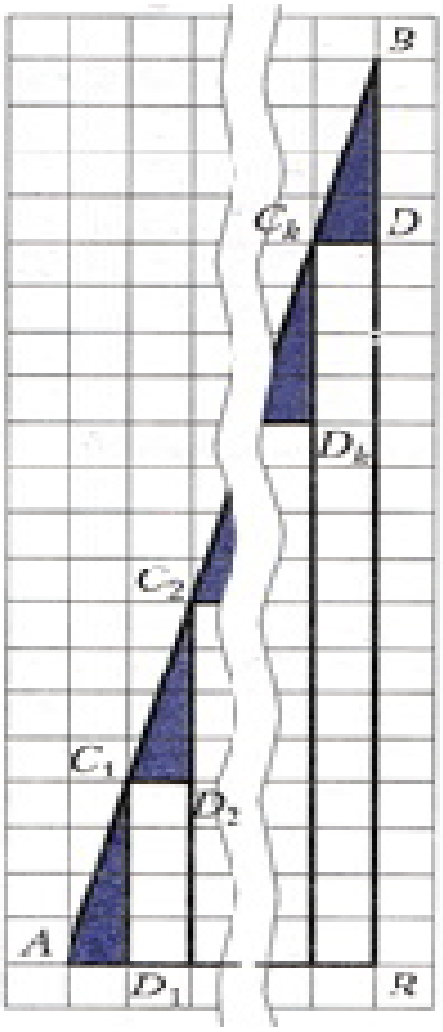
Знайти площу багатокутника, зображеного на картатому папері з розміром клітини 1 см на 1 см (див. Рис.) за допомогою формули Піка. Відповідь дайте в квадратних сантиметрах.

Розв’язування.

Застосування формули Піка для обчислення площі цієї фігури не зовсім зручне. Для стертих вузлів не можна визначити, чи лежить даний вузол усередині фігури або ж потрапив на її межу. Як точно порахувати число вузлів на межі? Оскільки межа складається з відрізків, то нас цікавить кількість вузлів сітки, що лежать на довільному відрізку з кінцями у вузлах.



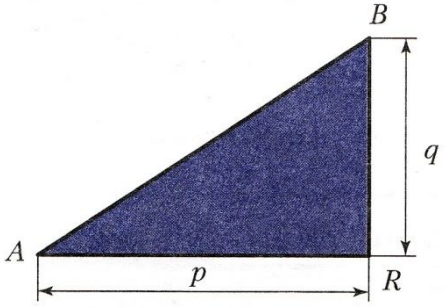
Зробимо спочатку невелике дослідження. Нехай A і B –вузли сітки. Позначимо через C_1 перший вузол, який зустрічається після A на відрізку AB (значить, між A і C_1 більше немає вузлів). Побудуємо прямокутний трикутник AC_1D_1 з гіпотенузою AC_1 і катетами, що лежать на лініях сітки. Якщо $C_1 \neq B$, то змістимо цей трикутник вздовж відрізка AB на відстань AC_1. Отримаємо рівний йому трикутник $C_1C_2D_2$.



Отже, C_2 –вузол, і між C_1 і C_2 немає вузлів. Очевидно, що якщо цю процедуру продовжити, ми коли-небудь отримаємо в якості чергової точки C_{k+1} точку B –вузол сітки. Розглядаючи великий прямокутний трикутник ARB з гіпотенузою AB, приходимо до висновку:

$$AR = (k+1) \cdot AD_1, \qquad BR = (k+1) \cdot C_1D_1, \qquad AB = (k+1) \cdot AC_1.$$

Тепер ми можемо з'ясувати, скільки вузлів лежить між точками A і B (звичайно, ми вважаємо, що A і B не лежать на одній лінії сітки). Побудуємо прямокутний трикутник ARB з вершинами у вузлах сітки і з гіпотенузою AB.



Нехай AR = p, BR = q (p и q –цілі додатні числа).

Теорема. Якщо p і q взаємно прості, то між A і B на відрізку AB немає вузлів сітки. Якщо ж найбільший спільний дільник p і q дорівнює n, де n> 1 (НСД (p, q) = n> 1), то на відрізку AB між точками A і B розташовано рівно (n – 1) вузлів сітки.

Доведення.

1) Нехай числа p і q взаємнопрості. Якщо між A і B було k вузлів (k ≥1), то, взявши найближчий до A вузол C_1, ми отримаємо за формулами:

$$p=(k+1) \cdot AD_1, \qquad q = (k+1) \cdot C_1D_1,$$

тобто p і q мають спільний дільник (k + 1), більший 1. Але ж вони взаємнопрості, отже на відрізку AB між точками A і B немає вузлів.

2) Нехай НСД (p,q) = n> 1. Поділивши відрізки ARi BR на n рівних частин, ми знову приходимо до першого малюнку, де C_1, C_2, …, $C_{к-1}$ –деякі вузли сітки і k=n – 1. Таким чином, у цьому випадку між точками A і B є хоча б (n – 1) вузол. Чому їх не може бути більше, ніж (n – 1)? У цьому випадку між вузлами A і C_1 були б і інші вузли. Нехай C'_1 –найближчий до A вузол. Тоді AC′

< AC_1, а значить, $\frac{AB}{AC_1'}$ –ціле число, більше за n (оскільки $\frac{AB}{AC_1} = n$). Але якщо ми скористаємося формулами, то побачимо, що

$$p = AR = (k+1) \cdot AD'_1, \qquad q = BR = (k+1) \cdot C'_1D'_1,$$

де $k + 1 = \frac{AB}{AC_1'} = n$, а D'_1 – основа перпендикуляра, опущеного з точки C'_1 на AR. Але це неможливо, так як найбільший спільний дільник чисел p і q дорівнює n. Отже, між A і B рівно (n – 1) вузол.

Тепер, не вдивляючись довго і напружено в картинку і не сумніваючись, ми завжди можемо сказати, через скільки вузлів проходить довільний відрізок із кінцями у вузлах сітки.

Література:

1. https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%9F%D1%96%D0%BA%D0%B0
2. Н. Васильев «Вокруг формулы Пика» / Н. Васильев. – «Квант», 1974, № 12. – С. 39 -43.
3. А. Кушниренко. Целые точки в многоугольниках и многогранниках» / А. Кушниренко. – «Квант», 1977, № 4. – С. 13-20.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Захарченко Наталія Вікторівна

УДК 517.521

Гарник Вікторія

студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ПОДВІЙНІ РЯДИ ТА ЇХ ЗБІЖНІСТЬ

Анотація

У статті проведено аналіз поняття «подвійний ряд» й досліджено на збіжність низку подвійних числових рядів.

Ключові слова: *теорія рядів, числові ряди, подвійні числові ряди, збіжність подвійних числових рядів.*

Summary

The article analyzes the concept of "double series" and investigates the convergence of a series of double numerical series.

Keywords: *theory of series, numerical series, double numerical series, convergence of double numerical series.*

Постановка проблеми. Відомо, що точне виконання деяких математичних операцій, таких як: обчислення інтегралів, розв'язування диференціальних рівнянь, що містять похідні або диференціали невідомих функцій та інші, у багатьох випадках виявляється досить складним або навіть неможливим. Тому можна отримати наближені розв'язки багатьох завдань з будь-якою точністю за допомогою рядів. У процесі вивчення математичного аналізу, диференціальних рівнянь важливе місце посідають ряди, зокрема числові, функціональні та степеневі, однак подвійні ряди не достатньо досліджуються у навчальному процесі.

Багато вчених займалися дослідженнями рядів ще у XIX столітті. Це всім відомі математики Г. Лейбніц (1646-1716), К. Маклорен (1698-1746), Л. Ейлер (1707-1783), Ж. Д'Аламбер (1717-1783), Ж. Лагранж (1736-1813), Ш. Фур'є (1772-1837), К. Гаусс (1777-1855), Б. Больцано (1781-1848), О. Коші (1789-1857), Н. Абель (1802-1829), К. Вейєрштрас (1815-1897), Б. Ріман (1826-1866).

Мета статті. Здійснити аналіз збіжності деяких подвійних числових рядів.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо поняття звичайного числового ряду та подвійного числового ряду.

Числовий ряд	Подвійний числовий ряд
Означення 1. Символ виду $$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1')$$ називається числовим рядом (або просто рядом). Числа $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ називаються членами ряду [2]. **Означення 2.** Суми $S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, ..., $S_n = u_1 + ... + u_n$, ... називаються частинними сумами числового ряду [2]. **Означення 3.** Якщо послідовність частинних сум (S_n) збіжна то і звичайний числовий ряд також називається збіжним, а границя послідовності (S_n) називається сумою ряду: $\boxed{\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \Leftrightarrow u_1 + ... + u_n + ... + = S}$	Розглянемо особливості при означенні подвійного числового ряду. Для цього розглянемо функцію двох змінних, яка кожній парі цілих додатних чисел m, n ставить у відповідність число $u_{m,n}$. Таку функцію ми можемо задати таблицею виду: $u_{11}, u_{12}, ..., u_{1n}, ...$ $u_{21}, u_{22}, ..., u_{2n}, ...$ ..... $u_{m1}, u_{m2}, ..., u_{mn}, ...$ ……. тобто, це є нескінченна прямокутна матриця.

Означення 1′. Нескінченний символ виду

$$\begin{aligned} & u_{11} + u_{12} + ... + u_{1n} + ... + \\ & + u_{21} + u_{22} + ... + u_{2n} + ... + \\ & ..... \\ & + u_{m1} + u_{m2} + ... + u_{mn} + ... + \\ & + ... = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn} \end{aligned} \qquad (1)$$

називається подвійним числовим рядом [5] .

Подвійний ряд можна позначити також як $\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$ або, якщо область значень номерів m і n не викликають сумнівів, просто як $\sum_{m,n=1} u_{mn}$ [1].

Очевидно, що рядки і стовпці подвійного ряду (1) є звичайними числовими рядами. Далі ми будемо говорити про збіжність рядків або стовпців подвійних рядів.

Для визначення суми звичайного числового ряду вводяться частинні сум, і їх границя $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ (якщо вона існує) є сумою ряду (1′). Такого уявлення про частинні суми у випадку подвійного ряду (1) вже немає. Формальне тлумачення суми (1) ми можемо записати як:

$$S' = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \right). \qquad (2)$$

Очевидно, що розглянуті границі означають збіжність кожного з рядків подвійного ряду (1), а також збіжність ряду, членами якого є ці суми.

Позначимо суму i -го рядка подвійного ряду через S_{i^*}:

$$S_{i^*} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} u_{ij},$$

ми можемо рівність (2) переписати як $S' = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} S_{i^*}$. (3)

Число S' називається сумою подвійного ряду (1) по рядках.

Читаючи тепер запис (1) стовпець за стовпцем, ми отримаємо:

$$S'' = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} u_{ij} \right). \qquad (4)$$

Існування внутрішніх границь означає збіжність стовпців подвійного ряду. Позначаючи суму j -ого стовпця через S_{*j}:

$$S_{*j} = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} u_{ij},$$

ми можемо переписати (4) як: $S'' = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} S_{*j}$.

Число S'' називається сумою подвійного ряду (1) по стовпцях.

Означення 2′. Сума mn членів подвійного числового ряду (1)

$$u_{11} + u_{12} + \ldots + u_{1n} + \ldots +$$
$$+u_{21} + u_{22} + \ldots + u_{2n} + \ldots +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+u_{m1} + u_{m2} + \ldots + u_{mn}$$

називається його (m,n)-ою частинною сумою і позначається зазвичай через $S_{m,n}$ або S_{mn} [1]. Розглянемо критерій Коші для збіжності звичайного числового ряду та подвійного числового ряду.

Числовий ряд	**Подвійний числовий ряд**
Теорема 1. Для того, щоб числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ був збіжний необхідно і достатньо, щоб $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0, \quad \forall n > n_0$ і $\forall p \in \mathbb{N}$: $\left\|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}\right\| < \varepsilon$ [2].	**Теорема 1′.** Для того, щоб подвійний числовий ряд $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}$ був збіжний необхідно і достатньо, щоб $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_1, N_2 \quad \forall m_1, m_2 > N_1$ і $\forall n_1, n_2 > \mathrm{N}_2 : \left\|S_{m_1 n_1} - S_{m_2 n_2}\right\| < \varepsilon$ [5].

Доведемо збіжність деяких подвійних числових рядів.

Теорема 2. Довести збіжність подвійної прогресії, тобто подвійних рядів виду (1), в яких $u_{mn} = ap^{n-1}q^{m-1}$, $\left|p\right|, \left|q\right| < 1$ [1].

Доведення. Для суми i-го рядка ми маємо $S_{i*} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} u_{ij} = \lim\limits_{n\to\infty} a\dfrac{1-p^n}{1-p} q^i = \dfrac{a}{1-p} q^i$, звідки згідно з (3) для суми подвійної прогресії по рядках ми маємо

$$S' = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} s_{i*} = \lim_{m\to\infty} \frac{a}{1-p} \cdot \frac{1-q^m}{1-q} = \frac{a}{(1-p)(1-q)}. \qquad (5)$$

Аналогічно $S'' = \dfrac{a}{(1-p)(1-q)}$. (6)

Тепер обчислимо частинну суму S_{mn} подвійної прогресії

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ap^{j-1}q^{i-1} = a\sum_{i=1}^{m} q^{i-1}\frac{1-p^n}{1-p} = a\frac{1-p^n}{1-p}\cdot\frac{1-q^m}{1-q},$$

перейшовши до границі при $m,n \to \infty$, отримаємо

$$S = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S_{mn} = \frac{a}{(1-p)(1-q)}. \quad (7)$$

Ми бачимо, що коли $|p|$, $|q| < 1$ то подвійна геометрична прогресія збіжна. При чому її сума S згідно з (5), (6) і (7) аналогічні сумам S' і S'' по рядках і по стовпцях. ■

Теорема 3. Довести збіжність ряду $\sum_{k,i=1}^{\infty} x^k y^i$ [5].

Доведення. Розглянемо частинну суму даного ряду:

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x^k y^i = \sum_{k=1}^{m} x^k\left(\sum_{i=1}^{n} y^i\right) = \left(\sum_{k=1}^{m} x^k\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y^i\right) = \frac{1-x^{m+1}}{1-x}\cdot\frac{1-y^{n+1}}{1-y}.$$

Знайдемо суму подвійного ряду, для цього перейдемо до границі при $m,n \to \infty$: $S = \lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} S_{mn} = \lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1-x^{m+1}}{1-x}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-y^{n+1}}{1-y} = \dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{1}{1-y}$.

Отже, сума даного ряду $S = \dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{1}{1-y}$, таким чином можна побачити, що коли $|x| < 1$, $|y| < 1$ даний ряд збіжний. ■

Висновок. У статті проведено аналіз і вказано особливості побудови подвійних і звичайних числових рядів.

Література:

1. Воробьев Н. Н. Теория рядов: Учеб. пособие для вузов / Н. Н. Воробьев. – Москва: Наука, 1996. – 408 с.

2. Ковтонюк М. М. Лекції з математичного аналізу (Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди). Посібник для студентів математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ / Мар'яна Михайлівна Ковтонюк. – Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер», 2013. – 289 с.

3. Уіттекер Е. Т. Курс сучасного аналізу. Основні операції аналізу. Ч. 1 / Е. Т. Уіттекер, Дж. Н. Ватсон. – Москва: Державне видавництвово фізико-математичної літератури, 2003. – 387 с.
4. Фіхтенгольц Г. М. Курс диференціального та інтегрального числення. Том 2 / Г. М. Фіхтенгольц. – Москва: Наука, 1970. – 800 с.
5 Хазириши Э. О. Теория числовых рядов. Учебно-методическое пособие / Энвер Османович Хазириши. – Сухум: Алашарбага, 2015. – 200 с.

Науковий керівник: докт. пед. наук, професор Ковтонюк Мар'яна Михайлівна

УДК [373.5.091.33:004.77]:514.113

Кальчук Анастасія

студентка магістратури
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ВИКОРИСТАННЯ ОНЛАЙН СЕРВІСУ LEARNINGAPPS У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ СТЕРЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

***Анотація**. У даній статті описана можливість використання онлайн сервісу Learningapps в процесі вивчення стереометричних тіл у старшій школі та запропоновано декілька видів вправ, що можуть бути використані на уроках стереометрії.*

***Ключові слова:** навчально-пізнавальна діяльність, онлайн сервіс, інтернет технологія, learningapps, стереометричні тіла, інформаційно комунікаційні технології.*

***Annotation**. This article describes how to use the online Learningapps service in the process of studying stereometric bodies in high school, and suggests several types of exercises that can be used in stereometric lessons.*

***Key words**: educational-cognitive activity, online service, internet technology, learningapps, stereometric bodies, information and communication technologies.*

У зв'язку з розвитком суспільства, в умовах науково-технічного прогресу перед школою постає завдання комп'ютеризації навчання. Сучасні діти, а особливо учні старшої школи (враховуючи індивідуально-психологічні особливості віку) досить часто пасивно сприймають навчальний матеріал.

Майже у кожного учня вдома є комп'ютер, проте більшість використовують його як «іграшку», а не як помічника у своїй навчально-пізнавальній діяльності. Для вирішення даної проблеми створено спеціальні додатки, онлайн сервіси, програми тощо.

Використанню Інтернет-технологій в навчальному процесі присвячено дослідження багатьох вітчизняних учених (Ю.В. Биков, М.І. Жалдак, Н.В. Морзе, Ю.С. Рамський, Ю.В. Тріус та ін.).

Одним із сервісів, що сприяє продуктивному вивченню стереометричних тіл, на нашу думку, є LearningApps.

LearningApps.org (рис. 1) – додаток Web 2.0 для підтримки освітніх процесів у навчальних закладах різних типів.

Рис. 1

Конструктор LearningApps [4] призначений для розробки, зберігання інтерактивних завдань із різних предметних дисциплін, за допомогою яких учні можуть перевірити і закріпити свої знання в ігровій формі, що сприяє формуванню їхнього пізнавального інтересу [1, с. 6].

Даний ресурс досить простий та зрозумілий в управлінні та дає користувачу широкий спектр можливостей. Навіть за умов мінімального рівня навичок у сфері ІКТ, вчитель може розробити власну вправу, що буде основана на взаємодії учня з інтерфейсом медійного пристрою. Такий підхід до створення

практичної частини уроку урізноманітнить буденність занять та приверне увагу дитини і підвищить рівень її зацікавленості до вивчення предмета. [2, с. 42]

Складемо порівняльну характеристику переваг та недоліків даного інтернет сервісу (табл. 1).

Таблиця 1

Переваги	Недоліки
Відкритий доступ для незареєстрованих користувачів	Процедура реєстрації може бути складною для користувачів певного віку
Доступність ресурсу на різних мовах	Можлива складність сприйняття друкованої інформації на моніторі
Велика кількість підказок в процесі виконання та розробки завдань	Можливі неполадки через роботу мережі
Можливість використання сервісу з інтерактивною дошкою	Відсутність особистого контролю вчителя під час виконання учнем завдання
Можливість особистого та загального використання завдань	Необхідна наявність Google аккаунта
Велика кількість різнотипних завдань	Необхідність роботи мережі для створення завдань
Мобільність та простота у використанні	

На сайті доступна велика база завдань, розроблених учителями з різних країн для всіх предметів шкільної програми. Кожен із ресурсів можна використати на своєму уроці, змінити під власні потреби, розробити схожий чи зовсім інший навчальний модуль. [3, с. 13]

Вправи на сайті подаються у зручному візуальному режимі сітки зображень, навівши на які вказівник миші, можна побачити тип вправи та її рейтинг на сайті (залежить від кількості переглядів та оцінок користувачів). [5]

Усі вправи поділено на категорії, які відповідають виду завдання, яке потрібно буде виконати учням:

- вибір;
- розподіл;
- послідовність;

- заповнення;
- онлайн-ігри;
- інструменти.

У кожній групі доступно кілька шаблонів вправ. [3, с. 13]

Клацнувши на зображенні значка вправи, відбувається перехід у режим її виконання. На передньому плані видно завдання, сформульоване вчителем, яке закривається після клацання кнопки «ОК», що дозволяє перейти до безпосередньої роботи із вправою.

Виконання вправи полягає в інтерактивній роботі з об’єктами, розміщеними на екрані.

Після виконання вправи потрібно клацнути напис Перевірити рішення: відповіді буде перевірено і вказано на можливі помилки. Далі можна внести виправлення і знову перевірити рішення. [5]

Наведемо декілька прикладів завдань, що можуть бути використані на уроках геометрії під час вивчення стереометричних тіл.

1. Завдання на встановлення відповідності між видами стереометричних тіл та їх назвами (рис. 2).

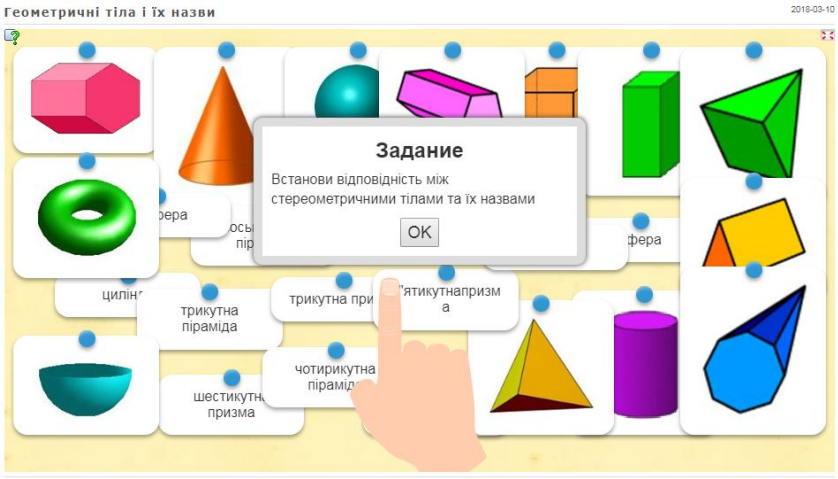


Рис. 2

2. Завдання на знаходження пари просторових тіл та їх розгорток, тіл та формул обчислення їх об’ємів (рис. 3).

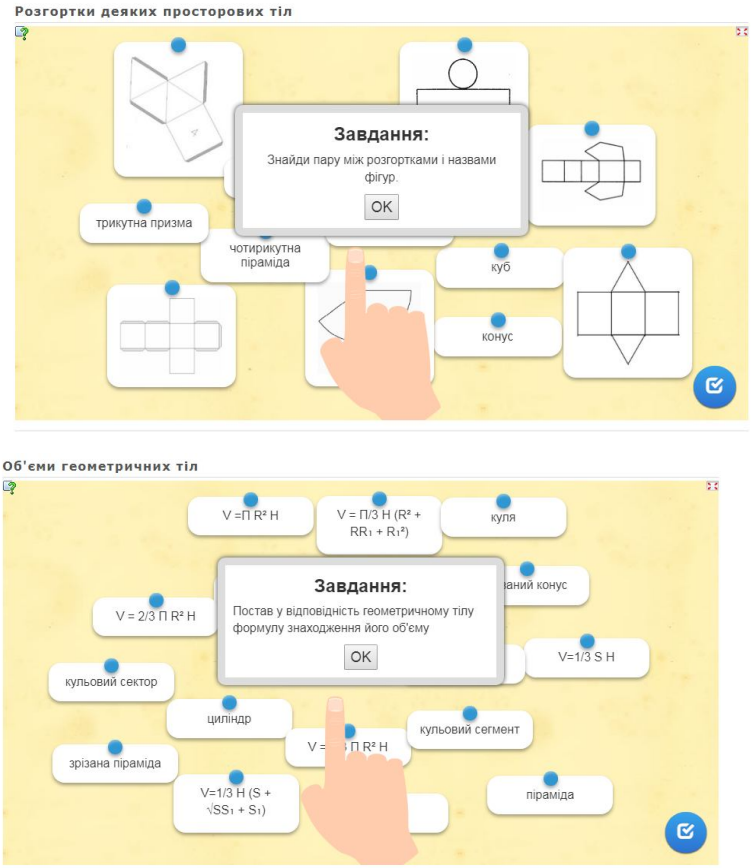


Рис. 3

3. Завдання на розпізнавання стереометричних фігур у навколишньому світі (на картинках) (рис. 4).

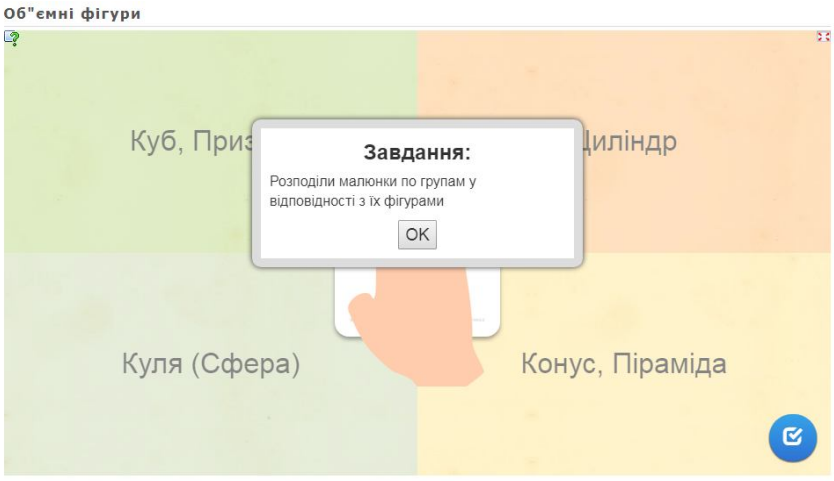


Рис. 4

4. Геометричний пазл (класифікування геометричних фігур, тіл та тіл обертання) (рис. 5).

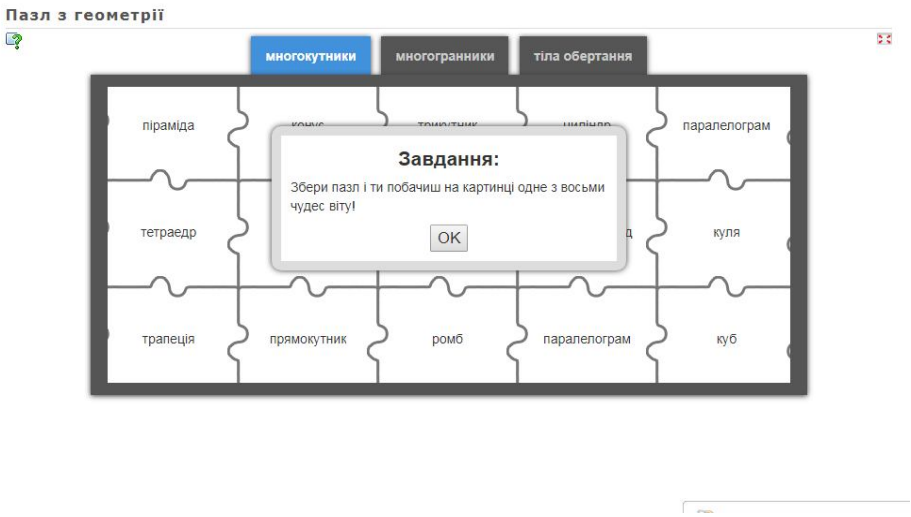


Рис. 5

5. Вправа на знаходження запропонованих термінів (рис. 6).

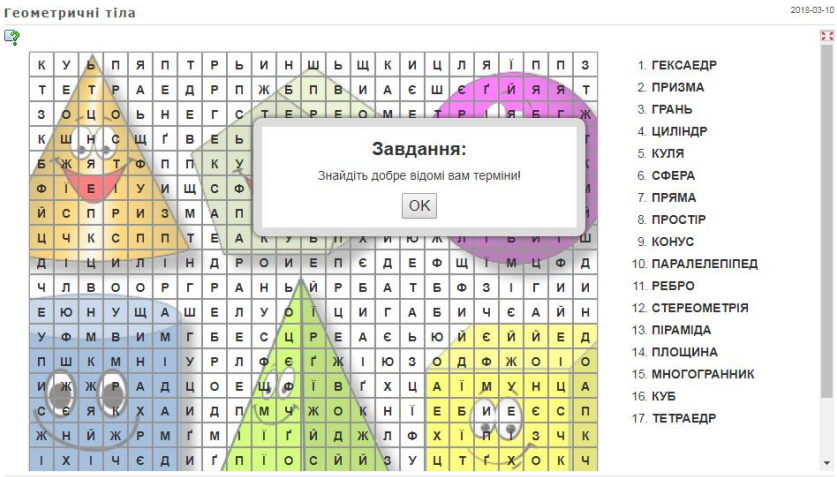


Рис. 6

6. Вікторина-змагання на знання геометричних тіл (рис. 7).

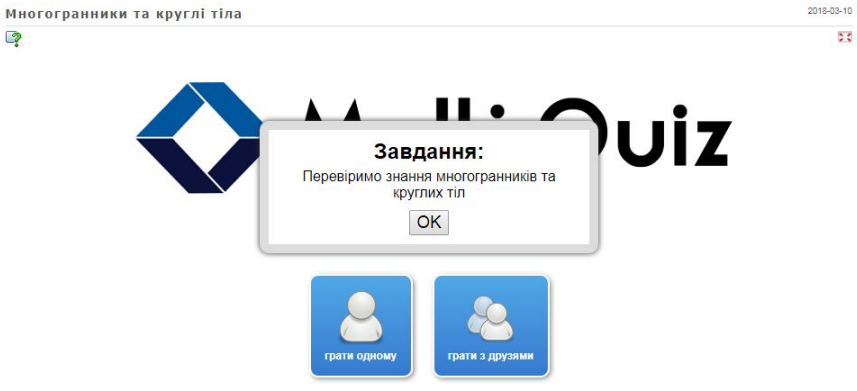


Рис. 7

Дані завдання можуть бути використані на: уроці узагальнення та систематизації знань, самостійному комп'ютерному тестуванні, етапі актуалізації знань, підведення підсумків, а також як інтерактивне домашнє завдання.

Отже, інтернет сервіс LearningApps є одним із найзручніших та найпопулярніших джерел для створення та використання інтерактивно-дидактичних вправ у процесі вивчення математики в цілому та стереометрії зокрема.

Література:

1. Аман І.С. Інтернет-сервіси в освітньому просторі [методичний посібник] / І.С. Аман, О.В. Литвиненко. – Кіровоград: КЗ «Кіровоградський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Василя Сухомлинського», 2016. – 88 с.
2. Коваленко О. Використання онлайн сервіса Learningapps для розробки інтерактивних вправ з математики / О. Коваленко // "Математика" в рідній школі. – 2017. – №3. – С. 41–47.
3. Кучеренко Р.Д. Інноваційні технології на уроках математики [Електронний ресурс] / Р.Д. Кучеренко – Режим доступу до ресурсу: oblpto.in.ua/.../III_IIFILEminimizerFILEminimizer.docx.
4. Сайт Learningapps [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://learningapps.org/.
5. LearningApps.Org [Електронний ресурс]. – 2014. – Режим доступу до ресурсу: http://dystosvita.blogspot.com/2014/04/learningappsorg.html.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Тютюн Любов Андріївна.

УДК 519. 876. 5. 853

Каштельян Юлія

студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ЗАСІБ РЕАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАДАЧІ НЕЛІНІЙОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Анотація: *У статті проводиться порівняльний аналіз можливостей сучасних пакетів математичного програмування для задачі нелінійної оптимізації. Розглянуто приклад реалізації задачі нелінійного програмування за допомогою програмного засобу GeoGebra.*

Ключові слова: *математичне програмування, моделювання, нелінійне програмування, ітераційні методи, комп'ютерне моделювання.*

Annotation: *In the article a comparative analysis of the possibilities of modern mathematical programming packages for the nonlinear optimization problem is conducted. An example of the implementation of the nonlinear programming problem using the GeoGebra software is considered.*

Key words: *mathematical programming, modeling, nonlinear programming, iterative methods, computer modeling.*

Упродовж всього життя діяльність людства зосереджена на оптимізації виробництва. Серед множини можливих рішень необхідно знайти оптимальний, при якому враховуватимуться природні, економічні, технологічні та інші чинники. З розвитком інформаційного, технологічного та економічного прогресу, що поєднуються з обмеженістю можливих ресурсів, постало питання оптимізації систем, процесів або об'єктів задля збереження цих ресурсів. Тому саме потреби людства зумовили проблему оптимізаційних задач. В зв'язку з цим виникає необхідність застосування математичного програмування, зокрема методів знаходження екстремуму, для дослідження й аналізу проблем на знаходження оптимального плану.

Вплив різноманітних чинників на процеси, об'єкти або системи породжує їх нелінійність. І саме нелінійна функція здатна повністю описати певний процес,

об’єкт або систему. Розділ математичного програмування, що розглядає нелінійні функції, називається нелінійним програмуванням. Більшість прикладних задач оптимізації належать саме до нелінійного програмування.

Для застосування теорії математичного програмування до прикладних задач, безпосередньо пов’язаних із суспільною діяльністю, необхідно побудувати математичну модель конкретної задачі. Процес побудови математичної моделі називається математичним моделюванням.

Математична модель задачі нелінійного програмування: знайти оптимальний план $X = (x_1, x_2, ...x_n)$, що задовольняє систему обмежень

$$g_i(x_1, x_2, ...x_n)(\leq = \geq)b_i, i = \overline{1,k}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$$

і за якого цільова функція z досягає екстремального (мінімального або максимального) значення

$$z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to extr.$$

Зауважимо, хоча б одна із функцій z, g_i є нелінійною [1, с. 277].

Загальна теорія оптимізаційних задач нелінійного програмування досі повністю не розроблена і не вивчена. Єдиного універсального методу розв’язання таких задач не існує, проте виділяють декілька методів у залежності від виду цільової функції та функцій із системи обмежень. Основними методами розв’язання задач нелінійного програмування є: метод Лагранжа, метод Якобі, метод опуклого, квадратичного, дробово-лінійного програмування, метод лінеаризації функції та градієнтні методи. Вказані методи є ітераційними, тому більшість із них громісткі та складні в обчисленнях.

Проблема створення ефективного та універсального методу для розв’язання оптимізаційних задач є важливою науково-технічною задачею, що обумовлена широким впровадження сучасних інформаційних систем у всі сфери діяльності людини.

Вагомий внесок у розвиток комп'ютерного моделювання здійснили такі зарубіжні й вітчизняні вчені: Е. Бурсіан, А. Верлань, Х. Гулд, Дж. Ендрюс, М. Жалдак [2, 3], В. Лапінський, Р. Майєр, Р. Мак-Лоун, С. Поршнєв, О. Самарський, Я. Тобочник, О. Хуторова, О. Шарова та інші.

Стрімкий розвиток інформаційно-технічного прогресу, комп'ютерних технологій та інформаційного середовища Internet дозволяє значно полегшити ітераційний процес розв'язання оптимізаційних задач нелінійного програмування. Завдяки появі таких універсальних програмних пакетів, як Maxima, MathLab, MathCad, Maple, Mathematica та інших, активізувалося використання комп'ютерної техніки та інформаційних технологій для розв'язання оптимізаційних задач математичного програмування. Ці програми мають зручний інтерфейс, реалізують прості та досить складні операції й функції, мають потужні вбудовані графічні засоби, власні мови програмування, у них передбачено експорт даних в інші програмні продукти та імпорт даних з них для опрацювання. Математичні пакети дозволяють користувачеві розв'язувати широкий спектр задач:

- математичні дослідження, що супроводжуються аналітичними перетвореннями та числовими розрахунками;
- розробка алгоритмів для реалізації чисельних методів розв'язання задач, їх аналіз та відтворення;
- математичне моделювання та комп'ютерний експеримент;
- аналіз й опрацювання експериментальних даних;
- візуалізація результатів дослідження, створення графічних і числових звітних матеріалів тощо [2, с. 565].

Для пошуку розв'язку оптимізаційної задачі можна використати табличний процесор Microsoft Excel. У ньому вбудовано спеціальний інструмент – «Поиск решения» («Пошук розв'язку»), що знаходить оптимальний план, багаторазово змінюючи значення змінних на малу величину, і таким чином наближає цільову функцію до оптимального значення. Технологію розв'язування задачі

нелінійного програмування із застосуванням табличного процесора Microsoft Excel продемонстровано у літературі [5, с. 82-84; 4, с. 189-200].

Комп'ютерні математичні пакети містять потужний інструментарій для графічних побудов. Тому для дослідження задач, що містять одну або дві змінних, зручно використовувати графічні програмні засоби, такі як GeoGebra, Gran1, Gran2D, Gran3D та інші. Варто відзначити комплекс програм Gran, розроблений в Національному педагогічному університеті імені М.П. Драгоманова [3].

Розглянемо реалізацію задачі нелінійного програмування за допомогою графічного редактора GeoGebra.

Приклад. Знайти мінімальне значення функції

$$f(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$$

за умов, що

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_1 + 3x_2 \leq 11, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Областю допустимих значень є чотирикутник $ABCD$ (рис. 1). Отже, необхідно знайти таку точку чотирикутника $ABCD$, у якій цільова функція $f(x) = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2$ набуде найменшого значення. Побудуємо лінію рівня $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 = h$, де $h - const$, і дослідимо її поведінку при різних значеннях параметра h.

Провівши із центра $O(5;6)$ кола різних радіусів переконуємося, що мінімальне значення цільова функція приймає у точці E, точці дотику кола $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2 = h$ до сторони AB чотирикутника $ABCD$. Для визначення координат цієї точки використаємо рівність кутових коефіцієнтів прямої $x_1 + 3x_2 = 11$ й дотичної до кола в точці E. Із рівняння прямої $x_1 + 3x_2 = 11$ маємо, що $x_2 = -\frac{1}{3}x_1 + \frac{11}{3}$. Тому кутовий коефіцієнт прямої дорівнює $-\frac{1}{3}$.

Для кожного значення h отримуємо коло з центром у точці $O(5;6)$ і радіусом $\sqrt{h}$. Із збільшенням (зменшенням) значення h збільшується (зменшується) і значення $f(x)$.

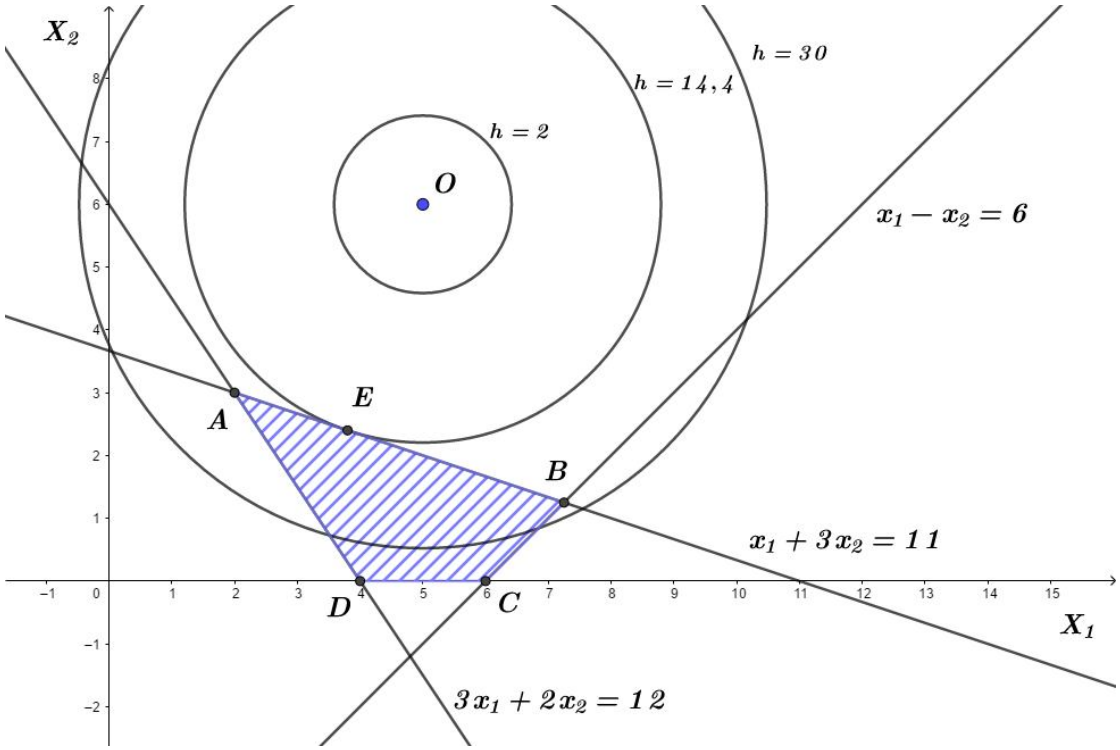


Рис. 1. Геометрична інтерпретація задачі

Кутовий коефіцієнт дотичної до кола в точці E дорівнює значенню похідної функції x_2 від змінної x_1 в цій точці.

Розглянемо x_2 як неявну функцію від змінної x_1 і продиференціюємо рівняння кола

$$2(x_1-5)+2(x_2-6)x_2'$$

$$x_2' = -\frac{(x_1-5)}{(x_2-6)};$$

$$-\frac{(x_1-5)}{(x_2-6)} = -\frac{1}{3};$$

$$3x_1 - x_2 = 9$$

Складаємо систему

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 9, \\ x_1 + 3x_2 = 11. \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему, отримаємо $x_1 = 3{,}8, x_2 = 2{,}4$. Отже, маємо координати точки $E(3{,}8; 2{,}4)$, в якій функція досягає мінімального значення $f_{\min}(x) = (3{,}8-5)^2 + (2{,}4-6)^2 = 14{,}4$.

Для того, щоб оминути аналітичний спосіб знаходження координат точки *E*, достатньо за допомогою вбудованих інструментів у програмному засобі GeoGebra провести із точки *O* до сторони *AB* перпендикулярну пряму. Точка перетину сторони *AB* з цією прямою буде шуканою точкою *E* (за властивістю: дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного з точки дотику).

Теорія розв’язання задач нелінійного програмування перебуває в стадії активного встановлення. Наразі процес розв’язання таких задач зводиться до пошуку найкращого алгоритму розв’язання конкретної задачі шляхом порівняння результатів, отриманих різними методами. Тому ще залишається широке поле для подальших науково-технічних досліджень.

Література:

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: учебное пособие. 3-е изд. / И. Л. Акулич. – СПб. : Издательство "Лань", 2011. – 352 с.

2. Жалдак М.І. Основи теорії і методів оптимізації: навч. посіб. / М. І. Жалдак, Ю. В. Триус. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 608 с.

3. Жалдак М.І. Математика з комп’ютером: посіб. для вчителів. – 2-ге вид. / М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Вінниченко. – К. : НПУ імені Драгоманова, 2009. – 282 с.

4. Завадський І.О. Microsoft Excel у профільному навчанні: навч. посіб. / І. О. Завадський, А.П. Забарна. – К.: Видавнича група BHV, 2011. – 272 с.

5. Каштельян Ю.О. Розв’язування задачі нелінійного програмування в табличному процесорі Microsoft Excel / Ю.О. Каштельян // Новітні інформаційно-комунікаційні технології в освіті: матеріали V Всеукраїнської науково-практичної Інтернет-конференції молодих учених та студентів (Полтава, 22-23 листопада 2017 р.). – Полтава: ФОП Гаража М.Ф., 2017. – с. 82-84.

Науковий керівник: канд. пед. наук, асистент Соя Олена Миколаївна

УДК 514.122

Кирилюк Владислав

студент факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ДОСЛІДЖЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ФІГУРИ «ДЕЛЬТОЇД» У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ УЧНІВ ГЕОМЕТРІЇ

Анотація. *Стаття присвячена вивченню такої геометричної фігури, як дельтоїд. Було розглянуто та доведено основні з його властивостей.*
Ключові слова: *Дельтоїд.*

Annotation. *The article is devoted to the study of such geometric figure as deltoid. It was considered and proved the main of it's properties.*
Key words*: Deltoid.*

Виклад основного матеріалу. Дельтоїд – це одна з найпростіших фігур, що складається з чотирьох сторін і чотирьох вершин, проте він є досить цікавим об'єктом дослідження. Під час вивчення шкільної геометрії за допомогою привабливої форми дельтоїда можна формувати в учнів інтерес до предмету, розглядаючи цікаві властивості, ознаки та теореми, пов'язані з ним.

Означення. ***Дельтоїдом*** називається такий чотирикутник, в якому суміжні сторони, що сходяться у двох протилежних вершинах, попарно рівні між собою, а суміжні сторони, що сходяться у двох інших протилежних вершинах, не рівні.

На рис. 1 і 2 зображено відповідно опуклий та неопуклий дельтоїди $ABCD$, в яких попарно рівними є сторони, що сходяться в протилежних вершинах A і C, а нерівними – ті, що сходяться в протилежних вершинах B і D.

Як і в будь-якому чотирикутнику, відрізок, який сполучає дві протилежні вершини дельтоїда, називається його діагоналлю. Кожен дельтоїд має дві діагоналі. Обидві діагоналі AC і BD опуклого дельтоїда $ABCD$ (рис.1) належать

йому, тобто частині площини, обмеженій його сторонами. В неопуклому ж дельтоїді $ABCD$ (рис.2) цю властивість має лише діагональ AC.

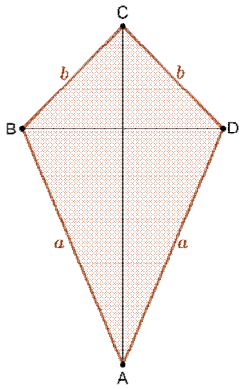


Рис. 1

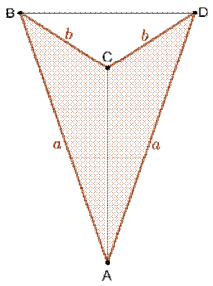


Рис. 2

Розглянемо деякі властивості дельтоїдів:

Теорема 1. *У будь-якому дельтоїді кути між нерівними сторонами рівні, а кути між рівними сторонами нерівні.*

Теорема 2. *У будь-якому дельтоїді діагоналі взаємно перпендикулярні. Прицьму одна з них є бісектрисою нерівних кутів і ділить іншу діагональ навпіл.*

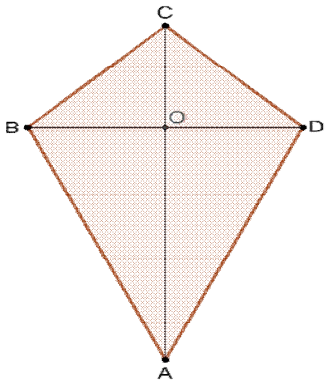


Рис. 3

Доведення:

Доводитимемо обидві ці теореми одночасно. Нехай маємо довільний дельтоїд $ABCD$ (опуклий чи неопуклий) (рис. 3). Нехай O – точка перетину прямих, яким належать його діагоналі.

Оскільки $\triangle ABC = \triangle ADC$ (за трьома сторонами $AB = AD$, $CB = CD$, AC – спільна), то $\angle ABC = \angle ADC$, $\angle BAC = \angle DAC$, а $\angle BCA = \angle DCA$, що й треба було довести.

Якщо ж припустимо, що рівними є ще й кути A і C, то слід буде вважати, що рівними є і їхні половини BAC та BCA. Отже, трикутник BAC буде рівнобедренним. Звідки $AB = BC$. А це суперечить означенню дельтоїда.

Теорема 1 доведена.

Для завершення доведення теореми 2 розглянемо рівнобедрений трикутник ABD; AO – його бісектриса, а отже – висота і медіана. Таким чином, $AC \perp BD$ і $BO = OD$. Отже, теорему 2 теж доведено повністю. ■

Беспосереднім наслідком із теореми 2 є наведене нижче важливе твердження.

Теорема 3. *Дельтоїд $ABCD$ симетричний відносно прямої, що містить його діагональ AC.*

Тож діагональ AC дельтоїда $ABCD$ будемо називати ***симетральною діагоналлю****, а діагональ BD –* ***несиметральною****.*

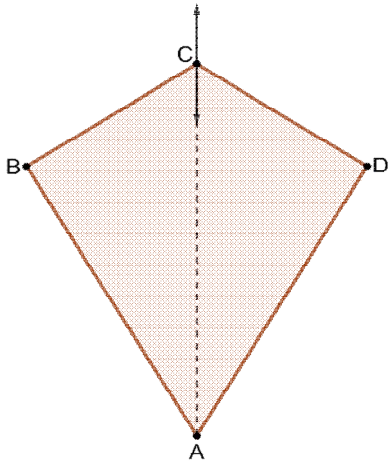


Рис. 4

Центроїд і центр ваги дельтоїда

Пригадаємо, що відрізок із кінцями в серединах протилежних сторін чотирикутника називається його середньою лінією, а точка перетину середніх ліній – центроїдом чотирикутника.

Теорема 4. *Середні лінії дельтоїда рівні між собою, а центроїд ділить кожну з них навпіл і належить симетральній діагоналі.*

Доведення:

Нехай EF та GH – середні лінії, M – точка перетину середніх ліній дельтоїда, тобто центроїд дельтоїда $ABCD$ (рис.5).

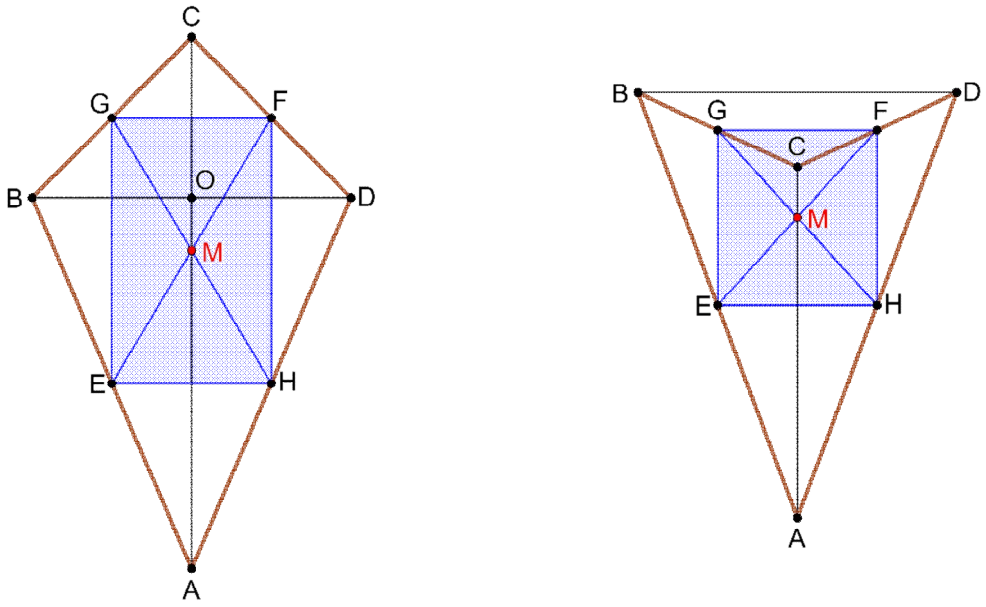


Рис. 5

Відрізок EH є середньою лінією в трикутнику ABD. Тому $EH \parallel BD$. FG – середня лінія трикутника BCD тому й $FG \parallel BD$. Отже, $EH \parallel BD \parallel FG$. EG – середня лінія трикутника ABC. Тому $EG \parallel AC$. А FH – середня лінія трикутника ADC. Звідки $FH \parallel AC$, тому $EG \parallel AC \parallel FH$. Отже, $EGFH$ – паралелограм. Однак $BD \perp AC$. Тому суміжні сторони паралелограма $EGFH$ взаємно перпендикулярні, тобто цей чотирикутник є прямокутником. У прямокутнику діагоналі рівні та точкою перетину діляться навпіл. Отже, $EF = GH$, $EM = MF$ і $GM = MH$.

Належність точки M діагоналі AC випливає із симетрії дельтоїда, а отже і прямокутника $EGFH$ відносно прямої AC. Адже відомо, що точка перетину діагоналей прямокутника належить осі його симетрії. Теорему доведено. ■

Описані, вписані та дописані кола дельтоїда

Нехай для дельтоїда $ABCD$ O_1 – центр кола, описаного навколо трикутника ABC, а O_2 – центр кола, описаного навколо трикутника ADC (рис. 6). Оскільки, дані трикутники, симетричні відносно прямої AC, то симетричними відносно цієї прямої є і точки O_1 і O_2.

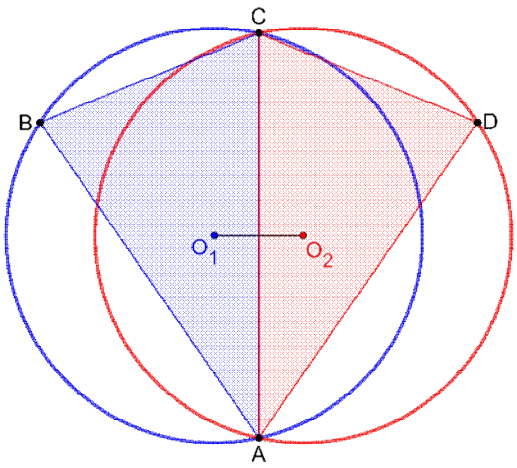


Рис. 6

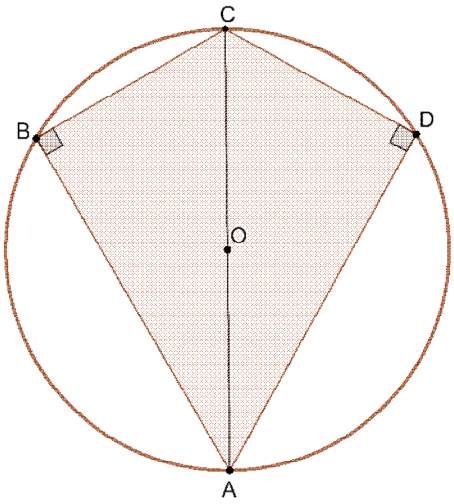


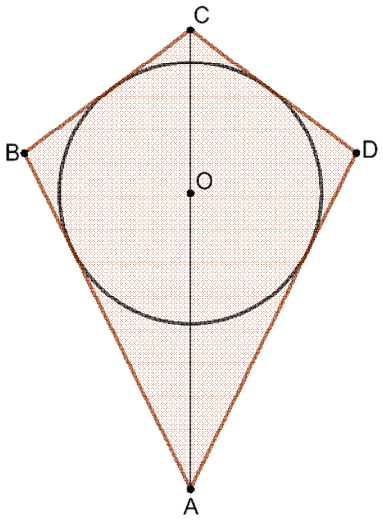
Рис. 7

Для того, щоб навколо дельтоїда $ABCD$ можна було описати коло, необхідно і достатньо, щоб точки O_1 і O_2 збіглися. А це можливо тоді і тільки тоді, коли вони лежать на прямій AC. Тоді (рис. 7), відрізок AC буде діаметром описаного кола, а кути B і D, що спираються на нього – прямими.

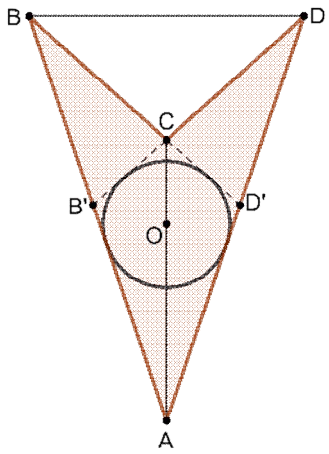
Таким чином, описати коло навколо дельтоїда $ABCD$ можна тоді, і тільки тоді, коли цей дельтоїд буде двопрямокутним. Тоді центр O описаного кола буде і серединою діагоналі AC.

Тепер дослідимо питання про існування кіл, які дотикаються до всіх прямих, що містять сторони дельтоїда. Якщо при цьому якесь із таких кіл дотикається лише до сторін дельтоїда, то воно називається *вписаним у дельтоїд*, а якщо хоча б до однієї зі сторін – то *дописаним до дельтоїда*.

У тому, що для деяких дельтоїдів вписані і дописані кола існують, легко переконатися за допомогою таких побудов. На прямій, що проходить через центр якого-небудь кола, візьмемо дві довільні точки A і C, розміщені зовні кола на різних відстанях і по різні боки від його центра. Проведемо потім через кожну з точок A і C обидві дотичні до кола. Тоді чотирикутник $ABCD$, сторони якого належать цим дотичним, буде дельтоїдом (рис. 8), а дане коло – вписаним (рис. 8.а) або дописаним (рис. 8.б) до цього дельтоїда. Одне, й те саме коло (рис. 8.б) є дописаним до неопуклого дельтоїда $ABCD$, і вписаним в опуклий дельтоїд $AB'CD'$.



а)



б)

Рис. 8

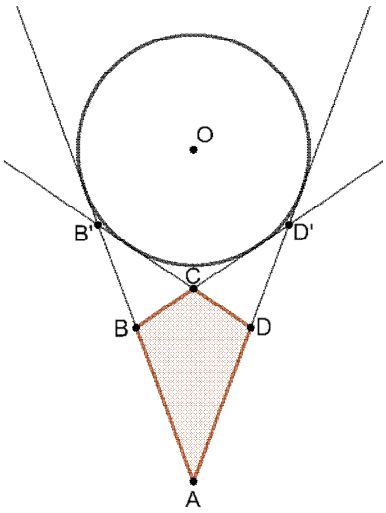


Рис. 9

Якщо ж точки A і C взяті з одного боку від центра кола, то при тих самих побудовах теж одержимо два дельтоїди – опуклий $ABCD$ і неопуклий $AB'CD'$ (рис. 9). Однак для кожного з них дане коло буде лише дописаним.

Теорема 5. *Для будь-якого опуклого дельтоїда існує єдине вписане і єдине дописане коло. Для будь-якого неопуклого дельтоїда існують рівно два дописаних кола і не існує жодного вписаного кола.*

Доведення:

Оскільки дельтоїд $ABCD$ симетричний відносно прямої AC, то як вписане, так і дописане коло трикутника має бути симетричним відносно цієї прямої. Отже, центри таких кіл належать прямій AC.

Скористаємося далі тим, що центри кіл, які дотикаються до двох прямих m і n, рівновіддалені від цих прямих. Тому вони належать двом взаємно-перпендикулярним прямим e і f, які ділять навпіл кути, утворені прямими m і n (рис. 10).

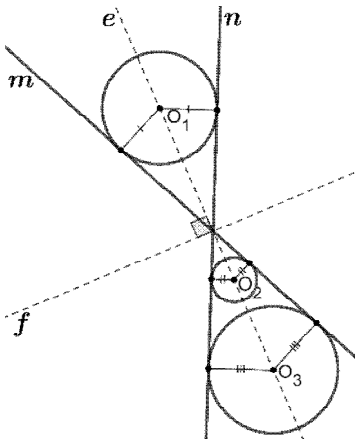
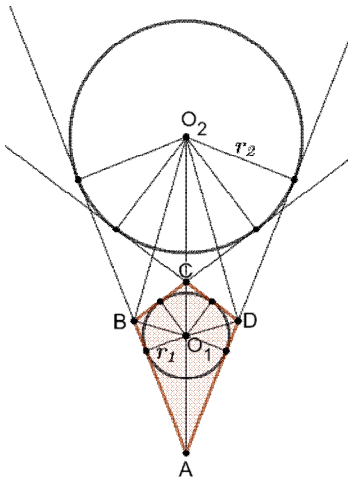
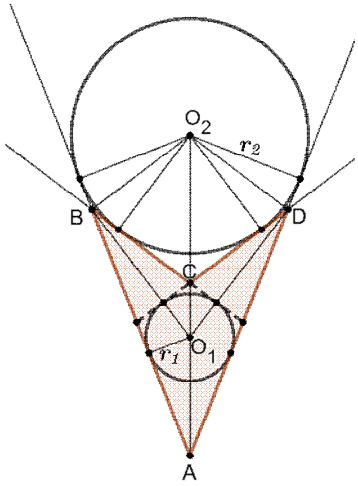


Рис. 10



а)



б)

Рис. 11

Отже, геометричним місцем центрів кіл, що дотикаються до прямих BA і BC, є дві взаємно перпендикулярні прямі BO_1 і BO_2 (рис. 11), які ділять навпіл кути, утворені цими прямими.

Аналогічний висновок можна зробити і щодо прямих DA і DC. Проте, оскільки дельтоїд симетричний відносно прямої AC, то відповідно прямі DO_1 і DO_2 перетинають пряму AC у тих самих точках O_1 і O_2, що й прямі BO_1 та BO_2. Оскільки, крім цього, у трикутнику ABC $AB \neq BC$, то його бісектриса BO_1 не є висотою. Тому пряма BO_2, перпендикулярна до BO_1, не паралельна прямій AC. Отже, обидві точки O_1 і O_2 справді існують.

В опуклому дельтоїді всі основи перпендикулярів, опущених з точки O_1 на прямі, які містять його сторони, належать цим сторонам (рис. 11.а). Тому точка O_1 є центром вписаного кола. Для неопуклого дельтоїда основи перпендикулярів, опущених із точки O_1 на прямі BC і DC, не належать відповідним сторонам. Тому точка O_1 є центром дописаного кола (рис. 11.б). Щодо точки O_2, то в обох випадках вона лежить зовні дельтоїда. Тому ця точка завжди є центром дописаного кола. Теорему доведено.

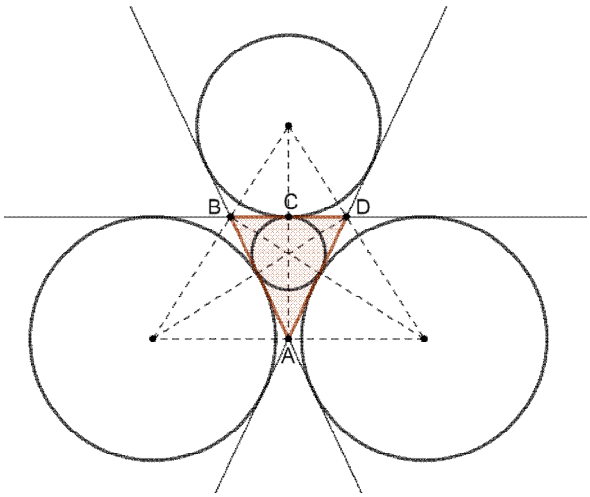


Рис. 12

Зауваження. Якщо дельтоїд $ABCD$ вироджується у рівнобедрений трикутник ABD (рис. 12), то, як відомо, існують одне вписане і три дописаних кола трикутника, які в цьому випадку називаються *зовні вписаними* у трикутник ABC. ■

Висновки. Отже, дельтоїд – досить цікава і незвичайна геометрична фігура, властивості якої доцільно вивчати в школі під час уроків геометрії. Тема буде корисною, як учням, так і вчителям, оскільки вона містить цікаві узагальнення програмового матеріалу з математики.

Література

1. Андрухів Ю.П. Геометрія дельтоїда: Навч. пос / За ред. В.О. Тадеєва. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2006. – 160 с.
2. Тадєєв В.О. Неформальна математика 6-9 класи. Навчальний посібник для учнів, які хочуть знати більше, ніж вивчається у школі. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003. – 288 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Захарченко Наталія Вікторівна

УДК 93/94:004.3

Ковтонюк Галина

канд. пед. наук, старший викладач
кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ПЕРШИЙ КОМП'ЮТЕР У КОНТИНЕНТАЛЬНІЙ ЄВРОПІ СТВОРИЛИ В УКРАЇНІ

Анотація. *Стаття присвячена історії створення перших ЕОМ. Наведено коротку історію створення ЕОМ, їх характерні риси і, зокрема, історію створення першої ЕОМ у континентальній Європі – «МЭСМ».*

Ключові слова*: ЕОМ, комп'ютер, покоління ЕОМ, «МЭСМ».*

Annotation. *The article is devoted to the history of creating the first computer. The brief history of computer creation, their characteristics and, in particular, the history of creation of the first computer in continental Europe – «MESM» is given.*

Keywords*: computer, generation of computers, MESM.*

Різкий стрибок у розвитку обчислювальної техніки відбувся в 40-х роках минулого століття, після Другої світової війни, і пов'язаний він був із появою якісно нових електронних пристроїв – електронно-вакуумних ламп. Електричні схеми, побудовані на цих лампах, працювали значно швидше, ніж схеми на електромеханічних реле. Зросла швидкодія обчислювальних машин, і релейні машини були усунуті продуктивнішими і надійнішими електронними обчислювальними машинами (ЕОМ). Застосування ЕОМ значно розширило коло розв'язуваних завдань. Доступними стали завдання, які раніше просто не ставилися: розрахунки інженерних споруд, розрахунки руху планет, балістичні розрахунки тощо.

Перша ЕОМ створювалася в 1943 – 1946 рр. у США і називалася ЕНІАК (ENIAC – Electronic Numerical Integrator and Calculator – електронно-числовий інтегратор і обчислювач). Ця машина містила близько 18 тисяч електронних ламп, багато електромеханічних реле, причому щомісяця виходило з ладу близько 2 тисяч ламп. У машини ЕНІАК, а також в інших

перших ЕОМ був серйозний недолік – програма, що виконувалася, зберігалася не в пам’яті машини, а набиралася складним способом за допомогою зовнішніх перемичок.

У 1945 р. відомий математик і фізик-теоретик Джон фон Нейман сформулював загальні принципи роботи універсальних обчислювальних пристроїв. За фон Нейманом, обчислювальна машина повинна керуватися програмою з послідовним виконанням команд, а сама програма – зберігатися в пам'яті машини. Перша подібна ЕОМ була побудована в Англії в 1949 р.

У 1951 році в СРСР була створена «МЭСМ» (малая электронно-счетная машина). Ці роботи здійснювались в Україні (м. Київ) в Інституті електродинаміки під керівництвом видатного конструктора обчислювальної техніки С.О. Лебедєва.

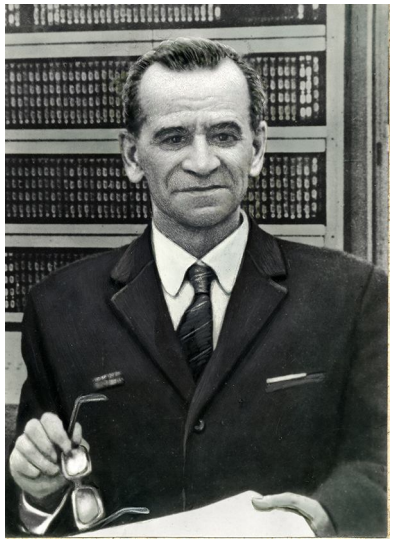


Рис. 1. Академік С.О. Лебедєв

Можна стверджувати, що «МЭСМ» була першою ЕОМ в континентальній Європі. Вона займала кімнату у лабораторії площею 60 м2 (рис. 2) і працювала зі швидкістю 3 тисячі операцій за хвилину (неймовірною на ті часи) і могла виконувати всі арифметичні та операції зсуву, порівняння з урахуванням знаку, порівняння за модулем числа, передачі керування, передачі чисел з магнітного барабану, складання команд.

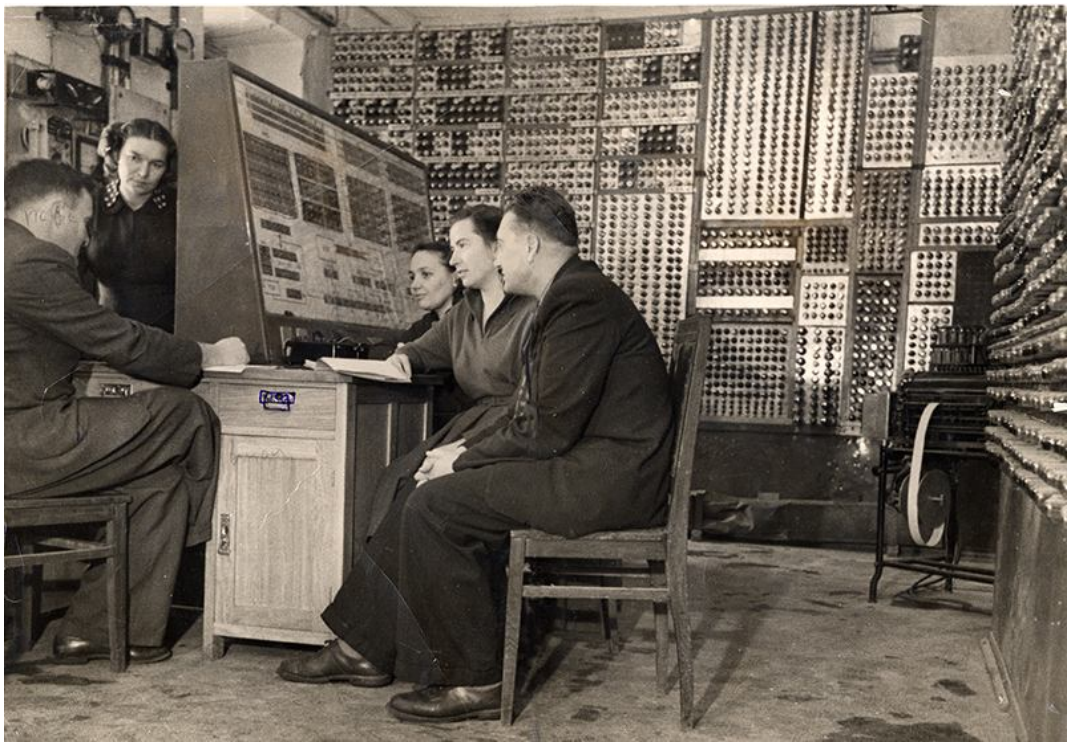


Рис. 2. «МЭСМ»

У машині було використано 6000 електронних ламп (рис. 3) загальною потужністю в 25 кВт. Під час першого запуску «МЭСМ» 6000 ламп, що запрацювали одночасно, перетворили приміщення в тропіки. Тому, для того щоб відвести з кімнати частину тепла, довелося терміново розбирати стелю.

Розв’язання першої задачі на «МЭСМ» було пов'язане з курйозним випадком ([2]). Двоє відомих київських математики С.Г. Крейн і С.О. Авраменко склали для «МЭСМ» тестову задачу з області балістики і розв’язали її, провівши всі розрахунки вручну. Однак, після розв’язання задачі на машині виявилось, що отриманий результат не збігається з результатом, який отримали математиками. Оскільки обидва вчені проводили розрахунки незалежно один від одного і одержали однакові результати, то було зроблено висновок, що в «МЭСМ» стався збій. Тоді Лебедєв сам став перевіряти обчислення вручну. Для цього він витратив цілий день і таки виявив, що обидва математика помилилися в одному і тому ж місці. «Не знущайтесь над машиною - вона права. Неправі люди!» – заявив Лебедєв.

Рис. 3. Основні деталі «МЭСМ»

ЕОМ постійно вдосконалювалися, завдяки чому до середини 50-х років їх швидкодію вдалося підвищити від кількох сотень до кількох десятків тисяч операцій за секунду, Однак при цьому електронна лампа залишалася найненадійнішим елементом ЕОМ. Використання ламп почало гальмувати подальший прогрес обчислювальної техніки.

Згодом на зміну лампам прийшли напівпровідникові прилади. Так завершився перший етап розвитку ЕОМ. Обчислювальні машини цього етапу прийнято називати *ЕОМ першого покоління.*

Характерними рисами ЕОМ першого покоління є застосування електронних ламп у цифрових схемах, великі габарити, а також трудомісткий процес програмування.

Насправді, ЕОМ першого покоління розміщувалися у великих машинних залах, споживали багато електроенергії та вимагали охолодження за допомогою потужних вентиляторів. Програми для цих ЕОМ потрібно було складати у машинних кодах, і це могли робити тільки фахівці, що знали детально пристрій ЕОМ.

Розробники ЕОМ завжди прямували за прогресом в електронній техніці. Коли в середині 50-х років на зміну електронним лампам прийшли напівпровідникові прилади, почалося переведення ЕОМ на напівпровідники.

Напівпровідникові прилади (транзистори, діоди) були, по-перше, значно компактнішими, ніж їхні лампові попередники. По-друге, вони мали триваліший термін служби. По-третє, споживання енергії в ЕОМ на напівпровідниках було істотно нижчим.

З упровадженням цифрових елементів на напівпровідникових приладах почалося створення *ЕОМ другого покоління.*

ЕОМ другого покоління відрізняються застосуванням напівпровідникових елементів і використанням алгоритмічних мов програмування.

Завдяки застосуванню більш досконалої елементної бази почали створюватися невеликі ЕОМ, сталося розподілення обчислювальних машин на великі, середні й малі.

В Україні першою малою ЕОМ стала машина «Днепр-1», серійне виробництво якої було налагоджено на заводі «Арсенал» (м. Київ). ЕОМ «Днепр-1» передувала унікальній за своєю архітектурою машині «Мир-1», розробленій в 1965 р. в Інституті кібернетики (керівник В.М. Глушков). Машина «Мир-1» та її наступна модифікація «Мир-2» передбачались для інженерних розрахунків, які виконував на ЕОМ сам користувач без допомоги оператора.

У СРСР були розроблені і широко використовувалися також малі ЕОМ «Раздан» і «Наїрі». До середніх ЕОМ належали машини серій «Урал», «М-20» і «Минск». Але рекордною серед вітчизняних машин другого покоління і однією з найкращих у світі була «БЭСМ-6» (рис. 4), створена колективом на чолі з академіком С. О. Лебедєвим. Ця машина виконувала понад 1 млн. операцій за секунду.

За кордоном найпоширенішими машинами другого покоління були «Елліот» (Англія), «Сіменс» (ФРН), «Стретч» (США).

Чергова зміна поколінь ЕОМ відбулася наприкінці 60-х років при переході від напівпровідникових приладів у пристроях ЕОМ до інтегральних схем.

Інтегральна схема (мікросхема) – це невелика пластинка кристалу кремнію, на якій розміщуються сотні і тисячі елементів: діодів, транзисторів, конденсаторів, резисторів тощо.

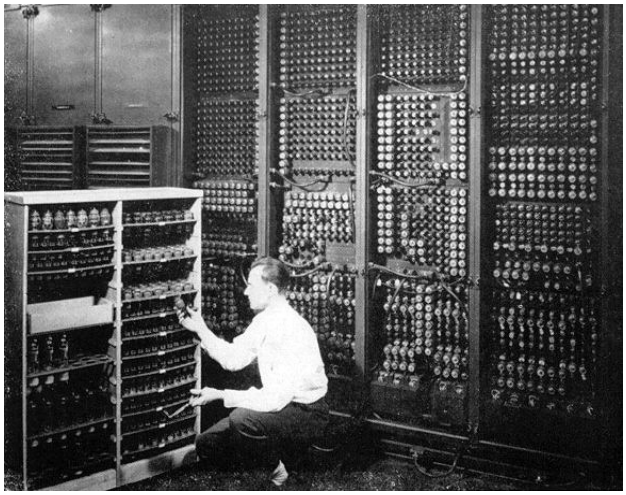


Рис. 4. «БЭСМ-6»

Застосування інтегральних схем надало можливість збільшити кількість електронних елементів в ЕОМ без зміни їхніх реальних розмірів. Швидкодія ЕОМ зросла до 10 мільйонів операцій за секунду. Крім того, складати програми для ЕОМ стало під силу простим користувачам, а не тільки фахівцям у галузі електроніки.

Характерними рисами ЕОМ третього покоління є застосування інтегральних схем і можливість використання розвинутих мов програмування (мов високого рівня).

У третьому поколінні з'явилися великі серії ЕОМ, що розрізняються за своєю продуктивністю і призначенням. Це родина великих і середніх машин IBM 360/370, розроблених у США. У Радянському Союзі були створені аналогічні серії машин: ЄС ЕОМ (Єдина Система ЕОМ, машини великі і середні), СМ ЕОМ (Система Малих ЕОМ) і «Електроніка» (мікро-ЕОМ).

У процесі вдосконалення мікросхем збільшувалася їхня надійність і щільність розміщених в них елементів. З'явилися великі інтегральні схеми (ВІС), в яких на один квадратний сантиметр припадає декілька десятків тисяч елементів! На основі ВІС були розроблені ЕОМ наступного – *четвертого покоління.*

Завдяки ВІС на одному невеличкому кристалі кремнію стало можливим розмістити таку велику електронну схему, як процесор ЕОМ (про процесор

йтиметься пізніше). Однокристальні процесори згодом почали називати *мікропроцесорами.* Перший мікропроцесор був створений компанією Intel (США) у 1971 р. Це був 4-розрядний Intel 4004, що містив 2250 транзисторів і виконував 60 тис. операцій за секунду.

Мікропроцесори стали основою міні-ЕОМ, а потім і персональних комп'ютерів, тобто ЕОМ, орієнтованих на одного користувача. 12 серпня 1981 р. корпорація IBM представила першу в світі модель персонального комп'ютера, яка вийшла в серійне виробництво.

Рис. 5. Перший ПК фірми IBM

Почалася епоха персональних комп'ютерів (ПК), що триває і досі. Однак четверте покоління ЕОМ – це не тільки покоління ПК. Крім персональних комп'ютерів, існували й інші значно потужніші комп'ютерні системи.

ЕОМ четвертого покоління характеризуються застосуванням мікропроцесорів, побудованих на великих інтегральних схемах.

Вплив персональних комп'ютерів на уявлення людей про обчислювальну техніку виявився настільки великим, що поступово з ужитку зник термін «ЕОМ», а його місце зайняло слово «комп'ютер».

Починаючи із середини 90-х років, у потужних комп'ютерах застосовуються супермасштабні ВІС, які вміщують сотні тисяч елементів на квадратний сантиметр. Багато фахівців почали говорити про комп'ютери п'ятого покоління.

Характерними рисами комп'ютерів п'ятого покоління мають бути можливість здійснення взаємодії необмеженого набору мікропроцесорів, використання штучного інтелекту і природних мов спілкування.

Сьогодні комп'ютер фактично повністю здатний задовольнити потреби людства в передачі, зберіганні та обробці різних видів інформації: текстової,

графічної, звукової та відео. Але він не може замінити саму людину, її мислення і творчість.

Література:

1. Бак С. М., Ковтонюк Г. М. Інформатика та обчислювальна техніка: посіб. для студ. 1-х курсів мат. спец. пед. ВНЗ. 2-е вид. Вінниця: ПП «ТД «Едельвейс і К», 2011. 448 с.
2. Як народжувався перший комп'ютер. URL: http://ua.uacomputing.com/stories/mesm/ (дата звернення: 09.04.2018).

УДК [В73.015.31:005.32]:51

Колеснік Тетяна

студентка магістратури
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

МОТИВАЦІЙНІ ПРОБЛЕМИ ТА ПИТАННЯ АКТИВІЗАЦІЇ РОЗУМОВОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ШКОЛЯРІВ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ

Анотація. *У статті розглянуто поняття «навчальна мотивація». Охарактеризовано види та етапи формування мотивації навчальної діяльності школярів. Наводяться негативні чинники мотивації навчання, що заважають формуванню навчальних мотивів і пізнавальних інтересів учнів. Висвітлені деякі питання активізація розумової діяльності школярів на уроках математики. Запропоновано методи і засоби формування мотивації та активізації розумової діяльності учнів.*

Ключові слова: *навчальна мотивація, пізнавальний інтерес, чинники мотивації навчання, активізація розумової діяльності.*

Annotation. *This article deals with the concept of "educational motivation". We have characterized the types and stages of modeling the motivation of educational activity of students and present negative factors of motivation of learning, which impede the formation of educational motives and cognitive interests of students. We have highlighted some issues of activation of students' mental activity in math classes and offer the methods and means of forming the students' motivation and increase of mental activity.*

Внутрішня спонукальна сила, що забезпечує залучення особистості до пізнавальної діяльності, стимулює розумову активність у шкільному віці. Саме

тому мотивацію до навчання математики, без перебільшення, можна назвати однією з головних проблем сучасної школи, справою суспільної важливості. Актуальність цього питання обумовлена новизною змісту навчання, формуванням у школярів навичок самостійного набуття знань, розвитком компетентностей і пізнавальних інтересів, вихованням у них активної життєвої позиції. Цього не можливо досягти без зацікавленості учня до предмета.

Мотив (від фр. motif, від середньовічної латини motivus, від лат. motus – прикметник минулого часу дієслова movēre – рухати(ся)) – багатозначний термін, що використовується в двох головних значеннях:

- внутрішня рушійна сила, що спонукає людину до дії;
- фрагмент загальної картини або об'єкта, що багаторазово повторюється з деякими змінами [2].

До видів мотивів можна віднести пізнавальні та соціальні мотиви. Спрямованість дитини на зацікавленість навчальним предметом свідчить про наявність пізнавальних мотивів.

Мотивація – найважливіший компонент структури навчальної діяльності, і саме внутрішня мотивація є основним критерієм її сформованості. Цінність такого компонента полягає в тому, що учень отримує «задоволення від самої діяльності».

Для ефективного навчання математики в учня повинна виникнути внутрішня потреба до формування компетентностей, а також бажання активно діяти, щоб засвоїти й закріпити відповідні вміння та навички. Завдяки високому рівню мотивації у дитини формується мета, її навчання стає активним, незалежним від учителя, переходить у самостійну цілеспрямовану діяльність. Якщо на уроці учень переживає за свої успіхи – це потужний чинник розвитку мотивації.

Є.П. Ільїн під мотивом навчальної діяльності розуміє всі чинники, що обумовлюють виявлення навчальної активності: мотиви, мета, почуття обов'язку, захоплення. У процесі формування мотивації до вивчення

математики науковець припускає наявність трьох етапів (стадій) формування мотивації:

- перший етап – формування первинного (абстрактного) мотиву;
- другий етап формування конкретного мотиву – пошукова зовнішня чи внутрішня активність;
- третій етап формування мотиву – вибір конкретної мети й формування наміру її досягти.

До основних функцій мотиву Є.П. Ільїн відносить: спонукальну, заохочувальну, директивну, регулятивну функції, керуючу, організаційну, контролюючу, пояснювальну та захисну функції [4].

Ефективність навчального процесу, головним чином, залежить від усвідомленого бажання школярів засвоювати матеріал, їхнього прагнення до самоосвіти на засадах стійкого мотивування до навчання. Будь-якої діяльності без мотиву не існує [4].

Основними загальними стратегіями, до яких найчастіше звертається вчитель під час уроку є пізнавальний інтерес, створення проблемних ситуацій, практична значущість отриманих знань з точки зору майбутньої професії, використання творчих завдань. Не останню роль відіграють і зовнішні мотиви, що проявляються тоді, коли навчальна діяльність здійснюється заради досягнення певного авторитету серед однолітків, через почуття обов'язку перед батьками, вчителями тощо.

З урахуванням результатів психологічних досліджень та чинників зовнішньої мотивації навчання, що поділяються на:

- навчання без бажання займатись запропонованим видом діяльності або без зацікавленості до предмета вивчення,
- навчання без особистого інтересу та результату навчання,
- навчання під впливом батьків та вчителів,
- навчання без орієнтації на опанування нових способів набуття знань,

- навчання без почуття відповідальності,
- навчання під впливом прагнень підтримати високий соціальний престиж серед однокласників,
- навчання без мети в повсякденному житті,
- навчання, що ґрунтується на зобов'язаннях перед суспільством.

Тому можна зробити висновок, що основними чинниками зниження мотивації навчання є не тільки проблеми активізації зовнішньої та внутрішньої мотивації учня, а й стиль спілкування вчителя, його методична компетентність. А саме:

- нераціональне розподілення навчального матеріалу, що призводить до перевантаження чи недовантаження школярів;
- невміння будувати відносини з учнями та організовувати взаємодію школярів один з одним;
- відсутність емоційного контакту в спілкуванні з учнями;
- психологічний дискомфорт на уроці;
- відсутність диференціації навчального матеріалу;
- відсутність компромісу з боку вчителя в оцінюванні знань і поведінки учнів під час уроку;
- рівень знань школярів не відповідає рівню викладання матеріалу вчителем;
- відсутність навичок займатись самостійною роботою;
- негативні вплив однолітків на дитину;
- невміння ставити мету й долати труднощі;
- адекватна самооцінка учня;
- особиста харизма вчителя та поведінка вчителя на уроці;

- стійка спрямованість учня на які-небудь види позашкільної діяльності, що дістала назву «компенсаторної мотивації» (І.Ю. Кулагіна) [8].

Не менш значущим питанням підвищення якості математичної освіти є активізація розумової діяльності учнів на уроках математики. Свідомість та активність учнів – один із принципів навчання, що включає роз'яснення мети та завдань навчального предмету, значення його для розвитку та формування загальних і ключових компетентностей. Саме в такому контексті розглядають активізацію розумової діяльності В.Г. Бондаревський, С.У. Гончаренко, Б.С. Кобзар, Г.С. Костюк, Н.Г. Ничкало, О.Я. Савченко та інші.

Розумова діяльність високого рівня це:

- здатність до аналізу, поєднання, аналогії, порівняння, класифікації, абстрагування, узагальнення та інших видів розумової діяльності;
- ініціативність та творчість, що проявляються через висунення гіпотез, нестандартні способи розв’язування задач;
- свідоме цілеспрямоване використання способів розумової діяльності.

Очевидно, що для активізації розумової діяльності та формування мотивації навчання сьогодні вже недостатньо просто оновити зміст шкільної освіти, зокрема й математичної. Необхідно почати активне впровадження в навчальний процес нових педагогічних технологій, наприклад інформаційно-комунікаційних (ІКТ), які можна використовувати на всіх етапах навчального процесу. Застосування комп'ютерних технологій дозволяє також реалізовувати модель особистісно-орієнтованого навчання, адже учень стає активним учасником навчального процесу. Наукові дослідження підтверджують, що одночасне застосування в процесі навчання всіх каналів сприйняття посилює ефективність засвоєння навчального матеріалу до 70 % [1].

Оптимізується мотивація до вивчення математики також шляхом використання елементів різноманітності, наочності та різнокольоровості

інформації. Підвищується продуктивність навчання в результаті одночасного включення всіх органів чуттів. Активізується розумова діяльність.

Під час уроку комп'ютер також можна використовувати для активізації пізнавальної діяльності учнів. На сьогодні програмне забезпечення для формування компетентностей на уроках математики представлене цілою низкою прикладних програм. При цьому можливе застосування різних форм навчальної діяльності, як і впродовж уроку, так і на різних його етапах, з використанням комп'ютера, таких як:

- дистанційне навчання;
- самостійне навчання;
- використання тренінгових (тренувальних) програм;
- застосування діагностичних та контролюючих програм;
- застосування комп'ютера для обчислень;
- можливість відтворення наочності, якої не вистачає під час вивчення планіметрії та стереометрії, деяких розділів алгебри, пов’язаних з побудовою та дослідженням графіків функцій;
- застосування програм комп’ютерного моделювання на уроках стереометрії.

Оскільки наочно-образні компоненти мислення відіграють важливу роль у житті людини, то й використання їх на уроках математики підсилює ефективність навчання, впливає на зацікавленість дитини, підвищує мотивацію до вивчення предмету [6].

Таким чином, використання ІКТ та програм прикладного призначення дозволяє:

- зацікавити учнів;
- розширити можливості для їхньої діяльності;
- формувати навички самоконтролю й позитивне ставлення до предмета;
- розвивати критичність мислення й пізнавальні здібності учнів;

- реалізовувати інтегроване вивчення предмету;
- оптимізувати навчальну діяльність.

Але варто зазначити, що використання ІКТ дозволяє досягти високих результатів тільки в комплексі з іншими освітніми технологіями.

Упровадження ІКТ у процес навчання математики з метою посилення освітньої та пізнавальної діяльності, активізації розумової діяльності учнів, формування мотивації навчання здійснюється на основі таких положень:

- інформаційні технології повинні займати належне місце в процесі навчання практично всіх предметів навчання, особливо геометрії [3];
- застосування ІКТ у процесі навчання планіметрії принципово впливає на зміст навчання та його методологію;
- навчання планіметрії за допомогою комп'ютера створює умови для збільшення кількості індивідуальних робіт, можливості автоматичного відбору завдань для вивчення, фіксації, моніторингу, оцінки якості набутих знань, вмінь та здібностей;
- поєднання традиційних технологій та ІКТ дає можливість збільшити інтенсивність освітньої та пізнавальної діяльності;
- використання ІКТ сприяє розвитку особистості учня та покращує його пізнавальні здібності шляхом поглиблення навчання та отримання навчальної інформації [7];
- використання комп'ютера дозволяє більш повно враховувати критерії якості геометричних знань, вмінь та навичок, систематичності, глибини, стабільності, критеріїв незалежності та творчої активності учнів [3].

Необхідно зазначити, що застосування сучасних комп'ютерних технологій та інтерактивних моделей під час вивчення математики, а саме геометрії, сприяє підвищенню мотивації та розумової діяльності учнів. Навчання з використанням ІКТ та програм прикладного призначення розглядається вченими як особлива активність учнів, завдяки якій забезпечується не лише

засвоєння знань, умінь, навичок з певної предметної області, а й психічний розвиток особистості дитини, її інтелектуальної сфери та пізнавальних здібностей. Сучасне суспільство зацікавлене в тому, щоб учні могли активно діяти, приймати власні рішення, гнучко адаптуватися до швидко плинних умов сучасного життя. Таким чином бачимо, що використання ІКТ на уроках математики є дієвим способом оптимізації навчального процесу та формування математичної компетентності завдяки створенню умов для організації активної самостійної діяльності учнів, здійснення диференційованого й індивідуалізованого підходу в процесі викладання математики. Система такого інтегрованого навчання, заснованого на принципах розвивального навчання, не тільки позитивно впливає на мотивацію та якість освіти, а й сприяє профорієнтації старшокласників на професії, пов'язані з комп'ютерними й наукомісткими технологіями [5].

Література:

1. Биков В.Ю. Новітні інформаційні технології в навчально-виховному процесі / В.Ю. Биков // Школа. – 2008. – № 7. –С. 42-48.
2. Вікіпедія // Мотив [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%BE%D1%82%D0%B8%D0%B2
3. Григор'єва В.Б. Методичні системи навчання математики з використанням ІКТ у процесі підготовки майбутніх учителів у галузі геометрії [Електронний ресурс] / В.Б. Григор'єва. – Інформаційні технології в освіті, 2014. – Вип. 18. – С. 139-148. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/itvo_2014_18_18
4. Іллін Є.П. Мотивація і мотиви / Є.П. Іллін; переклад з рос. мови, передмова та примітки Т.В. Тадеєвої. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2013. – 512 с.
5. Колеснік Т.І. Використання технологій мобільного навчання в процесі формування математичної компетентності учнів / Т.І. Колеснік // Новітні інформаційно-комунікаційні технології в освіті: матеріали V Всеукраїнської науково-практичної Інтернет-конференції молодих учених та студентів (Полтава, 22-23 листопада 2017 р.). – Полтава: ФОП Гаража М.Ф., 2017. – С. 122-124.
6. Ластенко Ю.В. Практичне використання комп’ютерно-орієнтованої методичної системи навчання учнів [Електронний ресурс] / Ю.В. Ластенко. – Режим доступу: http://wiki.ciit.zp.ua/index.php

7. Радіонова Н.Й. Значення сучасних інформаційних технологій в освітньому процесі [Електронний ресурс] / Н.Й. Радіонова. – Режим доступу: https://er.knutd.edu.ua/bitstream/123456789/3612/3/20161_Radionova_P065-078.pdf
8. Фридман Л. М. Психологический справочник учителя / Л.М. Фридман, И.Ю. Кулагина И.Ю. – М., 1991. – С. 192-194.

Науковий керівник: канд. пед. наук, асистент Соя Олена Миколаївна

УДК 517.928

Ковтонюк Мар'яна
докт. пед.наук, професор,
Мукоїд Алла
студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ПОБУДОВА ФОРМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗЧИСЛЕННОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА МАЛИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Анотація. *У статті побудовано формальний розв'язок зчисленної системи диференціальних рівнянь першого параметру з двома малими параметрами у випадку простого спектру головної матриці.*

Ключові слова: *диференціальні рівняння, малий параметр, формальні розв'язки, зчисленні системи.*

Annotation. *In the article the formal decision of thezчисленної system of differen tial equations of the first is builtto the parameter with two small parameters in case o f simplespectrum of main matrix.*

Key words: *differential equations, small parameter, formal solutions, numerical systems.*

Протягом останніх двох століть для проведення теоретичних досліджень і розв'язання різноманітних прикладних задач, які зводяться до диференціальних рівнянь, досить ефективно використовують асимптотичні методи, започатковані в працях Штурма, Ліувілля, Пуанкаре. Їх основна ідея полягає в розвиненні шуканих розв'язків у формальний ряд, який у звичайному розумінні, як правило, збігається.

Над розвитком асимптотичного інтегрування систем диференціальних рівнянь з малим параметром працювали багато вчених, зокрема: М. М. Боголюбов, Г. В. Завізіон, І. М. Конет. М. М. Крилов, Ю. О. Митропольський, Л. С. Понтрягін, А. М. Самойленко, М. А. Сотніченко, І. І. Старун, М. І. Шкіль, В. П. Яковець,.

Розглянемо в нескінченно мірному просторі m рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей систему рівнянь

$$\varepsilon \frac{dx}{d\tau} = A(\tau,\mu)x \tag{1}$$

де $A(\tau,\mu) = \left\| a_{jk}(\tau,\mu) \right\|^{\infty}$, - дійсна нескінченна матриця, елементами якої є функції $a_{jk}(\tau,\mu)$ дійсної змінної $\tau \in [0;T]$, $x(\tau,\mu)$ - нескінченно мірний шуканий вектор, $\varepsilon,\mu > 0$ - малі дійсні параметри, для якої виконуються такі умови $(\tau = \varepsilon t)$:

1) матриця $A(\tau,\mu)$ має на відрізку $[0;T]$ рівномірне асимптотичне розвинення за степенями параметра μ:

$$A(\tau,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_k(\tau);$$

2) матриці $A_k(\tau), k = 1,2,\ldots$ – нескінченно диференційовні на відрізку $[0;T]$;

3) головна матриця $A_0(\tau)$ діагональна:

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\tau) & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \lambda_2(\tau) & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \lambda_3(\tau) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix},$$

причому функції $\lambda_i(\tau), i = 1, 2, \ldots$ залишаються простими, тобто $\forall \tau \in [0;T]$: $\lambda_i(\tau) \neq \lambda_j(\tau),\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots,\quad \left|\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)\right| \geq d,\quad j = 2, 3, \ldots;$

4) функції $\dfrac{d^k a_j(\tau,\mu)}{d\tau^k} = \sum_{m=1}^{\infty} \dfrac{d^k \left| a_{jm}(\tau,\mu) \right|}{d\tau^k},\ j = 0,1,2,\cdots$ неперервні і обмежені на $[0;T]$:

$$\frac{d^k a_j(\tau,\mu)}{d\tau^k} \leq \gamma_k \quad \forall k = 0,1,2,\ldots$$

Зазначимо, що такого типу задачі досить детально вивченні для скінченних і зчисленних систем, які сингулярно залежать від одного малого параметра, а саме, коли $\mu = \varepsilon$ [1,2,3,4,5]. Системи з двома незалежними параметрами,

незважаючи на їх практичне значення, досліджувалися в меншій мірі і в скінченномірному просторі [1,2,3].

Ми розглядаємо аналогічну задачу в нескінченномірному просторі.

Частинний розв'язок системи (1) шукатимемо у вигляді:

$$x(\tau,\varepsilon,\mu)=u(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d\sigma\right), \tag{2}$$

де $u(\tau,\varepsilon,\mu)$ - невідомий нескінченно мірний вектор, який можна подати у вигляді рівномірного асимптотичного розкладу

$$\begin{aligned} u(\tau,\varepsilon,\mu)&=\sum_{r=0}^{\infty}\mu^r u_r(\tau,\varepsilon)\\ u_r(\tau,\varepsilon)&=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s u_{rs}(\tau). \end{aligned} \tag{3}$$

Знаходження розв'язку буде полягати в побудові алгоритму, по якому можна знайти невідомі члени розкладу (3).

Підставимо вектор (2) – (3) в систему (1) і врахувавши, що

$$\frac{dx(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}=\frac{du(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d\sigma\right)+u(\tau,\varepsilon,\mu)\cdot\frac{1}{\varepsilon}\lambda_1(\tau)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d\sigma\right),$$

отримаємо тотожність

$$\varepsilon\left(\frac{dx(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}=\frac{du(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d\sigma\right)+u(\tau,\varepsilon,\mu)\cdot\frac{1}{\varepsilon}\lambda_1(\tau)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d\sigma\right)\right)=$$

$$=A(\tau,\mu)\cdot u(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d\sigma\right).$$

Винесемо в лівій частині рівності за дужки множник $\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d\sigma\right)$ і скоротимо на нього, отримаємо:

$$\varepsilon u'(\tau,\varepsilon,\mu)+\lambda_1(\tau)u(\tau,\varepsilon,\mu)=A(\tau,\mu)u(\tau,\varepsilon,\mu),\ \text{або}$$

$$\varepsilon\left(u_0'(\tau,\varepsilon)+\mu u_1'(\tau,\varepsilon)+\mu^2u_2'(\tau,\varepsilon)+\ldots\right)+\lambda_1(\tau)\left(u_0(\tau,\varepsilon)+\mu u_1'(\tau,\varepsilon)+\mu^2u_2'(\tau,\varepsilon)+\ldots\right)=$$

$$=\left(A_0(\tau)+\mu A_1(\tau)+\mu^2A_2(\tau)+\ldots\right)\left(u_0(\tau,\varepsilon)+\mu u_1(\tau,\varepsilon)+\mu^2u_2(\tau,\varepsilon)+\ldots\right).$$

В останньому співвідношенні прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях параметра μ:

$$\mu^0: \quad A_0(\tau)u_0(\tau,\varepsilon) - \lambda_1(\tau)u_0(\tau,\varepsilon) = \varepsilon u_0'(\tau,\varepsilon);$$

$$\mu^r: \quad A_r(\tau)u_r(\tau,\varepsilon) - \lambda_1(\tau)u_r(\tau,\varepsilon) = \varepsilon u_r'(\tau,\varepsilon) - \sum_{j=1}^{r} A_j(r)u_{r-j}(\tau,\varepsilon),\ r = 1,2,\ldots$$ або

, враховуючи дистрибутивний закон для нескінченних матриць, отримаємо рекурентні співвідношення

$$\left(A_0(\tau) - \lambda_1(t)E_\infty\right)u_0(\tau,\varepsilon) = \varepsilon u_0'(\tau,\varepsilon) \tag{4}$$

$$\left(A_0(\tau) - \lambda_1(\tau)E_\infty\right)u_r(\tau,\varepsilon) = \varepsilon u_r'(\tau,\varepsilon) - \sum_{j=1}^{r} A_j(r)u_{r-j}(\tau,\varepsilon) \tag{5}$$

Тепер у рівняннях (4) - (5) будемо прирівнювати коефіцієнти при однакових степенях малого параметра ε. Зокрема з рівняння (4) отримаємо:

$$\varepsilon^0: \left(A_0(\tau) - \lambda_1(\tau)E_\infty\right)u_{00}(\tau) = O_{\infty,} \tag{6}$$

$$\varepsilon^s: \left(A_0(\tau) - \lambda_1(\tau)E_\infty\right)u_{os}(\tau) = u_{o,s-1}(\tau). \tag{7}$$

У рівнянні (6) перейдемо до координатної форми запису:

$$\left(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)\right)u_{oo,j}(\tau) = 0,$$

Звідки бачимо, що $u_{oo,j}(\tau) \equiv 0, j = 2,3,\ldots,$ а перший компонент вектор-функції $u_{oo,j}(\tau)$ поки – що невизначений. У рівнянні (7) покладемо $s = 1$, тоді

$$\left(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)\right)u_{01,j}(\tau) = u_{00,j}'(\tau),$$

причому $\left(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)\right)u_{01,j}(\tau) = 0,\ j = 2,3,\ldots,$ тому $u_{01,j}(\tau) = 0, j = 2,3,\ldots,$ а якщо $j = 1,$ то $0 = u_{00,1}'(\tau),$ звідки $u_{00,1}(\tau) = const,$ покладемо її рівною 1. Тепер вектор $u_{oo,j}(\tau)$ стає визначеним, а перша компонента вектора $u_{01,1}(\tau)$ поки-що не визначений. Розглянемо рівняння (7) при $s = 2$:

$$\left(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau)\right)u_{02,j}(\tau) = u_{01,j}'(\tau), j = 1,2,\ldots,$$

тому знову ж таки $u_{02,j}(\tau) \equiv 0,\ j = 2,3,\ldots,$ а якщо $j = 1,$ то $0 = u_{01,1}'(\tau),$ звідки $u_{01,1}(\tau) = 1.$ Використовуючи метод математичної індукції модна довести, що вектори $u_{0s}(\tau), s = 0,1,2,\ldots$ матимуть вигляд:

$$u_{0s}(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \end{bmatrix}, s = 0,1,2,\ldots \tag{8}$$

Тобто вектор $u_0(\tau,\varepsilon)$ набере вигляд:

$$u_0(\tau)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\.\\.\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}1\\0\\0\\.\\.\end{bmatrix}+\varepsilon^2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\.\\.\end{bmatrix}+\ldots=\begin{bmatrix}1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots\\0\\0\\\ldots\\\ldots\end{bmatrix}.$$

Розглянемо тепер другу частину рекурентних співвідношень (5), їх ми використаємо для визначення невідомих вектор-функцій $u_r(\tau,\varepsilon),\ r=1,2,\ldots$

Нехай $r=1,$ тоді

$$\left(A_0(\tau)-\lambda_1(\tau)E_\infty\right)u_1(\tau,\varepsilon)=\varepsilon u_1'(\tau,\varepsilon)-A_1(\tau)u_0(\tau,\varepsilon),$$

де знову ж таки прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε:

$$\varepsilon^0:\left(A_0(\tau)-\lambda_1(\tau)E_\infty\right)u_{10}(\tau)=-A_1(\tau)u_{00}(\tau) \tag{9}$$

$$\varepsilon^s:\left(A_0(\tau)-\lambda_1(\tau)E_\infty\right)u_{1s}(\tau)=u_{1,s-1}'(\tau)-A_1(\tau)u_{0s}(\tau),s=1,2,\ldots \tag{10}$$

У рівнянні (9) перейдемо до координатної форми запису

$$\left(\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)\right)u_{10,j}(\tau)=-a_{j1}^{(1)}(\tau),\ j=1,2,\ldots,$$

звідки видно, що $u_{10,j}(\tau)=-\dfrac{a_{j1}^{(1)}(\tau)}{\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)},\ j=2,3,\ldots,$ а якщо $j=1,$ то

$0\cdot u_{10,1}(\tau)=-a_{11}^{(1)}(\tau),$ тому $a_{11}^{(1)}(\tau)=0,$ а перший компонент $u_{10,1}(\tau)$ вектора $u_{10}(\tau)$ залишається поки-що невизначеним.

Нехай $s=1$, тоді з рекурентних співвідношень (10) отримаємо:

$$\left(\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)\right)u_{11,j}(\tau)=u_{10,j}'(\tau)-a_{11}^{(1)}(\tau),\ j=1,2,\ldots$$

або

$$u_{11,j}(\tau)=\frac{u_{10,j}'-a_{j1}^{(1)}(\tau)}{\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)},\ j=2,3,\ldots$$

$$u_{10,1}'(\tau)=a_{11}^{(1)}(\tau),$$

$$u_{10,1}(\tau)=\int_0^\tau a_{11}^{(1)}(\sigma)d\sigma$$

Отже, вектор функція $u_{10}(\tau)$ набирає такого вигляду:

$$u_{10}(\tau)=\begin{bmatrix} \int\limits_0^{\tau} a_{11}^{(1)}(\sigma)d\sigma \\ -\dfrac{a_{21}^{(1)}(\tau)}{\lambda_2(\tau)-\lambda_1(\tau)} \\ -\dfrac{a_{31}^{(1)}(\tau)}{\lambda_3(\tau)-\lambda_1(\tau)} \\ \cdots\cdots\cdots \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Покажемо, що вектори $u_{10}(\tau)$ є елементом простору m. Дійсно, згідно умов 3) – 4) отримаємо

$$\left|u_{10,j}(\tau)\right|=\left|-\frac{a_{j1}(\tau)}{\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)}\right|\le\frac{x_0}{d},\ j=2,3,\ldots,\left|u_{10,1}(\tau)\right|\le\gamma_0 T,\ \ K=\max\left\{\frac{\gamma_0}{d},\gamma_0 T\right\}.$$

Тому функціональна послідовність $\left\{u_{1s,j}(\tau)\right\},\ j=1,2,\ldots$ є рівномірно збіжною на $[0;T]$. Вектори $u_{1s}(\tau)$ згідно з умовами 1) – 2) мають неперервні похідні по τ достатньо великих порядків.

Послідовність $\left\{u_{1s,j}(\tau)\right\}$ також є одностайно – неперервною на відрізку $[0;T]$. Дійсно, використовуючи теорему Лагранжа (теорема про середнє) і умови 3) – 4), отримаємо:

$$\left|u_{1s,j}(\tau_2)-u_{1s,j}(\tau_1)\right|=\left|\frac{-a_{j1}^{(1)}(\tau_2)}{\lambda_j(\tau_2)-\lambda_j(\tau_1)}-\frac{-a_{j1}^{(1)}(\tau_1)}{\lambda_j(\tau_1)-\lambda_1(\tau_1)}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{d^2}\left|a_{j1}^{(1)}(\tau_2)(\lambda_j(\tau_1)-\lambda_1(\tau_1))-a_{j1}^{(1)}(\tau_1)(\lambda_j(\tau_2)-\lambda_1(\tau_2))\right|=$$

$$=\frac{1}{d^2}\left|-a_{j1}^{(1)}(\tau_2)(\lambda_j(\tau_2)-\lambda_j(\tau_1))+\lambda_j(\tau_2)(a_{j1}^{(1)}(\tau_2)-a_{j1}^{(1)}(\tau_1))+\right.$$

$$\left.+a_{j1}^{(1)}(\tau_2)\left(\lambda_1(\tau_2)-\lambda_1(\tau_1)\right)-\lambda_1(\tau_2)(a_{j1}^{(1)}(\tau_2)-a_{j1}^{(1)}(\tau_1))\right|\le$$

$$\le\frac{\gamma_0}{d}\left(\left|\lambda_j'(\theta_1)\right|+\left|a_{j1}^{(1)}(\theta_2)\right|+\left|\lambda_1'(\theta_3)\right|+\left|a_{j1}'^{(1)}(\theta_4)\right|\right)\left|\tau_2-\tau_1\right|\le$$

$$\le\frac{4\gamma_0\gamma_1}{d^2}\left|\tau_2-\tau_1\right|,\quad \tau_1\le\theta_i\le\tau_2,\quad i=1,2,3,4.$$

Отже, послідовність функцій $\left\{u_{1s,j}(\tau)\right\},\ j\ge1$ задовольняє умови Ліпшиця з сталою $\lambda=\dfrac{4\gamma_0\gamma_1}{d^2}$. А тому, за наслідком з теореми Арцела-Асколі випливає, що така функціональна послідовність є одностайно неперервною.

Нехай $r = 2$, тоді

$$\left(A_0(\tau) - \lambda_1(\tau)E_\infty\right)u_2(\tau,\varepsilon) = \varepsilon u_2'(\tau,\varepsilon) - A_1(\tau)u_1(\tau,\varepsilon) - A_2(\tau,\varepsilon)u_0(\tau,\varepsilon).$$

Продовжуючи міркування аналогічним чином, можна визначити всі останні вектори $u_r(\tau,\varepsilon)$, довести їх диференційовність по $\tau \in [0;T]$. Таким чином, буде побудований формальний розв'язок рівняння (1.1).

Тобто нами доведена теорема:

Теорема 2.1 Якщо виконується умова 1) – 4) то зчисленна система диференціальних рівнянь (1.1) має формальний частинний розв'язок

$$x(\tau,\varepsilon,\mu) = u(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \lambda_1(\sigma)d\sigma\right),$$

де нескінченний вектор $u(\tau,\varepsilon,\mu)$ визначається у вигляді формального степеневого ряду (2).

Аналогічно, можна побудувати формальний частинний розв'язок, який відповідає іншим власним значенням $\lambda_j(\tau), j = 2,3,\ldots$ головної частини $A_0(\tau)$ матриці $A(\tau,\mu)$.

Висновок. Отже, якщо матриця $A(\tau,\mu)$ відповідає умовам 1) – 4), то для неї побудовано формальний розв'язок. Можна довести асимптотичний характер побудованого розв'язку.

Література:

1. Ковтонюк М. М. Асимптотическое поведение решения одной бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений / М. М. Ковтонюк // УМЖ. – 1983. – № 35. – с. 630 – 636.
2. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. – М.: Наука, 1981. – С.398.
3. Сотниченко Н.А. К вопросу расщепления систем дифференциальных уравнений, зависящих от двух параметров / Н. А. Сотниченко// Дифференциальные уравнения. – 1987. –23. №9. –С.1640-1642.
4. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях / М. І. Шкіль. – Київ: Вища школа, 1971. – 226 с.
5. Шкиль Н.И. Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. И. Шкиль, И. И. Старун, В. П. Яковец. – Київ: Вища школа, 1989. – 287 с.

6. Яковец В.П. Асимптотика общего решения линейной сингулярно возмущенной системы с двумя малыми параметрами / В.П.Яковец// Дифференциальные уравнения. – 1993. –29. №2. –С.256-266.

УДК 378.147

Ляхович Ірина
студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Анотація: *у статті розглядається історія виникнення та розвитку систем комп'ютерної математики.*
Ключові слова: *системи комп'ютерної математики, виникнення, розвиток, популярні СКМ.*

Annotation: *the article deals with the history of the emergence and development of systems of computer mathematics.*
Keywords: *systems of computer mathematics, emergence, development, popular SCM.*

Комп’ютер – чудовий інструмент у руках ученого, інженера, аспіранта, студента, школяра, який допомагає розв’язувати щораз складніші, всебічні завдання і представляти результати їх розв’язання різними способами.

Ми живемо в час початку нового періоду розвитку математики, який пов'язаний з винаходом і застосуванням комп'ютерів. Перш за все, комп'ютер надав можливість робити складні чисельні розрахунки для розв'язку тих завдань, які неможливо (принаймні, на даний момент) вирішити аналітично. З'явилося так зване «комп'ютерне моделювання» - цілий розділ прикладної математики, в якій за допомогою найсучасніших обчислювальних засобів вивчається поведінка багатьох складних економічних, соціальних, екологічних та інших динамічних систем[2].

Сучасний інструментарій комп’ютерної математики складають потужні математичні системи, які широко застосовуються в дослідницькій і освітній діяльності.

Перші програмні системи комп'ютерної математики (СКМ) з'явилися в 80-х роках майже одночасно з появою персональних комп'ютерів (ПК) на основі мікропроцесорів і інших інтегральних мікросхем. СКМ є спеціалізованими на виконання математичних обчислень апаратними та програмними засобами[1].

Раніше програмні СКМ ділили на системи комп'ютерної алгебри CAS (або системи символьної математики) і системи для розрахунків та математичного моделювання чисельними методами. В наші дні такий розподіл став некоректним і всі наявні на ринку СКМ є універсальними системами.

Термін «*комп'ютерна алгебра*» виник як синонім термінів «*символьне обчислення*», «*аналітичне обчислення*», «*аналітичні перетворення*» і тощо. Навіть в даний час цей термін французькою мовою дослівно означає «*формальне обчислення*».

У чому основні відмінності символьних обчислень від численних і чому виник термін «*комп'ютерна алгебра*»?

Коли ми говоримо про обчислювальні методи, то вважаємо, що всі обчислення виконуються в поле дійсних або комплексних чисел. Насправді ж будь-яка програма для ЕОМ має справу тільки з кінцевим набором раціональних чисел, оскільки тільки такі числа представляються в комп'ютері. Ще більш істотною особливістю обчислювальної математики є те, що арифметичні операції над цими числами, що виконує комп'ютер, відрізняються від арифметичних операцій в полі раціональних чисел.

Розв'язання проблеми точності обчислень одержуваних чисельних результатів певною мірою отримується із розвитком систем комп'ютерної алгебри. Системи комп'ютерної алгебри, які здійснюють аналітичні обчислення, широко використовують безліч раціональних чисел. Комп'ютерні операції над раціональними числами збігаються з відповідними операціями в полі раціональних чисел. Крім того, обмеження на допустимі розміри числа

(кількість знаків у його записі) дозволяє користуватися практично будь-якими раціональними числами, операції над якими виконуються за прийнятний час[2].

На сьогоднішній день до універсальних СКМ можна віднести відомі програмні продукти, розроблені відомими західними фірмами, такими як MathSoft, MathWorks, Waterloo Maple, Wolfram. Найбільшу популярність мають системи MathCAD, Maple, Mathematica, MATLAB. Саме вони все частіше використовуються для розв'язання навчальних, інженерних, науково-дослідних задач у різних галузях природничих наук.

Усі перелічені системи пройшли у своєму розвитку декілька етапів. Вони постійно вдосконалюються розробниками, і на сьогоднішній день існують декілька версій кожної з систем. Зокрема, версія системи MathCAD 1.0, випущена в кінці 80-х років, працювала під керуванням MSDOS, і для її успішного використання було достатньо процесора типу Intel 80286. Ядро системи разом з допоміжними файлами та колекцією прикладів цілком "вміщувалось" на дискету ємністю 720 Кбайт, отже, з системою можна було працювати навіть на вітчизняному комп'ютері "Искра 1030", який мав дуже обмежений (640 Кбайт) об'єм оперативної пам'яті. На певному етапі досконаліть систем комп'ютерної математики залежала від рівня розвитку апаратних ресурсів персональних комп'ютерів. Так, версія MathCAD 3.0 вже мала засоби створення тривимірної графіки, але ефективність роботи з системою при цьому знизилась через підвищення вимог до оперативної пам'яті. У міру розвитку ринку персональних комп'ютерів вдосконалювалась і система MathCAD. По-справжньому користувач зміг оцінити переваги цієї системи з появою процесорів типу Pentium та з виходом версії MathCAD 5.0, яка працювала під керуванням системи Windows 3.11. Особливістю цієї версії був потужний та дуже зручний для користувача інтерфейс, загальна структура якого збереглась і в останніх версіях пакета MathCAD. У наступних версіях (MathCAD 6.0–8.0, MathCAD 2000–2003) розширювались, насамперед, обчислювальні можливості ядра системи, додавались нові вбудовані процедури та функції, засоби програмування, засоби для проведення аналітичних

(нечисельних) розрахунків, удосконалювався інтерфейс та довідкова система. Досить важливо, що розробники намагаються вдосконалювати систему таким чином, щоб зберегти “спадкоємність” версій: у більшості випадків більш нові версії “розуміють” файли, створені користувачем за допомогою більш ранніх версій[5].

В останні роки темпи розвитку СКМ в цілому істотно виросли. Деякі системи, наприклад Mathcad, Maple і MATLAB, розвивалися настільки швидко, що їх нові версії виходили щороку, а іноді і більш часто. Поряд з позитивними моментами (швидке оновлення систем і зростання їх функціональності) відмітимо і негативні моменти - деякі версії систем виходять досить сирими, помічені в попередніх версіях недоліки і недоробки вчасно не усуваються, в нові версії вноситься мало дійсно нових можливостей[1].

В цілому випуск все нових і нових СКМ означає виникнення гострої конкуренції між їх розробниками. Витрати на розробку і освоєння серійного випуску СКМ дуже великі, і лише окремі великі фірми з чисельністю персоналу розробників в сотні фахівців здатні на це. Тому в останні роки практично припинилося розширення числа фірм, що створюють нові СКМ. Почастішали випадки поглинання деяких фірм їх більш потужними (нерідко в напрямках, відмінних від розробки СКМ) конкурентами.

Найбільш популярні СКМ, спочатку орієнтовані на розв'язання задач в освітній сфері і потужні СКМ для виконання серйозних розрахунків і на реалізацію математичного моделювання складних систем і пристроїв. З перших - це системи Derive і Maple. Але якщо популярність малої Derive пов'язана з явно навчальним призначенням цієї старої системи, то потужна система Maple завоювала популярність ще й за рахунок свого величезного числа функцій, орієнтованих як на аналітичні, так і чисельні обчислення, а також потужної графіки. Число функцій в ядрі Maple 14 перевищило 4000[2].

Системи комп’ютерної математики активно використовуються у навчальному процесі у всьому світі. Так, згідно даних офіційного сайту розробника системи Mathematica, тисячі університетів з 61 країни є офіційними

користувачами системи Mathematica. Серед них такі освітні заклади: Пекінський, Кембриджський, Колумбійський, Гарвардський, Стенфордський, Московський державний, Австралійський національний, Каліфорнійський, Оксфордський університети, Лондонська школа економіки та політичних наук і багато інших. Згідно результатів дослідження[3], представленого норвезькими науковцями, використання систем комп'ютерної математики у навчальному процесі є звершеним фактом, які відмічають ефективність використання таких продуктів. Крім того, дослідники зазначають, що впровадження таких систем у процес навчання повинно бути метою для технічної освіти, та пропонують наступні рекомендації для підвищення ефективності даного процесу: орієнтація на використання єдиного програмного засобу в межах освітнього закладу; побудова курсів, що базуються на математиці, з урахуванням використання відповідної системи; наявність комп'ютерних лабораторій, що дозволять ефективно використовувати програмний засіб[4].

Висновок. У наш час системи комп'ютерної математики знаходять найширше застосування в наукових дослідженнях, стають одним з обов'язкових компонентів комп'ютерних технологій, що використовуються в освіті.

Ці системи мають дружній інтерфейс, реалізують безліч стандартних і спеціальних математичних операцій, забезпечені потужними графічними засобами і володіють власними мовами програмування. Все це надає широкі можливості для ефективної роботи вчителів, школярів та студентів, які активно застосовують математичні пакети в наукових дослідженнях і викладанні.

Література:

1. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики : [монографія] / Ю. В. Триус. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 400 с.
2. Чичкарёв Е. А. Компьютерная математика с Maxima: Руководство для школьников и студентов / Е. А. Чичкарёв. – Москва: ALT Linux, 2012. – 384 с.
3. Корольський В.В. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики : навчальний посібник / В. В. Корольський, Т. Г. Крамаренко, С. О. Семеріков, С. В. Шокалюк ; науковий редактор академік АПН України, д.пед.н., проф. М. І. Жалдак. – Кривий Ріг : Книжкове видавництво Кирєєвського, 2009. – 2009. – 316 с.

3. Ola Royrvik O. Use of computer algebra systems in Norwegian engineering education / Ola Royrvik O., Hornaes H.P. // International Conference on Engineering Education. Oslo, Norway, August 6-10, 2001. – P. 6-12.
4. Коробов В. І. Системи комп'ютерної математики в хімії. Основні засоби організації обчислень: Навч. посіб / В. І. Коробов. – Дніпропетровськ: РВВДНУ, 2004. – 136 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, ст. викладач Туржанська О.С.

УДК 373.5.091.313

Малик Юлія
студентка магістратури
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

АКТИВНІ МЕТОДИ НАВЧАННЯ ЯК ЗАСІБ СТИМУЛЮВАННЯ ПІЗНАВАЛЬНОЇ АКТИВНОСТІ СТАРШОКЛАСНИКІВ

Анотація. *У даній статті обґрунтовано значущість та ефективність використання активних методів навчання з метою стимулювання пізнавальної активності старшокласників. У статті наведено класифікацію активних методів навчання.*

Ключові слова*: активні методи навчання, навчально-пізнавальна активність, імітаційні методи навчання, неімітаційні методи навчання, ділові ігри.*

Annotation*. This article substantiates the significance and effectiveness of the use of active teaching methods in order to stimulate cognitive activity of senior pupils. The article describes the classification of active teaching methods.*

Keywords. *Active teaching methods, educational and cognitive activity, simulation teaching methods, non-simulation teaching methods, business games.*

Сучасні вимоги суспільства до розвитку особистості диктують необхідність реалізації ідеї індивідуалізації навчання, що враховує індивідуально-типологічні особливості учнів, їхню готовність до вибору майбутньої професії, до самостійного життя у соціумі.

Орієнтація системи освіти на сучасні та перспективні види діяльності зумовлює пошук нових підходів до реалізації навчального процесу, який сприятиме самореалізації і творчому розвитку особистості.

Під освіченістю, на відміну від навчання, сучасна педагогічна наука розуміє здібність людини до індивідуального сприйняття світу, широке використання власного досвіду в оцінці навколишньої дійсності на основі особистісно-значущих цінностей і внутрішніх установок [5, с. 56].

На думку філософів, основною характеристикою особистості як суб'єкта діяльності є активність. Тому більшість учених розглядають пізнавальну активність учня в якості системо утворюючої властивості особистості.

У педагогіці накопичено достатньо великий досвід із проблеми активізації навчання.

У 60-х роках минулого століття в нашій країні самостійність і активність було проголошено основним дидактичним принципом. Робота з інтенсифікації навчання призвела до необхідності пошуку шляхів активізації навчально-пізнавальної діяльності школярів, а також прийомів стимулювання їхнього навчання. У Законі про школу 1958 року розвиток пізнавальної активності та самостійність учнів розглядалися як основна задача перебудови загальноосвітньої школи [3, с. 15].

Вивченням пізнавальної діяльності та активності учнів у процесі навчання займалися вчені-педагоги З. Абасов, Б. Коротяєв, І. Лернер, М. Махмутов, Л. Мар'яненко, В. Онищук, Н. Половникова, М. Скаткін, Н. Томін, Т. Шамова та інші, які розкрили сутність, зміст і структуру даного поняття. Науковці зауважують, що пізнавальна активність характеризує індивідуальні особливості школяра у процесі пізнавальної діяльності.

Так, Т. Шамова визначає активність як "якість діяльності, в якій виявляється особистість самого учня з його ставленням до змісту, характеру діяльності і прагненням мобілізувати власні морально-вольові зусилля на досягнення навчально- пізнавальних цілей" [6, с. 31].

Пізнавальна активність – спрямованість особистості на пізнання нового, що виникає на основі спонукально-пізнавальних мотивів, інтересів, потреб, які проявляються у навчальній діяльності. Пізнавальну активність старшокласників можна визначити як неперервний процес отримання нових знань, самостійну

цілеспрямовану навчальну діяльність із використанням різних форм і методів навчання.

Психолого-педагогічні аспекти проблеми розвитку пізнавальної активності у школярів висвітлювали у своїх працях Б. Ананьєв, Л. Виготський, П. Гальперін, Я. Коменський, Д. Локк, Ж-Ж. Руссо, А. Леонтьєв, Н. Менчинська, С. Рубінштейн, Н. Тализіна, А. Люблeнська, К. Ушинський та ін., які визначають пізнавальну активність як природнє прагнення учнів до пізнання, при цьому самостійну роботу вчені розглядають як один із дієвих засобів активізації пізнавальної діяльності.

Розробкою шляхів активізації та розвитку пізнавальної діяльності учнів займалися сучасні вчені і методисти В. Давидов, А. Занков, І. Зязюн, Д. Ельконін, Н. Чувасова та ін., які зауважують, що для формування пізнавальної активності учнів важливим є забезпечення певних дидактичних умов.

Так, Н. Чувасова до таких відносить "забезпечення активності комунікативного процесу, педагогічну взаємодію, співробітництво і співтворчість у системі стосунків "учитель-учень", різноманітність видів діалогічного спілкування і діяльності, свободу вибору засобів і дій, психологічний комфорт, ситуацію успіху для кожного учня, що стимулює саморозкриття і самоствердження учнів у навчальному діалозі" [5, с. 6].

Пізнавальна активність сприяє розвитку творчої активності та самостійності старшокласників, тому у навчальному процесі вчителі повинні приділяти більше уваги її формуванню.

Побудова навчально-виховного процесу з урахуванням індивідуального розвитку школяра є важливою на усіх етапах навчання. Спостереження за школярами, які погано навчаються, показали, що серед них є діти у яких труднощі у навчанні зумовлені затримкою психічного розвитку [4, с. 28].

Труднощі у навчанні характеризуються пізнавальною пасивністю, підвищеною стомленістю при інтелектуальній діяльності, повільним темпом

формування знань, умінь і навичок, досить великим обсягом інформації, постійною модернізацією та ускладненням навчальних програм.

Недостатність пізнавальної активності при навчанні проявляється в тому, що учні не прагнуть ефективно використовувати час, відведений на виконання завдань, потребують спеціальної роботи, направленої на розвиток пізнавального інтересу, стимулювання пізнавальної активності, активізацію пізнавальної діяльності.

Тому серйозному переосмисленню підлягає традиційний процес навчання в цілому і навчальна діяльність школярів, зокрема. Це передбачає необхідність пошуку методів навчання, котрі сприятимуть практичній реалізації активної позиції учнів в даному процесі [1, с. 161].

Шляхів для досягнення цілей навчання багато, тому вчитель може вибирати будь-який із них, але він бути прагнути обирати найкращий. Щоб полегшити проблему вибору, методи порівнюють за їхньою ефективністю. Сучасна дидактика пропонує декілька класифікацій методів.

Розглянемо основні:

1. Класифікація методів за типом пізнавальної діяльності (І. Лернер, М. Скаткін):

- пояснювально-ілюстративні;
- репродуктивні;
- проблемне викладення;
- частково-пошукові (евристичні);
- дослідницькі.

2. Класифікація методів за ступенем активності (Е. Голанд):

- активні;
- пасивні [5, с. 35].

Активні методи навчання – це методи навчання, які спонукають учнів до активної мисленнєвої та практичної діяльності під час навчання. Вони орієнтовані на самостійне добування учнями знань, на активізацію їхньої пізнавальної діяльності, розвиток мислення, формування практичних умінь і

навичок. Особливість активних методів у тому, що в їх основі закладено спонукання до практичної та мисленнєвої діяльності [1, с. 163].

Нині в педагогічній теорії та практиці немає універсальної класифікації активних методів навчання, яку можна було б рекомендувати на всі випадки. Ми у своєму дослідженні орієнтувалися на класифікацію [2, с. 289] в залежності від спрямованості на формування системи знань і оволодіння вміннями та навичками:

- імітаційні;
- пов'язані з моделюванням діяльності;
- неімітаційні (Рис. 1).

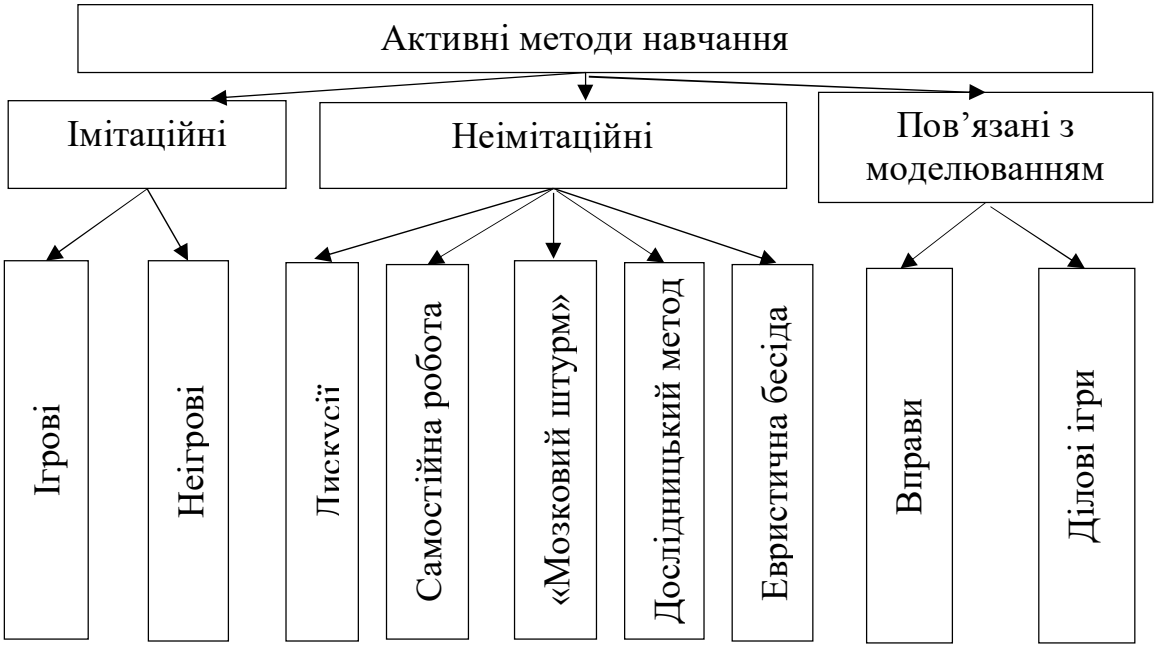


Рис. 1. Класифікація активних методів навчання

Імітаційні методи навчання:

1. Ігрові – це спеціально створені ситуації, що моделюють реальність, із яких учням пропонується знайти вихід.

2. Неігрові – це звичайні навчальні ситуації.

Методи навчання, пов'язані з моделюванням діяльності:

1. Ділова гра – це метод навчання професійної діяльності, в ході якого вирішуються навчально-виробничі задачі в ігровій формі, коли учні беруть на

себе ролі і відповідно до встановлених правил в умовах ігрової ситуації виконують професійні функції, імітуючи професійну діяльність і вступаючи в колективні взаємовідносини.

2. Вправи – це неодноразове виконання яких-небудь дій для набуття навичок і отримання більш досконалих умінь.

Неімітаційні методи навчання:

1. Дискусія (з лат. discussion – розгляд, дослідження, обговорення) – характеризується відмінністю позицій у поєднанні зі спробою пошуку позиції, яку могли б сприйняти всі учасники);

2. Евристична бесіда (з грецької heurisko – знаходжу, відкриваю) – метод навчання, при якому педагог не повідомляє учням готових знань, а вміло за допомогою поставлених запитань, які не мають прямої відповіді, змушує учнів на основі наявних знань, запасу уявлень, спостережень, особистого життєвого досвіду приходити до нових понять, висновків, правил.

3. Самостійна робота – це вид навчальної діяльності, при якому пропонується певний рівень самостійності учня в усіх її структурних компонентах (від постановки проблеми до здійснення контролю).

4. «Мозковий штурм» (банк ідей, з англ. brainstorming) – метод навчання, який стимулює інтелектуально-творчі та пізнавальні здібності учнів.

5. Дослідницький метод – метод проблемного навчання, що передбачає самостійне навчальне дослідження, яке учні виконують індивідуально чи малими групами, а потім доповідають про результати на навчальних заняттях і обґрунтовують або підтверджують вивчений теоретичний матеріал.

У результаті оглядово-аналітичного вивчення праць видатних учених і методистів із проблеми використання активних методів навчання у навчальному процесі як засобу стимулювання пізнавальної активності старшокласників, можна зробити висновки:

1. Пізнавальна активність є якісною характеристикою ефективності навчання старшокласників і спонукається пізнавальними потребами.

2. Пізнавальний інтерес – це форма пізнавальної потреби, яка формується у процесі пізнавальної діяльності старшокласників і характеризується прагненням до пізнання.

3. Пізнавальна діяльність займає особливе місце серед інших видів діяльності старшокласників і є обов'язковою систематично виконуваною діяльністю, направленою на набуття знань, умінь, навичок і розвиток всеможливих здібностей особистості.

4. Управління пізнавальною діяльністю старшокласників у навчальному процесі залежить від використання вчителем активних форм і методів навчання.

Формування пізнавальної активності було і залишається однією з основних задач навчання учнів. Актуальність цієї проблеми зумовлена наявними умовами реальної життєвої ситуації, зростаючими потребами суспільства у підготовці внутрішньо вільної особистості, яка має високий рівень пізнавальної активності і розвитку пізнавального інтересу.

Література:

1. Захарченко Н.В. Ігрове моделювання як засіб підвищення навчально-пізнавальної активності студентів / Н.В. Захарченко // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми // Зб. наук. пр. – Вип. 47 / редкол. – Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2016. – С. 161 – 164.
2. Захарченко Н.В. Місце ділових ігор серед активних методів навчання у навчально-виховному процесі //Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми // Зб. наук. пр. – Вип. 14 /Редкол.: І.А. Зязюн (голова) та ін. – Київ-Вінниця: ДОВ "Вінниця". 2007. – 288-293.
3. Мар'яненко Л.В. Особливості структурної організації пізнавальної активності учнів / Л.В. Мар'яненко // Педагогіка і психологія. − 1997. − №1. − С. 14-22.
4. Ніколенко Л. Т. Розвиток пізнавальної активності і самостійності учнів / Л. Т. Ніколенко // Початкова школа. – 2001. – № 8. – С .28.
5. Чувасова Н.О. Формування пізнавальної активності старшокласників у процесі діалогічного навчання : дис. ... канд.. пед. наук: 13.00.09 / Чувасова Наталія Олександрівна. − Кривий Ріг, 2008. − 215 с.

6. Шамова Т.И. Активизация учения школьников / Т.И. Шамова. – М. : Педагогика, 1982. – 208 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Захарченко Наталія Вікторівна

УДК 512.81

Матвійчук Тетяна

студентка магістратури
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ВИКОРИСТАННЯ ПРИНЦИПУ СИМЕТРІЇ ПІД ЧАС РОЗВ'ЯЗАННЯ БАГАТОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Анотація. *Розглянуто принцип симетрії та його застосування під час розв'язання багатовимірних рівнянь математичної фізики. Також наведено приклад використання принципу симетрії при розв'язуванні нелінійного рівняння Дірака.*

Ключові слова: *принцип симетрії, групи симетрії, групи Лі, багатовимірні рівняння математичної фізики, нелінійне рівняння Дірака.*

Annotation. *Here are considered the principle of symmetry and its application in solving multi-dimensional equation of mathematical physics. There are given some examples of using the symmetry principle when solving a nonlinear Dirac equation.*

Keywords: *the principle of symmetry, the groups of symmetry, the Li groups, multi-dimensional equation of mathematical physics*, *the nonlinear Dirac equation.*

У наш час не існує конструктивних методів розв'язання нелінійних багатовимірних диференціальних рівнянь із частинними похідними (ДРЧП), тому важливим завданням є виділення спеціальних класів багатовимірних нелінійних ДРЧП, що володіють значними симетричними властивостями, для яких в явному вигляді можна побудувати багатопараметричні сімейства частинних розв'язків і провести детальні якісні дослідження цих рівнянь, а також використовувати частинні розв'язки для побудови ефективних наближених алгоритмів ДРЧП.

В сучасних дослідженнях з математичної та теоретичної фізики найбільшу роль відіграють принципи симетрії. Це насамперед пов'язано з тим, що основні фізичні закони: рівняння руху, різні моделі реальних явищ володіють явною або прихованою геометричною чи негеометричною, локальною чи нелокальною симетріями [1]. Побудова математичного апарату здатного виявити різноманітні види симетрій - одна з важливих задач математичної фізики. Не менш важливим є завдання по заданій групі або алгебрі і їх представлення побудувати математичні моделі, що володіють заданою симетрією.

Для адекватного математичного опису фізичних явищ природно, як нам представляється, поставити ідеї і принципи симетрії в основу науки про побудову математичних моделей [2]. Принцип симетрії в такій науці повинен грати роль правила відбору, що виділяє з безлічі допустимих математичних моделей (рівнянь) тільки такі, які мали б відповідні симетричні властивості. Цей принцип в явному або неявному вигляді використовується при побудові сучасних фізичних теорій, але, на жаль, мало використовується в класичній математичній фізиці.

У деяких випадках вимога інваріантності рівнянь руху щодо цієї чи іншої групи призводить до того, що серед безлічі математично допустимих рівнянь заданими властивостями володіють тільки одне або кілька рівнянь. Так, серед безлічі лінійних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку для двох вектор-функцій $\vec{E}(t,x) = \{E1,E1,E3\}$, $\vec{H}(t,x) = \{H1,H2,H3\}$ існує єдина система ДРЧП, інваріантна відносно групи Пуанкаре $P(1,3)$. Цією системою є рівняння Максвелла для електромагнітного поля у вакуумі [3]. Аналогічною властивістю володіє і система рівнянь Дірака. Єдиною (з точністю до перетворень еквівалентності) лінійною системою чотирьох ДРЧП першого порядку, інваріантної відносно групи $P(1,3)$, є система Дірака. Зазначеними властивостями володіють не тільки лінійні рівняння руху, а й нелінійні ДРЧП. Прикладом нелінійного рівняння, що володіє широкою групою симетрії, є

добре відома система рівнянь Ейлера-Нав'є-Стокса. Потрібно відзначити, що деякі нелінійні ДРЧП володіють такими широкими групами симетрії, якими не володіє жодне лінійне ДРЧП. Прикладами таких скалярних рівнянь є багатовимірне рівняння Монжа-Ампера і ейкональне рівняння [4].

З чисто математичної точки зору важливо знати максимальні (в деякому сенсі) групи симетрії ДРЧП. Особливо цінну інформацію дає знання нелінійних перетворень незалежних і залежних змінних, відносно яких інваріантне те чи інше ДРЧП. Оскільки це дає можливість по заданому частинному (іноді тривіальному) розв'язку побудувати (генерувати) загальний розв'язок нелінійних ДРЧП.

Розглянемо нелінійне рівняння Дірака.

$$\{\gamma_\mu \rho^\mu - \lambda(\bar{\Psi}\Psi)^k\}\Psi = 0, \quad \mu = \overline{0,3} \tag{1}$$

де γ_μ – матриця Дірака, λ, k – довільні сталі, $\Psi = \Psi(x)$ – чотирикомпонентний спінор, $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\bar{\Psi} = \bar{\Psi}(x) = \Psi^\dagger \gamma_0$ – спряжений за Діраком спінор. Рівняння (1) інваріантне відносно конформної групи $C(1,3) \supset P(1,3)$ лише в тому випадку, коли $k = 1/3$.

$$\Psi = A(\tilde{\omega}_1)\varphi(\tilde{\omega}_2), \tag{2}$$

де $A(\tilde{\omega}_1)$ – функція, залежить від матриці $\tilde{\omega}_1$, матричні елементи якої залежать від x. Матриця $\tilde{\omega}_1$ вибирається так, щоб вона була інваріантною відносно підгрупи конформної групи, наприклад відносно групи Лоренца. Вимога лоренц-інваріантності може бути записана у вигляді

$$[\tilde{\omega}_1, J_{\mu\nu}] = 0, \; J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}, \tag{3}$$

$$M_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu, \quad S_{\mu\nu} = \frac{i}{\mu}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu). \tag{4}$$

$\varphi(\tilde{\omega}_2)$ – чотирикомпонентний спінор, $(\tilde{\omega}_2)$ – скалярна інваріантна змінна, для якої виконується $[\tilde{\omega}_2, M_{\mu\nu}] = 0$. (5)

Формулі (2) можна дати просту фізичну інтерпретацію: розв'язок рівняння (1) являє собою хвилю з "амплітудою " $A(\tilde{\omega}_1)$ і фазою $\varphi(\tilde{\omega}_2)$. Підставимо (2) в (1), отримаємо рівняння для $A(\tilde{\omega}_1)$ і $\varphi(\tilde{\omega}_2)$. При деякому спеціальному вигляді амплітуди $A(\tilde{\omega}_1)$ для $\varphi(\tilde{\omega}_2)$ отримаємо систему звичайних ДР відносно змінної

$\tilde{\omega}_2$. Можна, звичайно, задати явний вигляд фази $\varphi(\tilde{\omega}_2)$, а амплітуду шукати у вигляді $A(\tilde{\omega}_1) = \gamma_\mu x^\mu f(\tilde{\omega}_3)$, (6)

де $f(\tilde{\omega}_3)-$ довільна функція скалярного інтервалу $\tilde{\omega}_3$. Для знаходження конформно-інваріантних розв'язків рівняння (1) вибираємо амплітуду виду

$$A(\tilde{\omega}_1) = \frac{\tilde{\omega}_1}{\tilde{\omega}_1^{\,4}}, \quad \tilde{\omega}_1 = \gamma_\mu x^\mu, \quad \tilde{\omega}_1^{\,4} = (x_\mu x^\mu)^2. \tag{7}$$

В якості скалярного інваріанта $\tilde{\omega}_2$ виберемо інваріант конформних перетворень

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{\beta_\mu x^\mu}{x_\nu x^\nu} = \omega, \quad x_\nu x^\nu \neq 0. \tag{8}$$

Формула приймає вигляд $\Psi(x) = \frac{\gamma_\mu x^\mu}{(x_\nu x^\nu)^2}\varphi(\omega)$ (9)

Підстановка (9) в (1) приводить до системи звичайних ДР для $\varphi(\omega)$

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = i\frac{\lambda}{\beta_\nu \beta^\nu}(\bar{\varphi}\varphi)^{\frac{1}{2}}(\gamma_\alpha \beta^\alpha)\varphi. \tag{10}$$

$$\varphi(\omega) = \exp\{i\lambda k(\gamma_\alpha \beta^\alpha)\omega\}\chi\,, \quad k = 1/3, \tag{11}$$

де χ – незмінний спінор.

Таким чином, отримали чотирипараметричне сімейство загальних розв'язків рівняння (1) ($k = 1/3$) у формі

$$\Psi(x) = \frac{\gamma_\alpha x^\alpha}{(x_\nu x^\nu)^2}\exp\{i\lambda k(\gamma_\alpha \beta^\alpha)\omega\}\chi\,, \ \beta_\nu \beta^\alpha > 0. \tag{12}$$

Аналогічно можна побудувати розв'язок систем рівнянь другого порядку для спінорних, тензорних і векторних полів:

$$\left(\lambda_0 \gamma_\mu \pi^\mu + \lambda \pi_\alpha \pi^\alpha\right)\Psi + \lambda_1 F(\bar{\Psi}\Psi)\Psi = 0,$$

$$\pi_\mu = p_\mu + \lambda_2 \gamma_\mu + \lambda_3 p_\nu F_\mu^\nu + \lambda_4 A_\mu + \lambda_5\left(\bar{\Psi}_{\gamma_\mu}\Psi\right);$$

$$\pi_\mu \pi^\mu \Psi = m^2\Psi; \qquad \left(p_\mu - \lambda_6\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\right)\left(p^\mu - \lambda_6\frac{\partial F^{\mu\sigma}}{\partial x^\sigma}\right) = 0;$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial t} + (\lambda_{17}E_k + \lambda_{18}H_k)\frac{\partial(\lambda_{19}E_i + \lambda_{20}H_i)}{\partial x_k} = 0,$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} + (\lambda_{17}E_k + \lambda_{18}H_k)\frac{\partial(\lambda_{19}E_i + \lambda_{20}H_i)}{\partial x_k} = 0,$$

$$\mathrm{div}\, E = \mathrm{div} H = 0; \qquad \tilde{p}_\alpha \tilde{p}^\alpha A_\mu - \tilde{p}_\mu(\tilde{p}_\nu A^\nu) = 0,$$

$$\tilde{p}_\alpha = p_\alpha + \lambda_7 \gamma_\alpha + \lambda_8 A_\alpha + \lambda_9 p_\alpha A_\nu A^\nu + \lambda_{10} p_\alpha p_\mu (A^\mu A_\nu A^\nu);$$

$$\tilde{\partial}_\alpha \tilde{\partial}^\alpha u_\mu = 0, \quad \alpha, \mu, \sigma, \nu = \overline{0,3},$$

$$\tilde{\partial}_\alpha = \partial_\alpha + \lambda_{11} u_\alpha + \lambda_{12} \partial_\alpha F(u_v u^v), \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}; \qquad \tilde{\partial}_0 u_\alpha + \lambda_{13} \tilde{\partial}_b \tilde{\partial}_b u_\alpha = 0,$$

$$\tilde{\partial}_0 = \partial_0 + \lambda_{14} u_c u_c, \quad \tilde{\partial}_b = \partial_b + \lambda_{15} u_b + \lambda_{16} u_c \frac{\partial u_b}{\partial x_c},$$

де $F_{\mu v}$, A_μ, E_i, H_i – тензор, вектор-потенціал електромагнітного поля, u_μ – вектор швидкості рідини, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{20}$ – довільні параметри [5].

Таким чином, класи нелінійних ДРЧП, що володіють багатими симетричними властивостями, представляються нам важливими і цікавими як в теоретичному, так і прикладному плані.

Література:

1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений /Л.В. Овсянников. – М.:Наука, 1978ю – 400 с.
2. Фущич В.И. Симметрия в задачах математической физики / В.И. Фущич // Теоретико–алгебраические исследования в математической физике. – Киев: Ин- математики, 1981. – С. 6–28.
3. Фущич В.И. Симметрия уравнений Максвелла / В.И. Фущич, А.Г. Никитин – Киев: Наук. думка, 1983. – 200 с.
4. Фущич В.И. Симметрия и точные решения многомерного уравнения Монжа–Ампера / В.И. Фущич, Н.И. Серов // Докл. АН СССР. –1983. – 273. № 4. – С. 24–64.
5. Фущич В.И. О симметрии и точных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики / В.И. Фущич // Теоретико – алгебраические методы в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики, 1983. С. 4–23.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Тимошенко Олександр Захарович

УДК: 514

Мельник Анастасія

студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ЗАСТОСУВАННЯ ІНВЕРСІЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНІЄЇ З ЗАДАЧ АПОЛЛОНІЯ

Анотація. *У даній статті розглянуто розв'язання однієї з задач Аполлонія методом інверсії, а саме побудова кола, яке проходить через дану точку і дотикається до двох заданих кіл.*

Ключові слова: *задачі Аполлонія, інверсія, коло, коло інверсії, образ, дотичні.*

Annotation. *In this article we consider the solution of one of Apollonius problems with the involution mathode, namely the construction of a circle that passes through this point and touches two given circles.*

Keywords*: Apollonius problems, inversion, circle, inversion circle, image, tangent.*

У загубленому творі «Про дотики» Аполлоній продемонстрував розв'язання задачі про побудову кола, яке дотикається до трьох заданих кіл (задача Аполлонія).

Уперше розв'язання задачі було знайдено шотландським математиком Д. Непером. Одним із способів розв'язання цієї задачі є метод інверсії, яким розв'язав її швейцарський математик Я. Штейнер.

Нагадаємо. Інверсією відносно даного кола K з центром у точці O і радіусом R називається таке перетворення площини, при якому кожна її точка V, відмінна від точки O, переходить у таку точку O', що обидві точки M і M' лежать на промені OM, а відстані OM і OM' пов'язані співвідношенням: $OM \cdot OM' = R^2$ [2, с. 70].

Якщо розглядати коло з нескінченно малим радіусом як точку, то дістанемо дев'ять особливих випадків задачі, а десятим буде сама задача Аполлонія.

1. Побудувати коло, яке проходить через три дані точки (описати коло навколо трикутника), коли три дані кола вироджуються в прямі.

2. Побудувати коло, яке дотикається трьох даних прямих (вписати коло в даний трикутник), коли три кола вироджуються в прямі.

3. Побудувати коло, яке проходить через дві дані точки і дотикається до прямої.

4. Побудувати коло, яке дотикається до двох даних прямих і проходить через дану точку.

5. Побудувати коло, яке проходить через дві дані точки і дотикається до даного кола.

6. Побудувати коло, яке проходить через дану точку і дотикається до даної прямої і до даного кола.

7. Побудувати коло, яке проходить через дану точку і дотикається до двох даних кіл.

8. Побудувати коло, яке дотикається до двох даних прямих і даного кола.

9. Побудувати коло, яке дотикається до двох даних кіл і даної прямої.

10. Подувати коло, яке дотикається до двох даних кіл.

Розглянемо розв'язання однієї з них, за допомогою інверсії.

Задача. Побудувати коло, яке проходить через дану точку і дотикається до двох даних кіл [1, с. 372].

Розв'язання. *Аналіз.* Нехай коло h побудоване (воно проходить через задану точку A і дотикається до заданих кіл d і c) (рис. 1). Побудуємо коло з довільним радіусом і центром у точці A. Розглянемо інверсію відносного цього кола. Так як задані кола d і c не проходять через центр інверсії, то їх образи d' і c' відповідно, також не проходять через центр інверсії, а образом кола h, яке проходить через центр інверсії буде пряма n, яка не проходить через центр інверсії. Тоді, так як за умовою коло h дотикається до кіл c і d, то і пряма n повинна дотикатись до образів d' і c'. Отже, задача зводиться до побудови прямої n, яка при інверсії відносно кола, з центром у точці A, перетворюється в коло h.

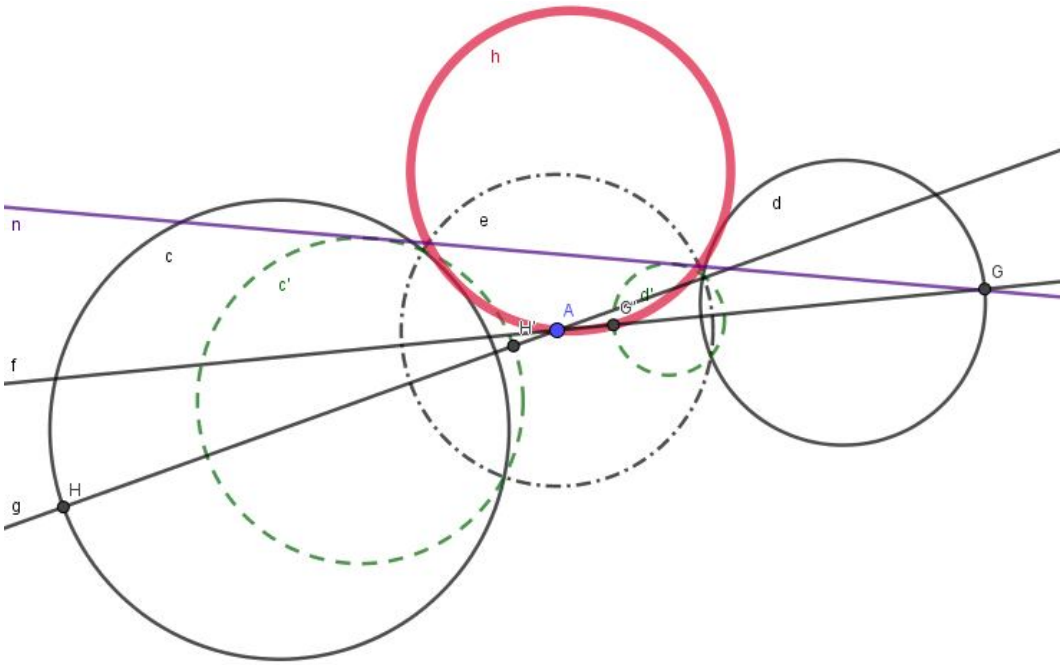


Рис. 1

Побудова. Нехай дано два кола c і d, і точка A. Згідно аналізу розпишемо покроково дану побудову.

Будуємо:

1. Коло інверсії e, з довільним радіусом і центром у точці A (рис. 2).
2. Образи кіл d і c при інверсії відносно кола e (d' і c') (рис. 2).

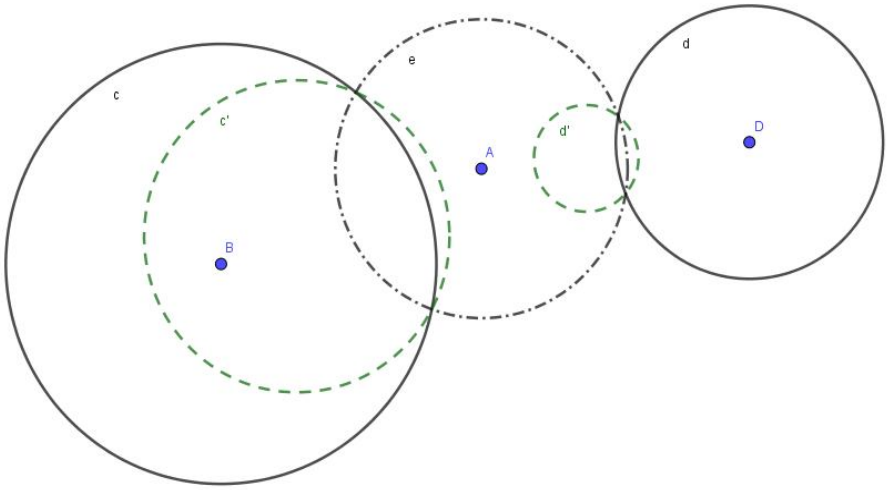


Рис. 2

3. Спільні дотичні до кіл d' і c' (n, r) (рис. 3, рис. 4)

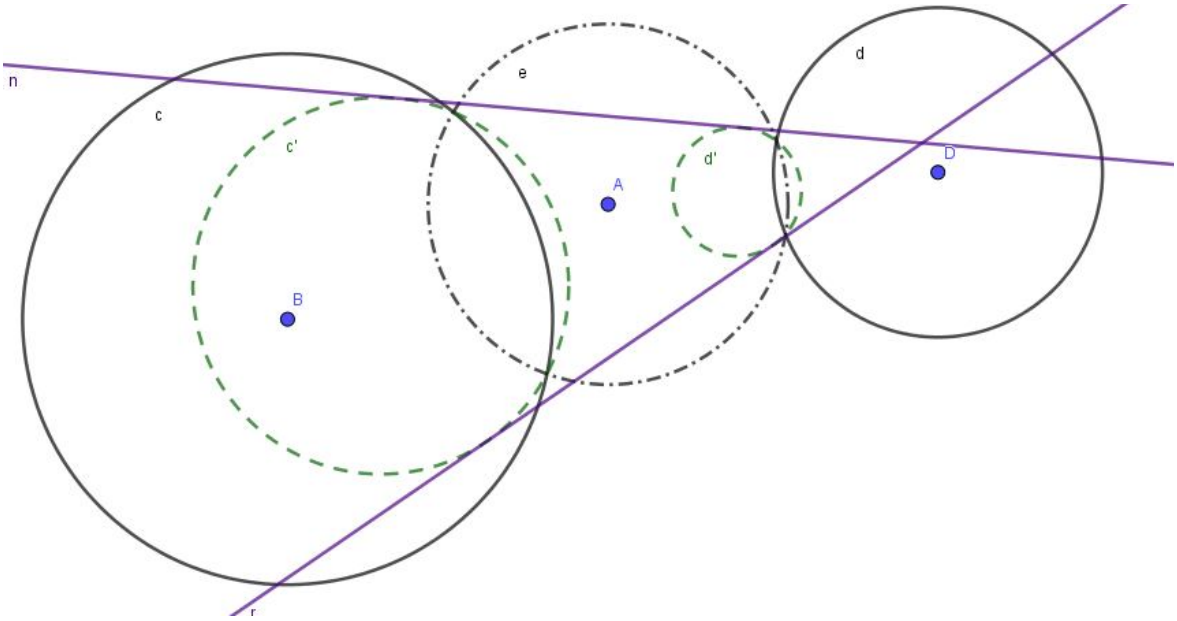


Рис. 3

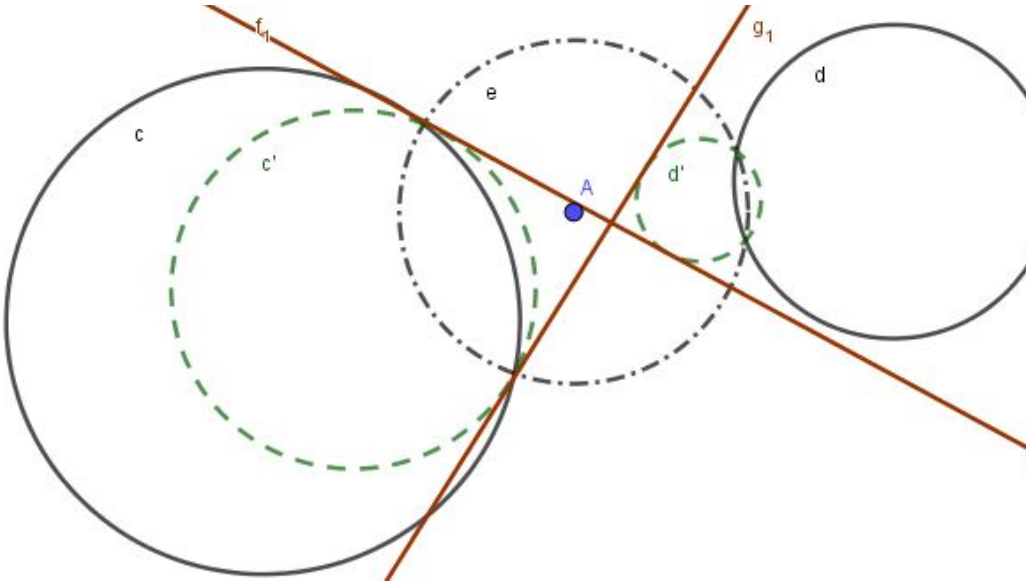


Рис. 4

4. Інверсія прямих n і r відносно кола a (кола h і k) (рис. 5, рис. 6)

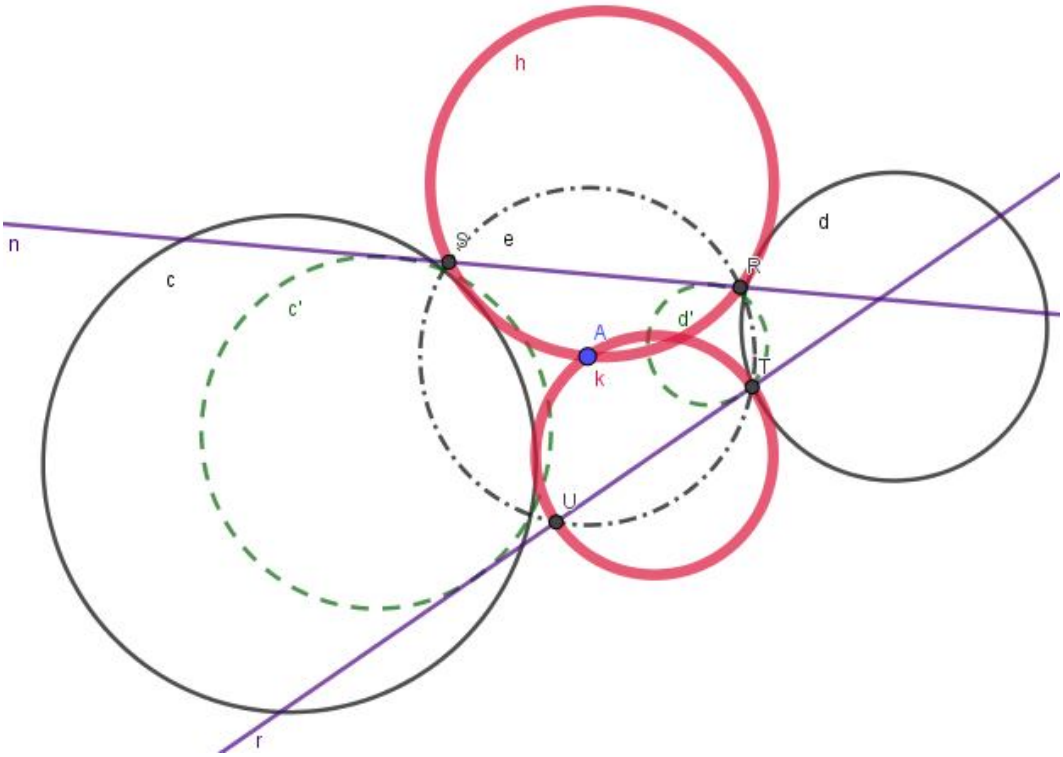


Рис. 5

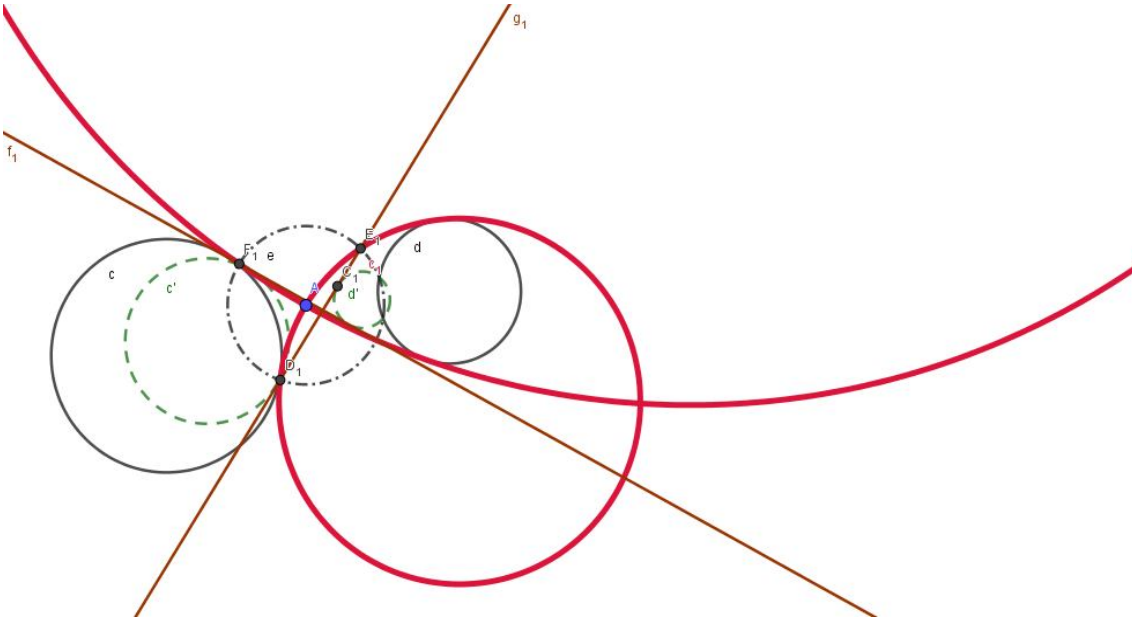


Рис. 6

Отже, при такому розташуванні заданих кіл, задача має 4 розв’язки, 4 різні кола (рис. 7)

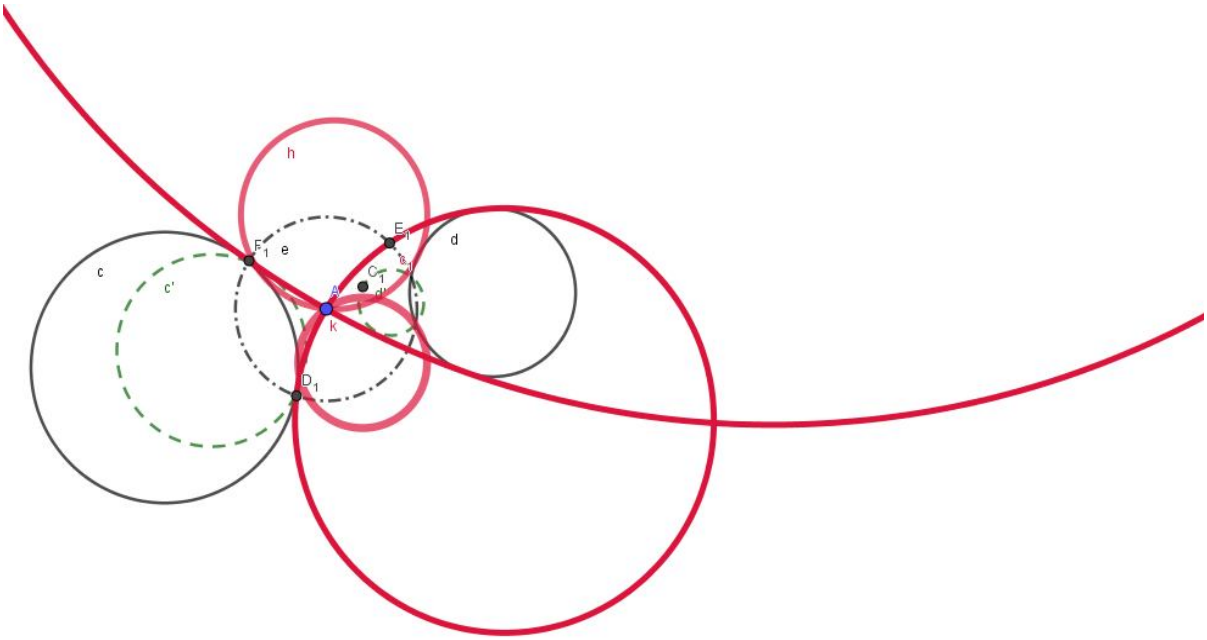


Рис. 7

Доведення. Оскільки дотичні до образів d' і c' заданих кіл d і c не проходять через центр інверсії A, то при інверсії вони перетворяться на кола k і h, які проходять через центр інверсії, тобто на кола, через три точки S, R, A і U, T, A відповідно.

Дослідження. З умови задачі видно, що якщо точка A лежить всередині одного з заданих кіл, які не дотикаються, то задача розв'язку не матиме.

Якщо точка A лежить всередині одного з заданих кіл, які дотикаються, то задача матиме 1 розв'язок (рис. 8)

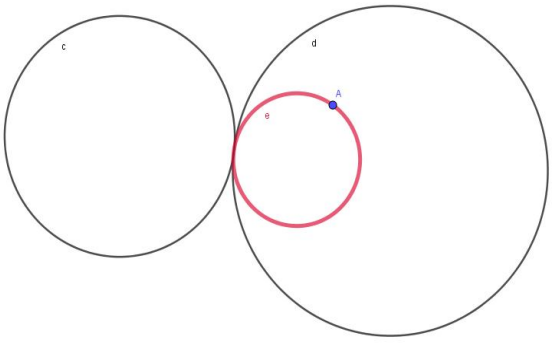


Рис. 8

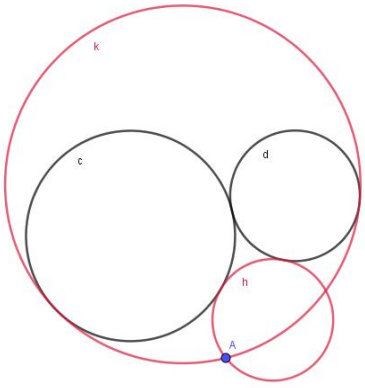


Рис. 9

Якщо кола перетинаються і точка A лежить ззовні відносно обох кіл, то задача має 2 розв'язки, 2 кола (рис. 9)

Література:

1. Боровик В.Н. Геометричні перетворення площини / В.Н. Боровик, І.В. Зайченко, М.М. Мурач, В.П. Яковець, 2003. – ("ВТД "Університецька книга"). – 364-379с.
2. Жижилкин И.Д. Инверсия / И.Д. Жижилкин. – Москва: МЦНМО, 2009. – 69-71 с.
3. Bruen A, Fisher JC, Wilker JB (1983). "Apollonius by Inversion". Mathematics Magazine, 56 (2) 97, 103с.
4. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии / В.В. Прасолов. – Москва: МЦНМО, 2001. – 23 с.
5. Аргунов Б.И. Геометрические построения на плоскости / Б.И. Аргунов, М.Б. Балк. - М.: Учпедгиз, 1957. - 268 с.
6. Понарін Я.П. Елементарна геометрія: У 2 т. - Т.1: Планіметрія, перетворення площини / Я.П. Понарін. М.: МЦНМО, 2008. - 312 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Тютюн Любов Андріївна

УДК 330.834:330.544.2

Могульська Тетяна

студентка Вінницького навчально-наукового інституту економіки ТНЕУ

ОСОБЛИВОСТІ ПОБУДОВИ КЕЙНСІАНСЬКОЇ ФУНКЦІЇ СПОЖИВАННЯ

Анотація. *В статті досліджується кейнсіанська функція споживання. Було побудовано економетричну модель залежності витрат на споживання від доходів домогосподарств за статистичними даними по Україні в період з 2005-2016 рр. з використанням ET EXCEL .*

Ключові слова. *Кейнсіанська функція споживання, економетрична модель, гранична схильність до споживання, адекватність, еластичність.*

Summary. *The article studies Keyns function of consumption which enabled to build an econometric model of connection of expenses with the household income. The model was build incorporating statistical data about household expenses in Ukraine from 2005 to 2016 using electronic tables.*

Key words: *keyns function of consumption, econometric model, marginal tendency to consumption, adequacy, elasticity.*

У сучасних умовах соціально-економічного розвитку України існує необхідність формування нового стратегічного підходу розвитку на коротко, середньо, та довготривалу перспективу. Важливі аспекти в поетапній реалізації такої стратегії належать кейнсіанству, неокейнсіанству та посткейнсіанству, здобутки яких доцільно впровадити в практику економічної політики України.

Англійський вчений Дж. М. Кейнс – один з найвидатніших економістів XX ст. рівня А. Сміта, Д. Рікардо, Дж. С. Мілля і А. Маршалла справив величезний вплив на світову економічну науку, хоча споріднені йому ідеї висловлювались і до нього в 20-30-х рр. XX ст. Більше того, чистину цих ідей використав і сам Кейнс. Справа в тому, що це був тільки економічний матеріал, а сам Кейнс сформував нову систему поглядів, заснувавши потужний напрям економічної теорії.

Кейнс стверджував, що існує гранична схильність до споживання, яка коливається у межах від нуля до одиниці (0<MPC<1). Це означає, що домогосподарства збільшують споживання, коли їхні доходи зростають, але споживання зростає повільнішим темпом порівняно з темпом зростання використовуваного доходу. Цей постулат Кейнс виводить із людської психології: “Суть основного психологічного закону, в наявності якого можна не сумніватися, полягає в тому, що зі збільшенням свого доходу люди зазвичай у середньому збільшують своє споживання, але повільніше, ніж зростає їхній дохід”. Цей закон Кейнс сприймає як аксіому, що не потребує жодних доказів.

Кейнсіанська функція споживання – це модель споживання, згідно з якою обсяг споживання головною мірою залежить від поточного використовуваного доходу, а середня схильність до споживання зі зростанням доходу знижується. Кейнсіанську функцію споживання, враховуючи її постулати, часто записують так:

$$C = C' + cY,$$

де C – споживання;

C' – автономне споживання, яке не залежить від величини поточного доходу;

c – гранична схильність до споживання;

Y – використовуваний дохід.

Побудуємо кейнсіанську функцію споживання для домогосподарств України з використанням ET EXCEL [3] (табл.1).

Знайдемо параметри моделі за формулами:

$$a_1 = \frac{\sum(Y_i - \overline{Y})(X_i - \overline{X})}{\sum(X_i - \overline{X})^2},\ a_0 = \overline{Y} - a_1\overline{X}.$$

$$a_1 = \frac{22184327}{24184340} = 0{,}91730\ ,\ a_0 = 3200{,}258 - 0.91730 \times 3569{,}75$$

Таблиця 1.

Середні доходи та споживання за місяць в розрахунку на одне домогосподарство [2]

Рік	Дохід, (грн.) X	Споживання (грн.) Y	$Y - \overline{Y}$	$(Y-\overline{Y})2$	$X - \overline{X}$	$(X-\overline{X})2$	$(Y-\overline{Y})(X-\overline{X})$
2005	1321,4	1229,4	-1970,86	3884283	-2248,35	5055078	4431179
2006	1611,7	1442,8	-1757,46	3088660	-1958,05	3833960	3441191
2007	2012,1	1722	-1478,26	2185248	-1557,65	2426274	2302609
2008	2892,8	2590,4	-609,858	371927,2	-676,95	458261,3	412843,6
2009	3015,3	2754,1	-446,158	199057,3	-554,45	307414,8	247372,5
2010	3481	3072,7	-127,558	16271,13	-88,75	7876,563	11320,8
2011	3853,9	3458	257,7417	66430,77	284,15	80741,22	73237,29
2012	4144,5	3592,1	391,8417	153539,9	574,75	330337,6	225211
2013	4470,5	3820,3	620,0417	384451,7	900,75	811350,6	558502,5
2014	4563,3	4048,9	848,6417	720192,7	993,55	987141,6	843167,9
2015	5231,7	4952	1751,742	3068599	1661,95	2762078	2911307
2016	6238,8	5720,4	2520,142	6351114	2669,05	7123828	6726384
Сума	42837	38403,1		20489774		24184340	22184327
Середнє	3569,75	3200,258					

Таким чином, економетрична модель має вигляд:

$$\hat{Y} = 0{,}9173\,x - 74{,}278$$

Обчислимо коефіцієнт кореляції за формулою:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum(X_i - \overline{X})^2 \times \frac{1}{n}\sum(Y_i - \overline{Y})^2}} = \frac{\frac{1}{12} \times 22184327}{\sqrt{\frac{1}{12} \times 24184340 \times \frac{1}{12} \times 20489774}} = 0{,}996576$$

Коефіцієнт кореляції показує, що існує прямий (r>0) сильний зв'язок фактора X з показником Y.

$R^2 = r^2 = 0{,}9932$, отже, модель адекватна статистичним даним.

Графічно кейнсіанську функцію споживання зображують у вигляді прямої лінії [1].

З рис. 1 можна виписати рівняння кейнсіанської функції споживання:

$y = 0{,}1973\,x - 74{,}278$.

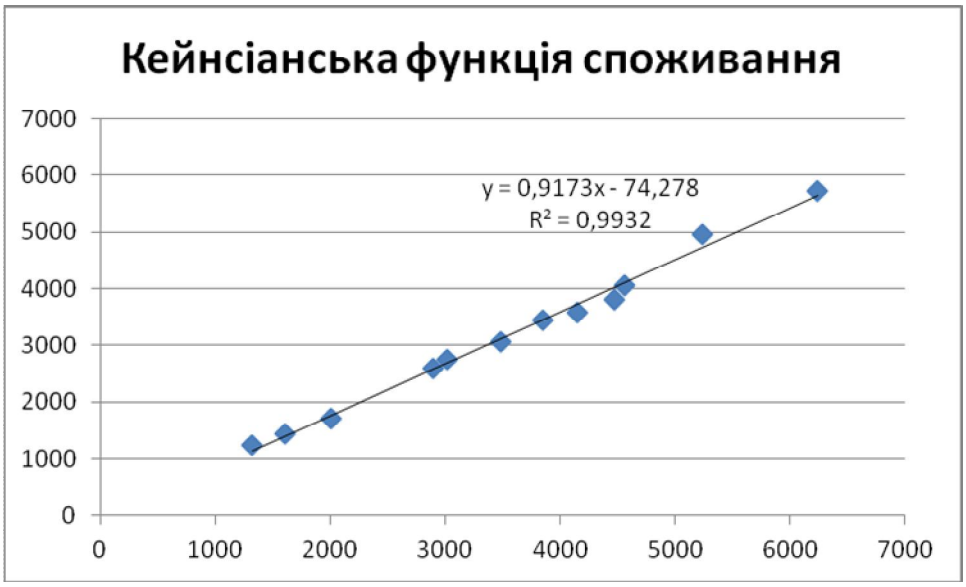


Рис.1. Кейнсіанська функція споживання

Висновки: Економетрична модель $\bar{Y} = 0.1973\,x - 74.278$, що кількісно описує зв'язок витрат на споживання і доходу є адекватною і може бути використана для прогнозування.

Література:

1. Вільчинська О.М. Практикум з дисципліни „Економетрика": Навчальний посібник. – Вінниця: Едельвейс, 2017 – 104 с.

2. Електронний ресурс [режим доступу] http://trackls.narod.ru/books/bk3/pan23.html.

3. Демографічна та соціальна статистика / Доходи та умови життя [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.ukrstat.gov.ua/.

Науковий керівник: канд. екон. наук, доцент Вільчинська Олена Миколаївна

УДК 514.112

Мошкатюк Леся

студентка магістратури
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ОКРЕМІ СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ І КУТАМИ ДЕЛЬТОЇДА. ПЛОЩА ДЕЛЬТОЇДА

Анотація. *У даній статті наведені основні співвідношення у дельтоїді, розглянуто доведення основних властивостей та теорем, що з ним пов'язані.*

Ключові слова: *дельтоїд, площа, неопуклий дельтоїд, коло вписане в дельтоїд.*

Summary. *In this article the main relations in the deltoid are given, the proof of the main properties and theorems connected with it is considered.*

Keywords: *deltoid, area, unconquered deltoid, circle inscribed in the deltoid.*

Інтерес до вивчення чотирикутника виник у людства з давніх часів і не згасає досі. Це пов'язано не тільки з його красою, але і з великою практичною цінністю. Чотирикутник є одним із основних фігур планіметрії, проте деякі його види та властивості недостатньо вивчаються, за браком часу, в курсі базової та старшої школи. Здійснивши аналіз навчально-методичної літератури з теми дослідження, ми побачили, що існує незначна кількість робіт присвячених даній тематиці, але використана в них термінологія здебільшого напівзабута й зустрічається хіба що в енциклопедіях. У середній школі вивчаються лише окремі види чотирикутників – паралелограми і трапеції. Тому праць, у яких розглядаються загальні властивості чотирикутників, зокрема дельтоїд та різні класи цих фігур, – одиниці. І це доволі дивно, адже з багатьох точок зору дельтоїд є надзвичайно цікавою фігурою.

По-перше, завдяки привабливому вигляду форма дельтоїда часто втілюється в найрізноманітніших матеріальних деталях – архітектурі, орнаментах, дизайні тощо. По-друге, дельтоїд є найближчим узагальненням ромба, з огляду на це його ще називають ромбоїдом.

По-третє, всього лише одним прямолінійним перерізом уздовж діагоналі з подальшим поворотом однієї з утворених частин дельтоїд перетворюється на рівновеликий паралелограм – іншу ключову геометричну фігуру. По-четверте, на відміну від паралелограма і ромба, дельтоїд має набагато більший набір особливий точок, зокрема два центри кіл, що дотикаються до всіх прямих, які містять його сторони. По-п'яте, дельтоїд може бути як опуклим, так і неопуклим. І найголовніше, дельтоїд необхідно ефективно застосовувати як елементарну ланку для побудови рівносторонніх многокутників, зокрема зірчастих, які є безпосереднім узагальненням правильних многокутників.

Із побудови дельтоїда, випливає, що обидва рівнобедрених трикутники ABD і CBD або один трикутник ABC, якими визначається дельтоїд $ABCD$, задається трьома елементами. Наприклад: сторонами a, b і діагоналлю l; сторонами a, b і діагоналлю d; стороною b, діагоналлю d і кутом γ тощо.

Будь-який елемент дельтоїда, а також і його площа будуть виражатися через будь-які три з визначальних його елементів. Щоправда, потрібно враховувати, що з трьох кутів α, β, γ незалежними є лише два, оскільки сума $\alpha+2\beta+\gamma=360^0$. Отже, серед будь-яких трьох визначальних елементів a, b, d, l, α, β, γ дельтоїда принаймні один має бути лінійним (некутовим).

Нехай заданими будуть величини a, b і l. Визначимо d_1, d_2, α, β, γ, S (рис. 1).

Нам відомо, що $BO = OD = \frac{1}{2}$, $\angle BAO = \frac{\alpha}{2}$, $\angle BCO = \frac{\gamma}{2}$. Тоді з прямокутних трикутників AOB та BOC одержимо:

$$d_1 = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}},\ d_2 = \sqrt{b^2 - \frac{l^2}{4}}. \qquad (1)$$

А також:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2a},\ \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{l}{2b}. \qquad (2)$$

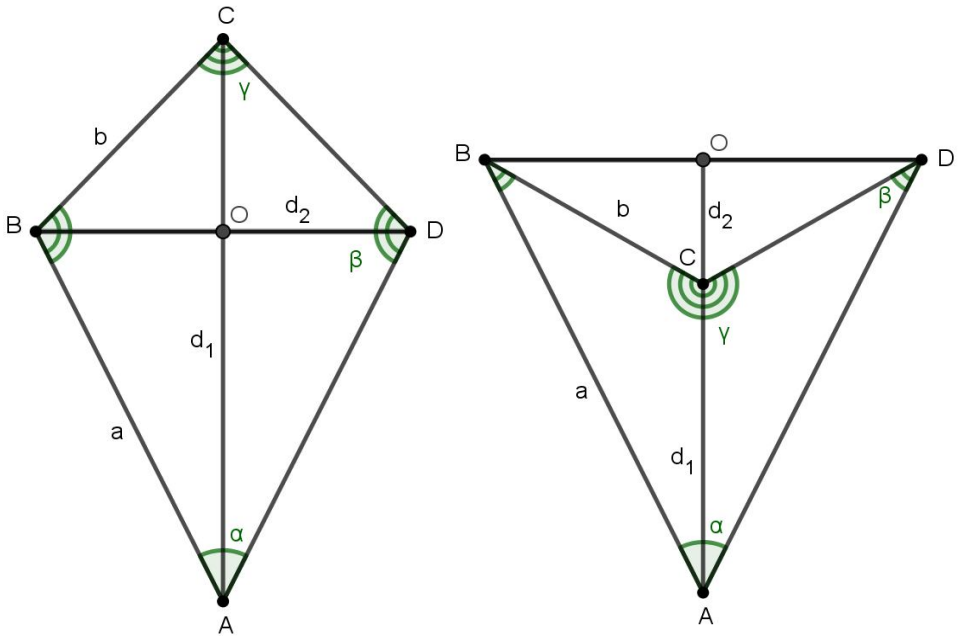


Рис. 1

З формул (1) для опуклого дельтоїда маємо:

$$d = d_1 + d_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4a^2 - l^2} + \sqrt{4b^2 - l^2}\right), \tag{3}$$

а для неопуклого –

$$d = d_1 - d_2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4a^2 - l^2} - \sqrt{4b^2 - l^2}\right). \tag{3*}$$

З формул (2) знаходимо: $\alpha = 2\arcsin\frac{l}{2a}$; $\gamma = 2\arcsin\frac{l}{2b}$ – для опуклого дельтоїда;

$\gamma = 360^0 - 2\arcsin\frac{l}{2b}$ – для неопуклого дельтоїда.

Тоді: $\beta = 180^0 - \arcsin\frac{l}{2a} - \arcsin\frac{l}{2b}$ – для опуклого дельтоїда;

$\beta = 180^0 - \left(\arcsin\frac{l}{2a} + 180^0 - \arcsin\frac{l}{2b}\right) = \arcsin\frac{l}{2b} - \arcsin\frac{l}{2a}$ – для неопуклого дельтоїда.

Теорема 1. Площа S довільного дельтоїда обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2}dl \text{ . [1]} \tag{4}$$

Доведення. Справді, $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}ld_1$, а $S_{\Delta CBD} = \frac{1}{2}ld_2$. Тоді у випадку опуклого дельтоїда: $S = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta CBD} = \frac{1}{2}l\left(d_1 + d_2\right) = \frac{1}{2}dl$.

А у випадку неопуклого дельтоїда: $S = S_{\Delta ABD} S_{\Delta CBD} = \frac{1}{2} l \left(d_1 - d_2 \right) = \frac{1}{2} dl$. Що й потрібно було довести.

Нехай заданими будуть величини a, b і d. Визначимо d_1, d_2, l і S.

З прямокутного трикутника AOB: $BO^2 = AB^2 - AO^2 = a^2 - d_1^2$, а з прямокутного трикутника BOC матимемо, що $BO^2 = BC^2 - CO^2 = b^2 - \left(\pm d \mp d_1 \right)^2$, де верхні знаки у зв'язці відповідають опуклому дельтоїду, а нижні – неопуклому. Прирівнюючи одержані вирази для BO^2, отримали рівняння: $a^2 - d_1^2 = b^2 - \left(d - d_1 \right)^2$.

Звідси після елементарних спрощень одержуємо:

$$d_1 = \frac{a^2 - b^2 + d^2}{2d}. \tag{6}$$

Що стосується виразів для d_2, то для опуклого і неопуклого дельтоїдів вони різні. В першому випадку:

$$d_2 = d - d_1 = \frac{b^2 - a^2 + d^2}{2d}, \tag{7}$$

А в другому випадку:

$$d_2 = d - d_1 = \frac{a^2 - b^2 - d^2}{2d}. \tag{7*}$$

За формулою Герона знаходимо:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{\frac{a+b+d}{2}\left(\frac{a+b+d}{2} - a \right)\left(\frac{a+b+d}{2} - b \right)\left(\frac{a+b+d}{2} - d \right)} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+d)(b+d-a)(a+d-b)(a+b-d)}.$$

З іншого боку, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BO = \frac{1}{4} dl$. Прирівнюючи обидва одержані вирази для $S_{\Delta ABC}$, одержуємо:

$$l = \frac{\sqrt{(a+b+d)(b+d-a)(a+d-b)(a+b-d)}}{d}. \tag{8}$$

А для шуканої площі S дельтоїда маємо:

$$S = 2S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+d)(b+d-a)(a+d-b)(a+b-d)}. \tag{9}$$

Формули (5) та (6) істинні як для опуклих так і для неопуклих дельтоїдів.

Нехай заданими будуть a, d і l. Визначимо b.

З ΔAOB: $AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}}$. Отже, $OC = AC \mp AO = d \mp \sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}}$, де знак «-» відповідає опуклому дельтоїду, а знак «+» – неопуклому. Тоді з ΔCOB: $b^2 = BO^2 + CO^2 = \frac{l^2}{4} + d^2 \mp 2d\sqrt{a^2 - \frac{l^2}{4}} + a^2 - \frac{l^2}{4} = a^2 + d^2 \mp \sqrt{4a^2 - l^2}$. Отже

$$b^2 = \sqrt{a^2 + d^2 \mp d\sqrt{4a^2 - l^2}}\ . \tag{10}$$

Аналогічно встановлюється формула:

$$b^2 = \sqrt{b^2 + d^2 \mp d\sqrt{4b^2 - l^2}}\ . \tag{11}$$

Застосовуючи теорему косинусів для трикутника ABC, легко встановлюються формули:

$$a = \sqrt{b^2 + d^2 - 2bd\cos\frac{\gamma}{2}}; \tag{12}$$

$$b = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos\frac{\alpha}{2}}; \tag{13}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2 - b^2 + d^2}{2ad}; \tag{14}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{b^2 - a^2 + d^2}{2bd}; \tag{15}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - d^2}{2ab}. \tag{16}$$

З теореми синусів одразу одержується формула:

$$a = b\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{17}$$

Теорема 2. Площу S дельтоїда можна обчислити за наступними формулами:

$$S = ab\sin\gamma\ , [2] \tag{18}$$

$$S = ad\sin\frac{\alpha}{2} = bd\sin\frac{\gamma}{2}, \tag{19}$$

$$S = \frac{1}{2}\left(a^2 \sin\alpha + b^2 \sin\gamma\right), \tag{20}$$

$$S = \frac{a^2 \sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{b^2 \sin\frac{\gamma}{2}\sin\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \tag{21}$$

$$S = \frac{d^2 \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}, \tag{22}$$

$$S = \frac{l^2 \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}. \text{ [3, с. 29-32]} \tag{23}$$

Всі ці формули є істинними як для опуклих, так і для неопуклих дельтоїдів.

Теорема 3. Площу S довільного опуклого дельтоїда можна обчислити за наступною формулою:

$$S = \frac{1}{2}a^2 \sin\varphi_1 + \frac{1}{2}b^2 \sin\varphi_2,$$

де a і b – нерівні сторони, φ_1 – кут між сторонами довжиною a, φ_2 – кут між сторонами довжиною b. [1]

Теорема 4. Площу S довільного опуклого дельтоїда можна обчислити за наступною формулою: $S = (a+b)r$, де r – радіус вписаного кола дельтоїда.

Доведення. Доведемо спочатку, що в будь-який дельтоїд можна вписати коло. Для цього зауважимо, що трикутники ABD і BCD рівні в

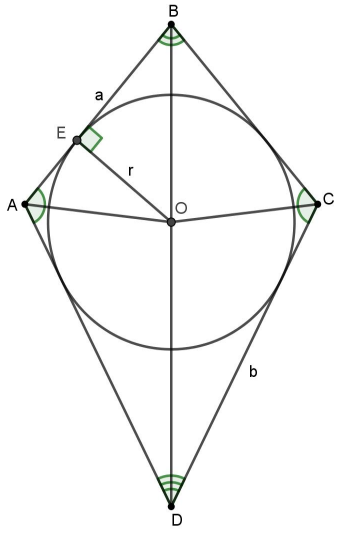


Рис. 2

силу ознаки рівності трикутників (за трьома сторонами) (рис. 1). Звідси випливає, що діагональ BD є бісектрисою кутів B і D, а бісектриси кутів A і C перетинаються в точці O, яка лежить на діагоналі BD. Точка O є центром кола вписаного в дельтоїд.

Якщо r – радіус вписаного в дельтоїд кола, тоді

$$S_{ABCD} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} + S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}br = (a+b)r\,.$$

Що й потрібно було довести. [1]

Теорема 5. У двопрямокутному дельтоїді кут $\beta = 90^0$, а й отже, й $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^0$.

Тоді з формул (18), (21)-(23) для такого дельтоїда площу можна обчислити за наступними формулами:

$$S = ab\,; \qquad (18^*)$$

$$S = a^2 tg\frac{\alpha}{2} = b^2 tg\frac{\gamma}{2}\,; \qquad (21^*)$$

$$S = \frac{1}{2}d\sin\alpha = \frac{1}{2}d\sin\gamma\,; \qquad (22^*)$$

$$S = \frac{l^2}{2\sin\alpha} = \frac{l^2}{2\sin\gamma}\,. \qquad (23^*)$$

Таким чином, застосування до розв'язування багатьох стандартних задач, досліджених у даній статті основних співвідношень у дельтоїді та розглянутих доведень основних властивостей і теорем, дозволяють одержати розв'язання не лише прості й компактні, але й більш ефективні, що є важливим для підвищення в учнів цікавості до геометрії.

Література:

1. Площади четырехугольников [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://www.resolventa.ru/spr/planimetry/sqf.htm.

2. Властивості дельтоїда. Властивості довільного чотирикутника. [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://olimpmath.blogspot.com/2015/02/blog-post_2.html.

3. Андрухів Ю. П. Геометрія дельтоїда / Ю. П. Андрухів. – Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2006. – 160 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Тютюн Любов Андріївна

УДК 65:338:331:62-5

Мулик Марина
студентка факультету
економіки та підприємництва
Вінницького національного аграрного університету

ВИКОРИСТАННЯ ПРОГРАМНОГО ДОДАТКУ MS EXCEL В МАРКЕТИНГОВИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Анотація*. В статті розглядається можливість використання табличного процесора MS Excel для обробки статистичних даних в сучасних маркетингових дослідженнях. Особливі можливості програмного додатку в обрахунку статистичних даних і різновид допоміжних таблиць.*

Ключові слова*: маркетингові дослідження, обробка статистичних даних, програмний додаток MS Excel.*

Annotation*:In the article possibility of the use of tabular processor of MSExcel is examined for processing of statistical data in modernmarketing researches. Specia l possibilities programmatic toaddition in the account of statistical data and variety o fauxiliary tables.*

Keywords*:marketing researches, processing of statistical data, programmatic addition of MS Excel.*

Програмний додаток Microsoft Excel часто використовують для створення документів без будь-яких розрахунків, наприклад, прайс-лист в магазинах, чи розклад. В додаткові легко можна створювати різні види графіків, діаграм для порівняння попиту і пропозиції , для розрахунку витрат за місяць, можна обраховувати складні математичні приклади. Excel інтенсивно використовують в бухгалтерії і навіть як базу даних. Також програмний додаток часто використовують в маркетингових дослідженнях.

Система маркетингових досліджень здійснює систематичне визначення кола даних, необхідних у зв’язку із поставленим перед фірмою маркетинговим завдання, їх збір, аналіз і звіт про результати. Директиви та керівництва Міжнародного кодексу з практики проведення маркетингових та соціальних досліджень, надають маркетинговому дослідженню статусу ключового елемента «у цілісному полі маркетингової інформації. Воно поєднує споживача,

клієнта, громадськість і маркетолога через інформацію, яка використовується для того, щоб ідентифікувати та визначити можливості та проблеми маркетингу, розробити, деталізувати й оцінити дії маркетингу, удосконалити розуміння маркетингу як процесу та засобу підвищення ефективності специфічних видів маркетингової діяльності» [1]. Згідно з кодексом «маркетингове дослідження визначає необхідну для вивчення інформацію, розробляє методи збору інформації, управляє та здійснює процес збору даних, аналізує результати й повідомляє про знахідки та їх значення» [2]. Основними складовими маркетингового дослідження є виявлення, збір, аналіз, розповсюдження та використання інформації. На стадії прогнозування ідентифікують проблеми або визначають можливості, доцільність та можливість проведення маркетингових досліджень, визначають, яка інформація необхідна для їх вивчення, розробляють план дослідження, визначають джерела, методи отримання, запису, зберігання та аналізу інформації (за рівнем складності та точності). Потім відбувається збір інформації, її аналіз, інтерпретація, формування висновків та розробка рекомендацій. І, нарешті, отримані результати, висновки та рекомендації представляють у тому вигляді, який дозволяє використовувати інформацію в прийнятті маркетингових рішень та розробці маркетингових заходів.

Сучасне визначення Американської асоціації маркетингу розширює функцію маркетингових досліджень: маркетингове дослідження – це функція, яка пов’язує споживача, постачальника та громадськість зі спеціалістом з маркетингу посередництвом інформації, що використовується для ідентифікації та визначення ринкових можливостей та завдань, розробки, уточнення та оцінки ефективності ринкових заходів, а також відслідковування ефективності маркетингу та оволодіння маркетингом як процесом.

Мета маркетингових досліджень полягає в ідентифікації як проблем, так і можливостей підприємства зайняти конкурентну позицію на конкретному ринку в певний період часу шляхом пристосування його продукції до потреб і

вимог споживачів, у зменшенні невизначеності, мірі ризику, збільшенні ймовірності успіху ринкової діяльності.

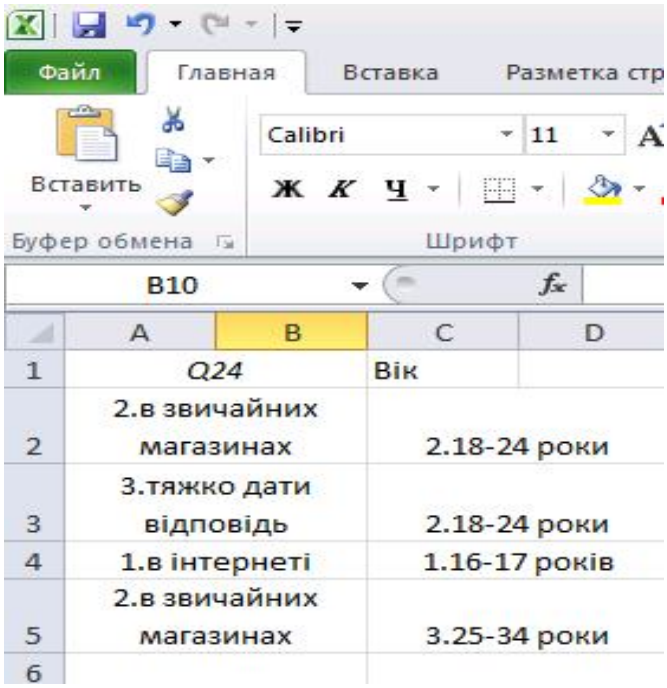
Предмет маркетингових досліджень – існуюча маркетингова проблема щодо обставин внутрішнього чи зовнішнього походження, наявних ресурсів, критеріїв успіху або невдачі, часових обмежень, рівня можливого ризику тощо.

Об'єкт маркетингових досліджень – це будь-який суб'єкт системи «підприємство-ринок-економіка» або їх якась конкретна характеристика.

Розвиток інформаційних технологій, постійне удосконалення пакетів прикладних програм, сучасне комп'ютерне обладнання дозволяє не тільки здійснювати пошук інформації, створювати бази даних, а й проводити їх швидку обробку та підготовку до аналізу, глибоку оцінку та представляти у найбільш зручному вигляді.

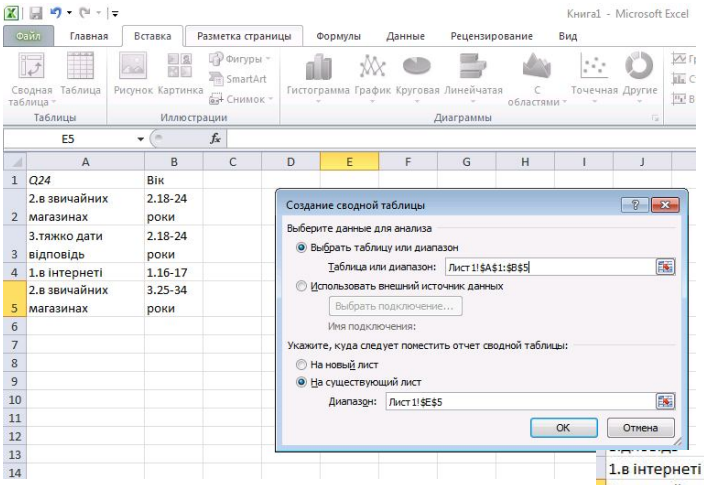
Під час обробки анкет за допомогою комп'ютерних технологій є можливість здійснити комп'ютерне статистичне моделювання за допомогою використання такого програмного засобу як табличний процесор Microsoft Excel. Програмний засіб Microsoft Excel має пакет «Аналіз даних» до якого входить набір засобів аналіз даних, призначений для вирішення складних статистичних задач. Кожна дослідницька організація використовує свою, детально розроблену технологію обробки даних. Однак можна будувати таблиці розподілу відповідей і без використання спеціального програмного забезпечення. Наприклад, майже все описане вище можна зробити з допомогою програми MS Excel. Заготовивши у першому рядку листа назви змінних, можна вводити дані безпосередньо в клітини цього листа. Після введення можна отримувати таблиці розподілу відповідей.

Як можна отримати таблицю, користуючись стандартними засобами MS Excel-2016? Візьмемо, наприклад, тест “Q24” призначений для обробки статистичних даних опитування. Питання в цьому тесті допускає лише один варіант відповіді (альтернативний). Для подання таких питань, як уже зазначалося, досить одного стовпця.

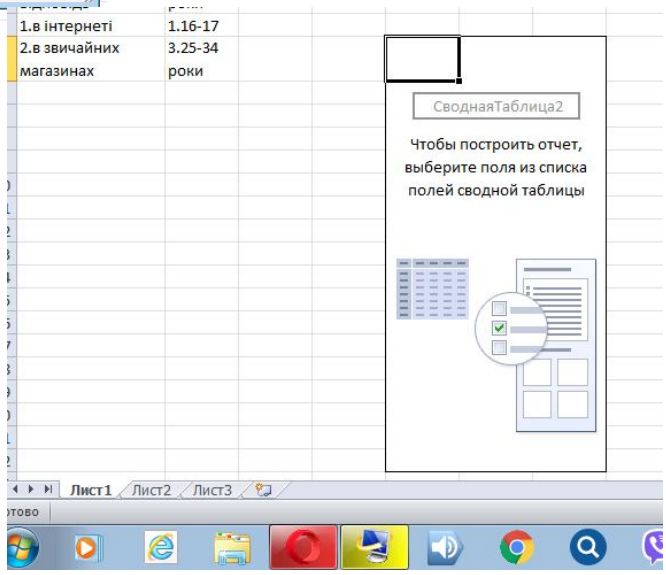


	A	B	C	D
1		*Q24*	Вік	
2		2.в звичайних магазинах	2.18-24 роки	
3		3.тяжко дати відповідь	2.18-24 роки	
4		1.в інтернеті	1.16-17 років	
5		2.в звичайних магазинах	3.25-34 роки	
6				

Ми бачимо, що перший рядок листа Excel містить назву питань. Перший стовпець відведено під відповіді на питання, що цікавить нас, а другий - під дані про вік респондента. При введенні даних стовпець, що відповідає альтернативному питанню, містив номери обраної відповіді. Для того щоб результати розрахунків в MS Excel були наочними, можна з допомогою контекстної заміни приписати кожному варіанту відповіді його значення. У програмі MS Excel у складі комплексу MS Office-2007 підменю “Вставка зведеної таблиці” розташоване на вкладці зліва “Вставка” . Перед вибором цього підменю зручно, що називається, “встати мишкою” всередину діапазону даних, тобто зробити активною будь-яку заповнену клітину таблиці. При виборі підменю виникає діалог. Програма сама розпізнає розміри

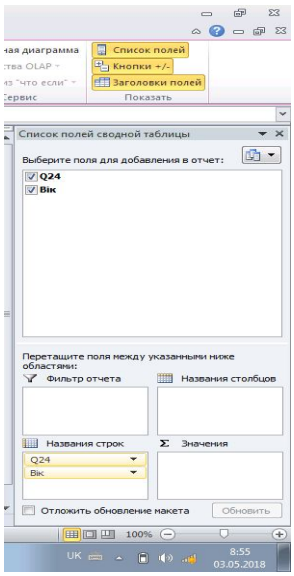


таблиці з даними. За замовчуванням зведена таблиця буде вставлена на новий аркуш. З цією пропозицією слід погодитися,натиснувши клавішу “ОК”. Після цього на новому аркуші (“Лист 2”) виникне наступна конфігурація. Тепер треба вказати, яку саме таблицю



ми хочемо побудувати. Нам треба, наприклад, щоб стовпці зведеної таблиці відповідали різним за віком респондентам, а рядки – різному ставленню до покупок через Інтернет. Відповідно з’явилася таблиця у діалоговій формі під назвою “Список полів зведеної таблиці “ треба “перетягнути” поле “Q24”

прямокутник “Назва рядків”, а поле “Вік” - прямокутник “Назви стовпців”. В прямокутник “Значення” можна “перетягнути” будь-яке з полів, наприклад “Q24”. Після цього у цьому прямокутнику з’явиться напис “Кількість по полю Q24” . В кожній клітині таблиці вказано кількість респондентів певного віку, що дали певну відповідь. Нам, необхідно розрахувати абсолютне число респондентів, і відсоток за стовпцем, тобто частку респондентів, які дали певну відповідь, у відсотках від числа всіх респондентів певного віку.



Для цього потрібно клацнути кнопкою миші на назві поля “Кількість по полю Q24” і в контекстному меню вибрати рядок “Параметри значення поля”. Відкриється наступне діалогове вікно

	Названия столбцов			
Названия строк	1.16-17 років	2.18-24 роки	3.25-34 роки	Общий итог
1.в інтернеті				
2.в звичайних магазинах				
3.тяжко дати відповідь				
Общий итог				

За замовчуванням у діалоговому вікні відкриється вкладка “Операція”. Потрібно перейти на вкладку “Додаткові обчислення” і вибрати варіант “Частка від суми по стовпці”. Потім необхідно натиснути на кнопку “Числовий формат” і задати процентний формат з нулем знаків після коми. Таким чином, механізм зведених таблиць дозволяє досить легко здійснювати найпростішу обробку результатів опитувань, не вдаючись до спеціального програмного забезпечення. Більше того, ми відобразили лише найпростіші можливості цього механізму. Для освоєння інших його можливостей (зокрема, зведених діаграм можна звернутися до спеціальної літератури або скористатися уроками, що входять до складу програмного комплексу MS Office компанії Microsoft.

І все ж треба мати на увазі, що спеціалізоване програмне забезпечення має незмірно більш широкими можливостями як в плані зручності, так і в плані глибини отримуваних результатів. Зокрема, для пошуку різного роду

неочевидних закономірностей застосовується пакет Marketing Engineering, що є надбудовою до MS Excel, або комплекс програм *SPSS*.

Література:

1. Лабурцева О.І., Яренко А.В. Основи маркетингу і планування: Навч. посібник. – К.: КНУТД, 2007. – 136 с.
2. Петренко, В.Р. Інформаційні системи і технології маркетингу: навч. посіб. [Текст]/ .П. Оксанич, В.Р. Петренко, О.П. Костенко. – К.: Професіонал, 2008.– 464 с.
3. Пінчук, Н.С. Інформаційні системи і технології в маркетингу: навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. [Текст] / Н.С. Пінчук, Г.П. Галузинський, Н.С. Орленко. – К.: КНЕУ, 2010. – 296 с.
4. http://mmix.ukrbb.net/viewtopic.php?f=10&t=137&st=0&sk=t&sd=a
5. http://www.shevchenkove.org.ua/person_syte/Golub/KT%20i%20IT/excel.html
6. https://studme.com.ua/1513061610853/marketing/bazovyy_analiz_dannyh_sredstvami_excel.htm

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент кафедри математики, фізики та комп'ютерних технологій Вінницького національного аграрного університету Бурдейна Людмила Іванівна.

УДК 373.091.313-027.22:793.7

Ніколаєва Альона

студентка магістратури
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ДІЛОВІ ІГРИ В ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ СТАРШОКЛАСНИКІВ

***Анотація**. В статті описано доцільність використання ділових ігор в організації самостійної старшокласників.*

***Ключові слова:** самостійна робота, ділові ігри.*

***Annotation**. The article describes the feasibility of using business games in the organization of independent high school students.*

***Keywords** ndependent work, business games.*

Підвищення вимог до якості освіти стає вагомою проблемою й умовою розвитку системи неперервної освіти, стимулом оновлення її змісту на основі принципів фундаментальності, інтегративності, послідовності та практичної спрямованості.

Метою сучасної освіти є подальший розвиток історично складеної педагогічної системи на основі створення умов для формування професійно-компетентної, соціально-активної, творчо-самостійної особистості.

Нині ми спостерігаємо перетворення освітнього простору, яке з парадигми «наслідування» вступило в парадигму «інформація». Колосальні успіхи інформаційної системи освіти стимулюють розширювати об'єми інформації й відповідно збільшувати час навчання, що призводить до необхідності вдосконалювати її. Головним недоліком освіти при цьому є відсутність діяльності учня, котрий доволі пасивно сприймає інформацію, що не відповідає сучасним вимогам. При переході до інформаційного суспільства дуже важливим для вчителів є залучення школярів до самостійної роботи для досягнення основних цілей навчання, розвитку в учнів культури самоосвіти, самоорганізації та самоконтролю.

Оволодіти знаннями – це не лише зрозуміти й запам'ятати, але й уміти застосовувати їх для розв'язання практичних задач, уміти перенести знання і спосіб діяльності у нову ситуацію. Основним засобом досягнення такого результату є організація самостійної роботи старшокласників.

Самостійність учнів у навчальній діяльності пов'язана із формуванням у них навиків навчальної роботи. В її компоненти входять: вміння планувати самостійну роботу, раціонально її організувати, здійснювати самоконтроль і вміння працювати у визначеному темпі.

Сформувати в учнів творчу самостійність можливо лише за умови, якщо учні навчаться долати труднощі у процесі набуття знань, а також на етапі їх застосування [4, с. 67].

Тому при створенні моделі навчально-виховного процесу необхідно використовувати методи навчання, що сприяють ефективному розвитку

наявних у старшокласників здібностей і формуванню навиків самостійності, системності мислення, вмінню перебудовуватися в сучасному суспільстві, що стрімко змінюється.

Вирішити визначені проблеми, хоча б частково, можна, використовуючи активні методи у навчанні. Опираючись на дослідження Х. Майхнера [3, с. 56], котрий відзначає, що людина при пасивному сприйнятті запам'ятовує 10% прочитаного, 20% почутого, 30% побаченого та 50% побаченого й почутого, а при активному сприйнятті учні зберігають у пам'яті 80% того, що говорили самі і 90% того, що робили або створювали самостійно, можна стверджувати, що активні методи навчання різко покращують запам'ятовування матеріалу й сприяють його ідентифікації та подальшій цілеспрямованій практичній реалізації. На відміну від традиційних форм навчання, впровадження в навчальний процес активних методів навчання дозволяє формувати професійні вміння та діяльну реалізацію набутих знань, моделювати цілісний зміст самостійної роботи, при цьому зміщається центр значущості з процесу передачі, переробки та засвоєння інформації на самостійну творчу діяльність [2, с. 128].

Переваги застосування активних методів навчання присутні у вирішенні всіх задач навчання. Так, у галузі дидактики це розширення кругозору, активізації пізнавальної діяльності; можливість застосування набутих знань і вмінь у практичній діяльності; формування визначених умінь і навичок, необхідних у професійній діяльності; розвиток або вироблення техніки перегрупування, реорганізації та систематизації чого-небудь; вміння формулювати питання.

У сфері виховання – розвиток самостійності, активності та волі; формування певних підходів, позицій, моральних світоглядних установок; формування комунікативних якостей та вміння працювати в колективі. Крім цього, ми приходимо до висновку про те, що застосування активних методів навчання, зокрема ділових ігор сприяє розвитку уваги, пам'яті, мови, мислення, вмінь порівнювати, спів ставляти, поєднувати воєдино; творчих здібностей,

рефлексії, вміння знаходити оптимальні або найбільш прості рішення, передбачати очікуваний результат, знаходити спосіб варіювання або перебудови чого-небудь. Крім того, ділові ігри дозволяють спростити приєднання до норм і цінностей соціуму; адаптуватися до умов середовища; здійснювати контроль, саморегуляцію; навчання спілкуванню; психотерапії; вдосконалювати вміння висловити свою думку в усній і письмовій формі; вміння встановити й підтримувати психологічний контакт; вміння слухати співрозмовника, розуміти його мотиви; вміння доводити, переконувати, висловлювати згоду (незгоду) [2, с. 203].

Останнім часом використання моделей, ігор та імітацій набуває нові аспекти й означається як ігрове навчання, котре відрізняється примусовою активізацією мислення (вимушена активність). Учень повинен бути активним незалежно від того, бажає він цього чи ні; достатньо тривалим часом залучення учнів у навчальний процес (практично протягом усього заняття); самостійним творчим виробленням рішень, підвищеним ступенем мотивації й емоційності; постійною взаємодією учнів і викладачів за допомогою прямих і зворотних зв’язків [6, с. 60].

Метод ділових ігор самостійний, активний, напрямлений на результат і забезпечує позитивні емоції. Прагнення до успіху робить навчання в процесі гри надзвичайно ефективним.

З іншого боку, ми розуміємо, що якщо ми будемо базувати своє навчання лише на ігрових методах, то, по-перше, визначений інформаційний зміст не буде засвоєний. Однак ствердження про недостатність ігор для повноцінної освіти можна розцінювати і як постановку нової педагогічної задачі. Практика показала, що успішно приймати участь у ділових іграх можуть лише ті школярі, котрі вивчення дисципліни здійснюють не шляхом заучування, а засобом вдумливого осмислення й творчого підходу до самостійного опрацювання пройденого матеріалу. По-друге, методики не можуть бути самодостатніми, оскільки вчитель може зіштовхнутися з проблемою середнього рівня учнів.

Серед ділових ігор в залежності від їх функцій і цільового призначення розрізняють:

- *навчальні* (в тому числі тренінгові) *ділові ігри*. Вони мають найбільш широке розповсюдження й слугують для підготовки й підвищення кваліфікації кадрів;
- *ділові ігри для вирішення практичних задач* (наприклад, знаходження оптимальних розв'язків). Вони використовуються також для колективної або індивідуальної підготовки розв'язків із врахуванням численних факторів, що впливають на ситуацію та різних варіантів вирішення проблеми;
- *проектні ділові ігри.* До них звертаються при проектуванні організаційних систем (організацій, їх структурних одиниць і т.п.) та їх змін. Це досить складний вид ігор, котрий припускає високий рівень компетентності всіх учасників;
- *дослідницькі ділові ігри.* Використовуються для аналізу поведінки окремих співробітників або цілих колективів в залежності від зміни зовнішніх або внутрішніх умов їх діяльності (наприклад, при вивченні можливостей використання в організації різних систем оплати праці. Дослідницькі ділові ігри моделюють конкретні ситуації в режимі «що буде, якщо?...». Це дозволяє прогнозувати різні варіанти змін [7, с. 34].

Ділову гру можна розглядати як моделювання реальної діяльності фахівця в тих або інших спеціально створених ситуаціях. Ділова гра (ДГ) виступає як засіб і метод підготовки й адаптації до професійної діяльності і соціальних контактів. Відмінність ділової навчальної гри від традиційних методів навчання, її навчальні можливості полягають у тому, що в грі відтворюються основні закономірності професійної діяльності і професійного мислення на матеріалі динамічно народжуваних навчальних ситуацій, що розв'язуються спільними зусиллями учасників гри. Сутність ДГ полягає в тому, що вона є формою відтворення предметного і соціального змісту професійної діяльності, моделювання систем відносин, характерних для даного виду праці. Проведення ДГ – це розгортання особливої, ігрової діяльності учасників на імітаційній моделі, що відтворює умови й динаміку реального світу. Ділова гра

є модельним заміщенням двох реальностей – процесу виробництва і процесу діяльності в ньому людей [1, с. 203].

Ділові ігри були вперше розроблені і застосовані як спосіб розв'язання виробничих задач і метод навчання студентів і виробничого персоналу в Росії в 1930-і рр.

У 1957 р. вони були введені в навчальний процес підготовки менеджерів у США. Нині ділова гра інтенсивно використовується в професійному навчанні як одна з найбільш продуктивних технологій.

Специфічною особливістю ділової гри, на відміну від інших технологій колективної взаємодії, є її двоплановість: з одного боку, – гравець виконує реальну діяльність, пов'язану з розв'язанням конкретних навчальних завдань, з іншого боку, – дана діяльність носить умовний характер, а це дозволяє абстрагуватись від реальної ситуації з її відповідальністю, бути досить вільним, розкутим, виступаючи у визначеній ролі і знімаючи ті психологічні бар'єри, котрі заважають виявляти свої здібності і можливості. Саме дана двоплановість гри забезпечує її розвивальний характер і робить ігрову навчальну діяльність емоційно привабливою для учасників [6, с. 59].

Разом із тим, двоплановость ділової гри породжує деякі організаційні проблеми. Вони пов'язані, насамперед, з можливістю "перегравання", тобто несерйозного ставлення старшокласників до ігрової навчальної діяльності, а це призводить до того, що не реалізується її освітній потенціал. Завдання викладача — знайти правильне співвідношення навчальних і ігрових дій, що забезпечить загальний і професійний розвиток особистості майбутнього фахівця. Тому викладачеві необхідно добре розуміти не тільки дидактичну сутність і можливості ДГ, а й методично грамотно проектувати й будувати її відповідно до визначених принципів.

Дослідження теорії і практики впровадження ділових ігор у навчальний процес показує, що ділові ігри – це активний метод навчання, найбільш близький до реальної майбутньої професійної діяльності студентів. Перевага ділових ігор полягає в тому, що, будучи моделлю реальної діяльності, вони

одночасно дають можливість значно скоротити операційний цикл і тим самим продемонструвати учасникам, до яких кінцевих результатів приведуть їхні рішення і дії. Ділові ігри бувають як глобальними (керування компанією), так і локальними (проведення переговорів, підготовка бізнес-плану, звіту тощо). Використання цього методу дозволяє старшокласникам виконувати різні професійні функції і за рахунок цього розширити власні уявлення про організацію і взаємини її співробітників [7, с. 15].

Отже, можемо зробити висновок про те, що активні методи навчання є одним із найбільш перспективних шляхів вдосконалення процесу організації самостійної роботи старшокласників, заснований на принципах проблемності й моделювання, що відрізняє їх від традиційних форм і методів навчання. Аналіз зарубіжного і вітчизняного досвіду свідчить про те, що ділова гра як один із методів активного навчання, є інтенсивним способом підвищення результативності самостійної роботи учнів, не за рахунок збільшення об'єму інформації, а завдяки глибині та швидкості її засвоєння. Активність школярів, яка виникає в процесі ділової гри тривала та стійка, а самостійно прийняті рішення емоційні і творчі за своїм змістом.

Література:

1. Захарченко Н.В. Ділові ігри в навчальному процесі / Н.В. Захарченко // Актуальні проблеми трудової і професійної підготовки молоді// Збірник наукових праць. – Вип.10. – Вінниця: ДОВ Вінниця, 2004. – С. 202-204.
2. Захарченко Н.В. Імітаційні методи як засіб активізації навчання у ВНЗ / Н.В. Захарченко //Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету. Серія: Педагогіка і психологія /Вінниця: ВДПУ. 2004. – Вип.10. – С. 127-131.
3. Майхнер Х.Е. Корпоративные тренинги / Х.Е. Майхнер. – М.: ЮНИТИ, 2002.– 354с
4. Пидкасистый П.И. Самостоятельная познавательная деятельность школьников в обучении / П.И. Пидкасистый. – М.: Педагогика, 1980. – 238 с.
5. Пути активизации самостоятельной работы студентов: Сб. информационных материалов о передовом опыте. – Киев: Уч-мет. пособие по высшему образованию, 1990 – 134 с.
6. Тополя Л.В. Ігрові технології як фактор активізації навчально-пізнавальної діяльності підлітків //Сучасний стан і перспективи шкільних

курсів математики та інформатики у зв´язку з реформуванням у галузі освіти /Тези доп.Всеукр.наук.-практ.конф. – Дрогобич, 2000. – С.59-62
7. Трайнев В.А. Деловая игра в учебном процессе / В.А.Трайнев. – М.: Прометей, 2002. – 345 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Захарченко Наталія Вікторівна

УДК 517 : 53

Павлюк Владислав, Серьга Денис

студенти факультету математики,
фізики та технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ВИКОРИСТАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ У ФІЗИЦІ

Анотація. *Стаття присвячена використанню визначеного інтегралу у фізиці, зокрема, у статті розглянуто задачі про обчислення шляху, роботи змінної сили, сили тиску рідини.*

Ключові слова. *Визначений інтеграл, шлях, сила тиску, робота змінної сили, формула Ньютона-Лейбніца.*

Annotation. *The article is devoted to the use of a definite integral in physics, in particular, the paper deals with the problems of calculating the path, the work of the variable force, the forces of pressure of the fluid.*

Keywords. *Defined integral, path, force of pressure, work of the variable of force, Newton-Leibniz formula*

Вступ. Математика протягом усієї історії людської культури завжди була її невід'ємною частиною, вона є ключом до пізнання навколишнього світу, базою науково-технічного прогресу і важливим компонентом розвитку особистості. Практика переконує нас у тому, що математика допомагає нам пізнати оточуючу реальність, вивчити фізичні закони природи.

У даній статті ми розглянемо як використовувати інтеграли при розв'язуванні деяких видів фізичних задач.

Поняття інтегралу та інтегрального числення виникли з потреби обчислювати площі будь-яких фігур, поверхонь і об’ємів тіл.

Символ $\int y(x)dx$ було введено Лейбніцем у 1686 р. У ньому знак інтегралу є видовженою літерою S (перша літера в латинському слові «сума»). Термін «інтеграл» (від латинського integer – ціла, вся – площа) було запропоновано у 1696 р. Іоганном Бернуллі і схвалений Лейбніцем.

До поняття визначеного інтегралу призводять усі задачі геометрії, механіки і фізики, в яких необхідно знайти границю інтегральної суми:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(x)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx .$$

Позначення визначеного інтегралу ввів Ж. Фур’є. Числа a і b називаються, відповідно, нижньою та верхньою межами інтегрування.

Формула Ньютона-Лейбніца має назву «основної формули інтегрального числення». За допомогою цієї формули можна обчислювати визначені інтеграли, тобто знаходити границі інтегральних сум. Ця формула має вид:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) - F(b) .$$

Подальший розвиток інтегрального числення пов'язаний із іменем Леонарда Ейлера. Він склав повний курс математичного аналізу, що містить шість томів, три з яких Ейлер присвячує інтегральному численню.

Разом із Ейлером видатних результатів у галузі математичного аналізу досяг видатний математик XVIII ст. – Лагранж. Він уже у 18 років займав посаду професора в артилерійській школі міста Турин (Італія), а через п’ять років його було обрано членом Берлінської Академії наук.

У подальшому теорію інтегралів розвивав Б. Ріман, який уперше визначив необхідні та достатні умови інтегрованості обмеженої функції. Йому належить загальне означення визначеного інтегралу, тому на його честь інтегральну суму стали називати «рімановою».

Великий вклад у розвиток математичного аналізу у XIX ст. внесли Остроградський і Чебишев. Праці Чебишева в подальшому продовжили його учні – Ляпунов, Стєклов, Бернштейн та інші. Проблеми теорії інтегрального числення і нині хвилюють математиків усього світу. Справу Чебишева та Остроградського продовжують і вчені сучасної України. Використання визначеного інтегралу не обмежується лише обчисленням площ і об'ємів фігур. Визначений інтеграл допомагає розв'язувати багато фізичних і загальнотехнічних задач.

Розглянемо деякі з них.

1. **Задача про обчислення шляху.**

За фізичним змістом першої похідної, похідна функції в точці миттєва швидкість точки, тобто

$$v(t) = S'(t) = \frac{dS}{dt}.$$

Звідси $dS=v(t)dt$. Інтегруючи отриману рівність у межах від t_1 до t_2, отримаємо:

$$\int dS = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Тоді шлях, пройдений точкою при нерівномірному русі по прямій зі швидкістю $v(t)$ за час $[t_1;t_2]$ виражається інтегралом:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

Приклад 1. Швидкість прямолінійного руху тіла задана формулою $v=2t+3t^2$ (м/с). Знайти шлях, пройдений тілом за 5 с. від початку руху.

Розв'язування:

$$S = \int_0^5 (2t + 3t^2)dt = (t^2 + t^3)\Big|_0^5 = 150(м).$$

Приклад 2. Два тіла почали рухатися одночасно з однієї точки в одному напрямку по прямій. Перше тіло рухається зі швидкістю $v = (6t^2 + 2t)$ м/с, друге – зі швидкістю $v = (4t + 5)$ м/с. На якій відстані одне від одного вони будуть знаходитися через 5 с.?

Розв'язування:

Шукана величина є різницею відстаней, які пройдуть тіла за 5 с.

$$S_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)dt = (t^2 + 2t^3)\Big|_0^5 = 275(м).$$

$$S_2 = \int_0^5 (4t + 5)dt = (2t^2 + 5t)\Big|_0^5 = 75(м).$$

Таким чином, $S = S_1 - S_2 = 275 - 75 = 200$ (м).

2. Задача про обчислення роботи змінної сили.

Нехай матеріальна точка під дією сили F рухається по прямій. Якщо діюча сила стала, а пройдений шлях рівний S, то робота A цієї сили F обчислюється за формулою: $A = F \cdot S$.

Роботу змінної сили $f(x)$ при переміщенні матеріальної точки вздовж вісі OX від $x=a$ до $x=b$, знаходимо за формулою:

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Розв'язування задач на обчислення роботи сили пружності, пов'язаних із розтягуванням і стисненням пружин, основуються на законі Гука. За законом Гука сила F, яка розтягує чи стискає пружину, пропорційна цьому розтягу чи стиску, тобто $F=kx$, де x – величина розтягу (стиску), k - коефіцієнт пропорційності.

Приклад 3. Сила пружності F пружини, розтягнутої на l_1=0,05 м, рівна 3(Н). Яку роботу необхідно виконати, щоб розтягнути пружину на l_2=0,1м?

Розв'язування:

Підставивши дані у формулу закону Гука, отримаємо: 3=0,05k, тобто k=60, відповідно, сила пружності рівна $F=60x$. Знайдемо роботу змінної сили за формулою, у якій $a=0$, $b=0,1$:

$$A = \int_0^{0,1} 60x dx = 30x^2 \Big|_0^{0,1} = 0,3\,(Дж).$$

3. Задача про силу тиску рідини.

За законом Паскаля тиск рідини на горизонтальну площину обчислюється за формулою:

$$P = g\rho hS.$$

Де g – прискорення вільного падіння у м/с^2;

ρ- щільність рідини у кг/м^3;

h - глибина занурення у пощадку у м;

S - площа площадки у м^2.

За цією формулою не можна знаходити тиск рідини на вертикально занурену пластинку, так як її різні точки лежать на різних глибинах.

Нехай у рідину занурена вертикальна пластинка, обмежена лініями $x=a$, $x=b$, $y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$.

Для розв'язання задачі розіб'ємо пластинку на n частин (малих горизонтальних смужок) прямими, паралельними поверхні рідини (тобто паралельними вісі OX). На глибині x виділимо одну з них і позначимо через $f(x)$ її довжину, а через Δx її ширину. Вважаючи смужку прямокутником, знайдемо її площу:

$$S = f(x)\Delta x \text{ , тоді } P = g\rho f(x)\Delta x \cdot x.$$

Знайдемо диференціал цієї функції:

$$dP = g\rho f(x)xdx.$$

Тоді за законом Паскаля, інтегруючи отриману рівність у межах від $x=a$ до $x=b$, отримаємо:

$$P = g\int_a^b \rho x f(x)dx.$$

Приклад 4. Акваріум має форму прямокутного паралелепіпеда. Знайти силу тиску води (ρ=1000 кг/м^3), яка наповнює акваріум, на одну з його вертикальних стінок, розміри якої 0,4м х 0,7м.

Розв'язування:

Вибираємо систему координат таким чином, щоб вісі OX та OY, відповідно, містили верхню основу і бічну сторону вертикальної стінки акваріуму. Для знаходження сили тиску води на стінку скористаємося формулою. Стінка має форму прямокутника, тому $f(x)=0,7x$, $x \in [0;0,4]$.

Так як межі інтегрування $a=0$ і $b=0,4$, то отримаємо:

$$P = g\int_0^{0,4} 1000 \cdot 0,7xdx = 350x^2 g\Big|_0^{0,4} = 56g \approx 549(H).$$

Висновки.

1. При розв'язуванні задач першого типу можна знаходити не лише шлях, пройдений точкою при нерівномірному русі, але й швидкість точки, що рухається прямолінійно, також рівняння прискорення цього руху.

При обчисленні роботи можна визначати роботу не лише змінної сили пружності, але й будь-якої іншої змінної сили, наприклад, сили тяжіння.

2. При розв'язуванні задач про силу тиску площадка, що знаходиться під дією змінного тиску, може мати не лише прямолінійну, але й іншу форму.

3. Спільними в цих задачах є те, що необхідно знаходити значення змінної величини (сили, роботи, швидкості тощо).

Крім цих величин за допомогою визначеного інтеграла можна розв'язувати і інші прикладні задачі, наприклад, знайти масу стержня змінної щільності; статичні моменти, моменти інерції і центр мас плоскої фігури; роботу з підтриманням вантажу і довжину дуги плоскої кривої.

Література:

1. Бермантт А.Ф. Краткий курс математического анализа для вузов / А.Ф. Бермантт, И.А. Араманович. - М.: Наука, 1971 . – 736 с.
2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б.П. Демидович. – М.: Астрель, 2004.
3. Хрестоматия по истории математики. / Под ред. А.П.Юшкевича М.: Просвещение, 1976. – 318 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Захарченко Наталія Вікторівна

УДК 373.5.016:514.113

Пересунько Владислава

студентка магістратури
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ДО ПИТАННЯ МЕТОДИКИ РЕАЛІЗАЦІЇ ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ ШКІЛЬНОГО КУРСУ СТЕРЕОМЕТРІЇ

***Анотація**. У статті описано суть прикладної спрямованості та прикладної задачі, подано приклади деяких прикладних задач зі стереометрії на знаходження площі та об'єму різних геометричних тіл.*
***Ключові слова:** прикладна спрямованість, прикладна задача, стереометрія.*

***Annotation**. The article describes the essence of the applied orientation and the applied problem, examples of some applied problems of stereometry are found on finding the area and volume of different geometric bodies.*
***Key words:** applied orientation, applied problem, stereometry.*

Роль математики в людскому житті і суспільстві важко переоцінити. Поряд із звичними в минулому практичними застосуваннями математичних знань у людській діяльності: інженерних розрахунках, економічних, статистичних дослідженнях, будівництві, конструюванні, з'являються нові напрямки. Математичними методами тепер користуються в біології, медицині, лінгвістиці, історії тощо. Різноманітні професії змушують по-новому звернутись до законів математики, розвитку просторової уяви та творчого мислення. Вагоме місце в житті людини займає такий розділ математики як геометрія. А курс стереометрії оперує уявленнями візуального просторового характеру.

Навколишній простір – тривимірний. Його об’єкти – геометричні фігури – і є предметом вивчення стереометрії. Побут, повсякденне життя людини, професійна діяльність і все навкруги пов’язане з просторовими геометричними тілами: призмами, конусами, пірамідами, кулями, циліндрами, тощо. Тому потрібно розглядати процес навчання стереометрії як надбання учнями необхідних загальнолюдських знань і цінностей.

Стереометрія досліджувалась найменше щодо прикладної спрямованості, незважаючи на вагоме значення вивчення цього курсу для інтелектуального розвитку людини та водночас на існуючі проблеми геометричної освіти у шкільній практиці.

У школі вчителі протягом вивчення курсу стереометрії, основну увагу приділяють опрацюванню теорії та розв’язуванню абстрактних задач, оскільки вони недооцінюють можливості реалізації прикладної спрямованості для досягнення цілей вивчення цього курсу. Посилюють цю ситуацію такі фактори: невелика кількість годин, що відведена для вивчення курсу стереометрії; у методичній літературі мало матеріалів, які доводять значущість прикладної спрямованості та конкретних методичних розробок, що допомагають вчителю ефективно використовувати її засоби тощо. З огляду на перераховані обставини, у вчителів відсутня мотивація для систематичного прикладного спрямування курсу, зокрема для розв’язування з учнями прикладних задач, особливо враховуючи їх незначну кількість у підручниках, посібниках та майже повну відсутність серед добірок завдань контролюючого характеру.

Реалізація прикладної спрямованості починається із стадії, на якій діяльність вчителя полягає у визначенні прикладно-орієнтованих цілей і планування навчальної діяльності з вивчення курсу стереометрії в конкретному класі. Навчальна діяльність учителя безпосередньо корелюється із навчальною діяльністю учня у такий спосіб:

- розповідь вчителя про предмет стереометрії, метод, спосіб та організаційні засоби його вивчення, визначення стереометрії – сприймання

учнями інформації, з'ясування ними початкових характеристик курсу, планування своєї навчальної діяльності;

- постановка вчителем цілей вивчення цього курсу – їх сприймання та усвідомлення учнями як особистісно-значимих.

Форма, в якій повинні бути визначені та сформульовані для учнів цілі вивчення всього курсу має бути рекламною, якщо висловлюватись сучасною мовою. Для створення такої форми доцільно залучати комп'ютерно-комунікаційні технології. Важливо на цій стадії організувати спільну діяльність вчителя та учня для з'ясування засобів досягнення поставлених цілей, аналізу можливих труднощів вивчення курсу стереометрії та способів їх подолання.

Одним із засобів забезпечення прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії є прикладні задачі. Прикладна задача – це задача, що виникла зовні математики, але для її розв'язування потрібно використати математичні методи. Використання прикладних задач на уроках математики має демонструвати практичне застосування математичних ідей і методів у практичній діяльності людини та в інших науках [1].

Прикладні задачі є одним із ефективних засобів забезпечення міжпредметних зв'язків, якщо дотримуватися певних вимог до їх складання та використання: текст задачі має перш за все ілюструвати математичний матеріал, який вивчається на даному уроці, а тому, поняття і терміни, що належать іншим наукам мають бути або відомі учням, або бути зрозумілими для них (тобто не потребують багато часу для пояснення прикладної сторони задачі). Крім того, числові дані треба добирати так, щоб уникнути громіздких обчислень.

Прикладні задачі можуть бути на обчислення, з елементами побудов (діаграми, графіки, схематичні рисунки тощо) чи на дослідження.

Сформулюємо основні вимоги до прикладних задач, які використовуються у навчанні математики [1]:

1. Задачі повинні мати реальний практичний зміст, який забезпечує ілюстрацію практичної цінності і значущості набутих математичних знань.

2. Задачі повинні відповідати шкільним програмам і підручникам за формулюванням і змістом методів та фактів, які будуть використовувати в процесі їх розв’язування.

3. Задачі повинні бути сформульовані доступною і зрозумілою мовою, не містити термінів, з якими учні не зустрічалися і які вимагатимуть додаткових пояснень.

4. Числові дані в прикладних задачах повинні бути реальними, відповідати існуючим на практиці.

5. У змісті задачі по можливості повинен бути відображений особистий досвід учнів, місцевий матеріал, який дозволяє ефективно показати використання математичних знань і викликати в учнів пізнавальний інтерес.

6. Прикладні задачі повинні відображати ситуації промислового і сільськогосподарського виробництва, економіки, торгівлі, ілюструвати застосування математичних знань у конкретних професіях людей.

7. У прикладних задача числові дані, як правило, мають бути наближеними, а під час їх розв’язування необхідно використовувати обчислювальні засоби, зокрема комп’ютер.

Розв’язування прикладних задач сприяє ознайомленню учнів з роботою підприємств і галузей народного господарства, що є умовою орієнтації інтересу учнів до певних професій. Використання прикладних задач дозволяє вдало створювати проблемну ситуацію на уроці. Такі задачі стимулюють учнів до здобуття нових знань, збагачування учнів теоретичними знаннями з технічних та інших дисциплін [2].

Розглянемо деякі прикладні задачі, що дають змогу розширювати світогляд учнів під час вивчення стереометрії.

1. Відсортоване зерно жита зібрали в конічну купу, висота якої $0,7$ м. Скільки важить така купа зерна, якщо твірна конічної купи утворює з горизонтальною площиною кут 30°? (Маса 1 дм^3 жита $0,7$ кг.)

2. Довжина кола основи купи щебеню, що має форму конуса, становить 12,1 м. Довжина твірної дорівнює $2,3$ м. Обчисліть об'єм цієї купи.

3. Скільки води містить циліндричний паровий котел, що має довжину 4 м і внутрішній діаметр $1,4$ м? Усередині котла по довжині проходять дві жарові труби діаметром по 40 см кожна.

4. Подвір'я, що має форму прямокутника зі сторонами 32 м і 80м, треба обгородити. Висота огорожі $2,5$ м. Скільки потрібно для цього кубічних метрів дощок товщиною $2,5$ см?

5. Скільки потрібно фарби, щоб пофарбувати кулю діаметром $2,4$ м, якщо на пофарбування 1м^2 витрачається 120г фарби [2]?

Покажемо як розв'язувати прикладні стереометричні задачі на прикладі задачі 5.

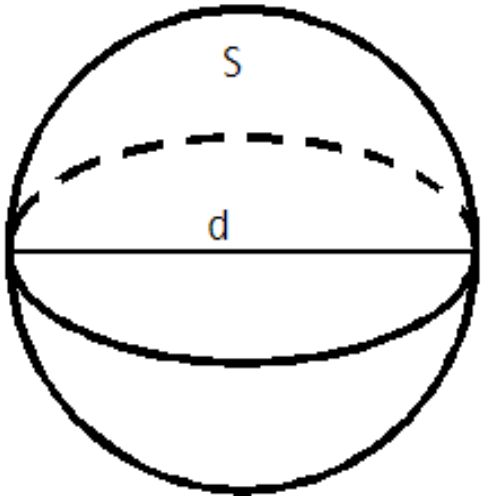


Рис. 1

Розв'язання.

Для розв'язування даної задачі потрібно записати формулу площі кулі, $S = 4\pi R^2$ або через діаметр $S = \pi d^2$. Знайдемо площу даної кулі: $S = 3,14 \cdot 2,4^2 = 18,08\ (\text{м}^2)$. Знаючи, що на 1 м^2 йде 120 г фарби, знайдемо скільки фарби потрібно, щоб пофарбувати кулю площею $18,08$ м^2:

$$18,08 \cdot 120 = 2169,6\ (\text{г}).$$

Отже, для того, щоб пофарбувати кулю діаметром $2,4$ м потрібно $2169,6$ г фарби.

Перед розв'язуванням прикладних задач доцільно: 1) з'ясувати із учнями, що таке прикладна задача, визначити етапи її розв'язування (на прикладі текстової задачі); 2) познайомити учнів із таблицею застарілих мір; 3) започаткувати ведення словника для полегшення перекладу умови прикладної задачі на мову математики (наприклад, місткість – об'єм); 4) з'ясувати доцільність додержання правил наближених обчислень під час розв'язування прикладних задач, нагадати ці правила учням.

Література:

1. Швець В.О. Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії: Навчальний посібник. / О.В. Швець, А.В. Прус. – Житомир: ЖДУ ім. І. Франка, 2007 – 156 с.
2. Артеменко Н.М. Задачі прикладного змісту. Стереометрія. 11 клас / Н.М. Артеменко. // Математика в школах України. – 2008. – № 5. – С. 6-12.
3. Збірник наукових статей студентів фізико-математичного факультету. – Випуск 8. – Суми: ФМФ, 2014. – 364 с.
4. Прус А.В. Вчимося розв'язувати задачі зі стереометрії. Геометричні тіла у тестових завданнях: Навчальний посібник / А.В. Прус, І.А. Сверчевська. – Житомир: ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 32 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Тютюн Любов Андріївна

УДК 532.39 : 517.9

Печериця Іван
студент факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

НЕЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА ТА ЙОГО РОЛЬ У КВАНТОВІЙ МЕХАНІЦІ

Анотація. *В статі розглянуто нелінійне рівняння Шредінгера, його історія та застосування. Наведено деякі його точні розв'язки. Розглянуто рівняння з кубічною нелінійністю та степеневою.*

In the article we consider the nonlinear Schrödinger equation, its history and application. Some of his exact solutions are given. The equation with cubic nonlinearity and power is considered.

***Ключові слова**: квантова механіка, нелінійне рівняння Шредінгера, нелінійні хвилі.*

Quantum mechanics, nonlinear Schrödinger equation, nonlinear waves.

Фізика постійно має справу з різними фізичними моделями. Найсуттєвішою умовою для фізичної моделі є простота та універсальність. Такі моделі, які слугують для опису великої різноманітності фізичних явищ, зустрічаються рідко. Вони користуються особливою увагою, оскільки здатність давати найбільш прості описи фізичних явищ. До таких явищ відносяться радіохвилі, застосування яких у техніці загальновідомо. Надзвичайно важливим і цікавим типом хвиль є хвилі на поверхні води.

Т. Бенжамен і Дж. Фейєр в 1967 році показали, що проста періодична хвиля на глибокій воді є нестійкою, через цю нестійкість хвилі на воді розбиваються на групи. Рівняння для опису поширення груп хвиль було отримано В. Є. Захаровим в 1968 році. На той час воно вже було відоме у фізиці і носило назву нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ).

НРШ є основним рівнянням квантової механіки. НРШ як і більшість основних рівнянь фізики, не виводиться, а постулюється. Правильність цього рівняння підтверджується багатьма експерементами. ([1]) Вперше воно було опубліковане в 1926 році в праці Ервіна Шредінгера «Квантування як задача про власні значення». У ній автор вивів хвильове рівняння відштовхуючись від оптико-механічної аналогії Гамільтона і застосував його для пошуку дискретних енергетичних рівнів атома водню. ([2])

Остаточному формулюванні НРШ передував тривалий період розвитку фізики. Воно є одним з фундаментальних законів фізики, що пояснюють фізичні явища. Проте це не означає що квантовій фізиці потрібно повністю відмовитись від законів Ньютона, а лише визначає межі застосовності класичної фізики. ([3])

Проникнення НРШ в нелінійну теорію хвиль розпочалось в 1965 році з робіт П. Келлі і В.І. Таланова при розгляді задачі про самофокусування хвильових пучків. До опису нестаціонарних хвильових полів в диспергуючих середовищах. Воно майже одночасно застосоване А.Г. Літваком, В.І.Талановим для нелінійних електромагнітних хвиль в діелектриці 1967 року і В.І. Карпманом щоб описати модульовані хвилі. В 1972 році НРШ проникло в фізику плазми, і було використане при описі нелінійних ленгм'юровських хвиль. Проте відомим воно стало в 1971 році після виходу роботи В.Є. Захарова і А.Н. Шабата, в якій вони знайшли точний розв'язок НРШ за допомогою вдосконаленого ними методу оберненої задачі розсіювання. ([4])

НРШ також застосовують в нелінійній фізиці при дослідженні питання появи «хвиль-вбивців» або «дивних хвиль». «Дивні хвилі» представляють собою локальний короткочасний ріст амплітуди або «хвилі, які появляються нізвідки і зникають нікуди». Зазвичай при розгляді «хвиль вбивць розглядають» фокусуюче нелінійне рівняння Шредінгера. ([5])

НРШ є узагальненням параболічного рівняння, і описує динаміку хвильових пакетів в середовищах з дисперсією і кубічною нелінійністю. Схожа ситуація зустрічається, наприклад, при поширенні електромагнітних хвиль в плазмі: з одного боку плазма є диспергуючої середовищем, з іншого боку, при досить високих амплітудах хвилі проявляється пондеромоторна нелінійність, яка в деяких випадках може бути апроксимована кубічним членом. Іншим прикладом є поширення світла в нелінійних кристалах з дисперсією.([6])

НРШ має аналітичні розв'язки для невеликого числа задач, більшість з яких є модельні. Важливими фізичними системами, для яких існують точні розв'язки є задача про вільну частинку і задача двох тіл з кулонівським потенціалом взаємодії, окремими випадками якої є задача про енергетичний спектр атома водню та про задача про резерфордівське розсіяння. Модельні задачі допомагають зрозуміти важливі квантові ефекти, такі, наприклад, як тунелювання. Для складніших фізичних систем розроблено різноманітні

методи наближеного розв'язування, зокрема, теорія збурень, варіаційний метод тощо.([6])

Розглянемо НРШ та його точні розв’язки. НРШ з однією просторовою зміною, яке відноситься до рівнянь параболічного типу має вигляд.

$$i\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+k|q|^2 q=0,$$

де q – комплексна функція двох змінних x і t, k – дійсне число, $i^2=-1$.

Точні розв’язки:

$$q(x,t)=C_1\exp\{i[C_2x+(kC_1^2-C_2^2)t+C_3]\},$$

$$q(x,t)=\pm C_1\sqrt{\frac{2}{k}}\frac{\exp[i(C_1^2t+C_2)]}{ch(C_1x+C_3)},$$

$$q(x,t)=\pm A\sqrt{\frac{2}{k}}\frac{\exp[iBx+i(A^2-B^2)t+iC_1]}{ch(Ax-2ABt+C_2)},$$

$$q(x,t)=\frac{C_1}{\sqrt{t}}\exp\left[i\frac{(x+C_2)^2}{4t}+i(kC_1^2\ln t+C_3)\right],$$

де A,B,C_1,C_2,C_3- довільні дійсні числа. Другий і третій розв’язок справедливий лише при $k>0$.[4]

Можна розглянути також НРШ з такою кубічною нелінійністю

1. $$i\frac{\partial q}{\partial t}+\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+(A|q|^2+B)q=0.$$

Тоді рівняння має точні розв’язки:

$$q(x,t)=C_1\exp\{i[C_2x+(AC_1^2+B-C_2^2)t+C_3]\},$$

$$q(x,t)=\frac{C_1}{\sqrt{t}}\exp\left[i\frac{(x+C_2)^2}{4t}+i(AC_1^2\ln t+Bt+C_3)\right].$$

де C_1,C_2,C_3-довільні дійсні константи.

Точний розв’язок буде мати вигляд:

$$q(x,t)=(ax+b)\exp[i(\alpha x^2+\beta x+\gamma)],$$

де функції $a=a(t),b=b(t),\alpha=\alpha(t),\beta=\beta(t),\gamma=\gamma(t)$ описуються автономною системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} a_t^{'} = -6a\alpha, \\ b_t^{'} = -2a\beta - 2b\alpha, \\ \alpha_t^{'} = Aa^2 - 4\alpha^2, \\ \beta_t^{'} = 2Aab - 4\alpha\beta, \\ \gamma_t^{'} = Ab^2 - \beta^2 + B. \end{cases}$$

2. $$i\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + (A|q|^2 + B|q| + C)q = 0,$$

Рівняння має точний розв'язок такого вигляду:

$$q(x,t) = (ax+b)\exp[i(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)],$$

де функції $a=a(t),b=b(t),\alpha=\alpha(t),\beta=\beta(t),\gamma=\gamma(t)$ – дійсні функції дійсної змінної. н

Розглянемо далі ось таке рівняння:

$$i\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + A|q|^{2n} q = 0.$$

Таке рівняння називають НРШ з степеневою нелінійністю де A,n – дійсні числа.

Точні розв'язки мають наступний вигляд:

$$q(x,t) = C_1 \exp\{i[C_2 x + (A|C_1|^{2n} - C_2^2)t + C_3]\},$$

$$q(x,t) = \pm\left[\frac{(n+1)C_1^2}{Ach^2(C_1 n x + C_2)}\right]^{\frac{1}{2n}} \exp[i(C_1^2 t + C_3)],$$

$$q(x,t) = \frac{C_1}{\sqrt{t}}\exp\left[i\frac{(x+C_2)^2}{4t} + i\left(\frac{AC_1^{2n}}{1-n}t^{1-n} + C_3\right)\right],$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні дійсні константи. ([7])

Відмітимо що у вищезазначених випадках можна розглядати випадки коли A, B – дійсні функції від змінної t.

Висновок. Таким чином НРШ займає ключове місце в квантовій механіці, описує велику кількість різноманітних фізичних процесів. Проте не всі розв'язки НРШ знайшли свою інтерпретацію у фізиці.

Література:

1. Рівняння Шредінгера [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://fizmat.7mile.net/fizika-atomiv-i-molekul/rivniannia-shredinhera.html.
2. Ервін Шредінгер [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://www.wikiwand.com/uk
3. Рівняння Шредінгера [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: http://znaimo.com.ua
4. Нелінійне рівняння Шредінгера. // Наукові записки. – 2011. – №70. – С. 20–24.
5. Смирнов А. О. Трехфазные решения нелинейного уравнения Шрёдингера в эллиптических функциях / А. О. Смирнов, Г. М. Головачёв. – 2013. – №3. – С. 389–407.
6. Рівняння Шредінгера [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://uk.wikipedia.org
7. Полянин А. Д. справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 432 с.
8. Гелаш А. А. Нелинейная стадия модуляционной неустойчивости : дис. канд. фіз.-мат. наук : 01.04.02 / Гелаш Андрей Александрович – Новосибирск, 2014. – 95 с.
9. Смирнов А. О. Трехфазные решения нелинейного уравнения Шрёдингера в эллиптических функциях / А. О. Смирнов, Г. М. Головачёв. – 2013. – №3. – С. 389–407.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Бак Сергій Миколайович

УДК 519.876.5:517.22

Поліщук Тетяна

студентка магістратури
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Анотація. *Статтю присвячено дослідженню застосування похідної до розв'язування прикладних задач як однієї з проблем сучасної математики та інформатики. Здійснено класифікацію задач, висвітлено методику їх розв'язання, наведено приклади.*

Ключові слова: *прикладна задача, математична модель, методика, похідна, функція.*

Annotation. *The article is devoted to the study of the application of the derivative to the solution of applied problems as one of the problems of modern mathematics and computer science. The classification of tasks is carried out, the method of their solution is solved, examples are assumed.*

Key words*: applied problem, mathematical model, method, derivative, function.*

Глобалізаційні та інтеграційні процеси в світовій економіці, культурному і суспільно-політичному житті, швидка зміна ідей, знань, технологій, суцільна інформатизація суспільства мотивують формування нової особистості – людини XXI століття, людини інноваційної, знаннєвої, для якої отримання знань, необхідної інформації та вміння застосовувати їх на практиці стають сутнісною рисою способу життя [5]. Важливу роль у становленні особистості відіграють шкільна та вузівська математична освіта, математика як наука. На перший план сьогодні виходять питання засвоєння математичних компетенцій (знань, вмінь, навичок, способів діяльності) і набуття життєво важливих компетентностей, тобто здатності застосувати ці компетенції на практиці.

Розвиток математичної теорії та її застосування, питання математичного моделювання, прогнозування й оптимізації реальних процесів, системний аналіз і прийняття рішень, математичне та комп’ютерне моделювання прикладних задач, розробка методів скінченних і граничних елементів та їх застосування, прикладні завдання інформатики, провадження інформаційно-комунікаційних технологій відносяться до найважливіших проблем сучасної математики та інформатики.

Однією з таких проблем, яка сьогодні набуває особливої актуальності є застосування диференціального числення до розв’язання математичних і прикладних задач. Теорія цього питання добре відпрацьована в курсі математичного аналізу. Елементи методики прикладної спрямованості математики розглянуті у наукових працях А. В. Ачкана, В. А. Даллінгера, Ю. М. Колягіна, В. В. Пікана, З. І. Слєпкань та ін.

Зацікавленість наукових працівників, викладачів і вчителів, студентів і учнів до вивчення похідної та її застосування, розширення спектру завдань, які ставить сучасна наука, освіта та суспільне життя, вказують на важливість проблематики й широкий простір для наукових, методичних і практичних досліджень.

Метою статті є дослідження застосування похідної до розв'язування прикладних задач. Реалізується мета шляхом виконання тактичних завдань, серед яких: з'ясування змісту похідної та застосування її поняття, трактування понять «практична» і «прикладна задача», класифікація прикладних задач, опис структури і методики їх розв'язання, наведення характерних прикладів.

Введення похідної викликане практичними потребами людини. Один із засновників математичного аналізу І. Ньютон прийшов до поняття похідної, виходячи із запитання про швидкість руху. Тобто, похідну він розглядав як засіб розв'язання реальної задачі.

Проблемні питання, поставлені в багатьох прикладних задачах механіки, геометрії, фізики, природознавства, економіки, та вироблення єдиних підходів до їх розв'язання зумовило появу синергетичного терміна, який назвали «похідна» і теорії диференціального числення.

Поняття похідної відноситься до фундаментальних понять математичного аналізу. Під похідною даної функції розуміють границю відношення приросту функції до приросту незалежної змінної при довільному прямуванні цього приросту до нуля [2, с. 121].

Узагальнене значення терміна склалося на основі видових його змістів, що розглядались в низці наукових дисциплін. Конкретизуємо це висловлювання на прикладах.

В алгебрі під поняттям «похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0» розуміють швидкість зміни функції $f(x)$ у точці x_0, в геометрії похідна функції в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції, проведеної в точці з абсцисою x_0. Використання похідної в математиці дає можливість досліджувати функції та будувати їх графіки, знаходити найбільше і найменше

значення функції на відрізку, складати рівняння дотичної, розв'язувати рівняння і нерівності, доводити нерівності й тотожності, розв'язувати завдання з параметрами, розв'язувати прикладні текстові задачі, виконувати наближені обчислення.

З фізичної точки зору похідна характеризується як швидкість зміни характеристики деякого фізичного процесу, коли ця характеристика змінюється з часом. На основі цього означення швидкість руху можна розглядати як похідну від шляху $S(t)$, який пройшло тіло за час t, прискорення як похідну від швидкості, силу струму як похідну по часу від заряду, потужність як похідну від роботи по часу, лінійну густину як похідну від маси по довжині, теплоємність тіла як похідну від кількості тепла по температурі, швидкість радіоактивного розпаду як похідну від маси радіоактивної речовини за часом [2, с. 121–122; 6]. Методами диференціального числення розв'язуються низка традиційних і новітніх фізичних задач, зокрема, на знаходження швидкості та прискорення прямолінійного руху тіла, кутової швидкості обертання предмета, швидкості росту маси кристалів, швидкості зміни температури тіла під час нагрівання, визначення освітленості електричного приладу та ін.

З економічного погляду похідна тлумачиться як швидкість зміни характеристик певного економічного об'єкта або перебігу економічного процесу за часом чи іншими параметрами. Методами диференціального числення можна пояснити сутність продуктивності праці як похідну маси вироблених товарів за часом, попиту як похідну за зміною ціни товарів, затрат і прибутків виробництва як похідну від обсягів виробленої продукції. Іноді для аналізу об'ємів потреб і споживання, залежностей між затратами й обсягами виробництва, попитом і ціною продукції вводять поняття еластичності функції й розглядають його як границю відношення відносного приросту деякої функції до відносного приросту аргументу, коли останній прямує до нуля.

Похідна виникла з практики і після деяких узагальнень, побудови чіткої, аргументованої математичної теорії знову повертається до розв'язання практичних проблем якісно вищого рівня. Діалектичний напрям цієї еволюції

описується логічним ланцюжком: «Життєва реальність → проблемна ситуація → проблемна задача → відображення і розв'язування її в математичних образах, вироблення єдиних підходів, алгоритмів вирішення → застосування до розв'язування системи компетентнісно орієнтованих (практичних і прикладних) задач».

У математиці розрізняють поняття «практична» і «прикладна» задача, «практична» і «прикладна» спрямованість навчання і наукової діяльності людини. Зокрема, під практичною спрямованістю навчання математики розуміють спрямованість змісту і методів навчання на розв'язування математичних та прикладних задач та формування навичок самостійної діяльності математичного характеру. Прикладна спрямованість передбачає «орієнтацію змісту і методів навчання на застосування математики в техніці й суміжних науках, у професійній діяльності, в народному господарстві та побуті» [4, с. 12]. В. А. Даллінгер розглядає прикладну спрямованість математичних знань з урахуванням як їх практичного застосування, так і теоретичного значення в самій математиці як науці [3].

На нашу думку не варто розділяти ці поняття. Якщо в прикладній задачі вбачати реальну задачу «позаматематичного» середовища, то розв'язується вона практичними математичними методами й способами. Тут очевидне поєднання двох типів задач: прикладної і практичної. Результативність розв'язання цих задач залежить від рівня засвоєних математичних компетенцій (знань, вмінь, навичок, способів діяльності) та здатності реалізувати їх під час розв'язування прикладних задач, тобто сформованості предметної та ключових компетентностей. Одним з шляхів підвищення ефективності цього процесу виступає комп'ютерне моделювання.

Розв'язуючи прикладну задачу за допомогою диференціального числення треба, найперше, проаналізувати математичну модель, якщо вона присутня в умові задачі, або побудувати таку модель, якщо вона відсутня. Структуру розв'язування прикладного завдання можна описати так: аналіз умови завдання; трансформація умови на мову математики; складання математичної

моделі завдання; пошук поетапних кроків розв'язування завдання; виконання за алгоритмом, перевірка й дослідження знайденого розв'язку; інтерпретація підсумкового результату; аналіз використаного способу розв'язування на предмет його раціональності та пошук інших шляхів розв'язання завдання [1, с. 14–15].

Доречною і обґрунтованою є подана В. В. Ачканом класифікація прикладних задач: задачі природничо-математичного напряму, задачі технологічного напряму, задачі суспільно-гуманітарного напряму [1].

В процесі розв'язування сюжетних задач, в яких необхідно знайти найменше або найбільше значення деякої величини, зручно користуватися схемою:

- увести зручний параметр та представити шукану величину – розв'язок задачі у вигляді функції від цього параметру;

- за допомогою похідної знайти найменше або найбільше значення функції на конкретному проміжку;

- з'ясувати практичну сутність отриманого результату.

Продемонструємо реалізацію цієї схеми на прикладах.

1. Нехай нам треба представити число 20 у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб добуток їх квадратів був найбільшим.

Спочатку введемо незалежний параметр x з проміжку [0; 20] для позначення першого доданка. Тоді другий доданок буде $20 - x$, а функція залежності $f(x) = (20 \quad x)^2 \cdot x^2$.

Знайдемо найменше і найбільше значення цієї функції на заданому проміжку за її похідною:

$$f(x) = 2x \cdot (20 - x)(20 - 2x);\ f(0) = 0; f(10) = 10\,000; f(20) = 0.$$

Звідси $f_{max} = f(10) = 10\,000$. Тобто число 20 потрібно представити у вигляді суми двох доданків, кожний з яких дорівнює 10.

2. Для обчислення «сили струму I, що несе на собі заряд, заданий залежністю $q = qm\cos\omega_0 t$ (Кл) через поперечний переріз провідника» [1, с. 17] незалежним параметром виступатиме проміжок часу t, а функцією залежності –

$I(t)$. На невеликому проміжку часу її можна розглядати як похідну від заряду за часом, тобто $I(t) = q'(t) = -qm\omega_0 sin\,\omega_0 t$.

3. Розв'язування задачі «Вивести формулу для обчислення чисельності населення на обмеженій території у момент часу t» [1, с. 21] розпочинається із введення функції $y(t)$, яка виражає залежність чисельності населення від часу. За деякий проміжок часу Δt приріст населення складає $\Delta y = ky\Delta t$, де k – коефіцієнт приросту. Границя відношення приросту населення до проміжку часу дорівнює похідній функції $y(t)$, коли цей проміжок прямує до нуля, тобто, $y' = ky$. Звідси $y = y(t) = \frac{y'}{k}$.

Дослідження питання застосування похідної до розв'язування прикладних задач має важливе значення як для розвитку теорії диференціального числення, так і для вироблення єдиної методики та єдиних підходів до вирішення реальних проблем суспільства.

Література:

1. Ачкан В. В. Використання прикладних задач у процесі вивчення похідної у курсі алгебри та початків аналізу в класах різних профілів / В. В. Ачкан // Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету. Педагогічні науки : зб. наук. пр. – 2014. – Вип.1. – С. 12–23.

2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – М. : Наука, 1971. – 736 с.

3. Даллингер В. А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике / В. А. Даллингер. – М. : Просвещение, 1991. – 80 с.

4. Колягин Ю. М. О прикладной и практической направленности обучения математике / Ю. М. Колягин, В. В. Пикан // Математика в школе. – 1985. – № 6. – С. 27–32.

5. Кремень В. Г. Якісна освіта і нові вимоги часу / В. Г. Кремень // Директор школи, ліцею, гімназії. – 2013. – № 4. – С. 4–11.

6. Застосування похідної до розв'язування фізичних задач [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://magarovska.ucoz.ua/Uroki/integrovanij_urok.pdf (дата звернення : 24.03.2018). – Назва з екрана.

Науковий керівник: канд. пед. наук, асистент Соя Олена Миклаївна

УДК 373.5:[514:005.336.2]

Січкар Юлія

студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ФОРМУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «КООРДИНАТИ»

Анотація. *У статті розглянуто поняття «геометрична компетентність», її сутність і структуру. Наведено приклад формування геометричної компетентності в учнів під час вивчення теми «Координати».*

Ключові слова*: математична компетентність, геометрична компетентність, координати.*

Annotation. *The article deals with the concept of «geometric competence», its essence and structure. An example of formation of geometric competence is given while studying the theme "Coordinates".*

Key words: *mathematical competence, geometric competence, coordinates.*

Сучасний період розвитку українського суспільства характеризується змінами, що охоплюють усі сфери людського життя. Ці зміни торкнулись і освіти, зокрема, школи. В умовах реформування освіти значна роль приділяється вихованню особистості, здатної до самореалізації, самовизначення, самоусвідомлення у реаліях сучасного життя.

Особливої уваги потребує дослідження теми формування геометричної компетентності учнів. Питання, що стосуються формування геометричної компетентності, неодноразово описувалися українськими та закордонними вченими. Різні аспекти цього питання досліджували такі науковці, як О.В. Вітюк, М.І. Жалдак, С.А. Раков, Н.А. Сяська, зокрема вони розглядали різні аспекти застосування інформаційних технологій у викладання геометрії. Моторіна В.О. досліджує проблему розвитку геометричної компетентності під

час навчання геометрії, Бевз Г.П. розглядає різні типи задач та їх роль у формуванні геометричної компетентності.

Під геометричною компетентністю ми розуміємо набуту в процесі навчання геометрії інтегровану здатність учня, що складається із геометричних знань та умінь учня, його досвіду, цінностей і ставлення, що формуються у процесі навчання геометрії й можуть цілісно реалізовуватися на практиці [3].

За сьогоднішніми реаліями учитель на уроках геометрії має організувати роботу таким чином, щоб не тільки дати учням певну кількість знань, умінь і навичок, але й сформувати у них геометричну компетентність.

З'ясуємо передусім зміст поняття «математична компетентність». Згідно з тлумаченням С.А. Ракова: математична компетентність – це вміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати [5, с. 2].

В оновленій навчальній програмі для загальноосвітніх навчальних закладів з математики зазначено, що навчання математики в школі насамперед передбачає формування предметної математичної компетентності.

Формування математичної компетентності підпорядковується реалізації загальних завдань шкільної математичної освіти. До них належать:

• формування ставлення до математики як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови її повноцінного життя в сучасному суспільстві на основі ознайомлення з ідеями і методами математики як універсальної мови науки і техніки, ефективного засобу моделювання і дослідження процесів і явищ навколишнього світу;

• забезпечення оволодіння математичною мовою, розуміння ними математичної символіки, математичних формул і моделей як таких, що дають змогу описувати загальні властивості об'єктів, процесів та явищ;

• формування здатності логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, застосовувати математичні методи у процесі розв'язування

навчальних і практичних задач, використовувати математичні знання і вміння під час вивчення інших навчальних предметів;

• розвиток умінь працювати з підручником, опрацьовувати математичні тексти, шукати і використовувати додаткову навчальну інформацію, критично оцінювати здобуту інформацію та її джерела, виокремлювати головне, аналізувати, робити висновки, використовувати отриману інформацію в особистому житті;

• формування здатності оцінювати правильність і раціональність розв'язування математичних задач, обґрунтовувати твердження, приймати рішення в умовах неповної, надлишкової, точної та ймовірнісної інформації [6].

Проаналізувавши літературу, щодо досліджуваної проблеми, можна стверджувати, що геометричну компетентність науковці розглядають як набуту в процесі навчання геометрії інтегровану здатність виокремлювати геометричні образи і застосовувати геометричні знання та уміння.

До основних компонент геометричної компетентності учнів належать:

– геометрична грамотність (знання і уміння: означення геометричних фігур, властивості, ознаки; виконання побудов, вимірювань і обчислень; аналіз взаємного розміщення фігур; координатний, векторний методи і т.д.);

– способи діяльності (розпізнання фігур у різних конфігураціях, здатність виокремлювати ситуації пов'язані з просторовими і плоскими геометричними формами і відношеннями, успішне застосування геометричних знань та умінь у різних галузях діяльності);

– особистісне ставлення до геометрії (усвідомлення значення геометричних знань та умінь, мотивація в одержанні геометричних знань та умінь, зацікавленість в їх застосуванні). [2, с. 97]

Наприклад, для ефективного формування геометричної компетентності в учнів під час вивчення теми «Координати», яка вивчається у 6 класі, вчителеві необхідно виконати низку завдань.

1. Сформувати позитивне ставлення до математики як невід'ємної складової культури людини.

Для реалізації цього завдання можна розповісти, наприклад, історію книги Жуля Верна «Діти капітана Гранта»: герої довго та з численними пригодами подорожували в пошуках капітана, бо вони знали лише те, що він перебуває на 37-й паралелі. Пояснити важливість координат об'єкта за допомогою приклада: номер ряду і номер місця – координати крісла в залі кінотеатру.

2. Забезпечити оволодіння математичною мовою, розуміння математичної символіки і формул.

Для цього варто звернути увагу на розуміння учнями змісту понять «координатний промінь», «координатна пряма», «координатна площина», «прямокутна система координат», «абсциса», «ордината». Пояснити на прикладі правильний запис координат точки, наприклад: $M(2;7)$, $N(7;2)$ – це дві різні точки на координатній площині.

3. Формування здатності логічно обґрунтовувати та доводити математичні твердження, застосовувати математичні методи у процесі розв'язування навчальних і практичних задач.

Для цього необхідно, наприклад, урізноманітнити роботу учнів на уроці, тобто давати їм різноманітні завдання. Наприклад: накреслити на координатній площині замкнену ламану, послідовними вершинами якої є координати з точками: $(8; 0)$, $(6; 2)$, $(0; 6)$, $(1; 4)$, $(-1; 4)$, $(-3; 3)$, $(-6; 0)$, $(-8; 0)$, $(-6; -1)$, $(-6; -2{,}5)$, $(-5; -1)$, $(-1; 1)$, $(0; 1)$, $(3; 0)$, $(2; -1)$, $(5; -1)$, $(6; -2)$, $(7; -2)$, $(9; -3)$, $(8; -1)$. Позначте точку $(7; -1)$ [4, с. 349]. У результаті виконання цієї вправи, учні отримають зображення дельфіна. Можна підібрати різні завдання для відпрацювання навичок і логічного мислення.

4. Розвиток умінь працювати з підручником, опрацьовувати математичні тексти, шукати і використовувати додаткову навчальну інформацію.

Для виконання цього завдання доцільно використати, наприклад, технологію «перевернутого навчання». Учням можна дати завдання: знайти інформацію «що таке абсциса?», «що таке ордината?», «що таке прямокутна система координат і хто її придумав?». Тобто дати дітям таке завдання, щоб

вони могли використати додаткову літературу і знайти цікавий матеріал на урок.

5. Формування здатності оцінювати правильність і раціональність розв'язування математичних задач.

Для відпрацювання таких навичок можна учням дати, наприклад, таке завдання: знайти помилку, яка з точок на координатній площині позначена не правильно (на рисунку зображено точки і дано перелік точок з координатами).

Для формування геометричної компетентності в учнів на уроці, доцільно використовувати різні форми роботи, методи навчання, не однотипні задачі. Використання задач прикладного змісту в процесі вивчення геометрії також сприяє формуванню геометричної компетентності учнів. Наприклад, з учнями 6 класу на етапі узагальнення та систематизації під час вивчення теми «Координати» можна розв'язати таку задачу.

Задача. Туристи склали маршрут походу (рис. 1), старт і фініш якого в точці O, а зупинки в точках A, B, C, N і E. Довжині однієї клітинки відповідає 1 км. Продовжи запис, що описує маршрут: O → 2 км на схід (точка A) →… →… →… →… →… (точка O). [1, с. 267]

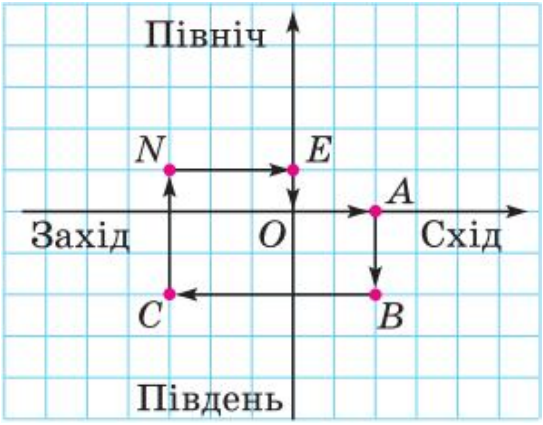


Рис. 1

Розв'язування задач такого типу сприяє формуванню геометричної грамотності учнів, а саме: знань про координати точки, координатну площину і прямокутну систему координат. Розв'язуючи задачі прикладного змісту учні успішно і з зацікавленням застосовують геометричні знання й уміння в різних

галузях діяльності, у реальних ситуаціях, тим самим формуючи позитивне особисте ставлення до математики та геометрії зокрема.

Перелік складових геометричної компетентності стосовно теми 6 класу «Координати»:

– *пояснює зміст понять*: координатний промінь, координатна пряма, координатна площина;

– *будує та знаходить на малюнках:* координатний промінь, координатну пряму, координатну площину;

– *розв'язує вправи, що передбачають:* знаходження координати точки на координатній прямій та побудову точки за її координатою; знаходження координат точки на координатній площині та побудову точки за її координатами [3, с. 88].

Таким чином, геометрична компетентність є частиною предметної компетентності майбутніх випускників шкіл, без якої неможливе формування компетентної особистості, яка вміє логічно мислити, творити і використовувати свої уміння і навички у нестандартних ситуаціях, вміє використовувати знання у різних галузях діяльності і усвідомлює значення геометричних знань й умінь у житті.

Література:

1. Істер О.С. Математика: підруч. для 6-го кл. загальноосвіт. навч. закладів / О.С. Істер – К.: Генеза, 2014. – 296 с.: іл.

2. Матяш О.І. Теоретико-методичні засади формування методичної компетентності майбутнього вчителя математики до навчання учнів геометрії: монографія / О.І. Матяш; науковий редактор д. пед. н., проф. О.І. Скафа. – Вінниця: ФОП Легкун В.М., 2013. – 450 с.

3. Матяш О.І. Формування методичної компетентності з навчання геометрії майбутніх учителів математики: автореф. дис. д-ра пед. наук: 13.00.02 / О.І. Матяш; Нац. пед. ун-т ім. М.П. Драгоманова. – Київ, 2014. – 43 с.

4. Мерзляк А.Г. Математика: підруч. для 6 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір – Х.: Гімназія, 2014. – 400 с.; іл.

5. Раков С.А. Формування математичних компетентностей випускника школи як місія математичної освіти / С.А. Раков // Математика в школі, №5. – 2005, С. 2–7.

6. Навчальна програма для загальноосвітніх навчальних закладів з математики (5-9 класи) [Програма затверджена Наказом Міністерства освіти і

науки України від 07.06.2017 № 804] Електронний ресурс. Режим доступу: https://osvita.ua/school/program/program-5-9/56128/.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Тютюн Любов Андріївна

УДК 519.22

Совінська Тетяна

студентка природничо-географічного факультету
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ НЕПАРАМЕТРИЧНОЇ СТАТИСТИКИ В ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Анотація. *У статті проаналізовано особливості використання непараметричних методів математичної статистики у психолого-педагогічних дослідженнях. Зокрема, описано можливості застосування критерію Фішера, Макнимара, Кокрена, Колмогорова-Смірнова, Манна-Уітні.*

Ключові слова*: критерій, непараметрична статистика, нульова та альтернативна гіпотези, вибірка.*

Annotation. *In the article the peculiarities of nonparametric methods of mathematical statistics in psychological and pedagogical research are analyzed. In particular, we describe the possibilities of applying Fisher's criterion, Makmanar, Kokren, Kolmogorov-Smirnov, Mann-Whitney.*

Key words: *criterion, nonparametric statistics, alternative hypotheses, sampling.*

За останні три десятиліття виникла й сформувалась особлива галузь психологічної науки – математична психологія, що характеризується «тенденцією до застосування математичних методів в дослідженні об'єкту психологічного вивчення» [5; 8]. Основною метою використання математичних методів в педагогічних дослідженнях є створення формального математичного апарату для: адекватного описання й моделювання систем, що володіють визначеними властивостями; вираження закономірностей й залежностей в компактній формі і т.д.

Використання математичних методів в педагогічних дослідженнях, на жаль, не завжди супроводжується чіткими уявленнями про можливості і межі їх

застосування. Досить часто дослідник використовує той чи інший метод аналізу даних не тому, що він найбільш доцільний, а лише в силу його доступності. В результаті цього значна частина прикладних досліджень (особливо в галузі вікової та педагогічної психології) використовують спрощений, одномірний аналіз даних, котрий істотно збіднює інформацію, ігнорує множинну детермінацію психологічних явищ, знижує діагностичну та прогностичну цінність отримуваних висновків.

Використання таких видів аналізу, як факторний, багатофакторний, дисперсійний, регресійний і т.д. є досить складним. Між тим, існують математичні методи, котрі поки-що досить рідко використовуються в педагогічних дослідженнях, хоча їх використання дозволило б проводити досить коректну математичну обробку даних, не змушуючи дослідника засвоювати складні розділи вищої математики, і значно спростило б розрахунки й обчислення. Ми маємо на увазі методи непараметричної статистики – порівняно нової й бурхливо розвиваючої в даний час математичної дисципліни.

Популярність непараметричних методів пояснюється стійкістю висновків, простотою математичних засобів. Непараметричні критерії значно менш трудомісткі, а при розподілах, далеких від нормального, більш ефективні й точні, ніж параметричні.

Які ж основні особливості непараметричних методів і як їх можна використовувати в психолого-педагогічних дослідженнях? Непараметрична статистика, як ми вже згадували. Розглядає лише такі ситуації, в яких про функціональний вигляд розподілу нічого невідомо. Єдиною апріорною інформацією вважається інформація про характер випадкових величин (наприклад, неперервні вони чи дискретні) та про тип відмінностей між їхніми розподілами. Легко бачити, що багато які психологічні та педагогічні дослідження з чисто математичної сторони зводяться саме до даного кола питань. Чи істотні відмінності в об’ємі та якостях знань, засвоєних декількома групами учнів (студентів) , що навчаються різним методами? Чи можна

визначити як співвідносяться між собою деякі особистісні риси та успіхи в оволодінні визначеним видом діяльності?

Перш ніж шукати відповіді на такі питання за допомогою методів непараметричної статистики, необхідно ретельно проаналізувати методологічний і власне психологічний аспекти дослідження, коректно сформулювати гіпотезу, чітко спланувати експеримент. Не менш важливо добре уявляти, до якого типу непараметричних задач відноситься розв'язувана дослідником задача (відомості про ці типи див. [8; 23-25].

Найбільш часто в педагогіці й психології зустрічається задача перевірки непараметричних гіпотез. В чому її суть? Перш ніж почати проводити експеримент, дослідник висуває дві взаємовиключаючі гіпотези. Одна з них є статистичною гіпотезою, котру дослідник зазвичай припускає відхилити, і називається нульовою гіпотезою (H_0). В ній висуваються різні припущення щодо значень одного чи декількох параметрів вихідної сукупності. Наприклад, проводиться експеримент за типом соціально-психологічного тренінгу. Потім рівні вибірки досліджуваних, що пройшли і не пройшли тренінг сенситивності, досліджуються за допомогою спеціальних діагностичних методик. Нульова гіпотеза полягає в тому, що частина осіб, які відповідають приблизно однаково на питання міжособистісних відносин й задоволеності ними, буде однакова для обох вибірок.

Альтернативна гіпотеза (H_1) фактично відхиляє нульову гіпотезу. В нашому випадку вона припускає, що значно більший відсоток осіб, задоволених міжособистісними відносинами, знаходиться у вибірці, члени якої попередньо навчалися спілкування за допомогою активних методів. Таким чином, якщо альтернативна гіпотеза підтвердиться (тобто H_0 буде відхилена), дослідник може робити висновки щодо ефективності методу соціально-психологічного тренінгу. Дещо забігаючи наперед,, зауважимо, що чим більші абсолютні значення різниці критеріїв значущості тим більш істотні виявлені відмінності у вибірках.

Будь-яка задача перевірки непараметричних гіпотез виглядає наступним чином. Із двох конкуруючих гіпотез альтернативна завжди непараметрична, а нульова може бути або простою, або непараметричною.

Оскільки хоча б одна гіпотеза є клас невідомих розподілів, різниця між гіпотезами задається в деякому загальному вигляді, не пов'язаному з конкретним видом функції розподілу. Необхідно запропонувати процедуру, результатом котрої був би розв'язок про істинність однієї з гіпотез на основі пред'явленої вибірки (або декількох вибірок).

Наведемо приклад. В дослідженні автора (схема експерименту викладається спрощено з метою більшої наочності математичної сторони) за допомогою методу компетентних суддів було проведено оцінку рівня професійної майстерності в деякій вибірці вчителів (описання методики див в [6]). В результаті було виділено дві групи (умовно названі високо успішними та низько успішними). Далі в усіх досліджуваних було проведено вимірювання рівня суб'єктивного контролю за Є.В. Бажином, що поділило їх на дві групи – із зовнішнім і внутрішнім локусом. В цьому випадку нульова гіпотеза H_0 – кількість учителів із зовнішнім і внутрішнім локусом контролю серед високо успішних учителів однакова. H_1: а) серед високо успішних учителів частка осіб із внутрішнім локусом контролю значно вища; б) серед високо успішних учителів частка осіб із внутрішнім локусом контролю значно нижча; в) серед високо успішних учителів частка осіб із внутрішнім локусом контролю істотно відрізняється від частки осіб із внутрішнім локусом.

Очевидно, що із трьох варіантів альтернативної гіпотези найбільшої уваги заслуговує гіпотеза а), так як вона більш інформативна, ніж гіпотеза в), а зі змістовного боку вірно відображає концепцію автора на відміну від гіпотези б). необхідно статистично перевірити дві альтернативні гіпотези, причому нульову гіпотезу ми завчасно припускаємо відхилити.

При використанні непараметричних методів у дослідника зазвичай не виникає труднощів при виборі типу задачі та її математичного формулювання.

Однак наступний етап – вибір критерію, тобто конкретного інструменту розв'язання отриманої задачі, пов'язаний з деякими труднощами.

Охарактеризуємо конкретні види непараметричних критеріїв та принципи їх вибору для перевірки гіпотез. Зупинимося на декількох, вибір яких зумовлений, з одного боку, міркуваннями прикладного характеру, з іншого – відносною простотою обчислень і наочністю отриманих результатів. Детальне описання математичної процедури для кожного критерію див. в [3], [7], [10]. Ми обмежимось лише описанням можливостей застосування цих критеріїв в психолого-педагогічних дослідженнях різних типів, а також характеристикою придатності даного критерію в залежності від типу шкали вимірювання.

1. Критерій точної ймовірності Фішера використовується для оцінки відмінностей в двох незалежних вибірках і дозволяє отримати точні значення ймовірності подій, котрі в дійсності спостерігались. Цей критерій особливо придатний для малих вибірок, якщо ж об'єм обох вибірок більший за 30, то обчислювальні процедури стають громіздкими, в цьому разі слід використовувати критерій χ^2.

Простіший альтернативний розподіл, що складається з двох градацій, часто зустрічається в дослідженнях при оцінці якісних ефектів: розподіл досліджуваних, котрі успішно й неуспішно виконали завдання, розподіл з наявності чи відсутності якоїсь особистісної риси або кількісний ефект, що досяг визначеної межі і т.д. Скористаємось вищенаведеним прикладом. При вивченні локусу контролю особистості у вибірці з 10 успішних і 10 малоуспішних вчителів було виявлено, що двоє із успішних учителів мають зовнішній локус, а 8 – внутрішній; і навпаки, серед малоуспішних учителів лише троє мали внутрішній локус, а решта – зовнішній. Виникає питання, чи можна при такій малій вибірці зробити висновок про істотні відмінності в типі локалізації контролю над подіями в успішних і малоуспішних учителів.

Нульова гіпотеза буде полягати в тому, що частка осіб із зовнішнім локусом серед успішних і неуспішних учителів однакова, альтернативна – що вона відмінна. Ефективність критерію точної ймовірності Фішера при оцінці

різних двох вибірок можна істотно підвищити, змінивши характер нульової гіпотези та оцінювати не відмінності в середніх тенденціях, а різницю в частоті появ деякої величини досліджуваного показника, що перевищує визначену межу. Цей метод дозволяє також виявляти відмінності у формі розподілів при відсутності відмінностей в середніх тенденціях [4].

2. Критерій значущості змін Макнимара. В багатьох дослідженнях з педагогічної психології використовують пов'язані вибірки. Наприклад, дослідження, в якому одні й ті ж суб'єкти досліджуються як до впливу експериментальної змінної, так і після нього. Найбільший інтерес становить зміна від «до» до «після». Так, дослідника може цікавити порівняльна ефективність різних методів навчання, зміна рівня розвитку деякої особистісної властивості після відповідних виховних впливів, покращення результатів діяльності після тренування навичок і т.д.

При проведенні досліджень за схемою «до – після» відповіді зазвичай пов'язані з дихотомічними категоріями типу «так – ні», «згоден – незгоден», «за – проти». Певна річ, відповіді досліджуваних «до» та «після» можуть різнитися. При використанні критерію Макнимара типова ненаправлена нульова гіпотеза полягає в тому, що в генеральній сукупності частка тих, хто змінює позитивну відповідь на негативну, рівна частці тих, хто змінює негативну відповідь на позитивну.

Якщо критеріальна міра має двозначний характер («краще – гірше», «використовувати – не використовувати»), то придатним критерієм значущості буде **Q – критерій Кокрена.** Цей критерій можна також використовувати і у випадку, коли групи однорідних суб'єктів підлягають більш ніж двом експериментальним впливам і їхні відповіді мають двоваріантний характер [2], [3], [7].

3. Критерій Колмогорова – Смірнова найбільш ефективний, якщо є підстави вважати, що частоти кожного із порядкових значень (рангів) будуть розміщуватися не випадковим чином, а у відповідності з деякою передбаченою схемою. Наприклад, ми можемо припустити, що при оцінці професійної

значущості вольових якостей особистості вчителя, керівники шкіл будуть віддавати перевагу таким властивостям, організованість та старанність. Ми пропонували завучам і директорам шкіл проранжувати за ступенем значущості для вчителя список, що складається з 10 – 15 вольових якостей. Математична процедура вимагає накопичення частот за всіма порядковими значеннями. Потім порівнюються два розподіли: той, що має місце при істинній H_0 (наприклад, відповідальність та старанність так само часто мати перші ранги, як сміливість, рішучість та інші якості) і спостережуваний в дійсності розподіл.

При роботі з вибірками великого обсягу для підрахунку частот складається таблиця, в якій значення записуються у вигляді інтервального ряду. Число інтервалів повинно бути не менше 8 (інакше достовірність висновків знижується). Якщо ж воно більше 15, то використовувати критерій Колмогорова – Смірнова недоцільно, оскільки об'єм обчислень буде дуже великим. Неможна також забувати про те, що розподіли випадковим змінних повинні бути неперервними. В протилежному випадку закони розподілів статистик критерію будуть залежати від законів розподілів самих випадкових величин, а це призводить до неможливості застосування будь-якого непараметричного критерію взагалі [10].

4. Критерій Манна –Уітні застосовують у випадку незалежних вибірок, наприклад, при порівнянні результатів контрольної та експериментальної груп за одним чи декількома показниками. Цей критерій є найбільш сильним при виявленні відмінностей між центральним параметрами (мода, медіана). При використанні критерію Манна – Уітні частіше всього в нульовій гіпотезі формулюються твердження відносно конкретного параметру. Скористаємось прикладом, наведеним в [4; 76].

Перед початком гри двом групам дітей дошкільного віку продемонстрували два мультфільми. Одна група дивилась фільм з яскраво вираженими агресивними елементами, друга – без них. Після перегляду кожна дитина деякий час гралась окремо від своїх товаришів, причому досвідчені спостерігачі реєстрували кількість вчинків агресивного характеру, скоєних

дитиною по відношенню до своїх іграшок на протязі цього періоду. Нульова гіпотеза H_0 – не існує відмінностей між медіанами для відміток про агресивність дітей після перегляду фільмів. Альтернативна гіпотеза H_1 – така відмінність існує.

В даному випадку нас цікавив конкретний параметр (медіана). Однак, не завжди результати спостережень описуються кількісними значеннями, котрі потім можна ранжувати. Крім того, в деяких випадках нас цікавлять більш загальні нульові гіпотези, що стосуються будь-яких відмінностей між генеральними сукупностями. Тоді застосовують критерій серій Вальда – Вольфовича, котрий є чутливим по відношенню до цілої низки відмінностей, включаючи відмінності в медіанах, мірах мінливості та асиметрії.

Наприклад, в процесі експерименту з виховання волі дві групи учасників отримали два різних типи підготовки. Після закінчення експерименту здатність до вольової діяльності кожного учня була індивідуально перевірена в різних життєвих та навчальних ситуаціях, причому вчителі-експерти, що оцінювали їхні дії, не були поінформовані про тип підготовки. H_0 – оцінки здатності до вольової діяльності, отримані в обох групах, були відібрані із загальної генеральної сукупності (тобто обидві групи нічим не відрізняються одна від одної за цим параметром). H_1 – в результаті відмінностей в типі підготовки обидві групи відрізняються за своєю здатність до вольової діяльності (тобто оцінки не належать до однієї генеральної сукупності).

При описанні різних непараметричних критеріїв ми постійно звертались до перевірки статистичних гіпотез непараметричними методами. Однак, перевірка гіпотези, зазвичай лише початок статистичного дослідження. після того, як нульова гіпотеза відхилена, необхідно робити більш змістовні висновки зі статистичного матеріалу: проводити точкові та інтервальні оцінювання, дисперсійний аналіз і т.д.

Універсальність, простота і точність, математична витонченість непараметричних гіпотез привертають до них все більше уваги дослідників.

Застосування цих методів в психолого-педагогічних дослідженнях значно підвищить їхню ефективність та якість.

Література:

1. Бикел П. Математическая статистика/ П.Бикел, К. Доксам. М., 1983. Вып. 2. – 242 с.
2. Грабарь М.И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях/М.И.Грабарь, К.А.Краснянская. М., 1977. – 136 с.
3. Захаров В.П. Применение математических методов в социально-психологических исследованиях/ В.П.Захаров. Л., 1985. – 64 с.
4. Леман Э. Проверка статистических гипотез/Э.Леман. М., 1964. – 297 с.
5. Математическая психология: методология, теория, модели/Под ред. В.Ю. Крылова. М., 1985. – 236 с.
6. Методы системного педагогического исследования/Под ред. Н.В.Кузьминой. Л., 1980. – 172 с.
7. Рунион Р. Справочник по непараметрической статистике / Р.Рунион. М., 1982. – 198 с.
8. Тарасенко П.П. Непараметрическая статистика/ П.П.Тарасенко. Томск, 1976. – 292 с.
9. Тюрин Ю.Н. Непараметрические методы статистики/ Ю.Н.Тюрин. М., 1978. – 64 с.
10. Холлендер М. Непараметрические методы статистики/ М.Холлендер, Д.А.Вульф. М., 1983. – 518с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Захарченко Наталія Вікторівна

УДК 517.521

Стаховська Любов

студентка магістратури
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ПІДСУМОВУВАННЯ РОЗБІЖНИХ РЯДІВ ЗА ПУАССОНОМ-АБЕЛЕМ

Анотація. *У статі розглядається класичний метод підсумовування рядів, виходячи з того, що під терміном «сума ряду» розуміють те, що закладається в означення. В роботі розглянутий метод Пуассона-Абеля та приклади його застосування. Вводяться означення та теореми про актуальність методу.*

Ключові слова: *підсумовування розбіжного ряду, метод Пуассона-Абеля.*

Ряди широко використовуються в математиці, особливо при дослідженні різноманітних технічних проблем, пов'язаних з наближеним інтегруванням диференціальних рівнянь, обчисленням значень функцій та інтегралів, розв'язуванням трансцендентних та алгебраїчних рівнянь.

Вони відіграють важливу роль у математиці принаймні з двох причин: є ефективним інструментом математичних досліджень і одним із найважливіших засобів побудови практичних чисельних методів.

Різноманітні факти із області математичного аналізу висунули в другій половині XIX ст. питання про можливість підсумовування розбіжних рядів у деякому новому розумінні. Деякі методи такого «підсумовування» виявилися особливо зручними. Треба сказати, що до створення Коші строгої теорії границь (і зв'язаної з нею теорії рядів) розбіжні ряди нерідко зустрічалися в математичній практиці. Хоча їх застосування при доведеннях часто призводило до суперечок, але тим не менше, робились спроби надавати їм навіть числове значення.

Сучасний аналіз ставить питання по іншому. В основу покладемо деяке сформульоване означення «підсумовуючої функції», що стосується цілого класу таких рядів.

Поставимо ряду у відповідність деяке число, яке будемо називатись його *сумою*. Ми можемо вважати, що маємо справу з функцією, визначеною для деяких рядів і яка приймає числові значення. Функцію будемо називати *підсумовуючою функцією.*

Можна побудувати надзвичайно велику кількість підсумовуючих функцій. Для виправдання своєї назви вони повинні мати властивості звичайних сум.

Підсумовуюча функція не повинна суперечити звичайному підсумовуванню збіжних рядів. ([1, с. 7-8])

Підсумовування розбіжних рядів за Пуассоном-Абелем

Означення1: *Якщо підсумовуюча функція* $S_p(U)$ *визначається рівністю*

$$S_p(U)=S_p\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n\right)=\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n x^n=\lim_{x\to 1-0}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k x^k \qquad (1)$$

то таке підсумовування називається підсумовуванням за Пуассоном-Абелем.

Приклади:

1. Для ряду $1-1+1-...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$

підсумовування за Пуассоном-Абелем дає

$$\lim_{x\to 1-0}\left(1-x+x^2-...\right)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}$$

2. Розглянемо ряд

$$1-2+3-4+...+(2n-1)-2n+...$$

Для нього $S_p(U)=\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^n$

Але для будь-якого x, близького до 1, але меншого за 1, ряд який стоїть під знаком границі збігається. А тому:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-1)x^n$$

Підсумовуючи ряди які стоять справа, одержимо:

$$S_p(U)=\lim_{x\to 1-0}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4} \qquad ([3, \text{с. } 362\text{-}363])$$

3. Розглянемо ряд

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\theta);\ \text{де}\ (\theta\neq 0) \qquad (2)$$

Тут границя $\lim_{n\to\infty}\cos(n\theta)$ не існує, тому згідно з необхідною умовою збіжності ряду, ряд (2) - розбігається.

Підсумуємо цей ряд за Пуассоном-Абелем. Для цього візьмемо довільне, близьке до 0 зліва, $x=(1-0)<1, x<1$, розглянемо ряд

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos(n\theta);\ \text{де}\ (\theta\neq 0) \tag{3}$$

і складемо ряд з модулів членів цього ряду:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left|x^n\cos n\theta\right| \tag{4}$$

Ознака збіжності Коші дає нам, що

$$\sqrt[n]{\left|x^n\cos n\theta\right|}=|x|\sqrt[n]{\cos n\theta}\le|x|\le 1 \tag{5}$$

Отже ряд (4) збігається. Це означає, що ряд (3) збігається абсолютно, а тому - збігається. Знайдемо його суму.

Зазначимо, що вираз $x^n\cos(n\theta)$ є дійсною частиною комплексного числа $\left(x(\cos\theta+i\sin\theta)\right)^n$.

Тому $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos(n\theta)$

є дійсною частиною виразу

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(x(\cos\theta+i\sin\theta)\right)^n$$

Або, підсумовуючи дану геометричну прогресію, отримаємо

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(x(\cos\theta+i\sin\theta)\right)^n=\frac{1}{2}+\frac{x(\cos\theta+i\sin\theta)}{1-x(\cos\theta+i\sin\theta)} \tag{6}$$

Множення чисельника і знаменника дробу в виразі (6) на комплексне число, спряжене знаменнику, дає нам

$$\frac{1}{2}+\frac{x(\cos\theta+i\sin\theta)}{1-x(\cos\theta+i\sin\theta)}=\frac{1}{2}+\frac{x(\cos\theta+i\sin\theta)*(1-x(\cos\theta+i\sin\theta))}{1-x(\cos\theta+i\sin\theta)*(1-x(\cos\theta+i\sin\theta))} \tag{7}$$

Після обчислень виразу (7) виявляється, що дійсна частина цього виразу дорівнює

$$\frac{1}{2}+\frac{x\cos\theta-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2}=\frac{1*(1-2x\cos\theta+x^2)+2*(x\cos\theta-x^2)}{2*(1-2x\cos\theta+x^2)}=\frac{(1-x^2)}{2*(1-2x\cos\theta+x^2)} \tag{8}$$

Таким чином , враховуючи (3), що $\left(\theta \neq 0\right)$, розраховуємо суму ряду (2) за Пуассоном - Абелем, як

$$S_p\left(U\right) = \lim_{x \to 1-0}\left[\frac{\left(1-x^2\right)}{2*\left(1-2x\cos\theta+x^2\right)}\right] = 0 \qquad (9)$$

Теорема1: *Якщо ряди U і V підсумовувані за Пуассоном-Абелем, то їх добуток W також підсумовується за Пуассоном-Абелем*

$$S_p\left(U\right)*S_p\left(V\right) = S_p\left(W\right) \qquad (10)$$

4. Розглянемо ряд

$$U: 1-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{8}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3*2^{n-1}}+\ldots \qquad (11)$$

Він не є збіжним навіть умовно, оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(-1\right)^{n+1}\frac{2^n+\left(-1\right)^{n+1}}{3\cdot 2^{n-1}}\right| = \frac{2}{3} \neq 0$$

Однак цей ряд може бути отриманий в результаті перемноження ряду

$$1-1+1-\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1} \qquad (12)$$

і геометричної прогресії

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots \qquad (13)$$

Член отриманого при перемноженні ряду буде

$$u_n = \left(-1\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\ldots\pm\frac{1}{2^n}\right) \qquad (14)$$

і підсумовування скінченної геометричної прогресії, яка стоїть у дужках дає можливість знайти $S_p\left(U\right)$.

Вище доведено, що сума ряду (12) $S_p\left(U\right)$ за Пуассоном-Абелем дорівнює $\frac{1}{2}$, а прогресія (13) збігається в звичайному розумінні (а значить і за Пуассоном - Абелем) і має суму рівну 2.

Звідси ряд (11) також збігається за Пуассоном - Абелем і його сума дорівнює $S_p(U) = 2 * \frac{1}{2} = 1.$ ([5, с. 264])

Література:

1. Воробьев Н.Н. Теория рядов. М.: Наука, - 1986. – 524 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
4. Уиттекер Э.Г., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. М.: Физматгиз, - 1963. Т.1, Т.2. – 515 с.
5. Харди Г. Расходящиеся ряды / Г. Харди. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1951. — 504 с.
6. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

Науковий керівник: канд. фіз..-мат. наук, доцент Бак Сергій Миколайович

УДК 519.2

Смірнова Анастасія

студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ПОГЛИНАЮЧІ ЛАНЦЮГИ МАРКОВА

Анотація**:** *У статті викладено дослідження поглинаючих ланцюгів Маркова. Також розглянуто їх характеристичну матрицю, математичне сподівання та дисперсію.*

Ключові слова**:** *Ланцюги Маркова, поглинаючий стан, поглинаючі ланцюги, фундаментальна матриця, незворотні стани.*

Abstract: *The article studies Markov's absorbing chains. Also, their characteristic matrix, mathematical expectation and variance are considered.*

Keywords**:** *Markov chains, absorbing state, absorbing chains, fundamental matrix, irreversible states.*

Вступ. Дискретні ланцюги Маркова є зручною та ефективною моделлю бінарних відображень. Це пояснюється тим, що рівні якості бінарного відображення мають лише два значення, відображення дискретизоване при внесені його в пристрій, що запам'ятовує відображення в ЕБМ, а механізм формування відображень зазвичай забезпечує певну степінь статистичної залежності між сусідніми звітами. Моделі Маркова доволі часто використовуються при обробці відображень, в тому числі й бінарних [1, с. 16].

Основною характеристикою ланцюга Маркова є умовна ймовірність переходу виду $p_{ij} - p\{a_j^{n+1}/a_i^n\}$, що означає ймовірність потрапляння процесу в стан a_j в момент часу $n+1$, при умові, що в момент часу n процес знаходився в стані a_i. При незалежності вказаних умов імовірностей від часу маємо однорідні ланцюги Маркова. Ймовірності $p_{ij}(i,j=\overline{1,l})$ утворюють квадратну матрицю ймовірностей переходів p розмірністю $l \times l$ [1, с. 16].

Стан $a_j(j \geq 1)$ називається поглинаючим, якщо $p_{ij} = 1$. Поглинаючим ланцюгом Маркова називається ланцюг, у якому є хоча б один поглинаючий стан і з будь-якого стану досяжним є принаймні один поглинаючий [2].

Результати дослідження. Нехай маємо $n-s$ ергодичних та s незворотних станів. Якщо об'єднати всі ергодичні стани в одну групу і так само всі незворотні в іншу, то можемо записати канонічну форму матриці переходу

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ O & E \end{pmatrix}.$$

де Q – матриця розмірності $s \times s$, яка описує поведінку процесу до виходу з множини незворотних станів, R – матриця розмірності $s \times (n-s)$, яка відповідає переходам від незворотних до ергодичних станів, O – нульова матриця розмірності $(n-s) \times s$, E – одинична матриця розмірності $(n-s) \times (n-s)$.

Теорема 1. Для будь-якого поглинаючого ланцюга Маркова матриця $E - Q$ оборотна, причому

$$(E \quad Q)^{-1} = E \mid Q \mid Q^2 \mid \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k.$$

Означення 1. Фундаментальною матрицею для поглинаючого ланцюга Маркова називається матриця $N = (E - Q)^{-1}$.

Позначимо через n_j функцію, рівну загальному числу проміжків часу, проведених процесом в S_j, а u_j^k – функція, що дорівнює 1, якщо процес після k кроків знаходиться в S_j, і в протилежному випадку дорівнює 0.

Теорема 2. $M_i(n_j) - N,$

де T – множина незворотних станів, $S_i, S_j \in T.$

Доведення

□ Можемо бачити, що

$$n_j = \sum_{k=0}^{\infty} u_j^k.$$

Тоді

$$M_i(n_j) = M_i\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_j^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} M_i(u_j^k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left(1 - p_{ij}^{(k)}\right) \cdot 0 + p_{ij}^{(k)} \cdot 1\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{p_{ij}^{(k)}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k = N.$$

Що і треба було довести.■

Означення 2. Введемо нові вектори та матриці

$N_2 = N\left(2N_{dg} - E\right) - N_{sq}$ – матриця $s \times s$,

$B = NR$ – матриця $s \times (n - s)$,

$\tau = N\xi$ – s-компонентний вектор-стовпець,

$\tau_2 = \tau(2N - E) - \tau_{sq}$ – s-компонентний вектор-стовпець.

Теорема 3.

$QN = NQ = N - E.$

Доведення

□ Із теореми 1 та означення 1 маємо

$N - E + Q + Q^2 + \cdots$

Тоді

$$QN - NQ - Q + Q^2 + Q^3 + \cdots$$

співпадає з початковим рядком для N без доданку E. ■

Теорема 4.

$D_i(n_j) = N_2$ при $s_i, s_j \in T$.

Означення 3. Нехай функція t дорівнює повному часу разом з початковим часом, який проводить процес у незворотному стані.

Теорема 5.

$M_i(t) = \tau, \quad D_i(t) = \tau_2,$ при $s_i \in T$.

Наслідок. Якщо π початковий розподіл для поглинаючого ланцюга і π' утворюється з останніх s компонентів вектора π. Інакше кажучи, π' дає початкові ймовірності серед незворотних станів, тоді

$$M_\pi(n_j) - \pi' N, \quad D_\pi(n_j) - \pi' N(2N_{dg} - E) - (\pi' N)_{sq},$$

$$M_\pi(t) = \pi'\tau, \quad D_\pi(t) = \pi'(2N - E)\tau - (\pi'\tau)_{sq}.$$

Теорема 6. Якщо b_{ij} – ймовірність того, що процес, який виходить з незворотного стану s_i, залишиться у поглинаючому стані s_j тому

$$b_{ij} = B = NR$$

при $s_i, s_j \in T$.

Означення 4. Множина станів S називається відкритою, якщо з будь якого стану з S можна потрапити у деякий стан із $\bar{S}$.

Теорема 7. Множина станів S відкрита тоді і тільки тоді, коли ніяка ергодична множина не є підмножиною S.

Доведення

□ Входячи у будь-яку ергодичну множину, яка знаходиться в S, процес вже не може з нього вийти, таким чином, S не є відкритою. З іншого боку, із будь-якого стану можна досягти ергодичного. Потрапивши в нього, процес може досягати будь-якого стону в тому самому ергодичному класі. Отже, якщо S не містить ергодичної множини, то для будь-якого елемента з S знайдеться ергодичний стан в

S і який можна досягти з цього елемента. Таким чином, S відкрита множина. Що і треба було довести.■

Теорема 8. Якщо S – відкрита множина, а всі стани із S перетворені у поглинаючі, то ланцюг Маркова, який ми отримали, буде поглинаючим і множина всіх незворотних станів цього ланцюга співпадатиме з S.

Доведення

□ Так як S відкрита множина, то з кожного стану з S можна досягти стану з $\bar{S}$, який за умовою є поглинаючим. Таким чином, ланцюг є поглинаючим.

Оскільки з будь-якого елемента S процес може досягти поглинаючого стану, тому усі стани S мають бути незворотними в новому процесі. Що і треба було довести.■

Теорема 9. Якщо S – відкрита множина станів, а Q = під матриця розмірності $s \times s$ матриці P, яка відповідає цим станам, p_a – вектор-стовпець з s компонентами p_{ia}, де s_i – елементи S, $s_a \in \bar{S}$ і нехай процес починається в стані s_i, то матимемо

1. $ij - ti$ елемент матриці $N = (E \quad Q)^{-1}$ є середнім значенням часу проведеного процесом в S_j до моменту виходу з S;

2. $ij - ti$ елемент матриці $N_2 = N(2N_{dg} - E) - N_{sq}$ є дисперсією тої самої випадкової величини;

3. $i - ma$ компонента вектора $\tau = N\xi$ є середнім значенням часу проведеного в S;

4. $i - ma$ компонента вектора $\tau_2 = (2N - E)\tau - \tau_{sq}$ є дисперсією тої самої величини;

5. $i - ma$ компонента вектора $N\rho_a$ є ймовірністю того, що в момент, коли процес виходить з S він потрапляє в s_a.

Теорема 10. Нехай функція r_i дорівнює часу, протягом якого процес перебуває в непоглинаючому стані s_i, після того як цей стан досягнуто, разом із моментом досягнення.

$$M_i(r_i) = \frac{1}{1 \quad p_{ii}}, \qquad (1)$$

$$D_i(r_i) = \frac{p_{ii}}{(1-p_{ii})^2}. \quad (2)$$

Таким чином, умовна ймовірність того, що процес перейде в S_j за умови якщо він покинув s_i, дорівнює $\frac{p_{ij}}{1-p_{ii}}$. (3)

Доведення

□ Якщо множина складається з одного елемента s_i, то вона відкрита, тому застосуємо теорему 9 до цієї множини. У нашому випадку

N є матрицею розмірності 1×1 і співпадає з τ;

величина єдиного елемента N дорівнює $\frac{1}{1-p_{ii}}$.

Таким чином, із першого або третього твердження теореми 9 можна отримати (1). Аналогічно, те, що $N_2 = \tau_2$ і (2) випливає з другого або четвертого твердження тієї ж теореми. (3) можемо отримати з п'ятого твердження теореми 9, якщо замість ρ_j вектор з єдиною компонентою p_{ij}. Так як стан s_i не є поглинаючим, то $p_{ii} < 1$.

Що і треба було довести.■

Нехай m – число різних незворотніх станів в які коли-небудь потрапляє процес, n_j – час, за який процес знаходиться у незворотному стані s_i, h_{ij} - імовірність того, що процес коли-небудь досягне незворотного стану S_j починаючи з незворотного стану s_i.

Теорема 11. $H - h_{ij} - (N - E)N_{dg}^{-1}$.

Теорема 12.

$$P_i(n_j - \delta_{ij} = k) = \begin{cases} E - H, \ k = 0, \\ H \cdot H_{dg}^{k-1}(E - H_{dg}) = (N-1)N_{dg}^{-2}(E - N_{dg}), k > 0. \end{cases}$$

Теорема 13. Математичне сподівання та дисперсія числа змін станів у поглинаючому ланцюзі можна підрахувати, якщо покласти для всіх незворотних станів $p_{ii} = 0$ і пронормувавши кожен рядок так, щоб сума його елементів дорівнювала 1. Тоді $i - ma$ компонента нового вектора τ дасть середнє значення числа змін станів для нового процесу. Дисперсія тієї самої величини буде дорівнювати $i - mii$ компоненті нового вектора τ_2.

Доведення

□ Нехай ланцюг Маркова починається з непоглинаючого стану. Побудуємо новий процес, стан $\hat{f}_n$ якого в момент n задається наступним чином: у тому разі, якщо частинка поглинута станом s_k, причому число змін станів було меншим за n, то $\hat{f}_n = s_k$. В іншому випадку $\hat{f}_n$ – стан, в якому процес знаходився після n-ої зміни стану. Зрозуміло, що новий процес це Марковський ланцюг. Імовірності переходу з стану s_i, який є поглинаючим, такі ж, як і в матриці P. Якщо s_i є незворотним станом, то

$$\hat{p}_{ii} = P_i(\hat{f}_1 = i) = 0,$$

$$\hat{p}_{ij} = P_i(\hat{f}_1 = j) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^n p_{ij} = \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}}.$$

Математичне сподівання та дисперсію часу до поглинання для процесу $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3, \ldots$ можемо визначити за цією матрицею переходу. Цей час представляє число змін станів у новому ланцюзі, який виходить з s_i.

Припустимо, що поглинаючий ланцюг стартує в непоглинаючому стані, тоді обчислимо всі ймовірності за умови, що процес к даному поглинаючому стані s_1 закінчується. Матимемо новий поглинаючий ланцюг із єдиним поглинаючим станом s_1. Тоді незворотні стани залишаються такі самі, тільки змінюються ймовірності переходу з них.

Нехай p – «в положенні s_1 новий процес поглинається».

Для незворотного стану s_i перехідні ймовірності для нового процесу виглядають

$$P_i(\hat{f}_1 = s_j | p) = \frac{P_i(f_1 = s_j \cap p)}{P_i(p)} = \frac{P_i(p | f_1 = s_j) P_i(f_1 = s_j)}{P_i(p)},$$

$$\hat{p}_{ij} = \frac{b_{j1} p_{ij}}{b_{i1}}.$$

Якщо вважати, що $h_{11} = 1$, то ця формула може застосовуватись і при $j - 1$. Фундаментальну матрицю для $\hat{P}$ отримаємо наступним чином. Матриця $\hat{R}$ це є

вектор-стовпець $\hat{R} = \left\{\frac{p_{i1}}{b_{i1}}\right\}$, D_0 – діагональна матриця з діагональними елементами b_{j1}, коли S_j незворотні. Матимемо $\hat{Q} = D_0^{-1} Q D_0$.

Тоді $\hat{Q}^n = D_0^{-1} Q^n D_0$,

$$\hat{N} = D_0^{-1}(E + Q + Q^2 + \cdots) D_0 = D_0^{-1} N D_0.$$

Виходячи з $\hat{N}$ можна отримати $\hat{B}$ і $\hat{t}$. ■

Література:

1. Фурман Я. А., Юрьев А. Н., Яншин В. В. Цифровые методы обработки и распознавания бинарных изображений. – Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1992. – 248 с.

2. Absorbing Markov chain [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: https://en.wikipedia.org/wiki/Absorbing_Markov_chain.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Вотякова Леся Андріївна

УДК 514.122

Тимчишена Ірина

студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ТРОЯНДИ В МАТЕМАТИЦІ

Анотація. *У даній роботі наведено класифікацію кривих Гвідо Гранді та проаналізовано їх основні властивості. Проведено дослідження форми цих кривих. Описано чудові властивості чотирипелюсткових троянд.*

Ключові слова. *Циклоїдальні криві, трохоїди, гіпотрохоїди, епітрохоїди, подера, епіциклоїда, гіпоциклоїда, астроїда, крива Штейнера, інверсія.*

Abstract. *In this paper, the classification of Guido Grandi curves is presented and their main properties analyzed. The study of the shape of these curves was carried out. The wonderful properties of quadruped roses are described.*

Key words. *Cycloid curves, trochoids, hypothyroidists, epithroids, podera, epicycloid, hypocycloid, astroids, Steiner curve, inversion.*

Дослідженням троянд займався першим італійський геометр Гвідо Гранді. Повна теорія цих кривих була викладена ним у творі «Flores geometrici ex rhodanearum et claelarum descriptione resultantes», виданому в 1728 році. Математичним дослідженням форми квітів і листя займався також Хабенніхт – геометр XIX ст., результати якого були викладені ним у творі «Die analitische Form der Blatter», виданому в 1896 році. Свої судження він засновував на тому, що в переважній більшості випадків обрис листка або пелюстки є кривою, яка симетрична відносно осі, і так як відстань між двома будь-якими її точками буде сталою величиною, то в полярній системі рівняння такої кривої можна записати у вигляді $\rho = F(\varphi)$, де права частина є функцією однозначною, безперервною і періодичною функцією з періодом 2π. Характеристика цієї функції доповнюється ще й тим міркуванням, що рівним за абсолютною величиною значенням φ повинні відповідати рівні значення ρ а, отже, шукану функцію можна виразити, наприклад, як $F(\varphi) = f(\cos\varphi)$. У першому наближенні її можна представити рівністю

$$\rho = a_0 + a_1\cos\varphi + a_2\cos^2\varphi + a_3\cos^3\varphi + ... + a_n\cos^n\varphi.$$

Виражаючи тут $\cos^k\varphi$ за відомою формулою через $\cos\varphi$, $\cos 2\varphi$, …, $\cos k\varphi$, можна записати шукане рівняння обрису листка або квіткової пелюстки у вигляді $\rho = b_0 + b_1\cos\varphi + b_2\cos 2\varphi + ... + b_n\cos n\varphi$, де коефіцієнти визначаються в конкретному випадку на основі відповідних вимірювань. Хабенніхт отримав цілий ряд рівнянь, які з досить гарним наближенням виражали аналітично форми листя клена, щавлю, верби і т.д . Ось деякі з цих рівнянь:

$\rho = 4(1+\cos 3\varphi) + 4\sin^2 3\varphi$ – лист щавлю;

$\rho = 4(1+\cos 3\varphi) - 4\sin^2 3\varphi$ – лист трилисника;

$\rho = 3(1+\cos^2\varphi) + 2\cos\varphi + \sin^2\varphi - 2\sin^2 3\varphi\cos^4\frac{\varphi}{2}$ – лист плюща.

Трояндами або кривими Гвідо Гранді, називають сімейство кривих, полярне рівняння яких записується у вигляді

$$\rho = a\sin k\varphi \qquad (1)$$

або у вигляді $\rho = a\cos k\varphi$, де a і k – сталі; надалі ми будемо вважати їх додатними числами.

Якщо модуль $k = \frac{m}{n}$, тобто число раціональне, то троянди будуть алгебричними лініями, причому завжди парного порядку. Для доведення перейдемо до декартової системи координат. Застосуємо відому тригонометричну формулу

$$\sin A\varphi = \binom{A}{1}\cos^{A-1}\varphi\sin\varphi - \binom{A}{3}\cos^{A-3}\varphi\sin^3\varphi + \binom{A}{5}\cos^{A-5}\varphi\sin^5\varphi - \ldots,$$

де A – будь-яке додатне число. Застосовуючи цю формулу до лівої і правої частин тотожності $\sin m\varphi = \sin n\frac{m}{n}\varphi$, отримаємо:

$$\binom{m}{1}\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi - \binom{m}{3}\cos^{m-3}\varphi\sin^3\varphi + \binom{m}{5}\cos^{m-5}\varphi\sin^5\varphi - \ldots =$$

$$= \binom{n}{1}\cos^{n-1}\frac{m}{n}\varphi\sin\frac{m}{n}\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\frac{m}{n}\varphi\sin^3\frac{m}{n}\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\frac{m}{n}\varphi\sin^5\frac{m}{n}\varphi - \ldots (2)$$

Зауважимо, що за формулами переходу,

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2},\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

крім того, з рівняння троянд випливає, що

$$\sin\frac{m}{n}\varphi = \frac{\rho}{a} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a},\ \cos\frac{m}{n}\varphi = \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2-\left(x^2+y^2\right)}}{a}.$$

Підставляючи ці значення в тотожність (2), ми і знайдемо рівняння троянд у декартовій системі:

$$a^n\left[\binom{m}{1}x^{m-1}y - \binom{m}{3}x^{m-3}y^3 + \binom{m}{5}x^{m-5}y^5 - \ldots\right] =$$

$$=\binom{n}{1}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{m+1}{2}}\left[a^2-\left(x^2+y^2\right)\right]^{\frac{n-1}{2}}-\binom{n}{3}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{m-1}{2}}\left[a^2-\left(x^2+y^2\right)\right]^{\frac{n-3}{2}}+\ldots$$ Отрим

ане рівняння буде раціональним, якщо *m* і *n* є числами непарними. Якщо ж одне з них буде парним, то рівняння може бути раціональним тільки після піднесення обох його частин до квадрату. У першому випадку його степінь виявиться рівним $m+n$, а в другому – $2(m+n)$. Таким чином, якщо числа *m* і *n* є непарними, то порядок троянди дорівнює $m+n$, якщо одне з цих чисел парне, то троянда буде алгебричною лінією порядку $2(m+n)$ [3].

Проведемо дослідження форми троянд.

На підставі того, що права частина рівняння не може перевищувати величини *a*, то вся крива вміщається всередині кола з радіусом, що дорівнює *a*. Так як $\sin k\varphi$ є функцією періодичною, то троянда складається з конгруентних пелюсток, симетричних відносно найбільших радіусів, кожен з яких, дорівнює *a*. Кількість цих пелюсток залежить від величини модуля *k*.

Прості міркування приводять до таких висновків:

1) якщо модуль *k* – ціле число, то троянда складається з *k* пелюсток при *k* непарному і з *2k* пелюсток при *k* парному (рис. 1, *а, б*);

2) якщо модуль *k* – раціональне число, що дорівнює $\frac{m}{n}$ $(n>1)$, то троянда складається з *m* пелюсток у випадку, коли обидва числа *m* і *n* непарні, і з 2*m* пелюсток, якщо одне з цих чисел є парним; при цьому, на відміну від першого випадку, кожна наступна пелюстка буде частково покривати попередню (рис. 2, *в, г, д, е*);

3) якщо модуль *k* – число ірраціональне, то троянда складається з нескінченно багатьох пелюсток, що частково накладаються одна на одну.

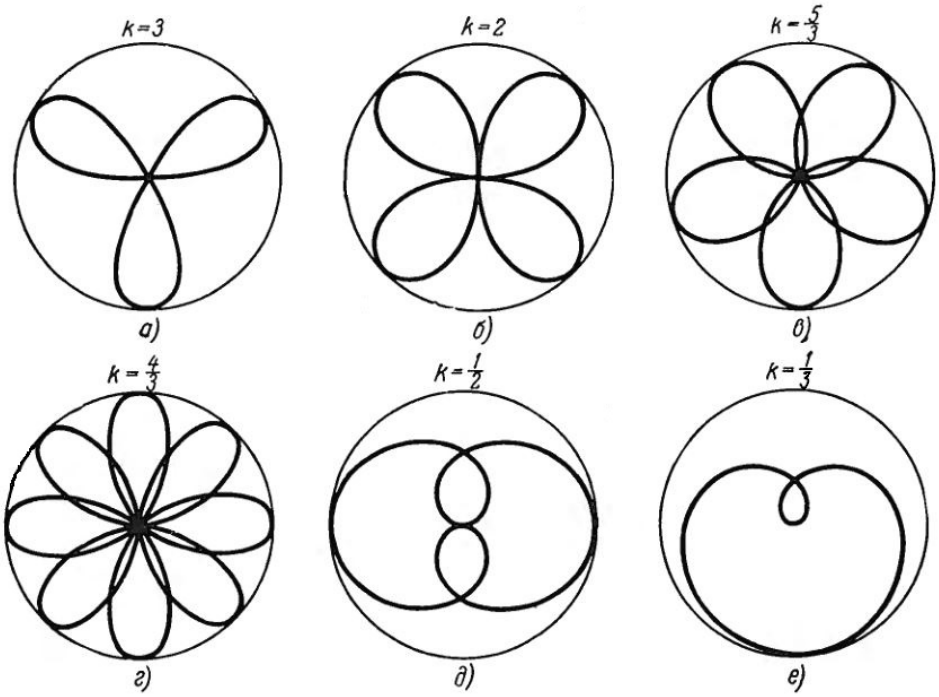


Рис. 1

Додамо ще те, що кількість різних троянд одного і того самого порядку p у випадку, якщо p є числом, кратним 4, дорівнює значенню відомої функції $\pi(p)$, що виражає число простих чисел, менших p. Якщо ж p не ділиться на 4, а тільки на 2, то кількість троянд одного і того самого порядку p дорівнює $\pi(p)+\pi\left(\frac{p}{2}\right)$. Як виняток, число троянд 4-го порядку дорівнює $\pi(4)=2$ $\left(k=3,\ k=\frac{1}{3}\right)$, число різних троянд 6-го порядку дорівнює $\pi(6)=\pi(3)=4$ $\left(k=2,\ k=\frac{1}{2},\ k=5 \text{ і } k=\frac{1}{5}\right)$ [3].

На рис. 2 наведено загальний вигляд полярної троянди при різних значеннях $k=\frac{m}{n}$.

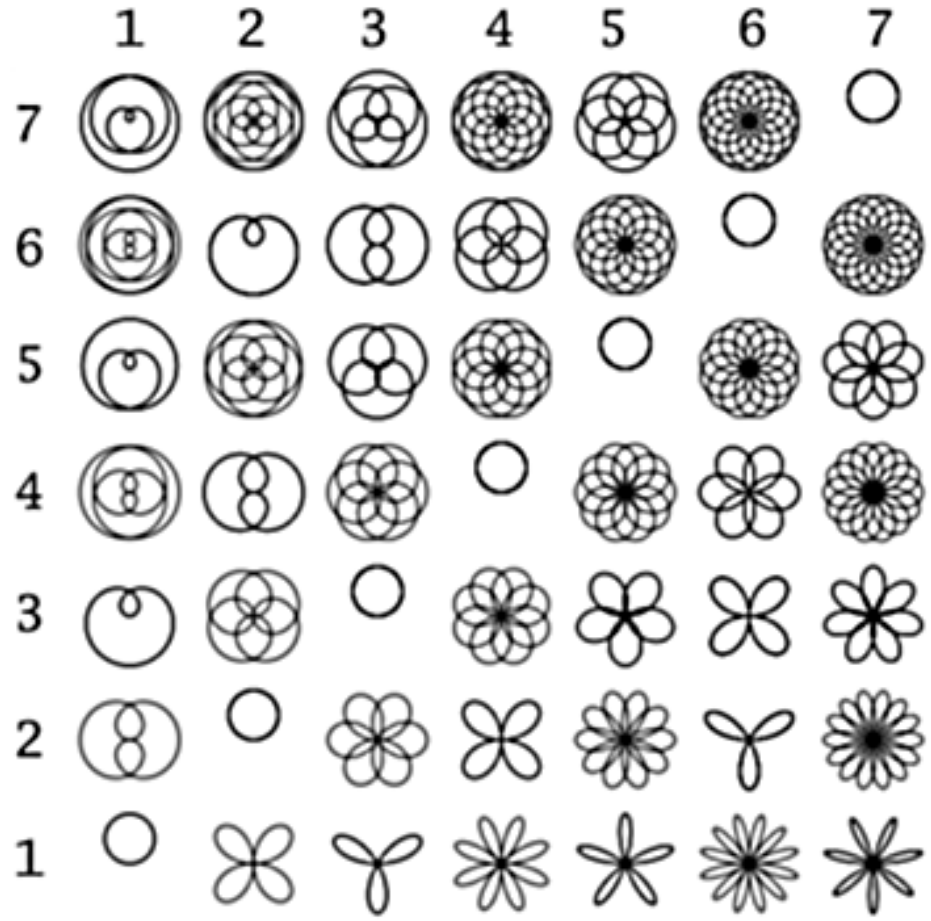


Рис. 2

Троянди відносяться до сімейства циклоїдальних кривих. Вони є трохоїдами, точніше, гіпотрохоїдами, якщо $k<1$, і епітрохоїдами, якщо $k>1$.

Із сімейством циклоїдальних кривих троянди пов'язані і тим, що вони є подерами епі- і гіпоциклоїд відносно центру їх нерухомого кола.

Площа однієї пелюстки троянди знаходиться за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{k}}\rho^2 d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{k}}\sin^2 k\varphi d\varphi=\frac{a^2}{4k}\left[k\varphi-\frac{1}{2}\sin 2k\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{k}}=\frac{\pi a^2}{4k}.$$

Довжина дуги троянди виражається еліптичним інтегралом 2-го роду.

Чотирипелюсткова троянда виражається рівнянням $\rho=a\sin 2\varphi$, або, в декартовій системі, $\left(x^2+y^2\right)^3-4a^2x^2y^2=0$.

Трипелюсткова троянда має рівняння $\rho=a\sin 3\varphi$ або, в декартовій системі, $\left(x^2+y^2\right)^2=a\left(3x^2y-y^3\right)$.

Перша з них є алгебричною лінією 6-го порядку; початок координат служить для неї чотирикратною точкою з дотичними, що збігаються з осями координат (рис. 1, *б*).

Чотирипелюсткова троянда є подерою астроїди, а трипелюсткова є подерою кривої Штейнера.

Зазначимо ще такі властивості чотирипелюсткової троянди.

1. Чотирипелюсткова троянда є геометричним місцем основ перпендикулярів, опущених з початку координат на відрізок сталої довжини, кінці якого ковзають по координатних осях.

Дійсно, з рис. 3 маємо $PD = \frac{y^2}{x}$, тоді $MD = \sqrt{y^2 + \frac{y^4}{x^2}}$; крім того, $\frac{CD}{MD} = \frac{OD}{PD}$. Замінюючи члени пропорції відповідними виразами, одержимо рівняння $\left(x^2 + y^2\right)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0$, що виражає троянду.

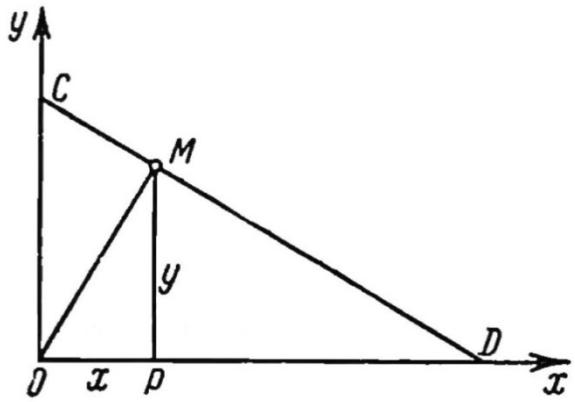


Рис. 3

2. Чотирипелюсткова троянда є геометричним місцем вершин прямих кутів, сторони яких дотикаються до астроїди.

3. Чотирипелюсткова троянда утворюється в результаті інверсії відносно початку координат, так званої хрестоподібної кривої, що має рівняння $\frac{a^2}{x^2} + \frac{a^2}{y^2} = 1$, або в полярній системі координат, $\rho = \frac{2a}{\sin 2\varphi}$ (рис. 4).

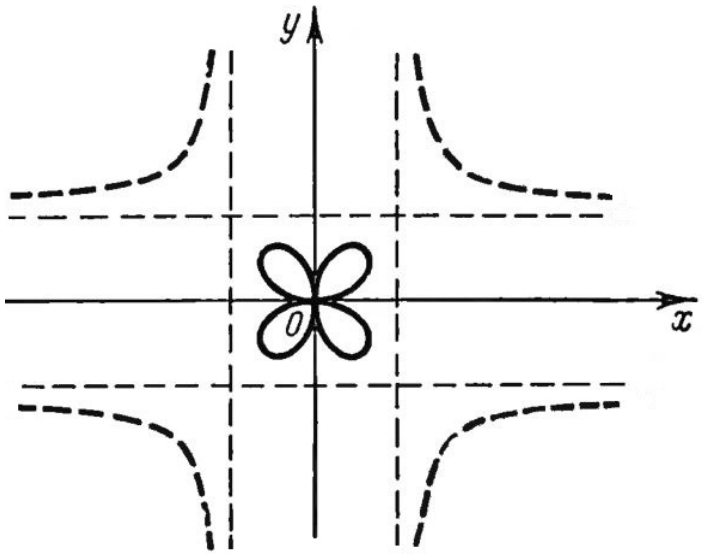


Рис. 4

На рис. 5 зображено симетричну чотирипелюсткову троянду. Параметричні рівняння якої:

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{3\cos 2t \cdot \cos t + 0{,}82} \\ y = \pm\sqrt{3\cos 2t \cdot \sin t + 0{,}82} \end{cases}.$$

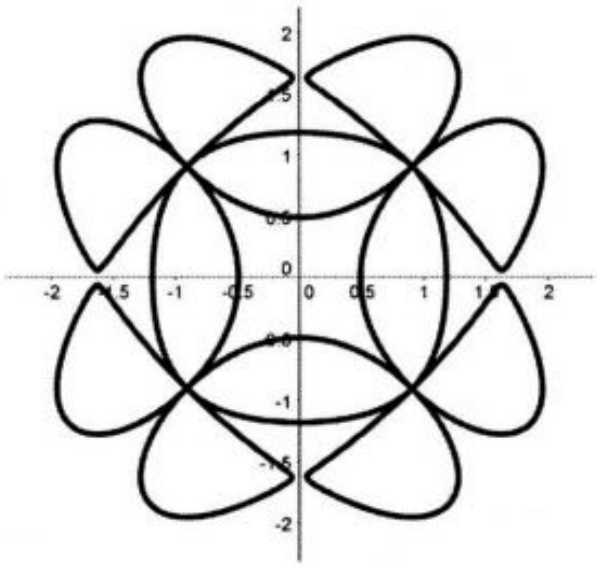


Рис. 5

Площа, яку обмежує чотирипелюсткова троянда, дорівнює $\frac{1}{2}\pi a^2$; площа, яку обмежує трипелюсткова троянда, дорівнює $\frac{1}{4}\pi a^2$.

Висновки. Отже, чудові криві Гвідо Гранді часто зустрічаються в повсякденному житті і використовуються не тільки в математиці, але й у фізиці

та архітектурі. Відкриття та вивчення цих кривих стало величезним здобутком у нашому житті та науці.

Література:

1. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математики / М.Я. Выгодский. – Москва: Наука, 1964. – 872 с.
2. Маркушевич А.И. Замечательные кривые / А.И. Маркушевич. – Москва, 1952. – 34 с.
3. Савелов А.А. Плоские кривые: систематика, свойства, применения / А.А. Савелов. – Москва: Наука, 1960. – 296 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Тютюн Любов Андріївна

УДК 378:[001.102:005.336.2]

Черниш Вікторія

студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ІНФОРМАЦІЙНА КОМПЕТЕНТНІСТЬ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ ЯК УМОВА АДАПТАЦІЇ МОЛОДОГО ФАХІВЦЯ В ОСВІТНЬОМУ ПРОСТОРІ ШКОЛИ

Анотація. *У статті розглянуто поняття «інформаційна компетентність», її сутність і структуру. Охарактеризовано базові ІКТ-компетенції вчителя.*

Ключові слова*: компетентність, інформаційна компетентність.*

Annotation. *The article deals with the concept of "information competence", its essence and structure. The basic ICT competencies of the teacher are described.*

Key words: *competence, information competence.*

В умовах модернізації освіти, коли основною задачею є забезпечення стійкості її розвитку, одним із головних ресурсів такого розвитку стає вчитель, здатний бути суб’єктом змін в освіті і працювати в умовах змін. Радикально змінюється статус педагога, його функції, відповідно змінюються і вимоги до його професійної компетентності, до рівня його професіоналізму.

Із роками ставлення до школи змінюється. Освіта стає цілісною системою суспільної практики, реальним фактором соціального оновлення. Зрозуміло, що у нинішньому потоці інновацій, творчого пошуку, яким живе школа, праця вчителя має особливе значення. Педагогу необхідно створити умови для творчого саморозвитку учнів, і це вимагає від нього високого рівня психолого-педагогічної компетентності [4, с. 31].

Сучасний учитель повинен активно використовувати у своїй професійній діяльності усі технічні засоби, якими забезпечена школа; постійно вдосконалювати свою майстерність.

Зазвичай, професіоналізм викладача оцінюється рівнем його предметної кваліфікації і сформованими педагогічними компетенціями. Але в умовах багатоформатності інформаційних ресурсів, розвитку електронних бібліотек та інформатизації всієї системи професійної освіти необхідним компонентом якісного викладання стає також і наявність інформаційних компетенцій.

У наш час сучасна школа повинна готувати випускників до життя в інформаційному суспільстві, в якому головними продуктами виробництва є інформація та знання. Однією з основних задач, яку повинна вирішити школа, є створення таких умов навчання, за яких діти уже в школі могли б розкрити свої можливості, підготуватися до життя у високотехнологічному конкурентному світі [7, с. 32].

Тому однією із головних задач сучасної вищої освіти є формування інформаційної компетентності майбутніх учителів.

Інформаційна компетентність педагога розглядається як частина його професійної компетентності і є необхідною ланкою навчальної діяльності вчителя, якісною характеристикою інформаційного аспекту педагогічної діяльності. Інформаційна компетентність педагога виражається у наявності комплексу знань, умінь, навичок і рефлексивних установок у взаємодії з інформаційним середовищем.

На думку вітчизняних і закордонних учених (Р. Гуревич, М. Кадемія, М. Козяр, А. Коломієць, Дж. Равен, В. Краєвський та ін.) нині зростає значущість

інформаційної компетентності педагогів, які здійснюють свою професійну діяльність в умовах широкого впровадження засобів інформаційних і комунікаційних технологій в освітній простір школи. Від того, наскільки якісно будуть підготовленими педагогічні кадри, наскільки «вільно» вони будуть використовувати засоби інформаційних і комунікаційних технологій у навчальному процесі, залежить майбутнє всього світового соціуму.

Ми погоджуємося з Р. Гуревичем, який зауважує, що «широке охоплення ІКТ усіх сфер освітньої діяльності сприяє розвитку системи освіти та відповідає сучасним нормам інформатизації суспільства» [3, с. 8].

У науковій літературі можна зустріти досить багато визначень терміну «інформаційна компетентність». Як правило, вчені це поняття визначають як складне індивідуально-психологічне утворення на основі теоретичних знань, практичних умінь у галузі інформаційних технологій і певного набору особистісних якостей [2, с. 45].

Так, А. Семенов визначає інформаційну компетентність як нову грамотність, до складу якої входять уміння активної самостійної обробки інформації людиною, прийняття принципово нових рішень у непередбачуваних ситуаціях із використанням технологічних засобів [8, с.32].

Н. Дмітрієнко зауважує, що інформаційна компетентність є однією «…з основних компетентностей сучасного педагога, що має об'єктивну і суб'єктивну сторони. Об'єктивна сторона виражається у вимогах, які суспільство пред'являє до професійної діяльності педагога в процесі навчання іноземної мови і культури країни, мова якої вивчається. Суб'єктивна сторона інформаційної компетентності визначається індивідуальністю учителя, його професійною діяльністю, особливостями мотивації у вдосконаленні і розвитку педагогічної майстерності» [4, с. 33].

С. Трішина у своєму дослідженні розглядає інформаційну компетентність як «інтегративну якість особистості, що є результатом процесів відбору, засвоєння, перероблення, трансформації й генерування інформації в особливий тип предметно-специфічних знань, за допомогою якої виробляються,

приймаються, прогнозуються й реалізовуються оптимальні рішення у різних сферах діяльності» [6].

Аналіз різних визначень дозоляє зробити висновок про те, що інформаційна компетенція пов'язана зі знаннями й уміннями роботи з інформацією на основі нових інформаційних технологій.

Діяльність педагога є одним із основних факторів, що визначає успішність учня з того чи іншого предмету. Інформаційна компетентність учителя означає здатність здійснювати навчальний процес відповідно до цілей, які ставляться перед інформаційним суспільством, перед системою загальної освіти, і продуктивно використовувати ІКТ в цьому процесі [9, с. 3].

Таким чином, під ІКТ-компетентністю вчителя-предметника ми будемо розуміти особистісну якість педагога, яка проявляється в його готовності і здатності самостійно використовувати інформаційно-комунікаційні технології у своїй предметній діяльності. Процес формування даної якості має бути розвивальним. Розвиток ІКТ-компетентності проявляється в переході на новий, більш досконалий рівень компетентності.

Особливістю професійної діяльності вчителя є те, що саме він адаптує дітей до навчального середовища, показує особливості навчання та самонавчання в умовах інформаційного суспільства, реалізує розвивальну функцію навчання в умовах інформаційного середовища школи.

Охарактеризуємо базові ІКТ-компетенції вчителя [5, с. 133]:

- наявність загальних уявлень у сфері ІКТ;
- наявність уявлень про електронні освітні ресурси;
- володіння інтерфейсом операційної системи;
- наявність загальних уявлень у сфері мультимедіа;
- володіння навичками користувача офісних технологій у контексті підготовки дидактичних засобів і робочих документів;
- володіння технікою підготовки графічних ілюстрацій на основі растрової графіки;
- володіння базовими Інтернет-сервісами і технологіями;

- володіння основами технології побудови web-сайтів.

Основна мета навчання у школі – навчити дітей за короткий проміжок часу засвоювати, перетворювати й використовувати у практичній діяльності велику кількість інформації. Використання ІКТ-технологій має низку переваг у порівнянні з іншими засобами навчання. Мультимедійні технології дозволяють більш ефективно організовувати пізнавальну інформаційно-навчальну, експериментально-дослідницьку діяльність учнів, забезпечують можливість самостійної навчальної діяльності. Варто також зауважити і психологічний фактор: сучасній дитині цікавіше сприймати інформацію саме у такій формі, ніж за допомогою застарілих схем і таблиць.

Використання ІКТ-технологій у навчальному процесі дозволяє вчителю:

- ефективно використовувати навчальний процес;

- надати навчальні матеріали у текстовій формі (картки, тексти, самостійні і контрольні роботи тощо);

- надати навчальні матеріали у мультимедійній формі, що урізноманітнить форми проведення уроків, викличе інтерес у дітей до навчального матеріалу (навчальні програми, віртуальні лабораторії, електронні підручники тощо);

- автоматизувати процес засвоєння, закріплення й використання навчального матеріалу з урахуванням інтерактивності багатьох електронних посібників;

- автоматизувати систему контролю, оцінки й корекції знань учнів;

- здійснити рівневу та профільну диференціацію;

- індивідуалізувати навчання;

- збільшити об’єм отриманої інформації;

- формувати інформаційну культуру, разом із цим, навчати учнів знаходити та використовувати різні види інформації, що є найважливішим умінням у сучасному світі;

- організовувати позакласну роботу;

- надати можливість моделювання й демонстрації процесів, які неможливо спостерігати у шкільних умовах.

Мультимедійні комп'ютерні технології дозволяють замінити майже усі традиційні технічні засоби навчання. Така заміна дає змогу вчителю забезпечити найкращу реалізацію принципу наочності, оперативно поєднувати різні засоби, що сприяють більш глибокому й усвідомленому засвоєнню навчального матеріалу, економити час уроку, насичувати його інформацією [5, с. 46].

Комп'ютер разом із інформаційними технологіями відкриває принципово нові можливості у галузі освіти, у навчальній діяльності та творчості учнів. Технічні можливості комп'ютера як дидактичного засобу навчання дозволяють забезпечити більш ефективну реалізацію розвивального навчання. Створюються умови для пошукової та дослідницької діяльності учнів, підвищення пізнавальної активності на основі розвитку критичного мислення, розвитку навчально-комунікаційних умінь (робота в команді, участь у дискусії), розвитку творчого мислення учнів.

Особливості сучасного етапу розвитку освіти в Україні пов'язані з такими загальносвітовими тенденціями:

- швидким розвитком сучасних комп'ютерних технологій і розширенням сфери їх використання в навчальному процесі як школярів, так і дорослих;

- насиченням навчальних закладів технічними засобами, що забезпечують реалізацію інформаційних процесів зберігання, передачі та обробки інформації в новому, цифровому форматі;

- використанням ресурсів глобальної інформаційної мережі Інтернет у навчальному процесі [6].

Інформатизація навчання проводиться за допомогою комплексу заходів із перетворення педагогічних процесів на основі впровадження у навчання інформаційної продукції та інформаційно-комунікаційних технологій.

Використання у навчальному процесі сучасних технічних пристроїв (персональних комп'ютерів, теле- та відеоапаратури, різноманітних пристроїв для перетворення інформації з одного виду в інший) та інформаційно-комунікаційних технологій призводить до аналізу й нового розуміння

дидактичного процесу. Зміст ІКТ компонента полягає у здібності вчителя ефективно використовувати інформаційно-комунікаційні технології не лише для підготовки методичного та дидактичного матеріалу до уроку, але й знати та використовувати їхні можливості при проектуванні уроку, що є неможливим без знань особливостей дидактичного циклу та його реалізації у навчальному процесі. Фактично, теоретичні знання та практичні навички ІКТ компоненту є проявом компетентності вчителя у галузі використання інформаційно-комунікаційних технологій, що орієнтовані на організацію процесу зберігання, передачі та обробки навчальної інформації засобом комп'ютерних технологій [2, с. 46]. При цьому виникає запитання: чи є визначена таким чином інформаційна компетентність учителя нині невід'ємною частиною його професійно-педагогічної діяльності? Відповідь можна отримати, порівнявши педагогічну діяльність учителів зі стажем роботи від 10 років і більше та випускників ВНЗ.

Учителі за стажем більше 10 років відчувають труднощі при використанні ІКТ на уроці, які пов'язані з особливостями роботи на персональному комп'ютері, але рівень їхньої професійно-педагогічної компетентності вищий, ніж у випускників. У той же час, молоді фахівці виконують «технічну» роботу на персональному комп'ютері більш упевнено, але мають проблеми при проектуванні, організації та проведенні уроку.

Компетентність у галузі ІКТ є нині невід'ємною складовою компетентності випускника педагогічного навчального закладу, що є результатом роботи викладачів вищої школи. І, в той же час, більш досвідченим учителям, необхідно не лише засвоїти комп'ютерні технології, але й навчитися використовувати їх на уроках із метою підвищення ефективності навчання школярів.

У цілому можна зробити висновок про необхідність цілеспрямованого навчання вчителів використання ІКТ у навчальному процесі з метою формування їхньої інформаційної компетентності, причому її становлення й подальший розвиток здійснюється через практичну педагогічну діяльність.

Учитель, який володіє сучасними технологіями і технологічною культурою, повинен проявляти гнучкість при використанні методів і засобів навчання, вміти модифікувати свої професійні дії, розробляючи при цьому свою власну педагогічну технологію.

Інформаційні технології, оснащені всіма необхідними компонентами, разом із правильно обраними технологіями навчання, використанням активних методів навчання стають базою сучасної освіти, що гарантує необхідний рівень якості, диференціації й індивідуалізації навчання та виховання. Зміст сучасних інформаційних технологій дає можливість для успішної реалізації основної мети навчання – виховувати інтелектуально-творчих, здорових, гармонійно-розвинених членів нашого суспільства.

Література:

1. Балакірова С. Ю. Інформаційна компетентність управлінця в контексті "культури реальної віртуальності" / Ю. С. Балакірова, В. В. Павленко // Вісник НТУУ "КПІ". Філософія. Психологія. Педагогіка. – 2012. – Вип. 1. – С. 7–10.
2. Беспалов П. В. «Компьютерная компетентность в контексте личностно-ориентированного обучения» // Педагогика.- 2003, №4.-Ст. 45-50.
3. Гуревич Р.С. Інформатизація освіти – важливий чинник розвитку суспільства XXI століття / Р.С. Гуревич // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми // Зб. наук. пр. – Випуск 47 / редкол. – Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2016. – С. 5 – 10.
4. Дмітрієнко Н.Є. Інформаційна компетентність як вагома складова професійної компетентності майбутніх учителів іноземної мови / Н.Є. Дмітрієнко // Вісник Житомирського державного університету. Випуск 4 (82). Педагогічні науки. – 2015. – С. 31 – 35.
5. Морська Л. І. Інформаційні технології у навчанні іноземних мов: [навчальний посібник] / Морська Л. І. – Тернопіль: Астон, 2008. – 256 с.
6. Тришина С.В. Информационная компетентность как педагогическая категория // Интернет-журнал «Эйдос». 2005. 10 сент. // Режим доступа: http://www.eidos.ru/journal/2005/0910-11.htm.
7. Труханенко Г. Різні підходи до визначення поняття «інформаційна компетентність» у сучасній літературі / Г. Труханенко // Наукові записки. Серія: педагогічні науки. – 2015, № 107_2. – С. 193-197.
8. Семёнов А.Л. Роль информационных технологий в общем среднем образовании. М., 2000. – С.32.

9. Sysoyev P. V. Sovremennyie uchebnyie Internet-resursy v obuchenii inostrannomu yasyku [Modern Educational Internet Resources in Teaching the Foreign Language] / P. V. Sysoyev // Inostrannyie yasyki v shkole [Foreign Languages in School]. – 2008. – № 6. – S.2–10.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Захарченко Наталія Вікторівна

УДК:681.3.07

Шатківська Вікторія

студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

КОМБІНАТОРНІ ЗАДАЧІ НАВКОЛО НАС

***Анотація**. У данній статті розглянуті класичні задачі на застосування основних правил комбінаторики, сформулюванні в цікавій іу популярній формі.*
***Ключові слова:** комбінаторика, правило суми, правило добутку.*

***Annotation**. This article discusses classical problems for the application of the basic rules of combinatorics, namely the rules of sum and product, in an interesting and popular form.*
***Keywords**: combinatorics, rule of the sum, rule of the product.*

Комбінаторика - це один із найцікавіших і важливих розділів сучасної математики. Мабуть, немає сенсу зайвий раз говорити про те, наскільки простими за постановкою, і в той же час важкими для вирішення бувають комбінаторні задачі. Авжеж цікаво орієнтуватися в такому великому розмаїтті ідей, якими насичена комбінаторна (або, як ще кажуть, дискретна) математика.

Зацікавити, пробудити інтерес до математики – це краще завдання вчителя. Нижче представлені задачі, які могли б зацікавити учнів вивчати і любити математику, розвивати логічне мислення та краще засвоїти основні правила комбінаторики.

«Забобонні велосипедисти»

«Знову вісімка!» - гірко вигукнув голова клубу велосипедистів, поглянувши на погнуте колесо свого велосипеда. «А все чому? Та тому, що при вступі в клуб мені видали квиток за номером 008. І тепер місяця не проходить, щоб то на одному, то на іншому колесі не з`явилася вісімка. Потрібно змінити номер квитка! А щоб мене не звинувачували в забобонності, зроблю перереєстрацію всіх членів клубу та буду видавати тільки квитки з номерами, в які жодна вісімка не входить».

Сказано- зроблено, і на другий день він замінив всі квитки.

Скільки членів було в клубі, якщо відомо, що використані всі тризначні номери, що не містять жодної вісімки? (Наприклад, 000 використаний, а 836 немає.)

Для вирішення цього завдання визначимо спочатку, скільки однозначних номерів не містить вісімку. Ясно, що таких номерів дев'ять: 0, 1,2, 3, 4, 5. 6, 7. 9 (номер 8 пропускається). А тепер знайдемо всі двозначні номери, що не містять вісімок. Їх можна скласти так: взяти будь-який із знайдених однозначних номерів і написати після нього будь-яку з дев'яти допустимих цифр. В результаті з кожного однозначного номера вийде дев'ять двозначних. А так як однозначних номерів теж 9, значить виходить, що $9 \cdot 9 = 81$ двохзначний номер без вісімок. Ось вони :

```
   00  01  02  03  04  05 06  07  09
   10  11  12  13  14  15 16  17  18
   20  21  22  23  24  25 26  27  28
30  31  32 33  34  35 36  37  38
40  41  42 43  44  45 46  47  48
50  51  52 53  54  55 56  57  58
60  61  62 63  64  65 66  67  68
70  71  72 73  74  75 76  77  78
90  91  92 93  94  95 96  97  99
```

Отже, існує $9^2 = 81$ двозначний номер без цифри 8. Але за кожним з них знову можна поставити будь-яку з дев'яти допустимих цифр. В результаті

отримаємо $9^2 \cdot 9 = 9^3 = 729$ тризначних номерів. Значить, в клубі було 729 велосипедистів.

Задача про шашки

Вирішимо наступне завдання:

Скількома способами можна поставити на дошку дві шашки-білу і чорну, так, щоб біла шашка могла бити чорну?

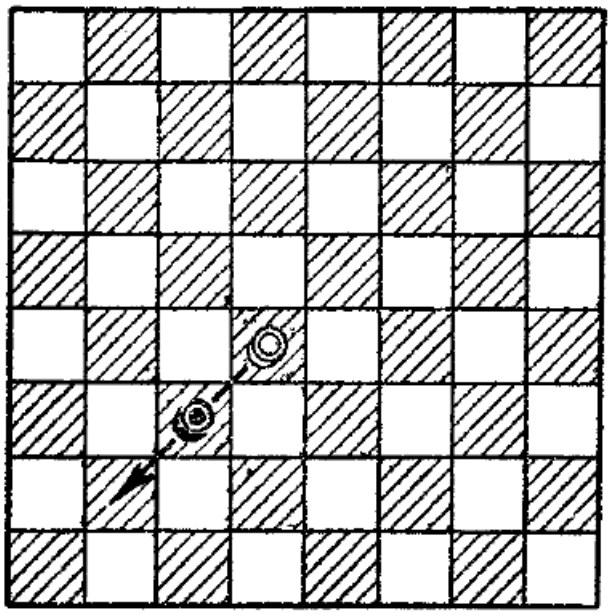


Рис. 1

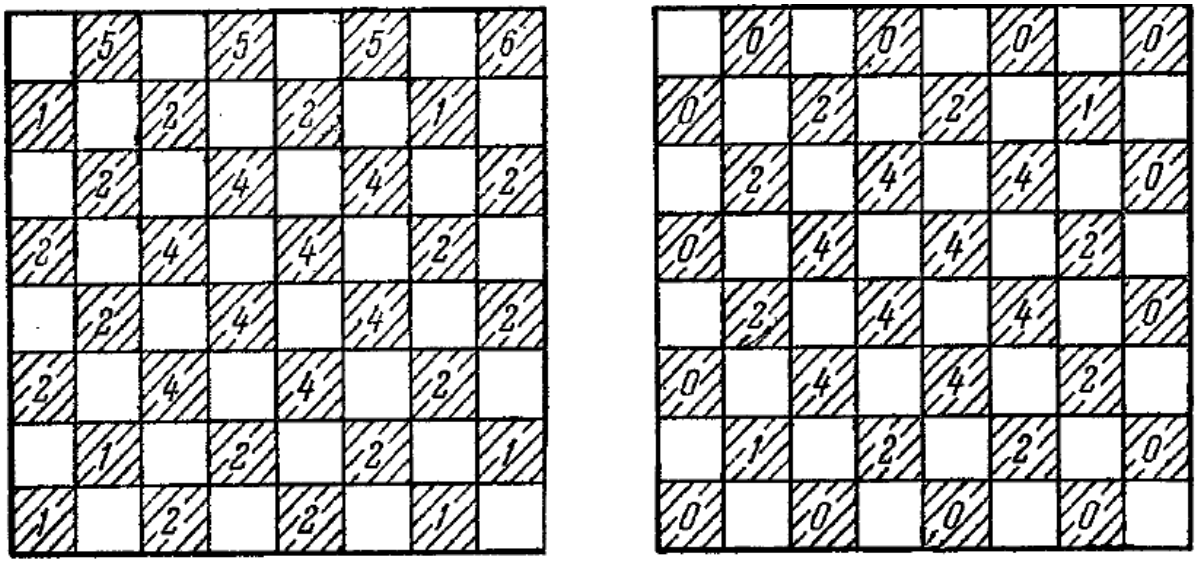
За правилами шашки ставляться на чорні поля і одна шашка б'є іншу, перестрибуючи через неї і стає на наступне поле (рис. 1). Якщо ж шашка досягла останньої горизонталі, то вона перетворюється в дамку і може бити всі шашки, що стоять на одній діагоналі з нею, крім шашок, що стоять в кінці діагоналей.

Складність цього завдання полягає в тому, що для різних положень білої шашки є різне число положень чорної шашки, при яких цю шашку можна бити. Наприклад, якщо біла шашка стоїть на полі $a1$, то існує лише одне положення чорної шашки, при якому вона знаходиться під боєм. А якщо біла шашка стоїть на полі $c3$, то число шуканих положень чорної шашки дорівнює 4. Нарешті, якщо біла шашка пройшла в дамки на полі $h8$, то існує 6 положень чорної шашки, на яких її може бити ця дамка.

Тому тут найпростіше вказати для кожного положення білої шашки число можливих положень чорної шашки і скласти отримані результати. На (рис. 2,а) зображена дошка зі зазначеннями відповідних чисел. Склавши їх, отримуємо 87 способів. Значить шукане розміщення можливе 87 способами.

Ясно, що рівно стільки ж положень, при яких чорна шашка може бити білу. А положень, при яких обидві шашки можуть бити один одну, менше. Наприклад. якщо біла шашка стоїть на краю дошки, то її не можна бити, де б не

стояла чорна шашка. Точно так само знаходимо числа, які відповідають іншим чорним полям. Вони зображені на рис (2,б). Складаючи ці числа, отримуємо що шукана розстановка можлива 50 способами.



а) **б)**

Рис. 2

Нарешті, знайдемо число положень білої і чорної шашок, при якому ні одна з них не може бити одна одну. Але тут краще звести задачу до такої, які ми вже розв'язали. Для цього спочатку знайдемо загальне число положень якими можна поставити на дошку білу і чорну шашки. Білу шашку можна поставити на будь-яке з 32 чорних полів. Після цього для чорної шашки залишиться 31 одне поле. Тому в силу правил добутку розстановка можлива $32 \cdot 31 = 992$ способами. Але із цих способів 87 способів, при яких шашка може бити чорну, і 87 способів, при яких чорна шашка може бити білу. Тому потрібно відкинути $2 \cdot 87 = 174$ способи. Але, потрібно врахувати те, що при цьому деякі способи можуть бути відкинуті двічі- і із-за того, що біла шашка може бити чорну, і із-за того, що чорна шашка може бити білу. Ми бачили, що існує 50 положень, в яких обидві шашки можуть бити один одного. Тому, число положень, в яких ні одна шашка не можу бити іншу, рівна $992 - 174 + 50 = 868$.

«Морський семафор»

На флоті інколи використовують семафор з прапорцями. Кожній букві при цьому відповідає певне положення прапорців. Як правило, прапорці знаходяться по різні боки від тіла, того, хто подає сигнали. Однак, при передачі деяких букв (б, д, к, х, ю, я) обидва прапорці розміщені по один і той же бік.

Чому знадобилось робити такий вийняток?

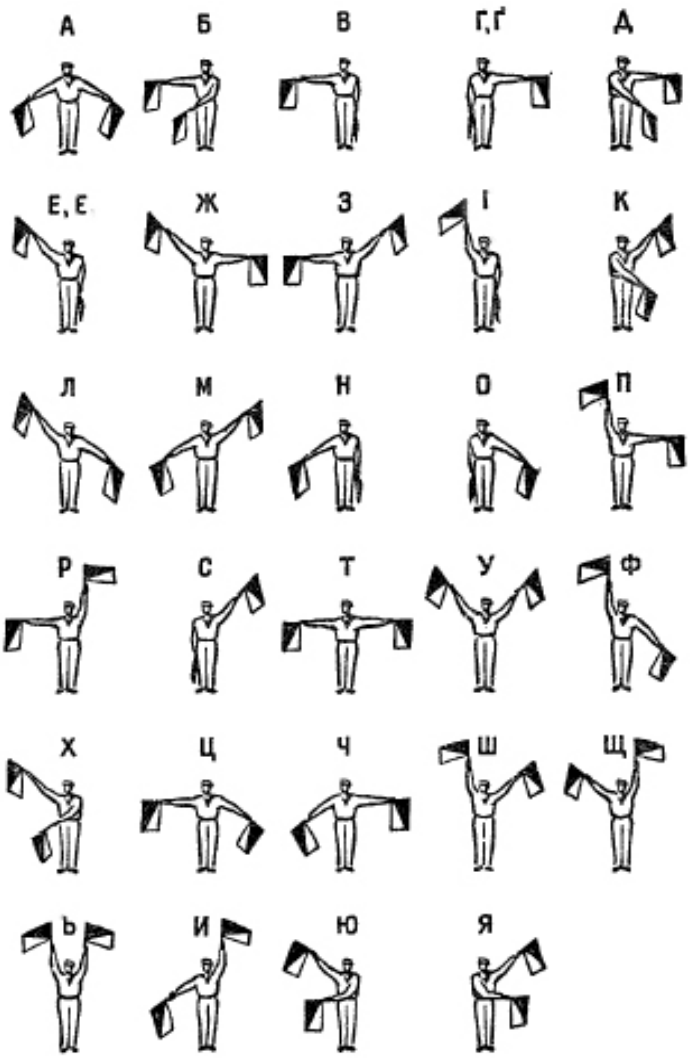


Рис.3

Відповідь на це питання дає формула розміщення з повтореннями. Справа в тому, що число різних положень кожного прапорця п’ять - униз, вгору, вбік(ліво, право), вниз під нахилом, вгору під нахилом. Оскільки у нас два прапорці, то загальне число комбінацій основних положень дорівнює $\bar{A}_5^2 = 5^2 = 25$. При цьому потрібно ще відкинути положення, коли обидва прапорці направлені вниз – воно служить для розділення слів. Всього отримуємо 24 конфігурації, а це недостатньо для передачі усіх букв українського алфавіту. Тому для деяких букв і довелось направити обидва прапорці в один бік (рис.3).

«Команда космічного корабля»

У випадку, коли число можливих вибірок на кожному кроці залежить від того, які елементи були вибрані раніше, зручно зображати процес складання комбінацій у вигляді «дерева». Спочатку з однієї точки проводять стільки

відрізків, скільки різних вибірок можна зробити на першому кроці(таким чином, кожен відрізок відповідає одному елементу). Із кінця кожного відрізку, скільки можна зробити вибірок на другому кроці, якщо в перший раз був вибраний даний елемент ітд.

В результаті такої побудови виходить «дерево», розгляд якого легко дає побачити число розв'язків нашої задачі.

Розглянемо наступний приклад. Відомо, що при створенні команд багатомісних космічних кораблів виникає питання про психологічну сумісність учасників космічної подорожі.

Припустимо, що потрібно скласти команду космічного корабля із трьох людей: капітана, інженера і лікаря.

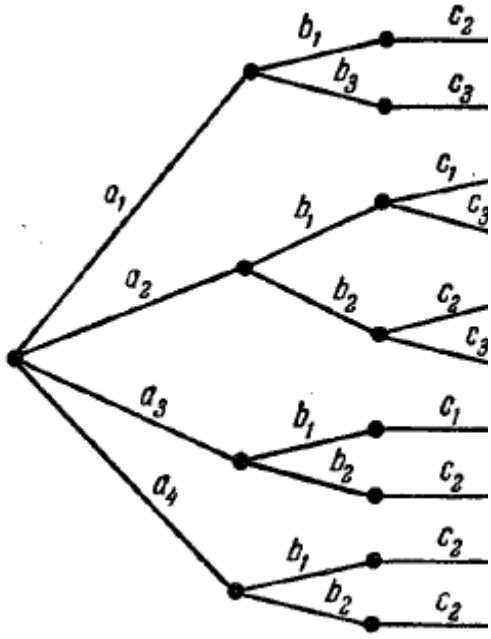


Рис.4

На місце командира є чотири кандидати: a_1, a_2, a_3, a_4, на місце інженера – 3 кандидати b_1, b_2, b_4 і на місце лікаря – 3 кандидати c_1, c_2, c_3 Проведена перевірка показала, що командир a_1 психологічно сумісний з інженерами b_1 і b_3 і лікарями c_2, c_3, командир a_2- з інженерами b_1 і b_2 і усіма лікарями, командир a_3- з інженерами b_1 і b_2 і лікарями c_1, c_3, командир a_4- зі всіма інженерами і лікарем c_2. Крім того, інженер b_1 психологічно не сумісний з лікарем c_3, інженер b_2-з лікарем c_1, і інженер b_3 з лікарем c_2.

Скількома способами при цих умовах можна скласти команду корабля?

Відповідне дерево зображено на (рис.4). Воно показує, що існує лише 10 допустимих комбінацій (якщо б не було обмеження в сумісності, то число способів сформувати команду за правилом добутку дорівнювало $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$).

Усі ці задачі є, для учнів, переконливим аргументом того, що математика не нудна і абстрактна, а вона оточує нас, її правила і закони діють у нашій повсякденній діяльності.

Список використаних джерел та літератури:

1. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.:Наука. Гл. Ред. Физ.-мат. лит., 1969.-323 с.
2. Неэлементарные задачи в элементарном5 изложении. Яглом А.М., Яглом И.М.М., ГТТИ, 1954.-554 с.(Выпуск 5 серии «Библиотека математического кружка»)
3. Джеймс А. Андерсон. Дискретная математика и комбинаторика – университет Южной Каролины. пер. с англ., Москва, Киев, 2003 г.
4. Ерош И. Л. Дискретная математика. Комбинаторика — СПб.: СПбГУАП, 2001. — 37
5. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — С. 272.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Вотякова Л. А.

УДК 517.3

Шведюк Анастасія

студентка магістратури
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ПОНЯТТЯ СИМЕТРИЧНОГО $\tilde{h}$ -ІНТЕГРАЛА

Анотація. *У цій статті розглянуто поняття $\tilde{h}$-первісної та $\tilde{h}$-інтеграла, $\tilde{h}$-формула Ньютона-Лейбніца. Виведено $\tilde{h}$-первісні для деяких елементарних функцій та обчислено визначений $\tilde{h}$-інтеграл для них.*

Ключові слова: *квантовий аналіз, $\tilde{h}$-первісна, $\tilde{h}$-інтеграл, елементарні функції, формула Ньютона-Лейбніца.*

Annotation. *This article discusses the concept of $\tilde{h}$-antiderivative and $\tilde{h}$-integral, the Newton's -Taylor's $\tilde{h}$ –formula. Outputs are $\tilde{h}$-antiderivative for some elementary functions and definite $\tilde{h}$-integral for them is calculated.*

Keywords: *quantum analysis, $\tilde{h}$-antiderivative, $\tilde{h}$-integral, elementary functions, Newton's -Taylor's formula.*

Постановка проблеми. Дослідження з даної теми з’явилися ще на початку минулого століття в працях К. Адамса [1], Кармайкла [2], Ф. Джексона [3], Р. Т. Мейсона [5] та ін.

Інтерес математиків до досліджень квантового аналізу то зростав, то спадав. Але все ж, на початку вісімдесятих років почали з'являтися нові дослідження, які стосувалися застосування квантового аналізу в багатьох областях математики, зокрема, в новому диференціальному численні та теорії ортогональних многочленів, варіаційному h -численні тощо ([4], [5], [7], [8] та ін.). Дослідження квантового аналізу поділяється на: q -аналіз та h -аналіз, які відіграють важливу роль в теорії алгебраїчних об’єктів, які називаються квантовими групами. На основі цієї теорії досліджуються основи симетричного q -аналізу та h -аналізу.

Серед літературних джерел, присвячених квантовому аналізу, найбільш новим і широким є [6]. У цій книзі розглянуто основи квантового аналізу, послідовно проведена аналогія з класичним аналізом, також розглянуто деякі початкові відомості з симетричного квантового аналізу.

Дослідження квантового аналізу поділяється на: q -аналіз та h -аналіз. На основі цієї теорії, використовуючи метод аналогії та класичний аналіз, досліджуються основи симетричного q -аналізу та h -аналізу, зокрема, диференціальне та інтегральне числення.

В даній статті можна побачити дослідження симетричних h -первісних деяких елементарних функцій та як обчислється визначений симетричний h -інтеграл з використанням формули Ньютона-Лейбніца.

Виклад основного матеріалу. Нагадаємо означення симетричного h – диференціала та симетричної h –похідної**.**

Означення 1. Різницю

$$\tilde{d}_h f(x) := f(x+h) - f(x-h), \tag{1}$$

де $h \neq 0$, називають симетричним h -диференціалом функції $f(x)$.

Означення 2. Відношення

$$\tilde{D}_h f(x) := \frac{\tilde{d}_h f(x)}{\tilde{d}_h x} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \tag{2}$$

де $h \neq 0$, називають симетричною h -похідною функції $f(x)$ [8, с. 17].

Введемо означення квантової симетричної h -первісної. Розглянемо довільну функцію $f(x)$.

Означення 3. Функцію $F(x)$, для якої $\tilde{D}_h F(x) = f(x)$, будемо називати симетричною h -первісною, і позначатимемо

$$\int f(x) \tilde{d}_h x \,. \tag{3}$$

Користуючись означенням 2 ми можемо знайти симетричні первісні деяких елементарних функцій.

Приклад 1. Нехай $F(x) = x$, тоді

$$\tilde{D}_h x = \frac{(x+h) - (x-h)}{2h} = \frac{x + h - x + h}{2h} = \frac{2h}{2h} = 1.$$

Тобто,

$$\int \tilde{d}_h x = x.$$

Приклад 2. Нехай $F(x) = x^2$, тоді

$$\tilde{D}_h x^2 = \frac{(x+h)^2 - (x-h)^2}{2h} = \frac{4xh}{2h} = 2x.$$

Тобто,

$$\int x \tilde{d}_h x = \frac{x^2}{2}.$$

Визначеному симетричному h -інтегралу функції від $x = a$ до $x = b$ ми можемо надати сенс лише в тому випадку, коли a і b відрізняються на величину кратну $2h$.

Тепер дамо означення визначеного симетричного $\tilde{h}$ -інтеграла.

Означення 4. Нехай $b - a \in 2hZ$. Тоді визначеним симетричним h -інтегралом функції $f(x)$ від $x = a$ до $x = b$ будемо називати величину

$$\int_a^b f(x)\tilde{d}_h x =$$

$$= \begin{cases} 2h(f(a)+f(a+2h)+...+f(b-2h)), \text{якщо } a<b, \\ 0, \text{якщо } a=b, \\ -2h(f(b)+f(b+2h)+...+f(a-2h)), \text{якщо } a>b. \end{cases} . \qquad (4)$$

Наступна теорема в деякому сенсі показує правильність (2).

Теорема 1 ($\tilde{h}$ -формула Ньютона-Лейбніца). Нехай $F(x)$ є симетричною h -первісною для функції $f(x)$ і $b-a \in 2hZ$. Тоді

$$\int_a^b f(x)\tilde{d}_h x = F(b) - F(a). \qquad (5)$$

Доведення. Нехай $b>a$. Тоді

$$\int_a^b f(x) d_{\tilde{h}} x = 2h \sum_{j=0}^{\frac{b-a}{2h}-1} f(a+2jh) =$$

$$= 2h \sum_{j=0}^{\frac{b-a}{2h}-1} \tilde{D}_h F(x)\Big|_{x=a+2jh} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\frac{b-a}{2h}-1} (F(a+(j+1)2h) - F(a+2jh)) = F(b) - F(a),$$

що і потрібно було довести. Випадок $b<a$ розглядається аналогічно, а випадок $b=a$ тривіальний.

Приклад 3. Нехай $f(x)=1,\ a=2h, b=4h (b-a=2h)$. Тоді з прикладу 1 ми знаємо, що $\int \tilde{d}_h x = x.$ Звідси

$$\int_{2h}^{4h} \tilde{d}_h x = x\Big|_{2h}^{4h} = 4h-2h = 2h.$$

Приклад 4. Нехай $f(x)=x,\ a=2h, b=4h (b-a=2h)$. Тоді з прикладу 2 ми знаємо, що $\int x\tilde{d}_h x = \frac{x^2}{2}.$ Звідси

$$\int_{2h}^{4h} x\tilde{d}_h x = \frac{x^2}{2}\Big|_{2h}^{4h} = \frac{16h^2}{2} - \frac{4h^2}{2} = \frac{12h^2}{2} = 6h^2.$$

Висновки. Таким чином, у цій статті розглянуто поняття симетричної h -первісної, симетричної h -похідної, $\tilde{h}$ -формулу Ньютона-Лейбніца, виведено

$\tilde{h}$-первісні для деяких елементарних функцій та обчислено визначений $\tilde{h}$-інтеграл для них.

Література:

1. Adams C. R. On the linear ordinary q-difference equation / C. R. Adams // Am. Math. Ser. II. – 1929. – Vol. 30. – P. 195-205.
2. Carmichael R. D. The general theory of linear q-difference equations / R. D. Carmichael // Am. J. Math. – 1912. Vol. 34. – P. 147-168.
3. Jackson F. H. q-Difference equations / F. H. Jackson // Am. J. Math. – 1910. – Vol. 32. – P. 305-314.
4. Kac V. Finite-dimensional representations of quantum affine algebras at roots of 1 / V. Kac, J. Beck // AMS Math. Journal. – 1996. – Vol. 9. – P. 391-423.
5. Mason T. E. On properties of the solution of linear q-difference equations with entire fucntion coefficients / T. E. Mason // Am. J. Math. – 1915. – Vol. 37. – P. 439-444.
6. Кац В. Квантовый аналіз / В. Кац, П. Чен; перевод с англ. Ф. Попеленского и Ж. Тотровой. – М.: МЦНМО, 2005. – 128 с.
7. Качанюк С. С. Квантові симетричні q-похідні / С. С. Качанюк // Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти: зб. наук. праць. – Вінниця, 2016. – Вип. 13. – 9-11 с.
8. Магдич В. І. Поняття симетричної h-похідної / В. І. Магдич // Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти: зб. наук. праць. – Вінниця, 2016. – Вип. 13. – 16-18 с.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Бак С. М.

УДК 51.004

Шевчук Ганна

студентка магістратури
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ВИКОРИСТАННЯ СЕРЕДОВИЩА GEOGEBRA, ЯК ОДИН З МЕТОДІВ ФОРМУВАННЯ ДОСЛІДНИЦЬКИХ УМІНЬ УЧНІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Анотація. *У даній статті розглянуто деякі можливості використання середовища GeoGebra, показано як на уроках стереометрії за допомогою інформаційно-комунікаційних технологій спонукати учнів до активної самостійної та дослідницької діяльності.*

Ключові слова: *дослідницькі уміння, дослідницька діяльність, стереометрія, Geogebra.*

Annotation/summary*. This article discusses some possibilities for using the GeoGebra environment, as shown in the lessons of stereometry by means of information and communication technologies to encourage students to engage in active self-study and research activities*

Keywords: *research skills, research activity, stereometry, Geogebra.*

Проблема сучасної школи полягає в тому, що більшість учнів не можуть і не хочуть самостійно мислити та досліджувати поставленні завдання, вони не вміють використовувати набуті знання у нових, незвичних умовах, не можуть самостійно вирішувати різні життєві ситуації. У зв'язку з цим одним із головних завдань сучасної школи є створення необхідних і повноцінних умов для всебічного розвитку майбутніх фахівців. Творче мислення розвивається саме зі шкільного курсу стереометрії шляхом розв'язування евристичних, дослідницьких та прикладних задач із використанням інформаційно-комунікаційних технологій, безпосередньо системи динамічної математики GeoGebra, і впровадження проектної та дослідницької діяльності.

Швидкий прогрес у галузі інформаційних технологій дозволяє використовувати персональні комп'ютери в якості ефективного засобу навчання, яке здійснюється за допомогою комп'ютерних навчальних програм. Досить актуальними є питання, пов'язані з особливостями використання інформаційних технологій на уроках математики, зокрема, якому з наявних програмних засобів (ПЗ), програмно-методичних комплексів (ПМК), педагогічних програмних засобів (ППЗ) учитель має надавати перевагу. Безперечно, вирішення цих питань потребує від учителя значної професійної підготовки. [4, с. 529]

Але вчитель має орієнтуватися на використання таких педагогічних технологій з допомогою яких не просто поповнювалися б знання й уміння учнів з стереометрії, а й розвивалися такі його якості, як пізнавальна активність, самостійність, уміння творчо виконувати завдання, уміння аналізувати і робити висновки.

На нашу думку, одним із методів вирішення цієї проблеми є використання інноваційних технологій, а саме системи динамічної математики GeoGebra.

GeoGebra – це динамічна математична програма, яка об’єднує геометрію, алгебру і обчислення. Вона розроблена для вивчення і викладання математики в школах, тому має зрозумілий інтерфейс і не потребує значних зусиль для засвоєння. [3]

GeoGebra – досить ефективна в процесі навчання стереометрії, вона використовується як засіб для візуалізації досліджуваних математичних об’єктів, виразів, ілюстрації методів побудови; як середовище для моделювання та емпіричного дослідження властивостей досліджуваних об'єктів; як інструментально-вимірювальний комплекс, що надає користувачеві набір спеціалізованих інструментів для створення і перетворення об’єкта, а також вимірювання його заданих параметрів.

У системі GeoGebra є можливість симетричної побудови геометричних фігур відносно координатної осі, побудови симетричних обертань навколо точки, паралельне перенесення об’єктів, застосування гомотетії, динамічна побудова графічних об’єктів та створення анімацій.

З одного боку, GeoGebra – динамічна геометрична система. В ній можна досить легко виконувати різноманітні побудови за допомогою точок, векторів, прямих, дуг тощо. З іншого боку, координати та рівняння об’єктів можуть бути введені безпосередньо, тобто існує безпосередній зв’язок алгебри з геометрією. GeoGebra розроблялась для вивчення математики у школах, а тому має інтуїтивно-зрозумілий інтерфейс і не потребує значних зусиль для засвоєння. Одним із значних її позитивів є можливість покрокового відображення ходу побудови фігур. Таким чином, є можливість анімовано змінювати координати точок, тоді фігура ніби оживає на моніторі, змінюючи своє зображення внаслідок зміни координат опорних точок. [5, с. 282]

Залучення учнів до виконання завдань із використанням середовища GeoGebra на уроках стереометрії сприяє інтелектуальному розвитку учнів, розвитку їхнього логічного мислення, пам’яті, уваги, інтуїції, умінь

аналізувати, класифікувати, узагальнювати, робити умовиводи за аналогією, діставати наслідки з даних передумов шляхом несуперечливих міркувань тощо. А найголовніше учні самостійно зможуть проводити дослідження і розв'язувати складні, на перший погляд, задачі зі стереометрії. [1, с. 196]

Значно полегшується розуміння послідовності розв'язування задач, якщо є заготовки зображень. Наприклад, якщо продемонструвати учням взаємне розташування прямої і площини в динамічному середовищі GeoGebra, під час пояснення аксіом стереометрії, то учні набагато краще засвоять даний матеріал і будуть значно активніше розв'язувати задачі.

GeoGebra дозволяє виконувати реальні перерізи многогранників площиною, створювати 3D об'єкти і змінювати їх (рис. 1), виконувати анімацію, автоматично і покроково відтворювати побудови, додавати різні проекції для перегляду.

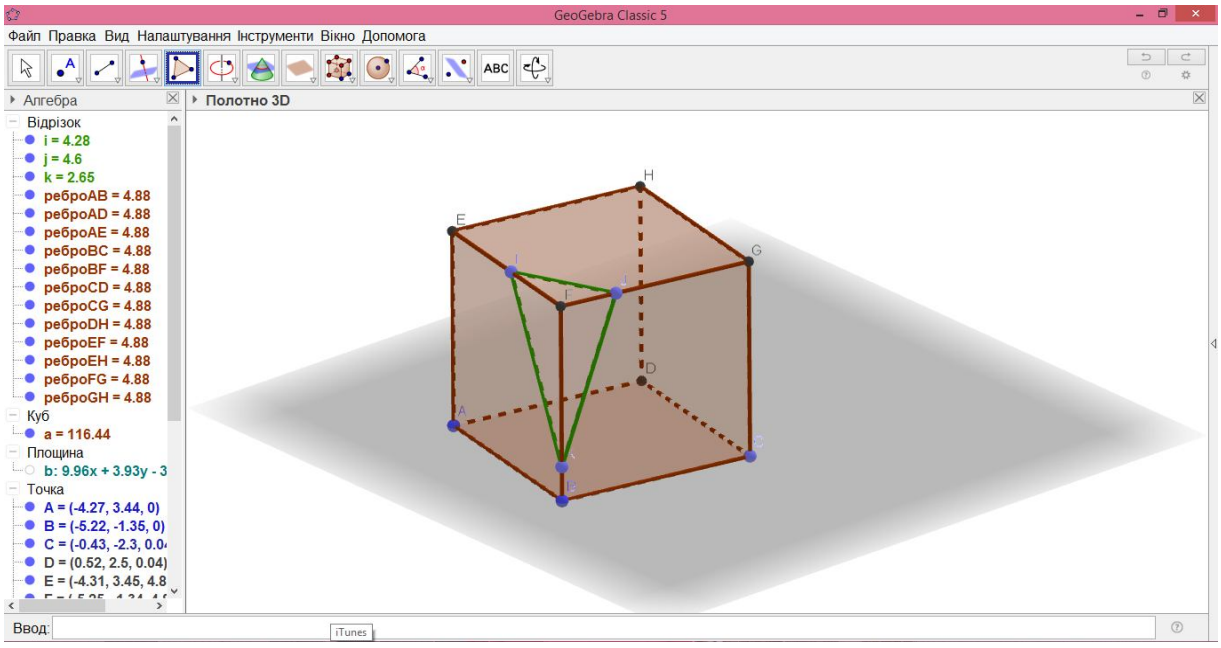


Рис. 1. Побудова перерізів просторових фігур

Використання GeoGebra дає значний педагогічний ефект, полегшує, розширює та поглиблює вивчення і розуміння методів стереометрії. Ця програма дає можливість продемонструвати зображення фігури зрізних точок зору у вигляді презентації:

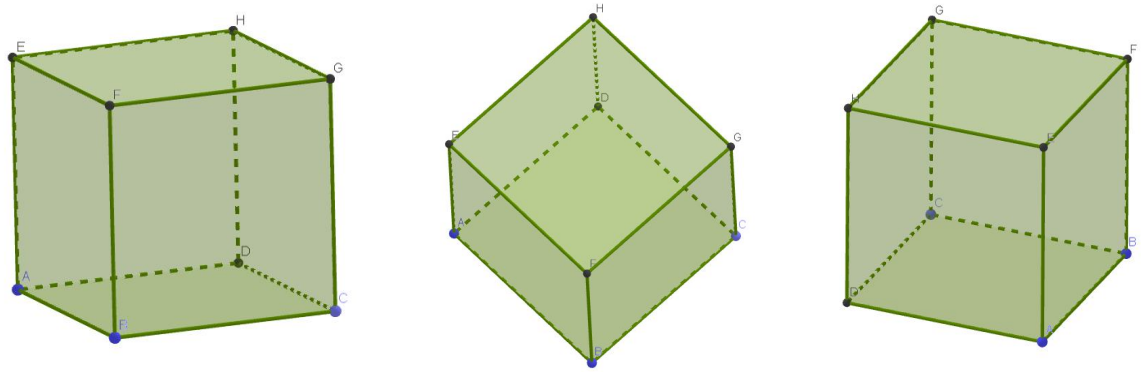


Рис. 1. Демонстрація куба з різних точок зору

Також важливе значення для інтелектуального розвитку відіграє добірка задач. На нашу думку, доцільно давати учням стереометричні задачі прикладного характеру, які досить вдало доповнюють систему задач з геометрії і можуть використовуватись на різних етапах навчання та з різною метою.

У процесі розв'язування стереометричних задач, в тому числі прикладного спрямування, учні займаються проектною та дослідницькою діяльністю, що спонукає їх до математичної творчості, стимулює їхню ініціативність, самостійність у навчально-пізнавальній діяльності з використанням систем комп'ютерної математики в майбутній професійній діяльності.

Одним із критеріїв навчання старшокласників є формування дослідницької компетентності, що включає сукупність знань, умінь та навичок, необхідних для здійснення дослідницької діяльності, яка проявляється в теоретичній грамотності, володінні методами психолого-педагогічних досліджень, умінні статистично опрацьовувати емпіричні дані, формулювати висновки та представляти результати досліджень. Модель організації дослідницької компетентності включає чотири етапи: програмувальний, інформаційний, аналітичний і практичний [2, с. 147].

Під час дослідницької діяльності старшокласник повинен розуміти та використовувати такі етапи: уважно спостерігати за самим процесом; самостійно усвідомити і сформулювати проблему; висловлювати свої

припущення і передбачення; наводити приклади перевірки гіпотез; вміти аналізувати і робити висновки; грамотно перевіряти окремі етапи дослідження.

Дослідницька діяльність є одним із найважливіших засобів підвищення якості підготовки старшокласників, здатних творчо застосовувати в практичній діяльності набуті знання. Дослідницька діяльність забезпечує вирішення таких основних завдань: формування наукового світогляду, оволодіння методологією і методами наукового дослідження; здатності застосувати теоретичні знання у своїй практичній роботі; постійне оновлення своїх знань; залучення найздібніших учнів до розв'язання наукових проблем, що мають суттєве значення для науки і практики.

Таким чином, використання інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема системи динамічної математики GeoGebra, суттєво покращує продуктивність та ефективність проведених уроків зі стереометрії, а саме, значно посилюється інтерес учнів до вивчення геометрії; розвивається абстрактне, творче, просторове мислення учнів; покращується якість знань; формується вміння учнів самостійно здобувати знання.

Література:

1. Гриб'юк О. О. Реалізація міжпредметних зв'язків в процесі навчання математики з використанням GeoGebra / О.О. Гриб'юк, В.Л. Юнчик // Сучасні тенденції розвитку освіти і науки в інтердисциплінарному контексті: Матеріали І-ї Міжнародної науково-практичної конференції, 19–20 листопада 2015 року) / Дрогобич: Посвіт, 2015. – С. 193-197.
2. Зеленяк О.П. Стереометрія з комп'ютером? /О.П. Зеленяк // Інформаційні технології в освіті. – 2013. – №15. – С.146-157.
3. Сайт GeoGebra. http://www.geogebra.org
4. Тютюн Л. А. Використання вільного програмного забезпечення в процесі викладання математичних дисциплін / Л.А. Тютюн // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми // Зб. наук. пр. – Випуск 26 / Редкол.: І.А. Зязюн (голова) та ін. – Київ-Вінниця: ДОВ Вінниця, 2010. – С. 529-534.
5. Тютюн Л. А. Особливості використання програмного засобу Geogebra в процесі викладання геометрії / Л.А. Тютюн // Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. – 2012. – №36. – С. 281–284.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Тютюн Любов Андріївна

УДК 510.254

Шмулян Ярослава, Руда Ольга

студентки магістратури
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ЗАГАЛЬНІ ПРИНЦИПИ СТВОРЕННЯ НОВИХ МАТЕМАТИЧНИХ ТЕОРІЙ

Анотація. *У статті проаналізовано технології, що ґрунтуються на конструюванні і моделюванні математичних об'єктів, спрямовані на набуття здатності систематичного входження в атмосферу науково-дослідницького пошуку.*

Ключові слова: *модель, конструктивний об'єкт, комплексні числа, технології навчання, функціональний аналіз, фундаментальні знання.*

Annotation. *The article analyzes the technologies based on the design and modeling of mathematical objects, aimed at acquiring the ability to systematically enter the atmosphere of scientific research.*

Key words: *model, constructive object, complex numbers, learning technologies, functional analysis, fundamental knowledge.*

Досягнення математичної науки XX ст. не могли не позначитись на змісті аналізу як навчальної дисципліни. Найбільш суттєвим стало відображення у ньому глибоких зв'язків з функціональним аналізом, сучасною алгеброю і топологією. Більше того, зазначено, що усвідомлення цілісності математики через можливість її побудови на теоретико-множинній основі і спільність її логічних принципів привело до створення університетських курсів, в значній мірі позбавлених самоізоляції [2].

Зрозуміло, що такого типу навчальні посібники, написані фахівцями самого високого рівня, через форму подання матеріалу і завдання для самостійного осмислення забезпечують особистісне включення тих, хто навчається, у пізнавальний процес, який моделює зміст майбутньої професійної діяльності. У поєднанні з певною «педагогічною добавкою» вони можуть забезпечити підготовку учителя, математична освіта якого задовольняє значною мірою вимоги, сформульовані у свій час Г.Фройденталем [6]. А саме, наявність у нього фундаментальних знань, необхідних для розуміння структури сучасної

математики, і певних умінь у використанні її фундаментальних методів, усвідомлення того, яким чином ведуться математичні дослідження і як їх результати використовуються. Зрозуміло, що така підготовка є гарантом спроможності учителя використовувати соціальні завдання на високому професійному рівні.

Однак, коли підготовка здійснюється у педагогічному вузі, де потенційні можливості як тих, хто навчається, так і тих, хто навчає значно нижчі у порівнянні з елітними вузами, а завдання залишаються такими ж, проблема професійного становлення випускників далека на наш погляд, від розв'язання. Ні сьогоднішня навчальна література, ні той арсенал методів, які використовуються при викладанні, не спроможні на перетворення набутих знань в уміння працювати у математичному світі.

Напевно, першим, хто зробив спробу підняти шкільного вчителя вище рівня шкільної програми, був Ф.Клейн. Його ідеологічна установка – зберегти живий зв'язок учителя з тим, що викладалось у вузі, не дати йому можливості, увійшовши у світ елементарної математики, не покидати його і навіть звузити до меж шкільного підручника, актуальна і понині. Шлях реалізації – фактична підтримка того рівня, який був набутий у вузі, і подальше підвищення математичної культури учителя через різноманітні серії популярних видань. Більше того, пропонувались не тільки доступні широкому загалу шляхи входження у сучасну математику, але й вклад самої елементарної математики у вигляді аксіоматичних теорій певних математичних структур теоретико-множинною мовою.

Інформація, навіть сама новітня, здобута споглядальним шляхом, але не затребувана, як правило, малоефективна, тим більше математична, яка не вирізняється особливою привабливістю. А тому учитель, який не має досвіду активної математичної праці, навряд чи досягне високої майстерності. Причина очевидна – накопичені знання тільки у поєднанні з набутими уміннями дають можливість оволодіти предметною діяльністю.

Це прописна істина стала ідеологічною установкою Д.Пойа [3], причому не на рівні сентенцій, а й забезпечена досить результативною інструментною базою. Справді, оскільки за Пойа «Уміння (know-how) у математиці – це спроможність розв'язувати задачі, знаходити доведення, критично аналізувати їх, з достатньою легкістю користуватись математичним апаратом, розпізнавати математичні поняття у конкретних ситуаціях» [3, с.302], то набуття таких умінь може забезпечити, за наявності необхідної інформації, легалізація прийомів розумової праці у світі елементарної математики. Інакше кажучи, якщо той, хто навчається, володіє необхідною інформацією і знає, як треба думати, то він зможе не тільки результативно оперувати нею, а й імпровізувати в її межах, і навіть здобувати нову. У практиці вищої школи ідеологічна установка Д.Пойа реалізується через різні типи практикумів, у яких розв'язування задач подано в двох-стовпчиковому форматі, один з яких має позначку «Стратегія» і легалізує ті дії, які ведуть до розв'язку.

Наприкінці XX ст. була розпочата розробка ще одного проекту, пов'язаного з математичною освітою (очолює П.Ернест, Екстерський університет). Його розробки виходять з того, що вся практика і теорія як навчання так і учіння спирається на епістемологію (вчення про сутність і закономірності пізнання). Поставивши цілий ряд проблемних запитань, щодо статусу і основ математичного знання, вони відмовились від абсолютистської віри у те, що математичні істини універсальні незалежні від людства, і стали на позиції соціального конструктивізму, згідно з яким математика є соціальна конструкція і, виходячи з цього, будують педагогіку математики.

Дещо відмінна ситуація пов'язана з узаконенням нових геометрій [5]. Якщо визначення комплексних чисел не вимагало прийняття чогось такого, що суперечило б математичним знанням того часу, то входження у математичний світ нових геометрій було по-справжньому драматичним. З листа К.Гаусса (1824) – «...Припущення, що сума трьох кутів трикутника менша 180°, приводить до своєрідної, цілком відмінної від нашої евклідової геометрії; ця геометрія абсолютно послідовна, і я розвинув її цілком задовільно; я маю

можливість розв'язувати у цій геометрії будь-яку задачу, за виключенням деякої константи, значення якої a priori встановити неможливо» [5, с.105].

Отже, два суперечливі факти дістали право на існування в «безгрішній» з точки зору наявності суперечностей математичній науці. Однак один з них належить евклідовій геометрії, яка описує реальний світ, а другий – неевклідовій (уявній за Лобачевським), створеній людською уявою за принципом «А що буде, якщо ... ?». Більше того, було придумано, яким саме чином упевнитись у тому, що новостворена теорія несуперечлива. Правда прийшлося замість абсолютної не суперечливості задовольнитись відносною, побудувати «світ» в межах евклідової геометрії, елементи якого наділялись змістом, через який перевірялась виконуваність аксіом неевклідової геометрії. Термін «модель», а за ним і термін «конструктивний об'єкт» набувають статусу лексичних одиниць математичної мови.

Приведені приклади переконливо свідчать, що нове математичне знання як відкривається так і винаходиться, так що невипадково Ж. Адамар, включивши термін «винахід» у назву популярної у свій час книги [1], сам же себе поправляє «Ми ведемо мову про винахід; було б точніше говорити про відкриття» [1, с.4]. В обох випадках математики творять новий математичний світ. В основі цього творення – конструювання нових об'єктів і правил оперування з ними.

Разом з тим А.Пуанкаре застерігає, що математична праця не є проста механічна праця; її не можна довірити ніякій машині, яка б досконала вона не була(?). Справа не тільки у тому, щоб застосовувати відомі правила і сфабрикувати як можна більше комбінацій за деякими встановленими законами. Отримані таким шляхом комбінацій були б неймовірно багаточисельні, однак негодящі. Справжня творча праця у виборі, який виключає з розгляду ті, які марні, більше того, вона звільняє від створення цих марних комбінацій [4, с.316].

Оскільки конструювання математичних об'єктів – невід'ємна складова процесу творення нового математичного знання, то логічно включати його в

арсенал тих умінь, якими має оволодіти випускник. Це дасть можливість, з одного боку, надати традиційному навчальному матеріалу форми, що стимулює особистісну активність як того, хто навчає, так і того, хто навчається. А з другого боку, випускник отримає «щеплення», що запобігає звуженню його математичного світу до рівня шкільного підручника. Відразу зазначимо, що мова не йде про прийняття певного конструктивного математичного світогляду, який пов'язує проблему існування математичних об'єктів з можливістю їх побудови і відкидає на підставі цього ряд установок традиційної теоретико-множинної математики як то абстракцію актуальної нескінченності або ж універсальність закону виключеного третього. Ми виходимо з діяльностної сутності цього терміну. Точніше, сутність нашої установи у тому, що включення в навчальну діяльність студента трансформованих, згідно з етапом навчання, методів і прийомів наукового пошуку, форм організації наукового дослідження не може не вплинути на його пізнавальну активність, а конструювання об'єктів дослідження не може не надавати його діяльності особистісного характеру.

Зрозуміло, що викладач має навчати, однак навчати не означає лише передавати знання. За П.Фрейре «Процес навчання формується у якості такого тільки за умови, що йому передує або розвивається паралельно з ним навчальна дія, що спрямована на конструювання змісту об'єкту, доступного розумінню того, хто навчається. Таким чином, у процесі навчання той, хто навчається, перетворюється у виробника і творця знання, яким він має оволодіти».

Причетність студента до продукування нового знання забезпечується через конструювання ним об'єктів дослідження, складання задач, переробки логічних міркувань, що привели до певного результату у строго логічне доведення.

Якщо під технологією навчання розуміти певний спосіб організації навчання, при якому домінуюча роль по реалізації функції навчання від водиться засобам навчання, то, надавши конструюванню і моделюванню статусу засобу навчання, маємо можливість модифікувати нині діючі і

розробляти нові технології, що вирізняються орієнтацією на особистісне навчання.

Література:

1. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики: Пер. с франц./ Ж. Адамар – М.: Сов. радио, 1970. – 152 с.
2. Зорин В.А. Математический анализ. Ч.II./ В.А. Зорин – М.: Наука, 1984. – 640 с.
3. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание / Д. Пойа – М.: Наука, 1970. – 452 с.
4. Пуанкаре А. О науке: пер. с фр./ А. Пуанкаре – М.: Наука, 1983. – 559 с.
5. Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу. Інтегральне числення. / А.А. Томусяк, Шунда Н.М. – К.: Вища шк., 1995. – 541 с.
6. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. 4.1: Пер. с нем./ Г. Фройденталь – М.: Просвещение, 1982. 208 с.

Науковий керівник: канд. пед. наук, доцент Вотякова Л. А.

УДК: 511.92

Яремчук Аліна

студентка факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

НАЙКРАСИВІШЕ ЧИСЛО У ВСЕСВІТІ

Анотація. *У роботі у популярній і доступній формі описані застосування послідовності Фібоначчі і числа φ, які оточують нас у повсякденному житті. Мета цієї роботи – ознайомити учнів з великими досягненнями у математиці і викликати бажання вивчати математику.*

Ключові слова: *Послідовність Фібоначчі, число φ, золотий переріз, божественна пропорція.*

Annotation. *The application of the Fibonacci sequence and φ numbers that surround us in everyday life are described in a popular and accessible form. The purpose of this work is to introduce students with great achievements in mathematics and to cause a desire to study mathematics*.

Keywords: *Fibonacci, Fibonacci sequence, number φ, golden section, divine proportion.*

Математика – це мова, якою написана книга природи.

Галілео Галілей

Люди здавна вивчали математичні формули та рівняння, що дозволяють описувати різні природні об'єкти і явища. Справжній прогрес в ці дослідження вніс Леонардо з Пізи, більш відомий тоді під прізвиськом Фібоначчі.

Проаналізувавши безліч книжок давньогрецьких та давньоіндійських математиків, а також вчених-арабів епохи середньовіччя, в 1202 році він представив світу модель розмноження тварин, до якої прийшов у зв'язку з задачею про розведення кроликів.

В основі цієї моделі лежала послідовність натуральних чисел, рекурентним заданням якої є формула $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$, де $F_1 = F_2 = 1$.

Отже, числа, що утворюють послідовність: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ... називаються «числами Фібоначчі», а сама послідовність – послідовністю Фібоначчі.

В числах Фібоначчі існує одна дуже цікава особливість. При діленні будь-якого числа з послідовності на попереднє число результатом завжди буде величина, що коливається близько ірраціонального значення 1,61803398875… і через раз то перевищує, то не досягає його. Більш того, після тринадцятого числа послідовності це відношення вже не змінюється і дорівнює $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Покажемо це на прикладі: $\frac{233}{144} = \varphi; \frac{377}{233} = \varphi; \frac{610}{377} = \varphi$ і т. д. Саме це стале число в середні століття було назване Лукою Пачолі «божественною пропорцією», а в наші дні іменується як «золотий переріз» (цю назву дав ще Леонардо да Вінчі) або «золота пропорція». У алгебрі це число позначається грецькою літерою φ («фі») [1, с. 21].

Але пізніше вчені помітили, що числа Фібоначчі описують не тільки розширення популяції, а й багато природних об'єктів: від мушлей молюсків до галактик.

Розглянемо де ця пропорція зустрічається у природі та у житті людини.

Піраміда в Гізі. Конструкція піраміди заснована на пропорції φ=1,618… Це відкриття було зроблене після численних спроб розгадати секрети цієї піраміди. Сама піраміда в Гізі представляється невідомим посланням для нащадків, для того щоб передати певні знання законів математики. За часів зведення піраміди її творці не мали достатніх можливостей для вираження відомих їм закономірностей. У ті часи не існувало писемності, не використовувалися ще й ієрогліфи. Однак творцям піраміди вдалося за допомогою геометричної пропорції передати свої знання математичних закономірностей майбутнім поколінням.

Храмові жерці передали Геродоту секрет піраміди в Гізі. Вона збудована таким чином, що площа кожної грані дорівнює квадрату висоти цієї грані.

Грань піраміди в Гізі має довжину 783,3 фути (238,7 м), її висота складає 484,4 фути (147,6 м). Розділивши довжину грані на висоту, ми прийдемо до співвідношення φ. Висота 484,4 фути відповідає 5813 дюймам (5-8-13), а це не що інше, як числа Фібоначчі.

Мексиканські піраміди. Піраміди в Мексиці побудовані теж за таким принципом. Поперечний переріз піраміди має форму сходів. У першому її ярусі 16 сходинок, другий містить 42 сходинки, третій – 68 сходинок.

Числа базуються на послідовності Фібоначчі за наступною схемою:

$$16\cdot\varphi=26 \quad 16+26=42 \quad 26\cdot\varphi=42 \quad 42+26=68$$

Число φ лежить в основі пропорцій мексиканської піраміди.

Рослини і «золотий переріз». Визначним є спостереження послідовності Фібоначчі в будові рослин. Такий висновок можна зробити, спостерігаючи за ростом і розвитком стебел і квітів. Кожна його нова гілка, проростаючи, дає початок іншим гілкам. Розглядаючи старі і нові гілки спільно, ми виявимо число Фібоначчі в кожній з горизонтальних площин.

У будові суцвіть деяких рослин проявляється закономірність «золотого перерізу»: ірис (3 пелюстки), первоцвіт (5 пелюсток), амброзія полинолиста (13 пелюсток), королиця звичайна (13 пелюсток), айстра (55 і 89 пелюсток).

Насіння соняшника розташовані так, щоб максимально використовувати всю площу суцвіття, не втрачаючи ні міліметра. А розташовані вони у вигляді двох спіралей, що перетинаються справа наліво і навпаки. Пари цих спіралей зустрічаються різні, у менших суцвіть 13 і 21, 21 і 34, у великих 34 і 55, 55 і 89. І відхилень від цих пар бути не може [3]. І усе це сусідні числа послідовності Фібоначчі.

Щось подібне відбувається і з внутрішністю ананаса: у нього 8 правосторонніх спіралей, 13 лівосторонніх і 21 вертикальна. І це знову послідовність Фібоначчі [4].

Тварини і «золотий переріз». Мушля закручена по спіралі. Невелика десятисантиметрова мушля має спіраль довжиною 35 см. Форма мушлі, яка закручена по спіралі привернула увагу Архімеда. Справа в тому, що вимірювання завитків мушлі постійно дорівнює φ. Архімед вивчав спіраль мушлі і вивів рівняння спіралі. Спіраль, накреслена з цього рівняння, називається його іменем. Збільшення її кроку завжди рівномірне. В даний час спіраль Архімеда широко застосовується в техніці.

У ящірки довжина хвоста так відноситься до довжини решти тіла, як 62 до 38 [5].

По спіралі павук плете павутину, і якщо виміряти її завитки, то відношення становитиме φ.

Стадо північних оленів по тривозі розбігається по спіралі [4].

Числа Фібоначчі також можна зустріти у роду бджіл. Оскільки особини чоловічої статі розвиваються з незапліднених яєць, у них є тільки один з батьків. А особини жіночої статі розвиваються з запліднених яєць і мають двох батьків. Якщо проаналізувати предків бджіл чоловічої та жіночої статі, то числа Фібоначчі стають помітними: чоловічі особини мають 1 батька, 2 бабусі і 2 дідуся, 3 прабабусь і прадідусів, 5 прапрабабусь і прапрадідусів, 8 прапрапрабабусь і прапрапрадідусів і так далі. У жіночих особин 2 батька, 3 бабусі і дідусі, 5 прабабусь і прадідусів, 8 прапрабабусь і прапрадідусів і так далі [2, с. 97].

Людина і «божественна пропорція». Тіло людини складається із структурних елементів, співвідношення між якими завжди дорівнює φ.

Якщо виміряти відстань від чуба до підлоги та поділити її на відстань від пупа до підлоги, отримаємо *φ*. Відстань від плеча до кінчиків пальців поділити на відстань від ліктя до тих самих кінчиків пальців – знову *φ*. Відстань від стегна до підлоги на відстань від коліна до підлоги. Знову *φ*. Фаланги пальців рук. Пальців ніг. Частини хребта. *φ*, *φ* і ще раз *φ*.

Кожен із нас – живе втіленням «божественної пропорції».

Література:

1. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – 3-изд., допол./ Н.Н. Воробьев – Москва «Наука», 1978. – 144 с.
2. Роузен Р. Математика для «гиков». / Р. Роузен – Москва «АСТ», 2015. – 240 с.
3. Числа Фібоначчі – що воно таке? [Електронний ресурс] // Режим доступу: http://pro-forex.in.ua/chisla-fibonachchi-shho-vono-take/— Назва з екрана.
4. Нас окружают числа Фибоначчи [Електронний ресурс] // Режим доступу: https://matemonline.com/2010/09/nas-okruzhajyt-4isla-fibona44i/ — Назва з екрана.
5. Числа Фибоначчи. Божественная мера красоты: от ракушки до галактики [Електронний ресурс] // Режим доступу: http://muzikavnutri.blogspot.com/2012/04/1.html — Назва з екрана.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Вотякова Л. А.

УДК 517.3

Ярмолюк Ольга

студентка магістратури
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ІНТЕГРАЛ ДЖЕКСОНА ТА ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНІЦА В СИМЕТРИЧНОМУ q -АНАЛІЗІ

Анотація. *У цій статті розглянуто поняття інтеграла Джексона та виведена формула для його обчислення, а також представлена формула Ньютона-Лейбніца.*

***Ключові слова**: квантовий аналіз, $\tilde{q}$ -первісна, $\tilde{q}$ -інтеграл, інтеграл Джексона, формула Ньютона-Лейбніца.*

***Annotation.** In this paper, we consider the concept of Jackson's integral and derive the formula for its calculation, as well as the Newton-Leibniz formula.*

***Keywords:** quantum analysis, $\tilde{q}$ - primitive, $\tilde{q}$ - integral, Jackson integral, Newton-Leibniz formula.*

Вступ. Квантовий аналіз зазвичай називають «обчислення без обмежень». Існує декілька типів квантового аналізу. В цій статті ми розгляне один із його видів – симетричний q -аналіз. Вивчення q-аналізу є старим предметом, який входить до кінця XIX ст., а саме історично вперше q -аналіз розглядав Ф. Джексон. Він був першим, хто розробив q-інтеграл та q-похідну систематичним шляхом. Пізніше геометрична інтерпретація q-аналізу була визнана за допомогою досліджень квантових груп.

Виклад основного матеріалу. Нехай $f(x)$ - довільна функція, областю визначення якої є або вся пряма, або проміжок виду $(0, A]$. Припустимо, що $F(x)$ є q -первісною функції $f(x)$.

Застосувавши оператор $\hat{M}_q$ ($\hat{M}_q$ - оператор, який діє в просторі функцій за формулою $\hat{M}_q[f(x)] = f(qx)$), отримаємо

$$\left(\hat{M}_q - \hat{M}_{q^{-1}}\right)F(x) = F(qx) - F\left(q^{-1}x\right) = \left(q - q^{-1}\right)xf(x). \qquad (1)$$

Так для будь-якої функції $g(x)$ виконується рівність

$$\hat{M}_q\hat{M}_{q^{-1}}g(x) = \hat{M}_{q^{-1}}\hat{M}_q g(x) = g(x),$$

ми отримуємо $\hat{M}_{q^{-1}} = \left(\hat{M}_q\right)^{-1}$. Отже,

$$\left(\hat{M}_q - \frac{1}{\hat{M}_q}\right)F(x) = \left(q - q^{-1}\right)xf(x).$$

Звідси

$$F(x) = \frac{\hat{M}_q}{1 - \hat{M}_q^2}\left(q^{-1} - q\right)xf(x) =$$

$$= \left(q^{-1} - q\right)\left(\hat{M}_q + \hat{M}_q^3 + \hat{M}_q^5 + \ldots\right)xf(x).$$

Таким чином отримаємо співвідношення

$$F(x)=x\left(q^{-1}-q\right)\sum_{n=1,3,\ldots} q^n f\left(q^n x\right). \qquad (2)$$

Також ми можемо записати таку рівність

$$\int f(x)\tilde{d}_q x = x\left(q^{-1}-q\right)\sum_{n=1,3,\ldots} q^n f\left(q^n x\right). \qquad (3)$$

Ряд, який знаходиться в правій частині рівності, називається ***інтегралом Джексона*** функції $f(x)$. З цього означення можна вивести більш загальну формулу, а саме

$$\int f(x)\tilde{D}_q g(x)\tilde{d}_q x = \left(q^{-1}-q\right)x\sum_{n=1,3,\ldots} q^n f\left(q^n x\right)\tilde{D}_q g\left(q^n x\right) =$$

$$=\left(q^{-1}-q\right)x\sum_{n=1,3,\ldots} q^n f\left(q^n x\right)\frac{g\left(q^n x\right)-g\left(q^{n+1}x\right)}{\left(q^{-1}-q\right)q^n x}$$

або

$$\int f(x)\tilde{d}_q g(x) = \sum_{n=1,3,\ldots} f\left(q^n x\right)\left(g\left(q^n x\right)-g\left(q^{n+1}x\right)\right). \qquad (4)$$

Теорема 1. *(Достатня умова збіжності)* Нехай $0<\tilde{q}<1$. Припустимо, що функція $f(x)$ визначена на проміжку $(0,A]$, при чому функція $\left|f(x)x^{\alpha}\right|$ обмежена на $(0,A]$ при деякому $\alpha<1$. Тоді ряд (3), що задає інтеграл Джексона, для всіх $x\in(0,A]$ збігається до деякої функції $F(x)$, яка є $\tilde{q}$-первісною для $f(x)$. Крім того, границя $F(x)$ при $x\to 0$ дорівнює 0.

Якщо виконується умова теореми, то інтеграл Джексона задає єдину з точністю до адитивної сталої $\tilde{q}$-первісну, неперервну при $x=0$. І навпаки, якщо $F(x)$ є $\tilde{q}$-первісною функції $f(x)$, причому $F(x)$ неперервна в точці $x=0$, то $F(x)$ задається з точністю до адитивної сталої формули Джексона (3). Насправді, часткова сума ряду (3) рівна

$$\left(q^{-1}-q\right)x\sum_{n=1,3,\ldots} q^n f\left(q^n x\right)=\left(q^{-1}-q\right)\sum_{n=1,3,\ldots} q^n D_q F(t)\Big|_{t=q^n x} =$$

$$=\left(q^{-1}-q\right)x\sum_{n=1,3,\ldots} q^n\left(\frac{F\left(q^n x\right)-F\left(q^{n+1}x\right)}{\left(q^{-1}-q\right)q^n x}\right)=\sum_{n=1,3,\ldots}\left(F\left(q^{n+1}x\right)-F\left(q^n x\right)\right)=$$

$$=F(x)-F\left(q^{N+1}x\right),$$

а цей вираз збігається до $F(x)-F(0)$ при $N\to\infty$, оскільки $F(x)$ неперервна в точці $x=0$.

Якщо ряд в правій частині рівності (1) збігається, то сума ряду є $\tilde{q}$-первісною функції $f(x)$, яка перетворюється в нуль в точці $x=0$. Отже, при

умові, що ряд збігається, визначений $\tilde{q}$ -інтеграл задається формулою. Формула Джексона (3) дає можливість визначити $\tilde{q}$ -інтеграл.

Означення 1. Нехай $0 < a < b$. Покладемо за означення

$$\int_0^b f(x)\tilde{d}_q x = \left(q^{-1} - q\right) b \sum_{n=1,3,\ldots} q^n f\left(q^n b\right) \qquad (5)$$

Для того щоб формула (3) визначала $\tilde{q}$ -первісну єдиним способом з точністю до збільшення довільної константи, потрібно дослідити розв'язок функціонального рівняння $\tilde{D}_q G(x) = 0$. З цього рівняння випливає, що $G(qx) = G\left(q^{-1}x\right)$ і $G(x) = G\left(q^{2n}x\right)$ для будь-яких x і цілих n. Звідси можна вивести, що якщо функція $G(x)$ неперервна в точці $x = 0$, то вона стала. Таким чином, як в q -аналізі, неперервність $\tilde{q}$ -первісної в точці $x = 0$ приводить до того, що $\tilde{q}$ -первісна визначена єдиним чином з точністю до сталого доданка [8, с. 121].

Формула (5) не дозволяє визначити невласний інтеграл переходом при $b \to +\infty$, оскільки при цьому вона втрачає сенс. Але, все одно має місце рівність

$$\int_{q^{m+1}}^{q^{m-1}} f(x)\tilde{d}_q x = \left(q^{-1} - q\right)\left(\sum_{n=1,3,\ldots} q^{n+m-1} f\left(q^{n+m-1}\right) - \sum_{n=1,3,\ldots} q^{n+m+1} f\left(q^{n+m+1}\right)\right) = \qquad (6)$$

$$= \left(q^{-1} - q\right) q^m f\left(q^m\right).$$

Означення 2. Нехай $0 < \tilde{q} < 1$. Невласним $\tilde{q}$ -інтегралом функції $f(x)$ на $[0, +\infty)$ будемо називати

$$\int_0^\infty f(x)\tilde{d}_q x = \sum_{n=\pm1,\pm3,\ldots} \int_{q^{m+1}}^{q^{m-1}} f(x)\tilde{d}_q x = \left(q^{-1} - q\right) \sum_{n=\pm1,\pm3,\ldots} q^m f\left(q^m\right). \qquad (7)$$

Лема. Нехай $a, b \in I$, $a < b$ і $f : I \to R$ неперервна в 0. Тоді для $s \in [a,b]$ послідовність $\left(f\left(q^{2n+1}s\right)\right)_{n\in N}$ рівномірно збігається до $f(0)$ на I.

Наслідок. Якщо $f : I \to R$ неперервна в 0, то для $s \in [a,b]$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} f\left(q^{2n+1}s\right)$ рівномірно збігається до I, і отже, f є q-симетричним інтегралом на $[a,b]$.

Теорема 2. *(Фундаментальна теорема для q-симетричного інтегрального числення).* Припустимо, що $f : I \to R$ неперервна при 0 і для кожного $x \in I$, визначається

$$F(x) := \int_0^x f(t)\tilde{d}_q t.$$

Тоді F неперервна при 0. Крім того, $\tilde{D}_q[F](x)$ існує для кожного $x \in I^q$ з

$$\tilde{D}_q[F](x) = f(x).$$

І навпаки,

$$\int_a^b \tilde{D}_q[f](x)\tilde{d}_q t = f(b) - f(a)$$

для всіх $a, b \in I$. [2, с. 65]

Доведення. Користуючись наслідком ми маємо, що функція F неперервна в точці 0. Якщо $x \in I^q \setminus \{0\}$, тоді

$$\tilde{D}_q\left(\int_0^x f(t)\tilde{d}_q t\right) = \frac{\int_0^{qx} f(t)\tilde{d}_q t - \int_0^{q^{-1}x} f(t)\tilde{d}_q t}{(q - q^{-1})x} =$$

$$= \frac{q}{(q^2-1)x}\left[(1-q^2)qx\sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} f\left(q^{2n+1}qx\right) - (1-q^2)q^{-1}x\sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} f\left(q^{2n+1}q^{-1}x\right)\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} f\left(q^{2n}x\right) - \sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n+2} f\left(q^{2n+2}x\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[q^{2n} f\left(q^{2n}x\right) - q^{2(n+1)} f\left(q^{2(n+1)}x\right)\right] = f(x).$$

Якщо $x = 0$, тоді

$$\tilde{D}_q[F](0) = \lim_{h\to 0}\frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(1-q^2)h\sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} f\left(q^{2n+1}h\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}(1-q^2)\sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} f\left(q^{2n+1}h\right) = (1-q^2)\sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n} f(0) =$$

$$= (1-q^2)\frac{1}{1-q^2} f(0) = f(0)$$

Якщо $x \in I$, то

$$\int_0^x \tilde{D}_q[f](t)\tilde{d}_q t = (1-q^2)x\sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n}\tilde{D}_q[f]\left(q^{2n+1}x\right) =$$

$$= (1-q^2)x\sum_{n=0}^{+\infty} q^{2n}\frac{f\left(qq^{2n+1}x\right) - f\left(q^{-1}q^{2n+1}x\right)}{(q - q^{-1})\left(q^{2n+1}x\right)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[f\left(q^{2n}x\right) - f\left(q^{2(n+1)}x\right)\right] = f(x) - f(0)$$

Звідси ми маємо

$$\int_a^b \tilde{D}_q[f](t)\tilde{d}_q t = \int_0^b \tilde{D}_q[f](t)\tilde{d}_q t - \int_0^a \tilde{D}_q[f](t)\tilde{d}_q t = f(b) - f(a).$$

Висновки. Таким чином, у цій статті розглянуто поняття симетричної q -первісної, симетричного q -інтеграла, виведено формули для обчислення інтеграла Джексона та формула Ньютона-Лейбніца, яка є фундаментальною для інтегрального числення в симетричному квантовому аналізі.

Література:

1. Adams C. R. On the linear ordinary q-difference equation / C. R. Adams // Am. Math. Ser. II. – 1929. – Vol. 30. – P. 195-205.
2. Artur Miguel C. Symmetric quantum calculus / Artur Miguel C., Brito da Cruz., 2012. – 124 c.
3. Carmichael R. D. The general theory of linear q-difference equations / R. D. Carmichael // Am. J. Math. – 1912. Vol. 34. – P. 147-168.
4. Jackson F. H. q-Difference equations / F. H. Jackson // Am. J. Math. – 1910. – Vol. 32. – P. 305-314.
5. K. Brahim - Y. Sidomou, On some symmetric q-special functions, Le Matematiche 68 (2) (2013), 107–122.
6. Kac V. Finite-dimensional representations of quantum affine algebras at roots of 1 / V. Kac, J. Beck // AMS Math. Journal. – 1996. – Vol. 9. – P. 391-423.
7. Mason T. E. On properties of the solution of linear q-difference equations with entire fucntion coefficients / T. E. Mason // Am. J. Math. – 1915. – Vol. 37. – P. 439-444.
8. Кац В. Квантовый аналіз / В. Кац, П. Чен; перевод с англ. Ф. Попеленского и Ж. Тотровой. – М.: МЦНМО, 2005. – 128 с.
9. Качанюк С. С. Квантові симетричні q-похідні / С. С. Качанюк // Актуальні проблеми математики, фізики і технологічної освіти: зб. наук. праць. – Вінниця, 2016. – Вип. 13. – 9-11 с.

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент Бак Сергій Миколайович

Зміст

Бабюк Д. Застосування інтерактивних технологій в процесі вивчення планіметрії як засіб узагальнення та систематизації знань учнів……...3
Бак С. Цей надзвичайний солітон…….....9
Бевз Д. Методи розв'язування планіметричних задач за допомогою введення допоміжного відрізка та площі…….....16
Бех Т. Методи доведення комбінаторних тотожностей……22
Боднар О. Крива Нехарі та її властивості……...28
Ваколюк Г. Застосування технологій DATA MINING для аналізу даних навчального процесу…….....33
Ворошило Ю. Формула Піка та її застосування……37
Гарник В. Подвійні ряди та їх збіжність…….....46
Кальчук А. Використання онлайн сервісу LEARNINGGAPPS у процесі вивчення стереометричних тіл…….....52
Каштельян Ю. Комп'ютерне моделювання як засіб реалізації математичної моделі нелінійного програмування…….....59
Кирилюк В. Дослідження геометричної фігури дельтоїд у процесі навчання учнів геометрії……...65
Ковтонюк Г. Перший комп'ютер у континентальній Європі створили в Україні……73
Колеснік Т. Мотиваційні проблеми та питання активізації розумової діяльності школярів у процесі вивчення математики……..80
Ковтонюк М., Мукоїд А. Побудова формальних розв'язків зчисленної системи диференціальних рівнянь з двома малими параметрами……...88
Ляхович І. Історія виникнення систем комп'ютерної математики……..95
Малик Ю. Активні методи навчання як засіб стимулювання пізнавальної активності старшокласників……..100
Матвійчук Т. Використання принципу симетрії під час розв'язання багатовимірних рівнянь математичної фізики…….....107
Мельник А. Застосування інверсії до розв'язування однієї з задач Аполонія……...112
Могульська Т. Особливості побудови Кейнсіанської функції споживання……..118

Мошкатюк Л. Окремі співвідношення між сторонами і кутами дельтоїда. Площа Дельтоїда…….122
Мулик М. Використання програмного додатку MS EXCEL в маркетингових дослідженнях……129
Ніколаєва М. Ділові ігри в організації самостійної роботи старшокласників..135
Павлюк В., Серьга Д. Використання визначеного інтегралу у фізиці……...142
Пересунько В. До питання методики реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії……148
Печериця І. Нелінійне рівняння Шредінгера та його роль у квантовій механіці……153
Поліщук Т. Застосування похідної до розв'язування прикладних задач……..158
Січкар Ю. Формування геометричної компетентності учнів під час вивчення теми «Координати»…….165
Совінська Т. Застосування методів непараметричної статистики в психолого-педагогічних дослідженнях……171
Стаховська Л. Підсумовування розбіжних рядів за Пуассоном-Абелем…....179
Смірнова А. Поглинаючі ланцюги Маркова…….184
Тимчишена І. Троянди в математиці……191
Черниш В. Інформаційна компетентність майбутнього вчителя як умова адаптації молодого фахівця в освітньому просторі школи…….199
Шатківська В. Комбінаторні задачі навколо нас……...207
Шведюк А. Поняття симетричного h-інтеграла……...213
Шевчук Г. Використання середовища GeoGebra, як один із методів формування дослідницьких умінь учнів під час вивчення стереометрії……217
Шмулян Я., Руда О. Загальні принципи створення нових математичних теорій……223
Яремчук А. Найкрасивіше число у всесвіті……..228
Ярмолюк О. Інтеграл Джексона та формула Ньютона-Лейбніца в симетричному q-аналізі……232

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського

Кафедра математики та інформатики

Науково-популярний альманах
«Математика та інформатика навколо нас»

Випуск 1

Підписано до друку 30.05.2018 р.
Папір офсетний. Друк різографічний.
Формат 60х84/16.
Ум. друк. арк. 10
Наклад 100 прим.
Замовлення №116

Виготовлювач ФОП Рогальська І.О.
м. Вінниця, вул. Хмельницьке шосе, 145
тел. (0432) 43-51-39, 65-80-80
E-mail: dilo_vd@ukr.net
Свідоцтво ВОЗ № 635744 від 01.03.2010 р.