1.2. Асимптотичні розв’язки зчисленної системи диференціальних рівнянь з двома малими параметрами

Ковтонюк М. М.

На перших історичних етапах вивчення диференціальних рівнянь основною метою вчених було отримання точного розв’язку. Однак виявилось, що подати розв’язки через елементарні функції можливо лише у деяких випадках. Тому постало питання про способи побудови наближених розв’язків диференціальних рівнянь, наприклад у вигляді рядів, які рівномірно збігаються, або асимптотичних рядів.

Асимптотичні методи в інтегруванні диференціальних рівнянь використовували ще у 19 ст. учені Ж. Ліувіль, Ж. Фур’є, Ж. Штурм. Виявилось, що асимптотичні методи особливо ефективні при інтегруванні диференціальних рівнянь, у яких коефіцієнти є функціями так званого «повільного» часу $\tau = \varepsilon t$, де ε – деякий малий параметр. Ці рівняння називаються рівняннями з повільно змінними коефіцієнтами.

У 1807 р. Ж. Фур’є запропонував оригінальний метод розв’язування диференціальних рівнянь із частинними похідними, що приводить до звичайних диференціальних рівнянь з параметром, тому при його застосуванні виникають дві основні задачі: знаходження розв’язків (фундаментальних функцій) отриманих диференціальних рівнянь; розклад довільної функції в ряд за фундаментальними функціями. Обидві задачі в окремих випадках були розв’язані самим Ж. Фур’є.

Велику роль у розвитку асимптотичного подання розв’язків диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь відіграли праці учених Дж. Локка, К. Спарре, Р. Фаулера, В. Стєклова, Г. Біркгофа, Я. Тамаркіна, Л. Шлезінгера, В. Пугачова.

Істотні результати були отримані Н. Боголюбовим, В. Вазовим, Н. Криловим, Р. Лангер, Ю. Митропольським, Л. Чезарі [1, 4, 5, 6], які поклали початок новим асимптотичним методам у нелінійній механіці.

Базуючись на методах Н. Крилова і Н. Боголюбова український вчений Ю. Митропольський створив свій метод [12], який дозволив досліджувати нестаціонарні коливні процеси в системах із однією і багатьма ступенями вільності.

Багато відомих українських і зарубіжних математиків присвятили свої роботи знаходженню асимптотики за параметром при розв’язуванні диференціальних рівнянь, зокрема: К. Валєєв, А. Васильєва, В.Євтухов [7-8], І. Конет, Н.Кузьма [11], Л. Ніколенко, М. Перестюк, А.Самойленко [15], М.Сотніченко, А. Тихонов, М. Федорюк, С. Фещенко, М. Шкіль, В. Яковець та інші.

Систематичне вивчення диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами починається з 50-х роках XX ст, у цей період публікуються роботи С. Фещенка [18-20], які поклали початок вивченню цих рівнянь.

Було запропоновано метод асимптотичного подання розв’язків неоднорідного диференціального рівняння другого порядку, у якому коефіцієнти є функціями так званого «повільного» часу $\tau = \varepsilon t$, $\varepsilon > 0$ − малий параметр.

Результати С. Фещенка були використані О. Горошко, А. Кніжним, Г. Савіним, В. Шавелло та іншими вченими для знаходження наближених розв’язків диференціального рівняння у прикладних задачах теоретичної фізики.

У 1955 р. С. Фещенко [18] доводить важливі теореми, які відносяться до розщеплення скінченної системи лінійних диференціальних рівнянь виду

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau, \varepsilon)x, \tag{1.51}$$

де x – n-вимірний вектор, $A(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A_s(\tau)$, часу $\tau=\varepsilon t$, $\varepsilon>0$ – малий параметр.

Випадок, коли серед коренів характеристичного рівняння неоднорідної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx(\tau,\varepsilon)}{dt}=A(\tau,\varepsilon)x(\tau,\varepsilon)+f(\tau,\varepsilon)e^{i\theta(a,\varepsilon)}, \qquad (1.52)$$

де $A(\tau,\varepsilon)$ – квадратна матриця порядку n, $f(\tau,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор, які допускають асимптотичний розклад

$$A(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A^{(s)}(\tau),\ f(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s f^{(s)}(\tau),$$

де $0\le\tau=\varepsilon t\le L$, $\varepsilon>0$ – малий параметр, з'являються корені довільної кратності з кратними елементарними дільниками, досліджував український учений М. Шкіль [22-24]. Розроблені у цих роботах асимптотичні методи дозволили провести дослідження випадку кратних коренів як для однорідних, так і для неоднорідних систем диференціальних рівнянь вигляду (1.52). При цьому розглянуто так званий «резонансний» випадок, коли функція $i\nu(\tau)$ $\left(\nu(\tau)=\dfrac{d\theta(\tau,\varepsilon)}{dt}\right)$ при деяких $\tau\in[0,L]$ співпадає з одним із кратних коренів характеристичного рівняння

$$\det\left\|A^{(0)}(\tau)-\lambda E\right\|=0.$$

Цікавою є задача дослідження розв'язків у випадку зчисленних систем диференціальних рівнянь, оскільки останні застосовуються у розв'язуванні граничних задач математичної фізики. Зчисленні системи диференціальних рівнянь інтенсивно розвиваються у 50-70-х роках 20 ст. у роботах А. Тихонова і К. Персидського [13, 14], К. Валєєва [2, 3], В. Харасахала [21], зокрема формулюється і доводиться теорема існування розв'язку таких систем. Також їхня теорія розповсюджується на зчисленні системи диференціальних рівнянь, праві частини яких, крім шуканих функцій, містять ще й змінні параметри вигляду

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s\left(t, x_1, x_2, ..., \mu\right),\ s = 1, 2, ... \tag{1.53}$$

Ідеї А. Тихонова та К. Персидського полягають у тому, що деяка зчисленна система диференціальних рівнянь виду (1.53) «укорочується», тобто відкидаються по кількості функції, а також по кількості рівняння.

Потім розглядається «укорочена» система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f_i\left(\tau, x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ..., 0, \mu\right),$$

яка отримується із системи (1.53), якщо прирівняти до нуля всі шукані функції, починаючи з $n+1$-шої.

А до «укороченої» системи лінійних диференціальних рівнянь можна застосувати теорію, розроблену в працях С. Фещенка, М. Шкіля, М.Конета та інших учених. Зчисленні системи диференціальних рівнянь вигляду (1.51) досліджувалися у роботах М. Ковтонюк [9, 10].

Зазначимо, що побудова формальних розв'язків і дослідження їх асимптотичної поведінки для зчисленних систем диференціальних рівнянь (ЗСДР) суттєво відрізняється від побудови асимптотичного розв'язку систем диференціальних рівнянь в n-вимірному просторі того ж вигляду [9, 10]. Це пояснюється тим, що:

1. Для ЗСДР необхідно завжди досліджувати збіжність рядів і належність побудованих векторів до вибраного простору, чого не потрібно робити у випадку систем диференціальних рівнянь в n-вимірному просторі.

2. Для існування розв'язків скінченної системи вигляду (1.52) достатньо вимагати нескінченної диференційовності матриць $A_s\left(\tau\right)$, $s = 0,\ 1,\ 2, ...$ У випадку ЗСДР необхідно дотримання додаткових умов: ряди

$\dfrac{d^s a_j(\tau,\varepsilon)}{d\tau^s} = \sum\limits_{j=1} \dfrac{d^s |a_{ij}(\tau,\varepsilon)|}{d\tau^s}$ мають бути рівномірно збіжними $\forall \tau \in [0, L]$, $s = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ k$, де k – достатньо велике число і, крім того, $\left|\dfrac{d^s a_j(\tau,\varepsilon)}{d\tau^s}\right| \le \gamma_s$, $\forall j = 0,1,2,...$

3. При дослідженні нескінченної системи алгебраїчних рівнянь зустрічаються проблеми існування, які не мають аналогів у теорії скінченних систем. Наприклад, якщо розглянути дві нескінченні матриці A і B, то їх добуток може не існувати, оскільки ряди $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{jk} b_{ki}$ можуть бути розбіжними для всіх або для деяких значень j та i.

У цьому випадку дистрибутивний закон $A(B+C) = AB + AC$ має місце в тому розумінні, що якщо AB і AC існують, то існує і $A(B+C)$, що дорівнює $AB + AC$. Але $A(B+C)$ може існувати в той же час, коли AB і AC не існують.

4. У теорії скінченних матриць головну роль відіграють визначники, а в теорії нескінченних матриць їх значення в значній мірі втрачається.

Викладемо деякі, необхідні надалі, відомості з теорії функцій і теорії матриць. Розглянемо множину функцій $\{f_n(t)\}$, визначених на відрізку $[\alpha, \beta]$.

Означення 1.1. *Множина функцій* $f_n(t)$ *називається рівномірно обмеженою на відрізку* $[\alpha, \beta]$, *якщо існує таке додатне число* L, *що для будь-якого* $t \in [\alpha, \beta]$ *має місце нерівність* $|f_n(t)| \le L$, *правильна для всіх функцій множини* $\{f_n(t)\}$.

Означення 1.2. *Множина функцій* $f_n(t)$ *називається одностайно неперервною на відрізку* $[\alpha, \beta]$, *якщо для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\forall t', t'' \in [\alpha, \beta]$, *які задовольняють нерівність* $|t' - t''| < \delta$, *має місце* *нерівність* $\left|f_n\left(t'\right)-f_n\left(t''\right)\right|<\varepsilon$, *що виконується відразу для всіх функцій множини* $\left\{f_n(t)\right\}$.

Розглянемо множину всіх одностайно неперервних і рівномірно обмежених функціональних послідовностей $x(t)=\left(x_1(t), x_2(t), \ldots\right)$, t – дійсна змінна, $\left(t \in [\alpha, \beta]\right)$. Поклавши $d\left(x(t), y(t)\right)=\sup\limits_k\left|x_k(t)-y_k(t)\right|$, ми одержимо метричний простір, який позначимо через m, норма $\|x(t)\|:=\sup\limits_k\left|x_k(t)\right|$. Доведено, що цей простір m рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей є лінійним, повним і нормованим, тобто банаховим простором [10].

Нехай $A=\left\|a_{ij}\right\|_{i,j=1}^{\infty}$ – нескінченна матриця. Норму її позначимо через $\|A\|$ і будемо розуміти число $\|A\|:=\sup\limits_j \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|a_{jk}\right|$, норму вектора b визначимо $\|b\|:=\sup\limits_k\left|b_k\right|$.

Для зчисленної системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_k(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{\infty}P_{kj}(t)\cdot x_j(t),\ \left(k=1,2,\ldots\right), \qquad (1.54)$$

де t – незалежна змінна $\left(t \geq 0\right)$, $P_{kj}=P_{kj}(t)$ – дійсні або комплексні функції від t, нагадаємо деякі означення і теореми існування, виходячи з робіт К. П. Персидського [13, 14].

Означення 1.3. *Зчисленну систему функцій*

$$x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t),\ \ldots \qquad (1.55)$$

будемо називати обмеженою на проміжку $t \geq 0$, *якщо існує таке число* $l<+\infty$, *для якого виконується умова*

$$\|x(t)\|=\sup_k\left\{\left|x_k(t)\right|\right\} \leq l,\ \left(k=1,2,\ldots\right) \qquad (1.56)$$

Означення 1.4. *Систему функцій (1.55) будемо називати розв'язком системи рівнянь (1.54), що проходить через точку* $\left(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots\right)$, *якщо* $x_1(t_0)=x_1^0,\ x_2(t_0)=x_2^0, \ldots$ *і якщо* $\dfrac{dx_k(t)}{dt}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}P_{kj}(t)\cdot x_j(t)$, $\left(k=1,2,\ldots\right)$ *при всіх значеннях* $t\ge 0$, *причому, якщо система функцій (1.55) обмежена, то цей розв'язок будемо називати обмеженим.*

Якщо функції $P_{kj}(t)$ неперервні й на проміжку $t\ge 0$ задовольняють умовам

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|P_{kj}(t)\right|\le \alpha(t),\ \left(k=1,2,\ldots\right), \tag{1.56}$$

де $\alpha(t)$ – деяка неперервна при всіх $t\ge 0$ функція, то має місце теорема:

Теорема 1. *Якщо праві частини системи лінійних диференціальних рівнянь (1.54) задовольняють умовам (1.56), то через кожну точку* $\left(t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots\right)$ *області D;*

$$t\in\left[\alpha,\beta\right],\ \|x\|=\sup_k\left\{\left|x_k(t)\right|\right\},\ \left(k=1,2,\ldots\right) \tag{1.57}$$

проходить єдиний розв'язок $x_k=x_k(t)$, $\left(k=1,2,\ldots\right)$ *системи (1.56). Цей розв'язок буде обмеженим, одностайно неперервним і визначеним* $\forall t\in\left[\alpha,\beta\right]$.

Системи диференціальних рівнянь з двома малими параметрами розглядалися в роботах [25]. Зокрема, для систем виду

$$\varepsilon\frac{dx}{dt}=A(t,\mu)x,\quad t\in[0;T] \tag{1.58}$$

у просторі R^n побудована фундаментальна система розв'язків, коли головна матриця $A_0(t)$ має прості власні значення, одне кратне власне значення. Крім того, для таких систем застосовано просторовий аналог систем лінійних диференціальних рівнянь з повільно- змінними коефіцієнтами, які залежать від двох малих параметрів виду

$$\frac{dx(\sigma,\varepsilon,\mu)}{dz} = A(\sigma,\varepsilon,\mu)x(\sigma,\varepsilon,\mu),$$

де $\sigma = \varepsilon^m \mu^p z, \quad m, p \in Z$ на системи меншої розмірності у випадку декількох груп коренів характеристичного рівняння. Аналогічні задачі у нескінченномірних просторах не розглядались.

Ми розглянемо зчисленні системи лінійних диференціальних рівнянь з двома малими параметрами вигляду (1.58) у просторі m рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей.

Мета дослідження: 1) визначити умови, за яких зчисленна система лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з двома малими параметрами вигляду (1.58) має розв'язок; 2) побудувати формальний розв'язок зчисленної системи диференціальних рівнянь (1.58) у випадках, коли головна матриця має простий дискретний спектр або є нескінченною клітиною Жордана; 3) довести асимптотичний характер побудованих розв'язків.

Отож розглянемо у нескінченномірному просторі m рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей систему рівнянь

$$\varepsilon \frac{dx}{d\tau} = A(\tau,\mu)x, \tag{1.59}$$

де $A(\tau,\mu) = \left\| a_{jk}((\tau,\mu)) \right\|_1^\infty$ - дійсна нескінченна матриця, елементами якої є функції $a_{jk}(\tau,\mu)$ дійсної змінної $\tau \in [0;T], x(\tau,\varepsilon,\mu)$ - нескінченномірний шуканий вектор, $\varepsilon, \mu > 0$ - малі дійсні параметри, для якої виконуються такі умови $(\tau = \varepsilon \cdot t)$:

1) матриця $A(\tau,\mu)$ має на відрізку $[0;T]$ рівномірне асимптотичне розвинення за степенями парамета μ:

$$A(\tau,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_k(\tau;);$$

2) матриці $A_k(\tau), k=1,2,\dots$ - нескінченно диференційовні на відрізку $\left[0;T\right]$;

3) головна матриця $A_0(\tau)$ діагональна:

$$A_0(\tau)=\begin{pmatrix} \lambda_1(\tau) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2(\tau) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_3(\tau) & \dots \\ . & . & . & \dots \end{pmatrix},$$

причому функції $\lambda_i(\tau), i=1,2,...$ залишаються простими (простий дискретний спектр), тобто $\forall\tau\in\left[0;T\right]$:

$$\lambda_i(\tau)\neq\lambda_j(\tau), i\neq j; i,j=1,2,...,\left|\lambda_i(\tau)-\lambda_j(\tau)\right|\geq d, j=2,3,...;$$

4) функції $\dfrac{d^k a_j(\tau,\mu)}{d\tau^k}=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{\left|a_{jm}(\tau,\mu)\right|}{d\tau^k}, k=0,1,2,\dots$неперервні і рівномірно обмежені на $\left[0;T\right]$:

$$\frac{d^k a_j(\tau,\mu)}{d\tau^k}\leq\gamma_k \quad \forall k=0,1,2,\dots$$

Зазначимо, що такого типу задачі досить детально вивчені для скінченних і зчисленних систем, які сингулярно залежать від одного малого параметра, а саме, коли $\mu=\varepsilon$ [10,16, 17, 22]. Системи з двома незалежними параметрами, незважаючи на їх практичне значення, досліджувалися менше і в скінченномірному просторі [24, 25].

Ми розглянемо аналогічну задачу у нескінченномірному просторі.

Частинні розв’язки системи (1.59) шукатимемо у вигляді:

$$x(\tau,\varepsilon,\mu)=u(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{\tau}\lambda_1(\sigma)d\sigma\Big), \tag{1.60}$$

де $u(\tau,\varepsilon,\mu)$ - невідомий нескінченно мірний вектор, який можна подати у вигляді рівномірного асимптотичного розкладу

$$u(\tau,\varepsilon,\mu)=\sum_{r=0}^{\infty}\mu^r u_r(\tau,\varepsilon), \quad u_r(\tau,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s u_{rs}(\tau). \tag{1.61}$$

Знаходження розв’язку буде полягати у побудові алгоритму, за яким можна знайти невідомі члени розкладу (1.61). Підставимо вектор (1.60)–(1.61) у систему (1.59) і, врахувавши, що

$$\frac{dx(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}=\frac{du(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}\exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda_1(\sigma)d(\sigma)+u(\tau,\varepsilon,\mu)\frac{1}{\varepsilon}\lambda_1(\tau)\int_0^\tau\lambda_1(\sigma)d\sigma),$$

отримаємо тотожність:

$$\varepsilon(\frac{du(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}\exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda_1(\sigma)d\sigma)+u(\tau,\varepsilon,\mu)\cdot\frac{1}{\varepsilon}\lambda_1(\tau)\exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda_1(\sigma)d\sigma)=$$

$$=A(\tau,\mu)\cdot u(\tau,\varepsilon,\mu)\exp(\int_0^\tau\lambda_1(\sigma)d\sigma)).$$

Винесемо у лівій частині рівності за дужки множник $\exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda_1(\sigma)d(\sigma))$ і скоротимо на нього, отримаємо:

$$\varepsilon u'(\tau,\varepsilon,\mu)+\lambda_1(\tau)u(\tau,\varepsilon,\mu)=A(\tau,\mu)u(\tau,\varepsilon,\mu),$$

або

$$\varepsilon(u_0'(\tau,\varepsilon)+\mu u_1'(\tau,\varepsilon)+\mu^2u_2'(\tau,\varepsilon)+\ldots)+\lambda_1(\tau)(u_0(\tau,\varepsilon)+\mu u_1(\tau,\varepsilon)+\mu^2u_2(\tau,\varepsilon)+\ldots)=$$

$$=(A_0(\tau)+\mu A_1(\tau)+\mu^2A_2(\tau)+\ldots)(u_0(\tau,\varepsilon)+\mu u_1(\tau,\varepsilon)+\mu^2u_2(\tau,\varepsilon)+\ldots).$$

В останньому співвідношенні прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях μ:

$$\mu_0: A_0(\tau)u_0(\tau,\varepsilon)-\lambda_1(\tau)u_0(\tau,\varepsilon)=\varepsilon u_0'(\tau,\varepsilon);$$

$$\mu^r: A_0(\tau)u_0(\tau,\varepsilon)-\lambda_1(\tau)u_r(\tau,\varepsilon)=\varepsilon u_r'(\tau,\varepsilon)-\sum_{j=1}^{r}A_j(\tau)u_{r-j}(\tau,\varepsilon), r=1,2,\ldots$$

і, враховуючи дистрибутивний закон для нескінченних матриць, отримаємо рекурентні співвідношення

$$(A_0(\tau)-\lambda_1(\tau)E_\infty)u_0A_0(\tau)u_0=\varepsilon u_0'(\tau,\varepsilon) \tag{1.62}$$

$$(A_0(\tau)-\lambda_1(\tau)E_\infty)u_r(\tau,\varepsilon)=\varepsilon u_0'(\tau,\varepsilon)-\sum_{j=1}^{r}A_j(\tau)u_{r-j}(\tau,\varepsilon) \tag{1.63}$$

Тепер у рівняннях (1.62) – (1.63) будемо прирівнювати коефіцієнти при однакових степенях малого параметра ε. Зокрема з рівняння (1.62) отримаємо:

$$\varepsilon^0 : (A_0(\tau) - \lambda_1(\tau)E_\infty)u_{00}(\tau) = 0_\infty, \qquad (1.64)$$

$$\varepsilon^s : (A_0(\tau) - \lambda_1(\tau)E_\infty)u_{0s}(\tau) = u'_{0,s-1}(\tau). \qquad (1.65)$$

У рівнянні (1.64) перейдемо до координатної форми запису:

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{00,j}(\tau) = 0,$$

Звідки бачимо, що $u_{00,j}(\tau) = 0, j = 2,3,...,$ а перший компонент вектор–функції $u_{00}(\tau)$ поки що невизначений. У рівнянні (1.65) покладемо $s = 1$, тоді

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{01,j}(\tau) = u'_{00,j}(\tau),$$

причому

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{01,j}(\tau) = 0, j = 2,3,...,$$

тому $u_{01,j}(\tau) = 0, j = 2,3,...,$ а якщо $j = 1$, то $0 = u'_{00,1}(\tau)$, звідки $u'_{00,1}(\tau) = const$, покладемо її рівною 1. Тепер вектор $u_{00}(\tau)$ стає визначеним, а перший компонент вектора $u_{01,1}(\tau)$ поки що невизначений.

Розглянемо рівняння (1.65) при $s = 2$:

$$(\lambda_j(\tau) - \lambda_1(\tau))u_{02,j}(\tau) = u'_{01,j}(\tau), j = 1,2,...,$$

тому знову ж таки $u_{02,j}(\tau) = 0, j = 2,3,...,$ а якщо $j = 1$, то $0 = u'_{01,1}(\tau)$, звідки $u_{01,1}(\tau) = 1$. Використовуючи метод математичної індукції можна довести, що вектори $u_{0s}(\tau), s = 0,1,2,...$ матимуть вигляд:

$$u_{0s}(\tau) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}, s = 0,1,2,... \qquad (1.66)$$

Тобто вектор $u_0(\tau,\varepsilon)$ набере вигляду:

$$u_{0s}(\tau)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\.\\.\\.\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}1\\0\\0\\.\\.\\.\end{bmatrix}+\varepsilon^2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\.\\.\\.\end{bmatrix}+\ldots=\begin{bmatrix}1+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots\\0\\0\\.\\.\\.\end{bmatrix}.$$

Розглянемо тепер другу частину рекурентних співвідношень (1.63), їх ми використаємо для визначення невідомих вектор – функцій $u_r(\tau,\varepsilon), r=1,2,...$

Нехай $r=1$, тоді:

$$(A_0(\tau)-\lambda_1(\tau)E_\infty)u_1(\tau,\varepsilon)=\varepsilon u_1'(\tau,\varepsilon)-A_1(\tau)u_0(\tau,\varepsilon),$$

де знову ж таки прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε:

$$\varepsilon^0:(A_0(\tau)-\lambda_1(\tau)E_\infty)u_{10}(\tau)=-A(\tau)u_{00}(\tau), \tag{1.67}$$

$$\varepsilon^s:(A_0(\tau)-\lambda_1(\tau)E_\infty)u_{1s}(\tau)=u_{1,s-1}'(\tau)-A(\tau)u_{01}(\tau), s=1,2,... \tag{1.68}$$

У рівнянні (1.67) перейдемо до координатної форми запису

$$(\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau))u_{10,j}(\tau)=-a_{j1}^{(1)}(\tau), j=1,2,...,$$

звідки видно, що

$$u_{10,j}(\tau)=-\frac{a_{j1}^{(1)}(\tau)}{\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)}, j=2,3,...,$$

а якщо $j=1$, то $0\cdot u_{10,1}(\tau)=a_{11}^{(1)}(\tau)$, звідки $a_{11}^{(1)}(\tau)=0$, а перший компонент $u_{10,1}(\tau)$ вектора $u_{10}(\tau)$ залишається поки що невизначеним.

Нехай $s=1$, тоді з рекурентних співвідношень (1.68) отримаємо:

$$(\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau))u_{11,j}(\tau)=u_{10,j}'(\tau)-a_{j1}^{(1)}(\tau), j=1,2,...,$$

або

$$u_{11,j}(\tau)=-\frac{u_{10,j}(\tau)-a_{j1}^{(1)}(\tau)}{\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)}, j=2,3,...,$$

$$u_{10,1}'(\tau)=a_{11}^{(1)}(\tau),$$

$$u_{10,1}(\tau) = \int_0^\tau a_{11}^{(1)}(\sigma)d\sigma$$

Отже, вектор – функція $u_{10}(\tau)$ набирає такого вигляду:

$$u_{10}(\tau) = \begin{bmatrix} \int_0^\tau a_{11}^{(1)}(\sigma)d\sigma \\ -\dfrac{a_{21}^{(1)}(\tau)}{\lambda_2(\tau)-\lambda_1(\tau)}, \\ -\dfrac{-a_{31}^{(1)}(\tau)}{\lambda_3(\tau)-\lambda_1(\tau)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{bmatrix} \qquad (1.69)$$

Покажемо, що вектор $u_{10}(\tau)$ є елементом простору m. Дійсно, згідно з умовами 3)-4), накладеними на коефіцієнти системи (1.69), отримаємо

$$\left|u_{10,j}(\tau)\right| = \left|\frac{-a_{j1}(\tau)}{\lambda_j(\tau)-\lambda_1(\tau)}\right| \le \frac{\gamma_0}{d},\, j = 2,3,\dots,\left|u_{10,1}(\tau)\right| \le \gamma_0 T, \quad K = \max\left\{\frac{\gamma_0}{d};\gamma_0 T\right\},$$

тому функціональна послідовність $\left\{u_{1s,j}(\tau)\right\}, j = 1,2,\dots$ є рівномірно збіжною на [0;T].

Вектори $u_{1s}(\tau)$ згідно з умовами 1)-2), накладеними на коефіцієнти системи (1.69), мають неперервні похідні по τ достатньо великих порядків. Функціональні послідовності $\left\{u_{1s,j}(\tau)\right\}$ також одностайно – неперервні на відрізку [0;T]. Дійсно, використовуючи теорему Лагранжа (теорему про середнє) і умови 3) - 4) отримаємо:

$$\left|u_{1s,j}(\tau_2) - u_{1s,j}(\tau_1)\right| = \left|\frac{-a_{j1}^{(1)}(\tau_2)}{\lambda_j(\tau_2)-\lambda_j(\tau_1)} - \frac{-a_{j1}^{(1)}(\tau_1)}{\lambda_j(\tau_1)-\lambda_1(\tau_1)}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{d^2}\left|a_{j1}^{(1)}(\tau_2)\lambda_j(\tau_1) - \lambda_1(\tau_1)) - a_{j1}^{(1)}(\tau_1)\lambda_j(\tau_2) - \lambda_1(\tau_2))\right| =$$

$$= \frac{1}{d^2}\left|-a_{j1}^{(1)}(\tau_2)(\lambda_j(\tau_2) - \lambda_j(\tau_1)) + \lambda_j(\tau_2)(a_{j1}^{(1)}(\tau_2) - a_{j1}^{(1)}(\tau_1)) + \right.$$

$$+a_{j1}^{(1)}(\tau_2)(\lambda_1(\tau_2)-\lambda_1(\tau_1))-\lambda_1(\tau_2)(a_{j1}^{(1)}(\tau_2)-a_{j1}^{(1)}(\tau_1)) \ \Big| \le$$

$$\le \frac{\gamma_0}{d^2}\Big(\left|\lambda_j'(\theta_1)\right|+\left|a_{j1}^{(1)}(\theta_2)\right|+\left|\lambda_1'(\theta_3)\right|+\left|a_{j1}'^{(1)}(\theta_4)\right|\Big)\left|\tau_2-\tau_1\right|\le$$

$$\le \frac{4\gamma_0\gamma_1}{d^2}\cdot\left|\tau_2-\tau_1\right|, \tau\le\theta_i\le\tau_2, i=1,2,3,4.$$

Отже, послідовність функцій $\left\{u_{1s,j}(\tau)\right\}, j\ge 1$ задовольняє умові Ліпшиця зі сталою $\lambda=\frac{4\gamma_0\gamma_1}{d^2}$. А тому, за наслідком з теореми Арцела-Асколі випливає, що така функціональна послідовність є одностайно неперервною.

Нехай $r=2,$ тоді

$$(A_0(\tau)-\lambda_1(\tau)E_\infty)u_2(\tau,\varepsilon)=\varepsilon u_2'(\tau,\varepsilon)-A_1(\tau)u_1(\tau,\varepsilon)-A_2(\tau)u_0(\tau,\varepsilon).$$

Продовжуючи міркування аналогічним чином, можна визначити всі останні вектори $u_r(\tau,\varepsilon)$, довести їх диференційовність по $\tau\in\left[0;T\right]$. Таким чином, буде побудований формальний розв'язок рівняння (1.60). Тобто нами доведена теорема:

Теорема 2. Якщо виконуються умови 1)–4), то зчисленна система диференціальних рівнянь (1.69) має формальний частинний розв'язок

$$x(\tau,\varepsilon,\mu)=u(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda_1(\sigma)d\sigma\right),$$

де нескінченний вектор $u(\tau,\varepsilon,\mu)$ визначається у вигляді формального степеневого ряду (1.61).

Зауваження. Аналогічно можна побудувати формальний частинний розв'язок, який відповідає іншим власним значенням $\lambda_i(\tau), j=2,3,\ldots$ головної частини $A_0(\tau)$ матриці $A(\tau,\mu)$.

Приклад. Розглянемо зчисленну систему диференціальних рівнянь у просторі m

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dx_1}{d\tau} = -\dfrac{x_1}{2} + \mu \sin \tau x_2 + \mu \sin \tau x_3 \\ \varepsilon \dfrac{dx_k}{d\tau} = -\dfrac{x_k}{k \cdot 2^k} + \mu \sin \tau x_{k-1} + \mu \cos 2\tau x_k + \mu \sin \tau x_{k+1} \end{cases} \tag{1.70}$$

k =2, 3, 4, …, де $\tau \in [0;T]$ – незалежна змінна. Дана система диференціальних рівнянь задовольняє умови теореми 2. Дійсно, для матриці $A(\tau,\mu)$ правильний розклад в ряд за степенями μ, який у даному випадку вироджується у скінченну суму

$$A(\tau,\mu) = A_0(\tau) + \mu A_1(\tau) + \mu^2 A_2(\tau),$$

де

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{2 \cdot 2^2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3 \cdot 2^3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4 \cdot 2^4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

$$A_1(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & \sin\tau & \sin\tau & 0 & \dots \\ \sin\tau & cos 2\tau & \sin\tau & 0 & \dots \\ 0 & \sin\tau & cos 2\tau & \sin\tau & \dots \\ 0 & 0 & \sin\tau & cos 2\tau & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

і цей розклад є асимптотичним: $\left\| A(\tau,\mu) - \sum_{s=0}^{m} \mu^s A_s(\tau) \right\| \le C\mu^{m+1}, m = 0,1$.

Головна частина матриці $A(\tau,\mu)$ має простий точковий дискретний спектр, причому $\lambda_k \ne \lambda_m \quad \forall k \ne m, \; k,m = 1,2,\dots, |\lambda_k - \lambda_1| \ge \dfrac{3}{8} \quad \forall k = 2,3,4,\dots$. Похідні довільного порядку від сум, складені по рядках матриць $A_1(\tau)$ і $A_2(\tau)$, неперервні на відрізку $\left[0;T\right]$:

$$A_1(\tau): a_j(\tau) \le 2, \quad \frac{d^k a_j(\tau)}{d\tau^k} \le 1 + 2^k, k = 1,2,....$$

Тому формальний частинний розв’язок системи (1.70) можна подати у вигляді ряду за степенями параметрів ε і μ

$$u(\tau,\varepsilon,\mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r u_r(\tau,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r (\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s u_{rs}(\tau)) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mu^r \varepsilon^s u_{rs}(\tau),$$

а вектори $u_{rs}(\tau)$ мають вигляд:

$$u_{00} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}, u_{0k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}, k = 1,2,\ldots, \quad u_{1k}(\tau) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\sin 2\tau \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}, k = 0,1,\ldots$$

$$u_{2k}(\tau) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8}\cos 4\tau \\ -\frac{3}{8}\sin\tau \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}, k = 0,1,\ldots, \quad u_{3k}(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{1}{96}\sin 6\tau + \frac{1}{16}\sin 2\tau - \frac{6}{16}\tau \\ -\cos\tau - \frac{3}{8}\sin\tau \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}.$$

Розглянемо тепер випадок, коли головна матриця $A_0(\tau)$ у розкладі $A(\tau,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k A_k(\tau;)$ є нескінченною клітиною Жордана, тобто:

$$A_0(\tau)=\begin{pmatrix} \lambda(\tau) & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda(\tau) & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda(\tau) & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \tag{1.71}$$

де $\lambda(\tau)$ неперервна на відрізку $\left[0;T\right]$ функція.

У цьому випадку можна побудувати точний розв'язок системи (1.59), а саме має місце теорема:

Теорема 3. Якщо виконуються умови 1) – 2), 4), накладені на коефіцієнти системи (1.59), умова (1.71), тоді існує розв'язок системи (1.59), який можна подати у вигляді

$$x(\tau,\varepsilon,\mu)=u(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \lambda(\sigma)d\sigma\right), \tag{1.72}$$

де $u(\tau,\varepsilon,\mu)$ *- нескінченний вектор, який задовольняє рівняння*

$$\varepsilon\frac{du}{d\tau}=\tilde{A}(\tau,\mu)u, \tag{1.73}$$

$$\tilde{A}(\tau,\mu)=\mu\sum_{s=1}^{\infty}\mu^{s-1}A_s(\tau)=\mu\tilde{\tilde{A}}(\tau,\mu) \tag{1.74}$$

Доведення. Згідно з умовами 1) – 2), 4) у просторі m рівномірно обмежених і одностайно – неперервних функціональних послідовностей існує обмежений точний розв’язок нескінченної системи [5].

Підставимо вектор $x(\tau,\varepsilon,\mu)$, який визначається співвідношенням (1.72) у систему (1.59), отримаємо

$$\varepsilon\frac{du(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \lambda(\sigma)d\sigma\right)+\varepsilon u(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \lambda(\sigma)d\sigma\right)\cdot\frac{1}{\varepsilon}\lambda(\tau)=$$
$$=\left(A_0(\tau)+\mu\sum_{s=1}^{\infty}\mu^{s-1}A_s(\tau)\right)u(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \lambda(\sigma)d\sigma\right),$$

або, після зведення подібних членів, маємо

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \lambda(\sigma)d\sigma\right)\left(\varepsilon\frac{du(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau} - A(\tau,\mu)u(\tau,\varepsilon,\mu) + \lambda(\tau)u(\tau,\varepsilon,\mu)\right) = 0.$$

Оскільки, згідно умови (1.73), виконується

$$\varepsilon\frac{du}{d\tau} = \tilde{A}(\tau,\mu)u,$$

то остання рівність є тотожністю. Таким чином, доведено, що вектор (1.72) є розв'язок зчисленної системи диференціальних рівнянь (1.59) з умовою (1.71).

Повернемось до умови (1.73), запишемо це рівняння в інтегральній формі

$$u(\tau,\varepsilon,\mu) = u_0 + \int_0^\tau \varepsilon^{-1}\tilde{A}(\tau_1,\mu)d\tau_1, \tag{1.75}$$

де $u_0 = u(0,\varepsilon,\mu)$ - довільний вектор зі сталими елементами, який належить простору $\bar{m}$. Інтегральне рівняння (1.75) будемо розв'язувати методом послідовних наближень. Для цього покладемо:

$$\begin{aligned}
&u^{(0)}(\tau,\varepsilon,\mu) = u_0,\\
&u^{(1)}(\tau,\varepsilon,\mu) = u_0 + \int_0^\tau \varepsilon^{-1}\tilde{A}(\tau_1,\mu)u^{(0)}d\tau_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u^{(k+1)}(\tau,\varepsilon,\mu) = u_0 + \int_0^\tau \varepsilon^{-1}\tilde{A}(\tau_1,\mu)u^{(k)}(\tau_1,\varepsilon,\mu)d\tau_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{1.76}$$

Покажемо, що послідовність $\left\{u^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)\right\}$ векторних функцій $u^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)$ рівномірно збіжна по τ до деякої векторної функції $u(\tau,\varepsilon,\mu)$ на відрізку $[0;T]$. Дослідимо на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_0 + (u^{(n)}(\tau,\varepsilon,\mu) - u^{(n-1)}(\tau,\varepsilon,\mu))), \tag{1.77}$$

враховуючи (1.76), загальний член ряду (1.77) має вигляд

$$u^{(n)}(\tau,\varepsilon,\mu)=u_0+\varepsilon^{-1}\int_0^{\tau}\tilde{A}(\tau_1,\mu)u^{(n-1)}(\tau_1,\varepsilon,\mu)d\tau_1=$$
$$=u_0+\varepsilon^{-1}\int_0^{\tau}\tilde{A}(\tau_1,\mu)u_0d\tau_1+\frac{\mu^n}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\tilde{\tilde{A}}(\tau_1,\mu)\int_0^{\tau_1}\tilde{\tilde{A}}(\tau_2,\mu)\cdot\ldots\cdot\int_0^{\tau_{n-1}}\tilde{\tilde{A}}(\tau_n,\mu)u_0d\tau_n\cdot\ldots\cdot d\tau_2d\tau_1 \tag{1.78}$$

а норми матриць $\tilde{\tilde{A}}(\tau,\mu)$ і вектора u_0 на відрізку $[0;T]$ задовольняють нерівностям

$$\left\|\tilde{\tilde{A}}(\tau,\mu)\right\|\le\gamma,\qquad \|u_0\|\le a \tag{1.79}$$

Використовуючи (1.78), (1.79), отримаємо оцінку

$$\left\|u^{(n)}(\tau,\varepsilon,\mu)-u^{(n-1)}(\tau,\varepsilon,\mu)\right\|\le\left(\alpha+\frac{\mu}{\varepsilon}\alpha\gamma T+\frac{\mu^2}{\varepsilon}\alpha\gamma^2\frac{T^2}{2!}+\ldots+\frac{\mu^{n-1}}{\varepsilon}\alpha\gamma^{n-1}\frac{T^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{\mu^n}{\varepsilon}\alpha\gamma^n\frac{T^n}{n!}\right)-$$
$$-\left(\alpha+\frac{\mu}{\varepsilon}\alpha\gamma T+\frac{\mu^2}{\varepsilon}\alpha\gamma^2\frac{T^2}{2!}+\ldots+\frac{\mu^{n-1}}{\varepsilon}\alpha\gamma^{n-1}\frac{T^{n-1}}{(n-1)!}\right)=\frac{\mu^n}{\varepsilon}\alpha\gamma^n\frac{T^n}{n!}.$$

Звідки випливає, що для ряду (1.77) можна побудувати мажорантний збіжний ряд

$$\alpha\left(1+\frac{\mu}{\varepsilon}\gamma T+\frac{\mu^2}{\varepsilon}\frac{\gamma^2T^2}{2!}+\ldots+\frac{\mu^n}{\varepsilon}\frac{\gamma^nT^n}{n!}+\ldots\right).$$

На основі теореми Вейєрштрасса функціональний ряд (1.77) збіжний рівномірно по $\tau\in[0;T]$ і сума цього ряду $u(\tau,\varepsilon,\mu)$ неперервна по τ. Тому у співвідношенні

$$u^{(k+1)}(\tau,\varepsilon,\mu)=u_0+\int_0^{\tau}\frac{1}{\varepsilon}\tilde{A}(\tau_1,\mu)u^{(k)}(\tau_1,\varepsilon,\mu)d\tau_1$$

можна перейти до границі під знаком інтеграла так, що гранична функція $u(\tau,\varepsilon,\mu)$ задовольняє інтегральному рівнянню (1.75). Теорема доведена.

Згідно умов для матриці $\tilde{\tilde{A}}(\tau,\mu)$ запишемо асимптотичну формулу

$$\tilde{\tilde{A}}(\tau,\mu)=\sum_{s=1}^{m}\mu^{s-1}A_s(\tau)+O(\mu^m). \tag{1.80}$$

тоді для послідовних наближень можна отримати оцінку

$$u^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)=u_0+v_m^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)+O\left(\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}\right), \tag{1.81}$$

де $v_m^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)$ відомі векторні функції, які визначаються з рівнянь (1.76):

$$u^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)=u_0+\int_0^\tau \frac{\mu}{\varepsilon}\left(\sum_{s=1}^m \mu^{s-1}A_s(\tau_1)+O(\mu^m)\right)u^{(k-1)}(\tau_1,\varepsilon,\mu)d\tau_1=$$

$$=u_0+\frac{\mu}{\varepsilon}\int_0^\tau\sum_{s=1}^m \mu^{s-1}A_s(\tau_1)u^{(k-1)}(\tau_1,\varepsilon,\mu)d\tau_1+O(\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon})=u_0+v_m^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)+O\left(\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}\right).$$

Зауважимо, що співвідношення $\frac{\mu}{\varepsilon}$ не може бути у даному випадку нескінченно – малою величиною при $\mu\to 0$ і $\varepsilon\to 0.$ Отже, асимптотична формула для розв'язку системи диференціальних рівнянь набирає вигляду:

$$x(\tau,\varepsilon,\mu)=\left(u_0+v_m^{(k)}(\tau,\varepsilon,\mu)+O\left(\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}\right)\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \lambda(\tau_1)d\tau_1\right).$$

Доведемо, що побудовані раніше формальні розв'язки (1.60) – (1.61) при певних умовах мають асимптотичний характер у тому розумінні, що якщо обірвати відповідні ряди $u(\tau,\varepsilon,\mu)$ на якомусь m-му члені

$$u_m(\tau,\varepsilon,\mu)=\sum_{r=0}^m \mu^r u_r(\tau,\mu)=\sum_{r=0}^m \mu^r\sum_{s=0}^m \varepsilon^s u_{rs}(\tau)=\sum_{r=0}^m\sum_{s=0}^m \mu^r\varepsilon^s u_{rs}(\tau) \tag{1.82}$$

і з отриманих таким чином часткових сум побудувати вектор $x_m(\tau,\varepsilon,\mu)$ (m-е наближення)

$$x_m(\tau,\varepsilon,\mu)=u_m(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \lambda(\sigma)d\sigma\right), \tag{1.83}$$

то цей вектор при фіксованому m і при $\mu\to 0,\varepsilon\to 0$ прямує до точного розв'язку системи (1.59). Тобто має місце теорема:

Теорема 4. Якщо виконуються умови теореми 2 і:

5. Існують сталі r_1 і r_2 такі, що

$$\left\| \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \sum_{r=0}^{m} \mu^r A_r(\sigma) d\sigma \right) \right\| \le r_1 e^{r_2 \tau}, \qquad \tau \in [0;T],$$

6. $\operatorname{Re} \lambda_1(\tau) \le 0,$

7. $\|x(\tau,\varepsilon,\mu) - x_m(\tau,\varepsilon,\mu)\| = 0$ *при* $\tau = 0$, *то* $\forall \tau \in [0;T], \mu \in (0;\mu_0],$ $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0], \ldots \frac{\mu}{\varepsilon}$ *не є нескінченно малою величиною при* $\mu \to 0, \varepsilon \to 0$ *можна вказати таку сталу C, що має місце нерівність*

$$\|x(\tau,\varepsilon,\mu) - x_m(\tau,\varepsilon,\mu)\| \le C \frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}.$$

Доведення. Покажемо спочатку, що m-те наближення задовольняє системі (1.59) з точністю до величин порядку $O(\mu^{m+1})$. Оскільки для вектора $u_m(\tau,\varepsilon,\mu)$ виконується умова (1.71), то

$$x(\tau,\varepsilon,\mu) = x_m(\tau,\varepsilon,\mu) + \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{s=m+1}^{\infty} \mu^r \varepsilon^s u_{rs}(\tau) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \lambda_1(\sigma) d\sigma \right) =$$

$$= x_m(\tau,\varepsilon,\mu) + \mu^{m+1} \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{s=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} \varepsilon^s u_{rs}(\tau) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \lambda_1(\sigma) d\sigma \right),$$

$$A(\tau,\mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r A_r(\tau) + \sum_{r=m+1}^{\infty} \mu^r A_r(\tau) = A(\tau,\mu) + \mu^{m+1} \sum_{r=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} A_r(\tau),$$

Підставимо такі подання вектора $x(\tau,\varepsilon,\mu)$ і $A(\tau,\mu)$ в систему (1.59), маємо:

$$\varepsilon \frac{dx_m(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau} + \varepsilon \mu^{m+1} \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{s=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} \varepsilon^s u'_{rs}(\tau) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \lambda_1(\sigma) d\sigma \right) +$$

$$+ \mu^{m+1} \sum_{r=m+1}^{\infty} \sum_{s=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} \varepsilon^s \lambda_1(\tau) u_{rs}(\tau) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau} \lambda_1(\sigma) d\sigma \right) =$$

$$= \left(A(\tau,\mu) + \mu^{m+1} \sum_{r=m+1}^{\infty} \mu^{r-m-1} A_r(\tau) \right) \cdot$$

$$\cdot\left(x_m(\tau,\varepsilon,\mu)+\mu^{m+1}\sum_{r=m+1}^{\infty}\sum_{s=m+1}^{\infty}\mu^{r-m-1}\varepsilon^s\lambda_1(\tau)u_{rs}(\tau)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda_1(\sigma)d\sigma\right)\right),$$

або

$$\varepsilon\frac{dx_m(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}=A_m(\tau,\mu)x_m(\tau,\varepsilon,\mu)+\mu^{m+1}f(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda_1(\sigma)d\sigma\right),\quad (34)$$

де

$$\begin{aligned}f(\tau,\varepsilon,\mu)=&\left(\sum_{r=m+1}^{\infty}\mu^{r-m-1}A_r(\tau)\right)u_m(\tau,\varepsilon,\mu)+A_m(\tau,\mu)\sum_{r=m+1}^{\infty}\sum_{s=m+1}^{\infty}\mu^{r-m-1}\varepsilon^s u_{rs}(\tau)-\\&-\varepsilon\sum_{r=m+1}^{\infty}\sum_{s=m+1}^{\infty}\mu^{r-m-1}\varepsilon^s u'_{rs}(\tau)-\sum_{r=m+1}^{\infty}\sum_{s=m+1}^{\infty}\mu^{r-m-1}\varepsilon^s\lambda_1(\tau)u_{rs}(\tau),\end{aligned}\quad (1.85)$$

Вектор $f(\tau,\varepsilon,\mu)$ рівномірно обмежений по τ на відрізку $[0;T]$ як сума векторів $A_s(\tau)u_{rs}(\tau), u'_{rs}(\tau), u_{rs}(\tau)$, які належать простору m (як видно з 10).

З рівності (1.85) видно, що вектор $\mu^{m+1}f(\tau,\varepsilon,\mu)$ має порядок малості $O(\mu^{m+1})$.

Розглянемо вектор

$$y(\tau,\varepsilon,\mu)=x(\tau,\varepsilon,\mu)-x_m(\tau,\varepsilon,\mu),\quad (1.86)$$

згідно умови 7 теореми 4 значення вектора $y(\tau,\varepsilon,\mu)$ у точці $\tau=0$ дорівнює нульовому вектору

$$y(0,\varepsilon,\mu)=0.$$

Використовуючи (1.85), систему (1.59) можна записати у вигляді

$$\varepsilon\frac{dx(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}-\varepsilon\frac{dx_m(\tau,\varepsilon,\mu)}{d\tau}=$$

$$=A(\tau,\mu)x(\tau,\varepsilon,\mu)-A_m(\tau,\mu)x_m(\tau,\varepsilon,\mu)+\mu^{m+1}f(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda_1(\sigma)d\sigma\right).$$

Вектори $A(\tau,\mu)x_m(\tau,\varepsilon,\mu) - A_m(\tau,\mu)x_m(\tau,\varepsilon,\mu)$ є елементами простору m, оскільки згідно з умовами теореми 2 і означенням норм вектора і матриці, маємо

$$\|A(\tau,\mu)x_m(\tau,\varepsilon,\mu)\| \le \|A(\tau,\mu)\|\cdot\|x_m(\tau,\varepsilon,\mu)\| = \gamma_0\cdot\sup\left\{\left|x_{mj}(\tau,\varepsilon,\mu)\right|\right\} =$$

$$= \sup\left\{\gamma_0\left|x_{mj}(\tau,\varepsilon,\mu)\right|\right\}$$

Використаємо дистрибутивний закон для нескінченних матриць, тоді вектор $y(\tau,\varepsilon,\mu)$ задовольняє такій системі диференціальних рівнянь

$$\varepsilon\frac{dy}{d\tau} = A(\tau,\mu)y(\tau,\varepsilon,\mu) + \mu^{m+1}\sum_{r=m+1}^{\infty}\mu^{r-m-1}A_r(\tau)\cdot x_m(\tau,\varepsilon,\mu) +$$

$$+\mu^{m+1}f(\tau,\varepsilon,\mu)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda_1(\sigma)d\sigma\right). \tag{1.87}$$

Замінимо систему диференціальних рівнянь (1.87) еквівалентною системою інтегральних рівнянь

$$y(\tau,\varepsilon,\mu) = \int_0^\tau \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\sum_{r=0}^{m}\mu^r A_r(\tau_1)d\tau_1\right)\tilde{A}\left(\tau_2,\mu\right)y(\tau_2,\varepsilon,\mu)d\tau_2 +$$

$$+\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}\int_0^\tau \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\sum_{r=0}^{m}\mu^r A_r(\tau_1)d\tau_1\right)\Phi(\tau_2,\varepsilon,\mu)d\tau_2, \tag{1.88}$$

де через $\tilde{A}\left(\tau,\mu\right)$ позначена нескінченна матриця і нескінченний вектор виду:

$$\tilde{A}(\tau,\mu = \sum_{r=m+1}^{\infty}\mu^{r-m-1}A_s(\tau),$$

$$\hat{O}(\tau,\varepsilon,\mu) = \left(\sum_{r=m+1}^{\infty}\mu^{r-m-1}A_r(\tau)u_m(\tau,\varepsilon,\mu) + f(\tau,\varepsilon,\mu)\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\lambda_1(\sigma)d\sigma\right),$$

які також є елементами простору m. Тоді норма вектора $y(\tau,\varepsilon,\mu)$ задовольняє такій нерівності:

$$\|y(\tau,\varepsilon,\mu)\| \le \int_0^\tau\left\|\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\sum_{r=0}^{m}\mu^r A_r(\tau_1)d\tau_1\right)\right\|\cdot\left\|\tilde{A}\left(\tau_2,\mu\right)\right\|\cdot\|y(\tau_2,\varepsilon,\mu)\|d\tau_2 +$$

$$+\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\left\|\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\sum_{r=0}^{m}\mu^r A_r(\tau_1)d\tau_1\right)\right\|\cdot\|\Phi(\tau_2,\varepsilon,\mu)\|d\tau_2;$$

$$\|y(\tau,\varepsilon,\mu)\|\le r_1 e^{r_2 T}M_1\int_0^{\tau}\|y(\tau_2,\varepsilon,\mu)\|d\tau_2+\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}r_1 e^{r_2 T}M_2 T,$$

$$\|y(\tau,\varepsilon,\mu)\|\le\frac{\mu^{m+1}}{\varepsilon}C.$$

Тоді $\|x(\tau,\varepsilon,\mu)-x_m(\tau,\varepsilon,\mu)\|\le\frac{\mu}{\varepsilon}\cdot\mu^m\cdot C,\quad C=\mathrm{const}$. Теорема доведена.

Отже, у даному дослідженні нами показано особливості розв’язування зчисленних систем лінійних диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами у просторі одностайно неперервних і рівномірно обмежених функціональних послідовностей; досліджено зчисленні системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з двома малими параметрами у випадках простого спектру головної матриці системи (1.59) і нескінченної клітини Жордана; побудовано формальні розв’язки і встановлено їх асимптотичний характер.

Використані методи дослідження: аналіз наявної літератури, порівняння результатів досліджень, проведених іншими науковцями, їх узагальнення і конкретизація для розв’язання математичної задачі. Серед математичних методів розв’язування диференціальних рівнянь використано наближені методи: послідовних наближень і асимптотичні.

Перспективи досліджень. Для зчисленних систем лінійних диференціальних рівнянь з двома малими параметрами важливо продовжити дослідження побудови формальних розв’язків та їх асимптотичного характеру у випадку кратного дискретного спектру головної матриці у просторі рівномірно обмежених і одностайно неперервних функціональних послідовностей.

Ще один напрямок розвитку теорії зчисленних систем лінійних диференціальних рівнянь з двома малими параметрами: побудова асимптотичних розв'язків зчисленної системи лінійних диференціальних рівнянь шляхом «укорочення».

Список використаних джерел

1. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний /за ред. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. М.: Наука, 1974. 504 с.
2. Валеев К. Г. Бесконечные системы дифференциальных уравнений / за ред. К. Г. Валеев, О. А. Жаутиков. Алма-Ата: Наука, 1974. 413 с.
3. Валеев К. Г. Применение метода малого параметра при исследовании устойчивости решений системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / за ред. К. Г. Валеев, Т. С. Султанбеков. К.: Институт нар. хоз-ва, 1987. 11 с.
4. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
5. Wasow W. Linear turning point theory. New York: Springer, 1985. 243 p.
6. Перестюк М.О., О.В.Капустян О.В., Фекета П.В., Касімова Н.В. Асимптотичні властивості розв'язків диференціальних рівнянь: навч. посіб. Київ: Київський університет, 2015. 125 с.
7. Евтухов В. М. Асимптотическое интегрирование некоторых классов систем линейных дифференциальных уравнений. Нелинейные колебания. 2000. Т. 3, № 3. С. 334-357.
8. Евтухов В. М. Некоторые вопросы асимптотической теории линейных дифференциальных уравнений n-го порядка. *Укр. мат. ж.* 2002. Т. 54, № 1. С. 20 - 42.
9. Ковтонюк М.М. Асимптотическое поведение решения одной бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений. *Укр. мат. журн*. 1983. Т.35. С.630-636.
10. Ковтонюк М.М. О построении формального решения бесконечной системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной дробного ранга. *Приближенные методы математического анализа.* К.: 1982. С.72-79.
11. Кузьма Н. Г. Асимптотическое расщепление систем дифференциальных уравнений второго порядка с медленно меняющимися и осцилирующими коэфициентами. *Укр. мат. журн*. 1990. Т. 40, № 5. С. 642 – 644.
12. Митропольский Ю. А. Асимптотические методы математической физики / за ред. Ю. А. Митропольский. К. : Вища школа, 1988. С. 256 – 263.
13. Персидский К. П. О спектре характеристичесних чисел. *ПММ*. 1950. Т.14, вып.5. С. 3 – 18.
14. Персидский К. П. Об устойчивости решений счетной системы дифференциальных уравнений. *Известия АН Казах. ССР, сер. мат. и мех.,* 1948. Вып. 2. С. 2 – 35.
15. Самойленко А.М., Ключник І.Г. Про асимптотичне інтегрування лінійної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних. *Нелінійні коливання.* 2009. Т.12, № 2. С. 208-234.
16. Сотниченко Н. А., Кузьма Н. Г. Асимптотическое расщепление систем дифференциальных уравнений второго порядка с медленно меняющимися и осцилирующими коэффициентами. К.: Киев, инжен. строит, ин-т, 1991. 30 с.

17. Сотниченко Н.А., Фешенко С.Ф. Об асимптотическом решений для дифференциального уравнения в банаховом пространстве при наличии конечной системы кратных собственных значений. *Укр. мат. журн.*, 1976, т. 28, 5. С.655-663.
18. Фещенко С. Ф. Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений. *Укр. мат. журн.* 1955. Т. 7, С. 163 – 179.
19. Фещенко С. Ф. Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. К.: Наукова думка, 1966. 252 с.
20. Фещенко С. Ф., Н. И. Шкиль, Ю. П. Пидченко, Н. А. Сотниченко. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / за ред.. С. Ф. Фещенко. К.: Наукова думка, 1981. 292 с.
21. Харасахал В. Х. О фундаментальных решениях сетных систем дифференциальныъ уравнений. *Известия АН Казах. ССР, сер. мат. и мех.* 1950. Вып. 4. С. 98 – 108.
22. Шкиль Н.И., Завизион Г.В. Асимптотическое представление решений системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной при наличии точки поворота. Доклады АН УССР, сер. А, 1988, 9. С. 21–25.
23. Шкиль Н. И. Системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при части производных. К.: Наукова думка, 1966. 252 с.
24. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. К. : Вища школа, 1971. 226 с.
25. Яковець В.П.Асимптотика общего решения линейной сингулярно возмущенной системы с двумя малыми параметрами. Дифференциальные уравнения, 1993, 29. №2. С.256–266.