

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет математики, фізики і комп'ютерних наук

Кафедра математики та інформатики

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА

з математичного аналізу

II семестр

Числові та функціональні ряди. Аналіз функцій багатьох
змінних

для студентів предметної спеціальності
А4.09 Середня освіта (Інформатика)



Вінниця 2026

Індивідуальний робочий зошит студента

Дисципліна: математичний аналіз

Розділи: Числові та функціональні ряди. Диференціальне числення функції багатьох змінних. Інтегральне числення функції багатьох змінних

Автор-укладач: доктор фізико-математичних наук,
професор **Бак С. М.**

Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. II семестр. Числові та функціональні ряди. Аналіз функцій багатьох змінних (для студентів предметної спеціальності А4.09 Середня освіта (Інформатика)) [Електронне видання]. Вінниця, 2026. 42 с.

Рецензенти: доктор педагогічних наук,
професор **Ковтонюк М. М.**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Тимошенко О. З.**

Затверджено рішенням кафедри математики та інформатики ВДПУ імені Михайла Коцюбинського, протокол № 10 від 14 січня 2026 року. **Рекомендовано** до публікації рішенням Вченої ради факультету математики, фізики і комп'ютерних наук (протокол № 6 від 20 січня 2026 року).

Передмова

Робочий зошит з математичного аналізу призначений для використання студентами предметної спеціальності А4.09 Середня освіта (інформатика) при вивченні розділів «Числові та функціональні ряди», «Диференціальне числення функції багатьох змінних» та «Інтегральне числення функції багатьох змінних».

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних тем, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю.

Робочий зошит складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання.

Після кожного розділу подано зразок контрольної роботи. Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

Робочий план студента

Робочий план студента складений на основі робочої програми з математичного аналізу, затвердженої Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	денна форма					
	усього	зокрема				
		ЛК	ПЗ	ЛЗ	ІЗ	СР
1	2	3	4	5	6	7
2-й семестр						
Розділ 4. Числові та функціональні ряди						
Тема 1. Числові ряди та їх збіжність	9	2	1	0	0	6
Тема 2. Числові ряди з невід'ємними членами	9	2	1	0	0	6
Тема 3. Функціональні послідовності та ряди	10	2	2	0	0	6
Тема 4. Степеневий ряд	14	2	6	0	0	6
Разом за розділом 4	42	8	10	0	0	24
Розділ 5. Диференціальне числення функції багатьох змінних						
Тема 1. Границя і неперервність функції багатьох змінних	9	2	1	0	0	6
Тема 2. Диференційовність функції багатьох змінних. Частинні похідні та диференціали вищих порядків	9	2	1	0	0	6
Тема 3. Неявні функції багатьох змінних	8	2	0	0	0	6
Тема 4. Екстремум функції багатьох змінних. Умовний екстремум	10	2	2	0	0	6
Разом за розділом 5	36	8	4	0	0	24
Розділ 6. Інтегральне числення функції багатьох змінних						
Тема 1. Подвійний інтеграл	10	2	2	0	0	6
Тема 2. Потрійний інтеграл	10	2	2	0	0	6
Тема 3. Криволінійний інтеграл першого роду	10	2	2	0	0	6
Тема 4. Криволінійний інтеграл другого роду	12	2	4	0	0	6
Разом за розділом 6	42	8	10	0	0	24
Усього годин за 2-й семестр	120	24	24	0	0	72

Розподіл балів (за видами діяльності)

№	Вид діяльності	Коефіцієнт вартості (бали)	Кількість робіт	Результат (бали)
1.	Домашні завдання	1	10	10
2.	Конспект	10	1	10
3.	Контрольна робота	20	2	40
4.	Колоквіум/Тест	20	1	20
Всього за семестр:				80
Екзамен				20
Підсумковий рейтинговий бал				100

Шкала оцінювання: сто балова, ECTS, розширена

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за розширеною шкалою
		<i>Для екзамену, заліку, курсової роботи, практики</i>
90-100	A	ВІДМІННО
80-89	B	ДУЖЕ ДОБРЕ
75-79	C	ДОБРЕ
60-74	D	ЗАДОВІЛЬНО
50-59	E	ДОСТАТНЬО
35-49	FX	НЕЗАДОВІЛЬНО З МОЖЛИВІСТЮ ПОВТОРНОГО СКЛАДАННЯ
1-34	F	НЕПРИЙНЯТНО З ОБОВ'ЯЗКОВИМ ПОВТОРНИМ ВИВЧЕННЯМ ДИСЦИПЛІНИ

Практичне заняття № 1

Тема: Числові ряди та їх збіжність. Числові ряди з невід'ємними членами

1. Знайти n -у часткову суму S_n ряду і суму S ряду:

а) $\frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \dots + \frac{2}{5^n} + \dots$;

б) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right) + \dots$;

в) $\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots$;

г) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$;

д) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$;

е) $\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} + \dots$;

є) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2 - 24n - 5}$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}$;

і) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n} \cos \frac{3}{2^n}$;

к) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}$.

2. Довести розбіжність ряду, використовуючи необхідну умову збіжності:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,001}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n^2 + 1}{n+2} \arcsin \frac{1}{n^2 + 2n + 3}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)}$.

3. Користуючись критерієм Коші, довести збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,

якщо:

а) $u_n = \frac{\cos nx}{2^n}$;

б) $u_n = \frac{\sin n\alpha}{n(n+1)}$;

в) $u_n = \frac{\cos \alpha^n}{n^2}$;

г) $u_n = \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$.

4. Скориставшись ознакою порівняння, дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n^2}{n+1}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{4^n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 5}{n^2 + 4}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \cos n}{3^n + \sin n}$;

є) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{n+1}}{\sqrt{n}}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n + 1}$;

з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1 + (-1)^n}{2}}{n^3 + 2}$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} (2 + (-1)^n)}{\ln(1 + n)}$.

5. Скориставшись ознакою Даламбера, дослідити на збіжність ряди:

а) $2 + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \dots + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)} + \dots$;

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n+1)}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n+2)}{2^n (n+1)!}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n}$;

є) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 4^{3n}}$.

6. Скориставшись ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2};$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(1+n)};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{n^{\frac{3}{2}}};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n+1}{5n-3} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{5}{6} \right)^{\frac{2n}{3}};$$

$$д) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{2n+1} \right)^n \arcsin^n \frac{1}{n};$$

$$е) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}}{(3n^2 + 2n + 1)^{\frac{n+3}{2}}};$$

$$е) \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \dots$$

$$\left(\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4} \right);$$

$$ж) \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} + \dots$$

7. Встановивши збіжність ряду, довести, що:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0;$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0;$$

$$в) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{(2n)!} = 0;$$

$$г) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{4^{n^2}} = 0.$$

8. Скориставшись інтегральною ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)};$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1) \ln(\ln(n+1))};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2;$$

$$г) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1};$$

$$д) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{(5n^2 - 9) \ln(n-2)}.$$

📖 Практичне заняття № 2

Тема: Степеневі ряди. Область збіжності

✎1. Знайти радіус збіжності R , інтервал і область збіжності степеневому ряду:

а) $\frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{x^n}{n(n+2)} + \dots;$

б) $\frac{\ln 2}{1} x^2 + \frac{\ln 3}{2} x^3 + \dots + \frac{\ln(n+1)}{n} x^{n+1} + \dots;$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{3^{n-1} n \sqrt{n}};$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}};$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(x-5)^{n+1}}{(n+1)!};$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n \cdot 4^n};$

є) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n} (n+1) \ln(n+1)};$

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n;$

з) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n (x+2)^n;$

и) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}} (x+2)^n;$

і) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n, \quad a > 0, \quad b > 0;$

ї) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}, \quad a > 0, \quad b > 0.$

✎2. Знайти радіус збіжності і суму степеневому ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (4x)^n;$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} 3n x^{3n-1};$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3};$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1};$

є) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^{n-1}};$

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1};$

з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^{3n-2}}{3n-2};$

и) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3x-1)^n}{n(n+3)}.$

✎3. Знайти суму числового ряду:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n!};$$

$$б) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{n!};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n+1)^2};$$

$$д) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)};$$

$$е) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)};$$

$$є) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2};$$

$$ж) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)};$$

$$з) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)};$$

$$и) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(3n+1)}.$$

4. Самостійно побудувати рівномірно збіжний функціональний ряд, з допомогою диференціювання або інтегрування його записати числовий ряд при конкретних значеннях x :

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!};$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1};$$

$$д) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Практичне заняття № 3

Тема: Розклад функцій у степеневі ряди

1. Розкласти функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 :

$$a) f(x) = x^3 + 2x + 2, \quad x_0 = -1;$$

$$б) f(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4, \quad x_0 = -1;$$

$$в) f(x) = x^6, \quad x_0 = -2;$$

$$г) f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 2, \quad n = 4;$$

$$д) f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}, \quad x_0 = 2;$$

$$е) f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$є) f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}, \quad x_0 = 0;$$

$$ж) f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x_0 = 0; \quad x_0 = 1.$$

2. Використовуючи відомі розклади функцій в степеневий ряд, розкласти функцію в ряд Маклорена:

а) $\frac{x^{10}}{1-x}$; б) $\frac{x^2}{(1+x)^2}$; в) $\frac{1}{(1-x^3)^2}$;
г) $(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$; д) $\frac{5x-4}{x+2}$; е) $\frac{5-2x}{x^2-5x+6}$;
є) $\frac{1}{1+x+x^2}$; ж) $\frac{1}{1-x-x^2}$; з) $\frac{1}{x^3+x^2+3x+3}$;
и) $\ln \frac{2x+1}{x^2-4x+4}$; і) $(x^2+5)\ln \frac{9-x^2}{4-x^2}$; ї) $\ln(12-x-x^2)$;
к) $\cos^2 x$; л) $\sin 3x \sin 5x$; м) $\sin^3 x$.

3. Використовуючи відомі розклади функцій в степеневий ряд, довести, що:

а) $\frac{1}{a+bx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^n}{a^{n+1}} x^n, \quad |x| < \left| \frac{a}{b} \right|, \quad ab \neq 0$;
б) $\frac{1}{x^2+a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{2(n+1)}} x^{2n}, \quad |x| < |a|, \quad a \neq 0$;
в) $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{a^{2n+1}(2n)!!} x^{2n}, \quad |x| < a, \quad a > 0$;
г) $\sqrt{a^2+x^2} = a + \frac{x^2}{2a} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{a^{2n-1}(2n)!!} x^{2n}, \quad |x| < a, \quad a > 0$;
д) $\ln(a+bx) = \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{b}{a} \right)^n \frac{x^n}{n}, \quad |x| < \frac{a}{|b|}, \quad a > 0, \quad b \neq 0$.

4. Розкласти у ряд Маклорена функцію $f(x)$, скориставшись рядом Маклорена для її похідної, і знайти радіус збіжності цього ряду:

а) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; б) $f(x) = \arcsin x$;
в) $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$; г) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$;
д) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-x}{1+2x}$; е) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}$;
є) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$; ж) $f(x) = \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{16+x^4}}$.

5. Розкласти у ряд Маклорена функцію і знайти радіус збіжності ряду:

- а) $x \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$; б) $x \ln(x^2 + \sqrt{9 + x^4})$;
 в) $(x^2 - 1) \arcsin 2x^2$; г) $x^2 \arccos 2x$;
 д) $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$; е) $x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$;
 є) $\ln\left(\pi \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\right) + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$; ж) $\frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$.

6. Розкласти функцію в ряд Тейлора в околі точки x_0 і знайти його радіус збіжності:

- а) $\frac{1}{x^2 - 5x + 6}$, $x_0 = 1$; б) $\frac{1}{(x^2 - 6x + 18)^2}$, $x_0 = 3$;
 в) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 12x + 40}}$, $x_0 = 6$; г) $(x + 1) \cos^2 x$, $x_0 = -1$;
 д) $\cos^4 x$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$; е) $\ln(x^2 + 2x + 2)$, $x_0 = -1$;
 є) $\ln(x^2 - 9x + 20)$, $x_0 = 3$.

7. Використовуючи інтегрування, знайти суму ряду:

- а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$;
 в) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}$.

Практичне заняття № 4

Тема: Застосування степеневих рядів

1. Обчислити із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

- а) $\cos 1^0$; б) $\cos 10^0$; в) $\sin 10^0$; г) $\sin 1^0$;
 д) $\sqrt[3]{130}$; е) $\sqrt[3]{500}$; є) $\sqrt[3]{68}$; ж) $\sqrt[7]{129}$;
 з) $\ln 1,2$; и) $\ln 1,3$; і) $\ln 0,98$; ї) $\sqrt[10]{1000}$;
 к) $\sqrt{e}$; л) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$; м) $\arcsin \frac{1}{3}$; н) $\operatorname{arctg} \frac{\pi}{10}$.

2. Обчислити інтеграли із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx; & \text{б)} \int_0^1 \sin x^2 dx; & \text{в)} \int_0^{0.8} x^{10} \sin x dx; \\
 \text{г)} \int_0^{0.5} x \ln(1+x^2) dx; & \text{д)} \int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx; & \text{е)} \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx; \\
 \text{є)} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctg x}{x} dx; & \text{ж)} \int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^4}; & \text{з)} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}.
 \end{array}$$

3. Знайти похідну k -го порядку функції $f(x)$ у точці x_0 :

$$\begin{array}{ll}
 \text{а)} f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad k=7, \quad x_0=0; \\
 \text{б)} f(x) = x^6 e^x, \quad k=10, \quad x_0=0; \\
 \text{в)} f(x) = x^2 \ln(4+x^2), \quad k=11, \quad x_0=0; \\
 \text{г)} f(x) = \frac{1}{(x^2-6x+18)^2}, \quad k=6, \quad x_0=3; \\
 \text{д)} f(x) = \ln \frac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}}, \quad k=4, \quad x_0=0; \\
 \text{е)} f(x) = \ln \frac{x^2-2x+3}{2-x}, \quad k=7, \quad x_0=1.
 \end{array}$$

4. Знайти границі:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \right)^{(n)}; & \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \ln(1-x)}{x^2} \right)^{(n)}; \\
 \text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\arctg x}{x} \right)^2 \right)^{(n)}; & \text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\arctg x \cdot \ln(1+x^2) \right)^{(n)}; \\
 \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x(1-x^2)} \ln \frac{1+x}{1-x} \right)^{(n)}; & \text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} \right)^{(n)}.
 \end{array}$$

5. Обчислити похибку наближеної рівності

$$\ln(n+1) \approx \ln n + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)^{2k-1}}$$

і обчислити $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 4$, $\ln 5$, $\ln 10$ з точністю до 10^{-4} .

Практичне заняття № 5

Контрольна робота № 1 (зразок)

 1. Знайти суму ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}$.

 2. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$.

 3. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду:
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^{n-1}}$.

 4. Розвинути функцію у ряд Маклорена: $f(x) = \ln(12 - x - x^2)$.

Практичне заняття № 6

Тема: Границя, неперервність і диференційовність функції багатьох змінних. Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Дотична площина і нормаль

З1. Для функції $z = f(x, y)$ знайти повторні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right)$; $\lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right)$; і границю $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$, якщо вони існують у випадках:

а) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$, $(1; 1)$; $(0; 0)$; $(+\infty; +\infty)$; $(+\infty; -\infty)$;

б) $f(x, y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$, $(0; 0)$; $\left(\frac{1}{\pi}; 0\right)$; $\left(\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi}\right)$; $(+\infty; +\infty)$;

в) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$, $(0; 0)$; $(+\infty; +\infty)$; $(+\infty; -\infty)$;

г) $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$, $(0; 0)$; $(+\infty; +\infty)$; $(0; +\infty)$; $(0; 1)$;

д) $f(x, y) = x^2 e^{-(x^2-y)}$, $(+\infty; +\infty)$; $(0; +\infty)$; $(+\infty; 0)$; $(+\infty; -\infty)$;

е) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}$, $(+\infty; +\infty)$; $(0; 0)$; $(\infty; 0)$; $(0; \infty)$;

є) $f(x, y) = \frac{\sin \pi x}{2x+y}$, $(+\infty; +\infty)$; $(+\infty; -\infty)$; $(0; +\infty)$; $(+\infty; 0)$;

ж) $f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}$, $(0; +\infty)$; $(0; 0)$;

з) $f(x, y) = \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$, $(+\infty; +\infty)$, $(+\infty; 1)$; $(+0; +0)$; $(+0; +\infty)$.

З2. Знайти границю функції $z = f(x, y)$ в точці $(0; 0)$, або довести, що вона не існує, якщо:

а) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$;

в) $f(x, y) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4 + y^4}$;

б) $f(x, y) = \frac{\sin(x^4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$;

$$\Gamma) f(x; y) = \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2};$$

$$\epsilon) f(x; y) = \frac{\sqrt[3]{x^3 + y^3} - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\Delta) f(x; y) = \frac{(x^2 + y^2)x^2 y^2}{1 - \cos(x^2 + y^2)};$$

$$\text{Ж}) f(x; y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

$$\epsilon) f(x; y) = (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}};$$

3. Дослідити функції на неперервність і знайти точки розриву, якщо такі є:

$$a) f(x; y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0; \end{cases}$$

$$\text{б)} f(x; y) = \frac{2x - 3}{x^2 + y^2 - 4};$$

$$b) f(x; y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x + y}, & x + y \neq 0, \\ 3, & x + y = 0; \end{cases}$$

$$\Gamma) f(x; y) = \begin{cases} \frac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}, & (x, y) \notin \mathbb{Z}^2, \\ 1, & (x, y) \in \mathbb{Z}^2; \end{cases}$$

$$\Delta) f(x; y) = \frac{\sin^2 x \sin y}{\sin^4 x + \sin^2 y};$$

$$\epsilon) f(x; y) = x \sin \frac{y^2}{x^2 + y^2};$$

$$\epsilon) f(x; y; z) = \frac{1}{\sin \pi x + \sin \pi y + \sin \pi z};$$

$$\text{Ж}) f(x; y; z) = \frac{1}{\sqrt{8 - x^2 - 2y^2 - 4z^2}}.$$

4. Знайти частинні похідні за кожною з незалежних змінних та повні диференціали функцій:

$$a) z = x^3 y - y^3 x;$$

$$b) z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2};$$

$$\text{б)} z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u};$$

$$\Gamma) z = (5x^2y - y^3 + 7)^3;$$

$$\epsilon) z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y};$$

$$\Delta) z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}};$$

$$\text{Ж}) z = x^y;$$

$$\Theta) z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2});$$

$$\text{З}) z = \ln(x^2 + y^2).$$

5. Дослідити функцію $f(x, y)$ на диференційовність в точці $(0; 0)$:

$$\text{а)} f(x, y) = \sqrt[3]{xy};$$

$$\text{б)} f(x, y) = \cos \sqrt[3]{xy};$$

$$\text{в)} f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3};$$

$$\Gamma) f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3};$$

$$\Delta) f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\Theta) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\epsilon) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{Ж}) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

6. Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено обчислити:

а) $\sqrt{1,98^2 + 1,01^2}$;

б) $\sin 59^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$;

в) $0,97^{1,05}$;

г) $2,003^2 \cdot 3,998^3 \cdot 1,002^2$;

д) $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$;

е) $1,04^{2,02}$;

є) $1,94^2 \cdot e^{0,12}$;

ж) $2,68^{\sin 0,05}$;

з) $\ln(1,05) \cdot \operatorname{arctg} 0,99$;

и) $\frac{\operatorname{tg} 46^\circ \operatorname{arccctg} 0,01}{(4,03)^{\frac{1}{2,02}}}$.

7. Знайти всі частинні похідні і диференціали другого порядку для функцій:

а) $z = \ln \frac{2 - y - x^2}{2 + y + x^2}, (1; 0)$;

б) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;

в) $z = \operatorname{zrctg} \frac{x + y}{1 - xy}, (0; 0)$;

г) $z = \sin^2(ax + by), (0; 0)$;

д) $z = \arcsin xy$;

е) $z = \frac{x - y}{x + y}$;

є) $z = (\sin x)^{\cos y}, \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$;

ж) $z = \operatorname{arctg} \sqrt{xy}$.

8. Знайти вказані частинні похідні:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$, якщо $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}$;

б) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, якщо $z = e^{xy^2}$;

в) $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, якщо $z = \ln(x^2 + y^2)$;

Г) $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, якщо $u = e^{xyz}$;

Д) $\frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^3 \partial z^2}$, якщо $u = x^m y^n z^p$;

Е) $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial t}$, якщо $f = \ln \sqrt{(x-y)^2 + (z-t)^2}$;

Є) $\frac{\partial^{3n} u}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n}$, якщо $f = x^{n+1} (y-1)^n (z+1)^{n-1}$.

9. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в заданій точці:

а) $z = xy$, $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(2; 1; 2)$;

б) $z = x^2 + y^2$, $M(1; 1; 2)$;

в) $z = 2x^2 - 4y^2$, $M(-2; 1; 4)$;

г) $z = (x-y)^2 - x + 2y$, $M(1; 1; 1)$;

д) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $M(-3; 4; 17)$;

е) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $M(0; 1; 0)$;

є) $z = \sin \frac{x}{y}$, $M(\pi; 1; 0)$;

ж) $z = e^{x \cos y}$, $M(1; 0; e)$.

10. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в заданій точці:

а) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$, $M(1; 2; -1)$;

б) $xy^2 + z^3 = 12$, $M(1; 2; 2)$;

в) $x^n + y^n + z^n = a^n$, $M(1; 1; 0)$;

г) $x^2 y^2 + 2x + z^3 = 16$, $M(2; 1; 2)$;

д) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z - 4$, $M(2; 3; 6)$;

е) $e^z - z + xy = 3$, $M(2; 1; 0)$;

є) $z = y + \ln \left(\frac{x}{z} \right)$, $M(1; 1; 1)$;

ж) $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$, $M(1; 1; 1)$.

Практичне заняття № 7

Тема: Екстремум функції багатьох змінних. Найбільше і найменше значення функції. Умовний екстремум

1. Знайти стаціонарні точки функцій:

а) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;

б) $z = xy(a - x - y)$;

в) $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$,

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$;

г) $z = (2ax - x^2)(2by - y^2)$;

д) $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$;

е) $z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$;

є) $u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$.

2. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

I. а) $z = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$;

б) $z = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2$;

II. а) $z = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y$;

б) $z = x^2y(4 - y)$;

III. а) $z = x^4 + y^4 - 2x^2$;

б) $z = (x^2 - 4y^2 + 2x)^2$;

в) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$;

є) $z = xy^2(12 - x - y), x > 0, y > 0$;

ж) $z = x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^2y + 12xy$;

IV. а) $z = xy\ln(x^2 + y^2)$;

б) $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$;

в) $z = xy\ln(x^2 + y^2)$;

г) $z = (5 - 2x + y)e^{x^2-y}$;

в) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$;

г) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$;

в) $z = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$;

г) $z = y^3 - x^2 - 27y + 3x + 16$;

г) $z = xy^4(1 + x - y)$;

д) $z = x^2y^3(6 - x - y)$;

е) $z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y$;

д) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$;

е) $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

3. Дослідити на екстремум функцію трьох змінних:

а) $u = x^2 + y^2 + (z + 1)^2 - xy + x$;

б) $u = (x - 2y + 3)^2 + (2x - z)^2$;

д) $u = x^4 + y^4 + z^4 - 8(x^2 + y^2 + z^2)$;

е) $u = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$;

є) $u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$;

в) $u = xy^2z^3(1 - x - y - z)$;

г) $u = xyz(16 - x - y - 2z)$;

$$\text{ж)} u = \frac{2x^2}{y} + \frac{y^2}{z} - 4x + 2z^2.$$

4. Знайти найбільше і найменше значення функції на заданій множині:

I. а) $z = x - 2y - 3, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1;$

б) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2;$

в) $z = x^3 + y^3 - 3xy, 0 \leq x \leq 2, |y| \leq 1;$

г) $z = x^2 y(4 - x - y), x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 6;$

д) $z = e^{-x^2-y^2} (2x^2 + 3y^2), x^2 + y^2 \leq 4;$

е) $z = x^2 + y^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 (0 < b < a);$

є) $z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 \leq 2x;$

ж) $z = x^2 y, x^2 + y^2 \leq 1;$

II. а) $u = x + 2y + 3z, x + y \leq 3, x + y \leq z, 3x + 3y \geq z, x \geq 0, y \geq 0;$

б) $u = x + y + z, x^2 + y^2 \leq z \leq 1;$

в) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 100;$

г) $z = (x - y^2) \sqrt[3]{(x-1)^2}, y^2 \leq x \leq 2.$

5. В кулю радіуса R вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.

6. З усіх трикутників з однаковою основою і тим же кутом при вершині знайти найбільший за площею.

7. Визначити розміри відкритого прямокутного акваріуму з заданою товщиною стінок d і об'ємом V , на виготовлення якого потрібно найменша кількість матеріалу.

8. У півсферу радіуса R вписати прямокутний паралелепіпед так, щоб його об'єм був найбільшим.

9. З усіх вписаних у коло радіуса R трикутників знайти той, що має найбільшу площу.

10. Дослідити задані функції на умовний екстремум при вказаних умовах зв'язку:

а) $z = xy, x + y - 1 = 0;$

б) $z = x^2 + y^2, 3x + 2y - 6 = 0;$

в) $z = \cos^2 x + \cos^2 y, \quad x - y - \frac{\pi}{4} = 0;$

г) $z = x^2 - y^2, \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0;$

д) $z = 5 - 3x - 4y, \quad x^2 + y^2 = 25;$

е) $z = x^2 + xy + y^2, \quad x^2 + y^2 = 1.$

11. Дослідити задані функції на умовний екстремум при вказаних умовах зв'язку:

а) $u = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2, \quad x + y + z = 13;$

б) $u = x^m y^n z^p \quad (m > 0, n > 0, p > 0), \quad x + y + z = 1;$

в) $u = \sin x \sin y \sin z, \quad x + y + z = \frac{\pi}{2}, \quad x > 0, y > 0, z > 0;$

г) $u = \cos x \cos y \cos z, \quad x + y + z = \pi;$

д) $u = x + y + z, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1, \quad x > 0, y > 0, z > 0;$

е) $u = xy^2 z^3, \quad x + 2y + 3z = 6.$

Практичне заняття № 8

Тема: Подвійний інтеграл

1. Скласти інтегральну суму для подвійного інтеграла при заданих умовах:

а) $\iint_{(P)} xy dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$

область інтегрування розбити на квадрати прямими $x = \frac{i}{n}, y = \frac{j}{n}, i, j = \overline{1, n-1}$ і за точки M_k взяти праві вершини цих квадратів;

б) $\iint_{(P)} x^2 y^3 dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$

область інтегрування розбити прямими $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$ на чотири прямокутники, за точки M_k вибрати центри цих прямокутників.

2. Обчислити подвійний інтеграл, взятий по прямокутній області інтегрування:

а) $\iint_{(P)} xy dx dy, (P) = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\};$

б) $\iint_{(P)} e^{x+y} dx dy, (P) = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$

в) $\iint_{(P)} \frac{x^2}{1+y^2} dx dy, (P) = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$

г) $\iint_{(P)} \frac{dx dy}{(x+y+1)^2}, (P) = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$

д) $\iint_{(P)} \frac{y dx dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}, (P) = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\};$

е) $\iint_{(P)} x \sin(x+y) dx dy, (P) = \left\{ (x; y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right\};$

є) $\iint_{(P)} x^2 y e^{xy} dx dy, (P) = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\};$

ж) $\iint_{(P)} x^2 y \cos(xy^2) dx dy, (P) = \left\{ (x; y) | 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 2 \right\}.$

3. Обчислити подвійний інтеграл, якщо область інтегрування довільна:

I. а) $\iint_{(P)} xy dx dy, (P): y = 0, y = x, x + y = 2;$

б) $\iint_{(P)} (x^2 + y^2) dx dy, (P): y = x, y = x + a, y = a, y = 3a;$

в) $\iint_{(P)} (x + 2y) dx dy, (P): y = x, y = 2x, x = 2, x = 3;$

г) $\iint_{(P)} \cos(x+y) dx dy, (P): x = 0, y = \pi, y = x;$

д) $\iint_{(P)} \sin \pi(x-y) dx dy, (P) - \text{трикутник з вершинами}$

$$(-4; 1), \left(-1; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{7}{2}; \frac{17}{2}\right);$$

$$\text{e)} \iint_{(P)} \sqrt{y^2 - x^2} dx dy, \quad (P): y=1, \quad y=x, \quad y=-x;$$

$$\text{II. a)} \iint_{(P)} (x^2 + y) dx dy, \quad (P): y=x^2, \quad y^2=x;$$

$$\text{б)} \iint_{(P)} \frac{x^2}{y^2} dx dy, \quad (P): x=2, \quad y=x, \quad xy=1;$$

$$\text{в)} \iint_{(P)} xy^2 dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0\};$$

$$\text{г)} \iint_{(P)} (x^3 + y^3) dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq R^2, y \geq 0\};$$

$$\text{д)} \iint_{(P)} xy dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq 25, 3x + y \geq 5\};$$

$$\text{e)} \iint_{(P)} x dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq 2, x^2 - y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\};$$

$$\text{е)} \iint_{(P)} (2y - x) dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | y(y - x) \leq 2, x(x + y) \leq 3\}.$$

4. Обчислити інтеграл, перейшовши до полярних координат:

$$\text{a)} \iint_{(P)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq Rx\};$$

$$\text{б)} \iint_{(P)} (x^2 + y^2) dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | x^2 + (y + 2)^2 \leq 4\};$$

$$\text{в)} \iint_{(P)} \cos\left(\pi \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq 1\};$$

$$\text{г)} \iint_{(P)} \ln(x^2 + y^2) dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | e^2 \leq x^2 + y^2 \leq e^4\};$$

$$\text{д)} \iint_{(P)} \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad (P) = \left\{ (x; y) | \frac{\pi^2}{9} \leq x^2 + y^2 \leq \pi^2 \right\};$$

$$\text{e)} \iint_{(P)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2y\};$$

$$\text{е)} \iint_{(P)} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (P): x^2 - y^2 = 6, x = 3;$$

$$\text{ж)} \iint_{(P)} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, \quad (P) = \{(x; y) | ax \leq x^2 + y^2 \leq a(x + \sqrt{x^2 + y^2})\}.$$

5. Обчислити інтеграл, зробивши заміну:

а) $\iint_{(P)} dx dy$, $(P) = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x\}$; $x = u(1-v)$, $y = uv$;

б) $\iint_{(P)} xy dx dy$, $(P): xy = 1, x + y = \frac{5}{2}$; $x + y = u$, $xy = v$;

в) $\iint_{(P)} (2x - y) dx dy$, $(P) = \{(x; y) | x + y \geq 1, x + y \leq 2, 2x - y \geq 1, 2x - y \leq 3\}$; $x + y = u$, $2x - y = v$;

г) $\iint_{(P)} e^{k(x+y)^2} dx dy$, $(P) = \{(x; y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$;

$x = u - uv$, $y = uv$;

д) $\iint_{(P)} (x^2 - y^2) \sin \pi(x - y)^2 dx dy$, $(P) = \{(x; y) | |y| \leq x \leq 1 - |y|\}$;

е) $\iint_{(P)} e^{\frac{x^4}{y^2}} dx dy$, $(P): y = x, y = 2x, y = x^2$;

є) $\iint_{(P)} (x^4 - y^4) dx dy$, $(P) = \{(x; y) | x > 0, 1 \leq xy \leq 2, 1 \leq x^2 - y^2 \leq 2\}$;

ж) $\iint_{(P)} x dx dy$, $(P) = \left\{ (x; y) | x > 0, y > 0, \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} < 1 \right\}$.

6. Знайти площу фігури, обмеженої кривими:

а) $xy = 4$, $x + y - 5 = 0$;

б) $x^2 + y^2 = 4$, $y^2 = 4 - 4x$, $x < 1$;

в) $4y = x^2 - 4x$, $x = y + 3$;

г) $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = 9 - 6x$;

д) $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x - x^2$, $2x < y^2$;

е) $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2bx$, $y = x$, $y = 0$, $b > a > 0$;

є) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$;

ж) $(x^2 + 2y^2)^3 = xy^4$;

з) $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = x^2 y$;

- и) $xy = a^2$, $xy = b^2$, $x^2 = py$, $x^2 = qy$, $0 < a < b$, $0 < p < q$;
 і) $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $x^3 = py^2$, $x^3 = qy^2$, $0 < a < b$, $0 < p < q$;
 і) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{y^2}{c^2}$;
 к) $(x+y)^4 = a^2(x^2 + y^2)$, $x=0$, $y=0$ ($x > 0$, $y > 0$).

7. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

а) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=4$, $y=4$, $z=x^2+y^2+1$
 (параболоїд обертання);

б) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=a$, $y=b$, $z=\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$

(еліптичний параболоїд);

в) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (піраміда);

г) $x+y+z=a$, $4x+y=a$, $4x+3y=3a$, $y=0$, $z=0$, $a > 0$;

д) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$, $z=x^2+y^2$;

е) $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $z=0$, $x+z=6$;

є) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y=0$, $z=\frac{x}{2}$, $z=x$;

ж) $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$;

з) $x=\pm 1$, $y=\pm 1$, $z=4-x^2-y^2$;

и) $x^2+y^2+z^2=R^2$;

і) $z=0$, $2-x-y-2z=0$, $y=x$, $y=x^2$;

ї) $x^2+y^2=4x$, $z=x$, $z=2x$;

к) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

8. Знайти координати центра мас плоскої фігури з густиною $\rho = \rho(x; y)$:

а) $\frac{y^2}{a} \leq x \leq 2a-y$, $a > 0$, $\rho=1$;

б) $x^2+y^2 \leq a^2$, $|y| \leq x \operatorname{tg} \alpha$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\rho=1$;

- в) $y \leq \frac{a^2}{x}, \frac{y^2}{8a} \leq x \leq 2a, a > 0, \rho = 1;$
 г) $x = y, x - 3y = 1, y = 1, y = 3, \rho = y;$
 д) $x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 4y, xy \geq 0, \rho = x;$
 е) $r \leq a(1 + \sin \varphi), \rho = 1.$

9. Обчислити момент інерції:

- а) прямокутника зі сторонами a і b відносно його сторін;
 б) квадрата зі стороною a відносно однієї з вершин;
 в) трикутника, обмеженого прямими $x + y = 2, x = 2, y = 2$ відносно осі Ox ;
 г) півкруга відносно його діаметра.

📖 Практичне заняття № 9

Тема: Потрійний інтеграл

1. Звести потрійний інтеграл $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$ до повторного

по змінних x, y, z довільним чином, або тим, що вказано в умові, якщо множина (V) обмежена поверхнями:

- а) $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1 - x, z = x, x + y + z = 1;$
 б) $x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 4, 2x + y \leq 2; (x, y, z), (y, z, x);$
 в) $x = 0, y = 0, z = 0, x + 2y + 3z = 3; (x, y, z), (z, x, y);$
 г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$
 д) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, x = 0, y = 0, z = 0 (a > 0, b > 0, c > 0);$
 е) $x = \pm 1, y = 0, y = 4 - x, z = 0, x + y + z = 4.$

2. Обчислити інтеграл $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$, якщо:

- I. а) $f(x; y; z) = x, (V): x = 0, y = 0, z = 0, 2x + y + z = 4;$
 б) $f(x; y; z) = x + y + z,$
 $(V) = \{(x; y; z) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\};$
 в) $f(x; y; z) = x, (V): x = 0, y = 0, z = 0, y = h, x + z = a;$

г) $f(x; y; z) = (1 + x + y + z)^{-3}$, $(V): x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$;

д) $f(x; y; z) = x^2 - z^2$, $(V): y = -x, z = x, z = y, z = 1$;

II. а) $f(x; y; z) = xy$, $(V): x \geq 0, y \geq 0, z = 0, z = 1, x^2 + y^2 = 1$;

б) $f(x; y; z) = xyz$, $(V): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

в) $f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(V): z = 1, x^2 + y^2 = z^2$;

г) $f(x; y; z) = xy^2z^3$, $(V): x = 1, y = x, z = 0, z = xy$;

д) $f(x; y; z) = xyz$, $(V): y = x^2, x = y^2, z = xy, z = 0$.

3. Обчислити інтеграл $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$, перейшовши до

циліндричних координат, якщо:

а) $f(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$,

$(V) = \{(x; y; z) | x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, 0 \leq z \leq H\}$;

б) $f(x; y; z) = x + y + z$, $(V): x^2 + y^2 = 1, z = 0, x + y + z = 2$;

в) $f(x; y; z) = x^2 + y^2$, $(V) = \{(x; y; z) | \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 2\}$;

г) $f(x; y; z) = z - x + y$, $(V): ay = z^2 + x^2, y^2 = x^2 + z^2, a > 0$;

д) $f(x; y; z) = \frac{xz}{x^2 + y^2 - R^2}$,

$(V): x = 0, y = 0, z = h, z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2), x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;

е) $f(x; y; z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $(V): x^2 + y^2 = 4y, y + z = 4, z \geq 0$.

4. Обчислити інтеграл $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dx dy dz$, перейшовши до

сферичних координат, якщо:

а) $f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(V) = \{(x; y; z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 8\}$;

б) $f(x; y; z) = \frac{x}{R^4 + (x^2 + y^2 + z^2)^2}$,

$(V) = \{(x; y; z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0\}$;

в) $f(x; y; z) = x^2 + y^2 - z^2$,

$$(V) = \{(x; y; z) | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\};$$

$$\Gamma) f(x; y; z) = yz + zx,$$

$$(V): y = x, x = 0, z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0;$$

$$\Delta) f(x; y; z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$(V) = \left\{ (x; y; z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2} \right\};$$

$$e) f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, (V) = \{(x; y; z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq z\};$$

$$\epsilon) f(x; y; z) = x^m y^n z^p, m, n, p \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$(V) = \{(x; y; z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

5. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$I. a) z = 4 - y^2, z = y^2 + 2, x = -1, x = 2;$$

$$б) z = x^2 + y^2, z = x^2 + 2y^2, y = x, y = 2x, x = 1;$$

$$в) z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x^2, y = x;$$

$$\Gamma) y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}, z = 0, x + z = 2;$$

$$\Delta) y = 5\sqrt{x}, y = \frac{5x}{3}, z = 0, z = 5 + \frac{5\sqrt{x}}{3};$$

$$e) z = \ln(x + 2), z = \ln(6 - x), x = 0, x + y = 2, x - y = 2;$$

$$\epsilon) (x - 1)^2 + y^2 = z, 2x + z = 2. \text{ Вказівка: проекція тіла на площину } XOY \text{ є круг};$$

$$II. a) (x^2 + y^2)^2 = 2xy, z = x + y, z = 0, x > 0;$$

$$б) x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = x^2 + y^2, z = 0;$$

$$в) x^2 + y^2 = 1, z = e^{-(x^2 + y^2)}, z = 0;$$

$$\Gamma) x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 + a^2 = 2z^2, a > 0, z > 0;$$

$$\Delta) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, z = 0;$$

$$e) \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, z = 0, c > 0;$$

$$\epsilon) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2, a > 0, c > 0;$$

III. (можна використати сферичні координати):

$$\text{a)} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (z < \sqrt{x^2 + y^2});$$

$$\text{б)} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (z > \sqrt{x^2 + y^2});$$

$$\text{в)} \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x, \quad a > 0;$$

$$\text{г)} \quad (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2 - z^2);$$

$$\text{д)} \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{p}, \quad p > 0;$$

$$\text{е)} \quad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

6. Знайти масу тіла (V) з густиною ρ , якщо:

$$\text{а)} \quad (V): 64(x^2 + y^2) = z^2, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \\ \rho = \frac{5(x^2 + y^2)}{4};$$

$$\text{б)} \quad (V): x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (x^2 + y^2 \leq 1), \quad x = 0 \quad (x \geq 0), \\ \rho = 4|z|;$$

$$\text{в)} \quad (V): x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 2z, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \\ \rho = 10x;$$

$$\text{г)} \quad (V): x^2 + y^2 = \frac{16}{49} z^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{4}{7} z, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \\ \rho = 80yz;$$

$$\text{д)} \quad (V): x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4z^2, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0, \\ z \geq 0), \quad \rho = 20z.$$

7. Знайти координати центра мас тіла (V) з густиною ρ , якщо:

$$\text{а)} \quad (V) = \{(x; y; z) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}, \quad \rho = \rho_0(x + y + z)^2;$$

$$\text{б)} \quad (V): x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x = 2, \quad y = 4, \quad x + y + z = 8, \quad \rho = 1;$$

$$\text{в)} \quad (V) = \{(x; y; z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0\}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\text{г)} \quad (V): z = \frac{y^2}{2}, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad 2x + 3y - 12 = 0, \quad \rho = 1;$$

$$\text{д)} \quad (V): y = \sqrt{x}, \quad y = 2\sqrt{x}, \quad z = 0, \quad x + z = 6, \quad \rho = 1;$$

е) $(V) = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq h\}$, $\rho = \rho_0 \sqrt{h - z}$;

є) $(V): x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$ (кульовий сектор), $\rho = 1$.

8. Знайти моменти інерції однорідних тіл з масою m :

а) прямокутного паралелепіпеда з ребрами a, b, c відносно кожного з ребер та відносно центра мас;

б) кулі відносно дотичної прямої;

в) еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ відносно кожної з трьох його осей;

г) прямого кругового циліндра з радіусом основи R та висотою H відносно діаметра основи, та відносно діаметра його середнього перерізу;

д) параболоїда обертання з радіусом основи R та висотою H відносно осі, яка проходить через його центр ваги перпендикулярно до осі обертання (екваторіальний момент).

Практичне заняття № 10

Тема: Криволінійний інтеграл першого роду

1. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж плоскої кривої L :

1.1. $\int_L \frac{ds}{x+y}$, де L - відрізок прямої $y = x + 2$, що з'єднує точки $(2; 4)$ і $(1; 3)$;

1.2. $\int_L \frac{ds}{y-5}$, де L - відрізок з кінцями $(0; -2)$ і $(0; 4)$;

1.3. $\int_L \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, де L - відрізок з кінцями $(0; 0)$, $(1; 2)$;

1.4. $\int_L xy ds$, де L - прямокутник, обмежений прямими $x = 0, x = 4, y = 0, y = 2$;

1.5. $\int_L (2x + 3y) ds$, де L - трикутник з вершинами в точках $O(0;0)$, $A(-1;0)$, $B(0;1)$.

В: 1) $\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{3}{2}$; 2) $-\sqrt{5} \ln 2$; 3) $\ln \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ 4) 24.

2. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж плоскої кривої L :

2.1. $\int_L y ds$, де L - дуга параболи $y^2 = 2x$ від точки $(0;0)$ до точки $(1;\sqrt{2})$;

2.2. $\int_L x^2 ds$, де L - верхня половина кола $x^2 + y^2 = a^2$;

2.3. $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, де L - коло $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$;

2.4. $\int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}) ds$, де L - дуга астроїди $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ між точками $A(1;0)$, $B(0;1)$;

2.5. $\int_L y^2 ds$, де L - арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

2.6. $\int_L (x^2 + y^2) ds$, де L - дуга розгортки кола $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

2.7. $\int_L (x + y) ds$, де L - права пелюстка лемніскати $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

В: 1) $\sqrt{3} - \frac{1}{3}$; 2) $\frac{\pi a^3}{2}$; 3) $2a^2$ 4) 1; 5) $\frac{256a^3}{15}$;
6) $2\pi^2 a^2 (1 + 2\pi^2)$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду вздовж просторової кривої L :

3.1. $\int_L f(x, y, z) ds$, де L - перший виток гвинтової лінії $x = a \cos t$,

$$y = a \sin t, \quad z = bt, \quad \text{якщо: а) } f = \frac{z^2}{x^2 + y^2}; \quad \text{б) } f = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\text{в) } f = x^2 + y^2 + z^2;$$

3.2. $\int_L \sqrt{2y^2 + z^2} ds$, де L - коло $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x = y$;

3.3. $\int_L xyz ds$, де L - дуга кривої $x = t, y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}; \quad z = \frac{1}{2}t^2$ між

точками $t = 0$ і $t = 1$;

3.4. $\int_L z ds$, де L - дуга кривої $x^2 + y^2 = z^2, \quad y^2 = ax$ від точки $(0, 0, 0)$

до точки $(a; a; a\sqrt{2})$, $a > 0$.

В: 1а) $\frac{8\pi^3 b^2 \sqrt{a^2 + b^2}}{3a^2}$; 1б) $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \arctg \frac{2\pi b}{a}$;

1в) $\frac{2\pi}{3} \sqrt{a^2 + b^2} (3a^2 + 4\pi^2 b^2)$; 2) $2\pi a^2$; 3) $\frac{16\sqrt{2}}{143}$;

4) $\left(100\sqrt{38} - 72 - 17 \ln \frac{25 + 4\sqrt{38}}{17} \right) \frac{a^2 \sqrt{2}}{512}$.

4. Знайти масу, розподілену з лінійною густиною $\rho(x, y)$ вздовж дуги AB плоскої кривої L , якщо:

4.1. L - відрізок AB , $A(1; 1)$, $B(2; 3)$, $\rho(x, y) = 2x + y$;

4.2. L - відрізок AB , $A(1; 0)$, $B(4; 6)$, $\rho(x, y) = \frac{\sqrt{y+2}}{x}$;

4.3. $L: y = \frac{x^2}{2}$, $A(1; 0, 5)$, $B(2; 2)$, $\rho(x, y) = \frac{y}{x}$;

4.4. $L: y^2 = x$, $A(1; 1)$, $B(4; 2)$, $\rho(x, y) = y$;

4.5. $L: y = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}$, $A(0;0)$, $B\left(4; \frac{16}{3}\right)$, $\rho = ks$, де s - довжина дуги від точки $(0;0)$

В: 1) $5\sqrt{5}$; 2) $2\sqrt{10}$; 3) $\frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{6}$; 4) $\frac{17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}}{12}$; 5) $\frac{4k}{9}(63 - 5\sqrt{5})$.

5. Знайти координати центра мас, розподілених вздовж плоскої кривої L з лінійною густиною $\rho = 1$:

5.1. $L: y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, $|x| \leq a$;

5.2. $L: y^2 = \frac{1}{3}x^2 + x^3$, $x \leq 0$.

В: 1) $\left(0; \frac{\operatorname{sh} 2 + 2}{4\operatorname{sh} 1} a\right)$; 2) $\left(\frac{8}{45}; 0\right)$.

Практичне заняття № 11

Тема: Криволінійний інтеграл другого роду

1. Обчислити криволінійний інтеграл вздовж кривої L , якщо:

1.1. $\int_L xy dx$, де L - дуга синусоїди $y = \sin x$ від $x=0$ до $x = \pi$;

1.2. $\int_L x dy$, де L - відрізок прямої $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ від точки $(a;0)$ до точки $(0;b)$;

1.3. $\int_L \frac{x}{y} dx - \frac{y-x}{x} dy$, де L - дуга параболи $y = x^2$, $A(2; 4)$, $B(1; 1)$;

1.4. $\oint_L (x^2 + y^2) dy$, де L - контур прямокутника, утвореного прямими $x=1$; $x=3$; $y=1$; $y=5$ в додатному напрямі;

1.5. $\oint_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, де L – межа трикутника з вершинами $(0; 0), (1; 0), (0; 1)$;

1.6. $\oint_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, де L – межа трикутника з вершинами $(1; 1), (1; 3), (2; 2)$;

1.7. $\oint_L \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, де L – межа квадрата з вершинами $(1; 0), (0; 1), (-1; 0), (0; -1)$.

В: 1) π ; 2) $\frac{1}{6}ab^2$; 3) $\frac{1}{3}(5 - \ln 8)$; 4) 32.

~~2.~~ Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L (xy - y^2)dx + xdy$ від точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 2)$ вздовж кривих: а) $y = 2x$; б) $y = 2x^2$; в) $y = 2\sqrt{x}$; г) вздовж ламаної OBA , де $B\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

В: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{31}{30}$;

~~3.~~ Обчислити криволінійний інтеграл вздовж відрізка AB від точки A до точки B , якщо:

3.1. $\int_L x^3 dy - xy dx$; $A(0; -2)$; $B(1; 3)$;

3.2. $\int_L -3x^2 dx + y^3 dy$; $A(0; 0)$; $B(2; 4)$;

3.3. $\int_L (xy - y^2)dx + xdy$; $A(3; -4)$; $B(1; 2)$;

3.4. $\int_L \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + y\right)dx + \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x\right)dy$; $A(1; 0)$; $B(3; 4)$;

В: 1) $\frac{7}{12}$; 2) 56; 3) 8; 4) $12 + \ln 5$.

4. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду вздовж просторової кривої в напрямку зростання параметра t або від точки A до точки B :

4.1. $\int_L (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, $L: x = a \sin^2 t, y = 2a \sin t \cos^2 t, z = a \cos^2 t, 0 \leq t \leq \pi$;

4.2. $\int_L xdx + (x+y)dy + (x+y+z)dz$,
 $L: x = a \sin t, y = a \cos t, z = a(\sin t + \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$;

4.3. $\int_L \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$, $L = AB, A(1;1;1), B(4;4;4)$;

4.4. $\int_L x(z-y)dx + y(x-z)dy + z(y-x)dz$, L – ламана $ABCA$, $A(a; 0; 0), B(0; a; 0), C(0; 0; a)$;

4.5. $\int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, L – лінія перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ і циліндра $x^2 + y^2 = Rx$, яку проходять проти годинникової стрілки, якщо дивитись з точки $(0; 0; 0)$.

В. 1) 0; 2) $-\pi a^2$; 3) $3\sqrt{3}$; 4) a^3 ; 5) $-\frac{\pi R^3}{4}$.

5. Застосовуючи формулу Гріна, обчислити криволінійний інтеграл вздовж замкненої кривої L :

5.1. $\oint_L (x+y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$, де L – контур трикутника з вершинами $A(1; 1), B(3; 2), C(2; 5)$ в додатному напрямі. Результат перевірити безпосереднім інтегруванням.

5.2. $\oint_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, де L : а) еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) коло $x^2 + y^2 = ax$. Результат перевірити безпосереднім інтегруванням.

$$5.3. \oint_L \frac{xdy + ydx}{x^2 + y^2}, L: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1.$$

$$5.4. \oint_L e^x ((1 - \cos y)dx + (\sin y - y)dy), \text{ де } L - \text{ межа області } 0 < x < \pi; \\ 0 < y < \sin x.$$

$$B. 1.1. -\frac{140}{3}; \quad 1.2. \text{ а) } 0; \quad \text{б) } -\frac{\pi a^3}{8}; \quad 1.3. 0; \quad 1.4. \frac{(1 - e^\pi)}{5}.$$

6. Обчислити дані інтеграли, попередньо впевнившись, що вони не залежать від шляху інтегрування:

$$6.1. \int_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy + ydx;$$

$$6.2. \int_{(1;\pi)}^{(2;\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy;$$

$$6.3. \int_{(0;0)}^{(-2;-1)} 2xydx + x^2 dy;$$

$$6.4. \int_{(-2;-1)}^{(0;3)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy;$$

$$6.5. \int_L f(x+y)(dx + dy), f(t) - \text{ неперервна функція, } A(0; 0), B(x_0; y_0).$$

$$6.6. \int_L \varphi(x)dx + \psi(y)dy, \varphi(t), \psi(t) - \text{ неперервні функції, } A(x_1; y_1), \\ B(x_2; y_2).$$

$$B: 1) 6; 2) 1 + \pi; 3) -4; 4) -\frac{1148}{5}; 5) \int_0^{x_0+y_0} f(t)dt; 6) \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)dt + \int_{y_1}^{y_2} \psi(t)dt.$$

Застосування криволінійних інтегралів другого роду

Площа фігури, розміщеної в площині XOY і обмеженої замкненою лінією L, дорівнює:

$$S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx$$

7. Знайти площу області, обмеженої плоскими кривими:

7.1. $y^2 = 4 - x$, $x = 4$, $y = 1$;

7.2. $y = 1 - x^2$, $x - y - 1 = 0$;

7.3. $x = t^2$, $y = t^3$, $x = 1$;

7.4. $x = 12\sin^3 t$, $y = 3\cos^3 t$;

7.5. $(y - x)^2 + x^2 = 1$;

7.6. $(y + x)^2 = ax$, $y = 0$;

7.7. $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$ (петля декартового листа)

7.8. $x = a \cos \varphi$, $y = a \sin 2\varphi$, $x \geq 0$.

В. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{9}{2}$; 3) $\frac{4}{5}$; 4) $\frac{27\pi}{2}$; 5) π ; 6) $\frac{a^2}{6}$; 7) $\frac{3}{2}$; 8) $\frac{4a^2}{3}$.

Робота, виконана під дією сили $\vec{F} = \{P; Q; R\}$, яка діє на точку при переміщенні її вздовж кривої AB , дорівнює

$$W = \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad (\text{просторова крива}),$$

або

$$W = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (\text{плоска крива}).$$

8. Знайти роботу поля $\vec{F}$ вздовж дуги AB кривої L , якщо:

8.1. $\vec{F} = 2xy\vec{i} - y\vec{j}$, $L: y = x^2 - 1$, $A(1;0)$, $B(2;3)$;

8.2. $\vec{F} = 3xy^2\vec{i} - (x + y)\vec{j}$, $L: y^2 = x + 1$, $A(0;1)$, $B(3;2)$;

8.3.

$\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$, $L: x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $A(0;0)$, $B(2\pi a;0)$;

8.4. $\vec{F} = (y, -2x)$, $L: x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, $A(1;0)$, $B(-1;0)$;

8.5. $\vec{F} = (0, 2x)$, $L: x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $y \geq 0$, $A(a;0)$, $B(-a;0)$.

В. 1) 0; 2) $\frac{113}{3}$; 3) $-6\pi a^2$; 4) $-\frac{3\pi}{2}$; 5) πab .

Практичне заняття № 12

Контрольна робота № 2 (зразок)

 1. Дослідити на екстремум функцію: $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

 2. Обчислити потрійний інтеграл, якщо тіло (V) обмежене заданими поверхнями:

$$\iiint_{(V)} x^2 dx dy dz, (V): x = 0, y = 0, z = 0, x + 3y + z = 6.$$

 3. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int_L (2xy + 3y^2) ds$, де L – відрізок прямої $y = x + 1$, що з'єднує точки $(1; 2)$ і $(2; 3)$.

 4. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int_L x^3 dx + y^2 dy$, де L – дуга параболи $y = x^2 - 1$, що з'єднує точки $(0; -1)$ і $(2; 3)$.

Список рекомендованої літератури

Основна

1. Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. I семестр. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної (для студентів предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика)). Вінниця, 2023. 72 с.
2. Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. II семестр. Інтегральне числення функції однієї змінної. Числові та функціональні ряди (для студентів предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика)). Вінниця, 2024. 25 с.
3. Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. III семестр. Аналіз функцій багатьох змінних (для студентів предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика)). Вінниця, 2024. 40 с.
4. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу. Вступ в аналіз. Диференціальне числення функції однієї змінної. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: «Едельвейс і К», 2008. 299 с.
5. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу. Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер», 2013. 289 с.
6. Ковтонюк М. М., Клімішина А. Я., Леонова І. М., Соя О. М. Практикум з диференціального числення функції багатьох змінних : навч. посіб. для студентів СВО Бакалавр спеціальностей 111 Математика та 014 Середня освіта (Математика). [Електронний ресурс]. Вінниця: ВНТУ. 2023. 251 с. URL: <https://press.vntu.edu.ua/index.php/vntu/catalog/book/812>
7. Томусяк А.А., Вотякова Л.А. Аналіз функцій двох і трьох змінних (курс лекцій). Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер», 2007. 229 с.

Додаткова

1. Безклубенко, І. С., Баліна О. І. Математичний аналіз: підручник: у 2 ч. Ч. 1. Київ: КНУБА, 2024. 224 с.
2. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.І. Математичний аналіз: Підручник. Київ: Знання, 2008. 421 с.
3. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу. Метричні простори. Диференціальне числення функції багатьох змінних. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: «Едельвейс і К», 2008. 228 с.

4. Щерба А. І., Нестеренко А. М., Мірошкіна І. В., Щерба В. О. Математичний аналіз: навч. посіб. [Електронний ресурс]. Черкаси: ЧДТУ, 2023. 513 с.

Інформаційні ресурси

1. Сайт Бака С. М. <https://sites.google.com/site/sajtbakasm/>
2. Сайт Ковтонюк М.М. <https://kovtonyuk.com/>

Навчальне видання

Бак Сергій Миколайович

Комп'ютерна верстка та набір Бака С.М.

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
з математичного аналізу, II семестр.
Числові та функціональні ряди. Аналіз функцій багатьох
змінних

Для студентів предметної спеціальності
А4.09 Середня освіта (Інформатика)

21000, м. Вінниця, вул. Острозького, 32