

УДК 378.6.016:517

Мар'яна Ковтонюк,
докт. пед. наук, канд. фіз.-мат. наук, професор,
завідувач кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,
Сайнчук Анастасія,
студентка факультету математики, фізики
і комп'ютерних наук
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського
Якимчук Аліна,
студентка факультету математики, фізики
і комп'ютерних наук
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

РОЗВИТОК ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ «ФУНКЦІЯ – ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ» У ПІДГОТОВЦІ БАКАЛАВРІВ МАТЕМАТИКИ

Анотація. У статті розглянуто особливості формування змістової лінії «Функція – Границя функції» у підготовці бакалаврів математики, на основі принципу фундування показано розвиток відповідних понять у математичному аналізі та функціональному аналізі.

Ключові слова: функція, функціонал, оператор, границя відображення, освітнє математичне середовище університету.

Abstract. The article examines the peculiarities of the formation of the content line "Function - Boundary of a function" in the preparation of bachelors of mathematics, based on the principle of foundation, the development of relevant concepts in mathematical analysis and functional analysis is shown.

Keywords: function, functional, operator, mapping boundary, educational mathematical environment of the university.

Формування категоріально-понятійного апарату при вивченні математичних дисциплін у закладах вищої освіти відіграє важливу роль у проектуванні реального навчального процесу. Тут важливо розуміти міждисциплінарний зв'язок певної освітньої компоненти з іншими освітніми компонентами. Для прикладу структурно-логічна схема зв'язків навчальної дисципліни «математичний аналіз» подана у таблиці 1.

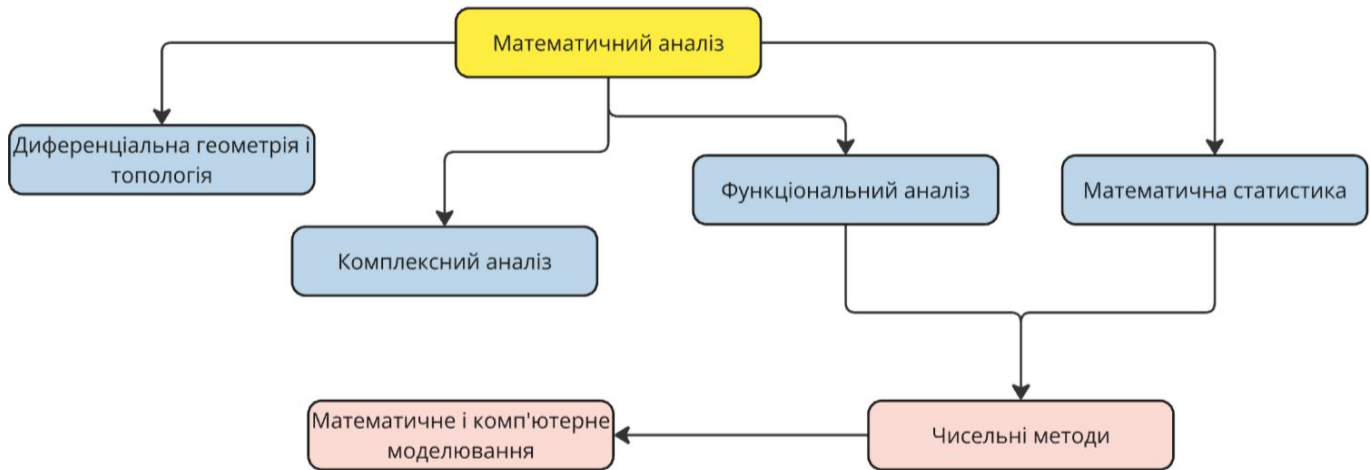


Рис. 1. Структурно-логічна схема зв'язків освітньої компоненти «математичний аналіз» для спеціальності 111 Математика.

Термін «поняття» визначається ученими як «форма мислення особистості про цілісну сукупність властивостей об'єктів реального світу або математичних об'єктів» [3, с.118], а формування понять для розуміння цілісності математичної дисципліни є важливою і складною частиною. Моделювання понятійного обсягу освітньої компоненти навчального плану підготовки бакалавра математики відбувається на основі принципу фундування, під яким розуміють «процес виокремлення базових навчальних елементів шкільної математики з наступним їх теоретичним узагальненням, що розкривають цілісність, сутність, трансдисциплінарні зв'язки, і спрямовані на інтелектуальний розвиток студентів» [1, с.254]. На думку учених Т.Лукашової, М.Друшляк та Ю.Хворостіни принцип фундування передбачає нелінійний характер накопичення математичних знань та створення умов для поетапного поглиблення та розширення шкільних знань у напрямі професіоналізації та формування цілісної системи наукових та методичних знань [2].

При вивченні математичного аналізу (спеціальності 111 Математика, 014.04 Середня освіта. Математика) пам'ятаємо, що головний його об'єкт функція, а головний метод дослідження – граничний перехід (неарифметична операція, що використовується для дослідження функції на нескінченності).

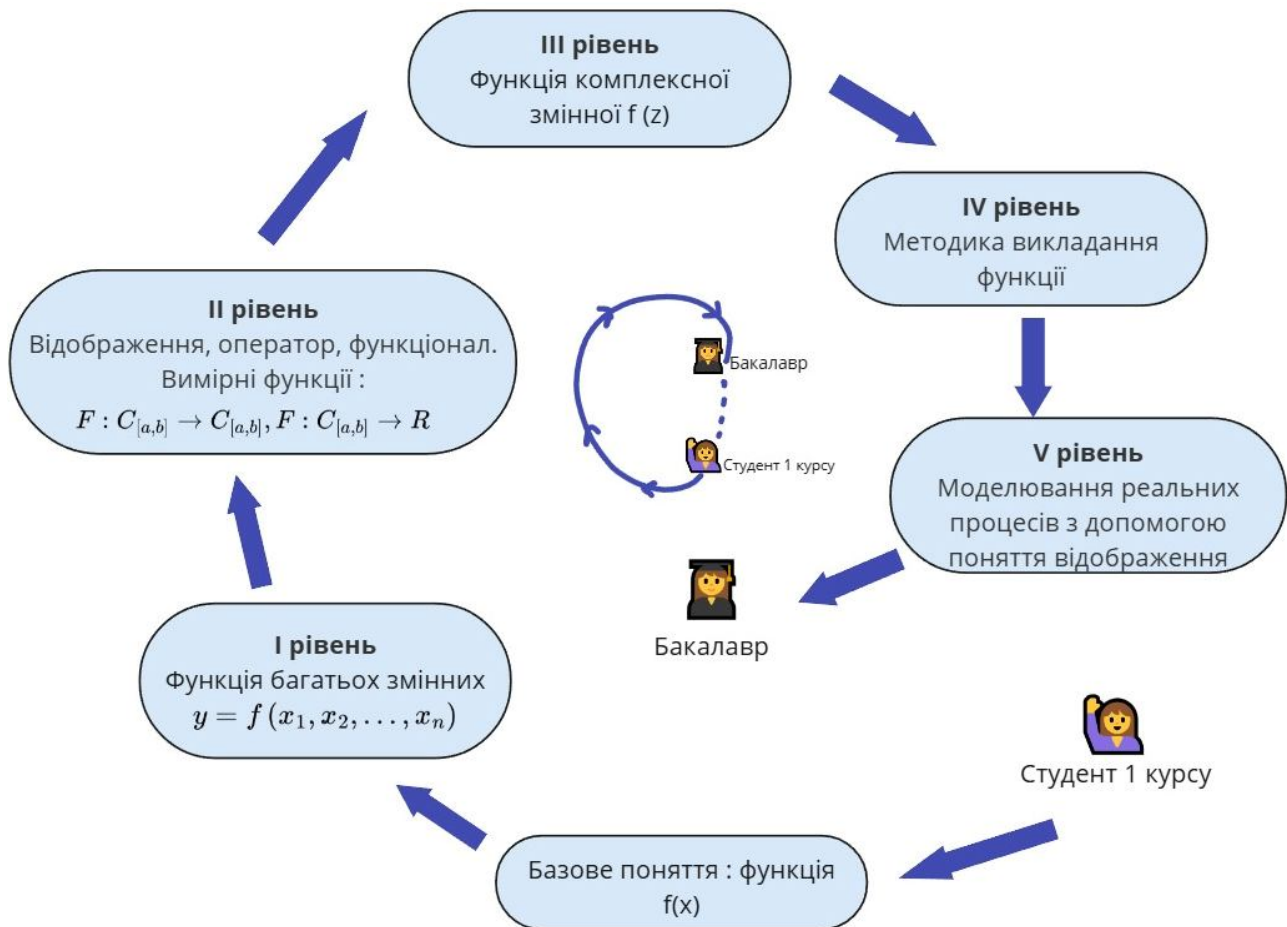


Рис. 2. Схема фундування базового поняття “Функція”.

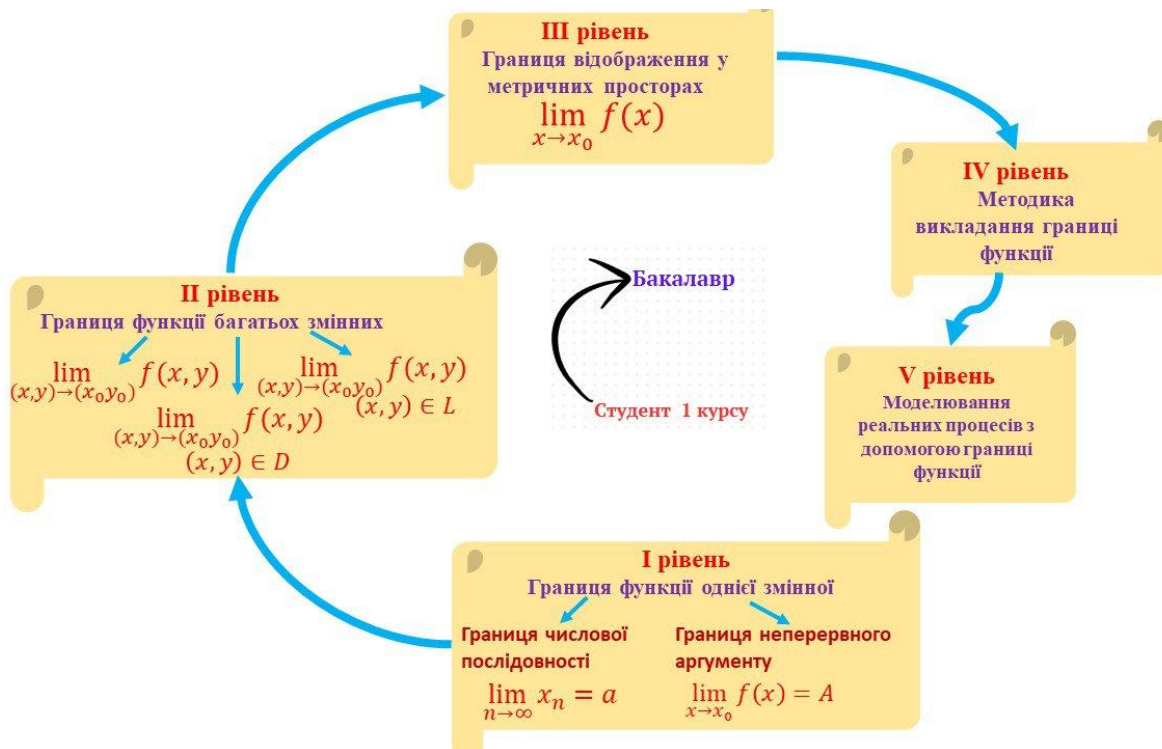


Рис. 3 Схема фундування базового поняття “Границя функції”.

Отож розглянемо формування цих понять, використавши принцип фундування (Рис.2, Рис.3). На базовому рівні вивчаються числові функції, тобто функції вигляду $f(x)$, на першому рівні – функції багатьох змінних $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, на другому – функції, аргументами яких є функції, тобто функції вигляду $F: C_{[a,b]} \rightarrow C_{[a,b]}, F: C_{[a,b]} \rightarrow R$, де $C_{[a,b]}$ - множина функцій, неперервних на відрізку (функціонали, оператори), на третьому рівні – функції комплексної змінної, на четвертому рівні формуються методичні компетентності, а п'ятий рівень характеризує здатність здобувача вищої освіти до моделювання реальних процесів з використанням вищевказаних понять.

На кожному рівні фундування особливу увагу слід звертати на розуміння суті кожного базового поняття. Наприклад, на базовому рівні фундування для поняття «функція», «границя функції» студент має мати знати класифікацію функцій; чітке уявлення про основний метод дослідження функції – граничний перехід; розуміти, що границя послідовності характеризує поведінку її членів з достатньо великими номерами, а границя функції у точці є локальною характеристикою поведінки функції у досить малому околі точки; знати основні властивості неперервних функцій у точці, і, особливо, функцій, неперервних на відрізку.

На першому рівні фундування студент має усвідомити, що аналіз функцій двох і трьох змінних будується за зразком аналізу функцій однієї змінної, вміти бачити аналогію і відмінність в означенні і властивостях багатьох понять (послідовність, границя функції у точці, неперервність і диференційовність); розуміти особливу роль теореми Больцано-Вейєрштрасса і критерію Коші.

На другому рівні фундування студент має знати означення метрики та її властивості; основні властивості збіжних послідовностей у метричних просторах; основні властивості неперервних відображень компактів; принцип стискуjących відображень; означення нормованого простору; основні властивості збіжних послідовностей у нормованих просторах; властивості лінійних

операторів і функціоналів; означення евклідового і гільбертового просторів; властивості простору l_2 (Рис.4).

Метричний простір (МП)	Повний метричний простір (ПМП)	Лінійний простір (ЛП)	Нормований простір (НП)	Евклідовий простір (ЕП)	Банаховий простір (БП)
Кажуть, що не порожня множина X наділена метрикою, якщо вказана однозначна невід'ємна дійсна функція $d(x,y)$, що задовольняє 3 аксіоми: 1) $d(x,y) = 0$, якщо $x=y$ 2) $d(x,y) = d(y,x)$ 3) нерівність трикутника $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$	Якщо у просторі (X, d) довільна фундаментальна послідовність є збіжною до точки цього метричного простору, то цей метричний простір називають повним.	Непорожня множина L деяких елементів називається лінійним простором, якщо вона задовольняє 3 групи умов: 1. $x+y=y+x$ 2. $x+(y+z) = (x+z)+y$ 3. $x+0 = x$ 4. $x+(-x) = 0$ 5. $a(bx) = (ab)x$ 6. $1 \cdot x = x$ 7. $(a+b)x = ax + bx$ 8. $a(x+y) = ax + ay$	Лінійний простір називається нормованим простором, якщо кожному елементу $x \in L$ поставлено у відповідність дійсне число, яке називається його нормою, причому виконуються умови: 1) $ x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ 2) $ \alpha x = \alpha \cdot x $ 3) $ x+y \leq x + y $	Евклідовим простором називається лінійний простір, у якому введена операція множення векторів (x,y) , що задовольняє аксіомам: 1) $(x,y) = (y,x)$ 2) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$ 3) $(\lambda x,y) = \lambda(x,y)$ 4) $(x,x) \geq 0$, причому $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$	Повний нормований простір називають банаховим простором або В-простором
R	$d(x,y) := x - y $	Множина всіх дійсних чисел утворює ЛП	$ x := x $	$(x,y) := x \cdot y$	БП
R^n з евклідовою метрикою	$d(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$	$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ $\alpha(x_1, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$	$ x = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$	$(x,y) := \sum_{k=1}^n x_k y_k$	R^n є БП з евклідовою нормою

Метричний простір (МП)	Повний метричний простір (ПМП)	Лінійний простір (ЛП)	Нормований простір (НП)	Евклідовий простір (ЕП)	Банаховий простір (БП)
$C_{[a,b]}$ – множина неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій, рівномірна метрика $d(f,g) := \max_{[a,b]} f(x) - g(x) $	ПМП	ЛП: $f(x) + g(x), \lambda f(x)$ 1. $f + g = g + f$ 2. $f + (g + h) = (f + g) + h$ 3. $f + 0 = f$ 4. $f + (-f) = 0$ 5. $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$ 6. $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$ 7. $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$ 8. $1 \cdot f = f$	НП: $ f := \max_{[a,b]} f(x) $ 1) $ f = \max_{[a,b]} f(x) \geq 0$, $ f = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ 2) $ \lambda f = \lambda \cdot f $ 3) $ f + g \leq f + g $		
$C_{[a,b]}$ з метрикою середнього квадратичного відхилення $d(f,g) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}$	Не є ПМП		НП: $ f := \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$ 1) $ f \geq 0, f = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ 2) $ \lambda f = \lambda \cdot f $ 3) $ f + g \leq f + g $	ЕП: $(a,g) := \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$ 1) $(f,g) = (g,f)$ 2) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$ 3) $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$ 4) $(f, f) \geq 0$ і $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$	Не є БП
l_2 – множина числових послідовностей $a = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ $d(a,b) := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$	ПМП	$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots; a_n + b_n, \dots)$ $d(a,b) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n - b_n ^2}$	НП: $ a := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}$ 1) $ a \geq 0, a = 0 \Leftrightarrow a = (0, 0, \dots)$ 2) $ \alpha a = \alpha \cdot a $ 3) $ a + b \leq a + b $	$(a,b) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 1) $ f \geq 0, f = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ 2) $ \alpha f = \alpha \cdot f $ 3) $ f + g \leq f + g $	БП

Рис.4. Основні поняття просторів та класичні приклади.

Виділення, систематизація і реалізація наскрізних тем (а також спіралей фундування) у математичному аналізі мають явну професійну спрямованість, оскільки єдність цієї навчальної дисципліни в реалізації наскрізної теми виступає перш за все єдиною формою (границя, похідна, неперервність...), яка потім конкретизується, вибудовуючись в дидактично виправданий ланцюг. Послідовне проведення цієї ідеї формує у здобувачів вищої освіти важливе професійне вміння бачити за єдиною формою різноманітний зміст, об'єднаний єдиною логічною основою [4], [5].

Систематизацію інформації навколо математичних понять «Функція» та «Границя функції» можна пропонувати під час написання математичних творів і курсових робіт з функціонального аналізу, зокрема для дослідження метричних властивостей множини $P_{2,\alpha} = \{a + bx^\alpha \mid a, b \in R, d > 0, 0 \leq x \leq 1\}$ многочленів. У цій множині у стандартний спосіб означимо додавання функцій та множення їх на число, а також скалярний добуток [4].

Нижче наводимо фрагмент дослідницької роботи, в якому доводиться, що множина $P_{2,\alpha}$ є лінійним простором.

Приклад. Перевірити, що операції

$a_1 + b_1x^\alpha + a_2 + b_2x^\alpha := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x^\alpha$ та $\lambda(a + bx^\alpha) := \lambda a + \lambda bx^\alpha$ задовольняють аксіоми лінійного простору:

1. Асоціативність додавання

$$\forall p_1, p_2, p_3 \in P_{2,\alpha}: (p_1 + p_2) + p_3 = p_1 + (p_2 + p_3).$$

Розглянемо ліву частину:

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2) + p_3 &= [(a_1 + b_1x^\alpha) + (a_2 + b_2x^\alpha)] + (a_3 + b_3x^\alpha) = \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x^\alpha + (a_3 + b_3x^\alpha) = \\ &= [(a_1 + a_2) + a_3] + [(b_1 + b_2) + b_3]x^\alpha = \\ &= [a_1 + (a_2 + a_3)] + [b_1 + (b_2 + b_3)]x^\alpha \end{aligned}$$

Тепер розглянемо праву частину:

$$p_1 + (p_2 + p_3) = (a_1 + b_1x^\alpha) + [(a_2 + b_2x^\alpha) + (a_3 + b_3x^\alpha)] =$$

$$= (a_1 + b_1x^\alpha) + [(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)x^\alpha] =$$

$$= [a_1 + (a_2 + a_3)] + [b_1 + (b_2 + b_3)]x^\alpha =$$

Отже, маємо рівність: $(p_1 + p_2) + p_3 = p_1 + (p_2 + p_3)$

2. Комутативність додавання: $\forall p_1, p_2 \in P_{2,\alpha}: p_1 + p_2 = p_2 + p_1$.

Ліва частина :

$$p_1 + p_2 = (a_1 + b_1x^\alpha) + (a_2 + b_2x^\alpha) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x^\alpha$$

Права частина:

$$p_2 + p_1 = (a_2 + b_2x^\alpha) + (a_1 + b_1x^\alpha) = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)x^\alpha$$

Оскільки $(a_1 + a_2 = a_2 + a_1)$ та $(b_1 + b_2 = b_2 + b_1)$, то: $p_1 + p_2 = p_2 + p_1$.

3. Існування оберненого елемента:

$\forall p_1 \in P_{2,\alpha}$ має виконуватися: $p + (-p) = (-p) + p = 0$. Обернений елемент $(-p)$ для функції $p(x) = a + bx^\alpha$ - це функція: $-p(x) = -a - bx^\alpha$.

Перевіримо:

$$p + (-p) = (a + bx^\alpha) + (-a - bx^\alpha) = (a - a) + (b - b)x^\alpha = 0 + 0x^\alpha = 0.$$

Отже, аксіома виконана.

4. Дистрибутивність множення скаляра відносно додавання

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ та $\forall p_1, p_2 \in P_{2,\alpha}: \lambda(p_1 + p_2) = \lambda p_1 + \lambda p_2$.

Ліва частина : $\lambda(p_1 + p_2) = \lambda((a_1 + b_1x^\alpha) + (a_2 + b_2x^\alpha)) =$

$$= \lambda[(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x^\alpha] = \lambda(a_1 + a_2) + \lambda(b_1 + b_2)x^\alpha.$$

Права частина:

$$\lambda p_1 + \lambda p_2 = \lambda(a_1 + b_1x^\alpha) + \lambda(a_2 + b_2x^\alpha) =$$

$$= (\lambda a_1 + \lambda b_1x^\alpha) + (\lambda a_2 + \lambda b_2x^\alpha) = (\lambda a_1 + \lambda a_2) + (\lambda b_1x^\alpha + \lambda b_2x^\alpha).$$

Оскільки $\lambda(a_1 + a_2) = \lambda a_1 + \lambda a_2$, $\lambda(b_1 + b_2)x^\alpha = \lambda b_1x^\alpha + \lambda b_2x^\alpha$, то:

$$\lambda(p_1 + p_2) = \lambda p_1 + \lambda p_2.$$

5. Асоціативність множення скаляра:

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ та $\forall p \in P_{2,\alpha}: (\lambda\mu)p = \lambda(\mu p)$.

Ліва частина: $(\lambda\mu)p = (\lambda\mu)(a + bx^\alpha) = (\lambda\mu)a + (\lambda\mu)bx^\alpha$.

Права частина: $\lambda(\mu p) = \lambda[\mu(a + bx^\alpha)] = \lambda(\mu a + \mu bx^\alpha) = \lambda\mu a + \lambda\mu bx^\alpha$.

Отже, $(\lambda\mu)p = \lambda(\mu p)$. Аналогічно перевіряємо три аксіоми лінійного простору: існування нульового елемента : $p + 0 = 0 + p = p$, дистрибутивність множення скаляра відносно додавання скалярів : $(\lambda+\mu)p = \lambda p + \mu p$, існування одиничного скаляра: $1 \cdot p = p$.

Також наводимо приклад з курсової роботи, в якому використовується метод стискуючих відображень до наближених обчислень у диференціальних рівняннях.

Завдання. Методом послідовних наближень знайти розв'язок диференціального рівняння: $f'(x) = f(x) + 1 - x$, якщо $f(0) = 1$. Перепишемо це рівняння в інтегральній формі:

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t) + 1 - t dt.$$

За початкове наближення візьмемо $f_0(x) = 1$. Тоді перше наближення:

$$f_1(x) = 1 + \int_0^x (1 + 1 - t) dt = 1 + \int_0^x (2 - t) dt,$$

$$f_1(x) = 1 + 2x - \frac{x^2}{2}.$$

Друге наближення:

$$f_2(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + 2t - \frac{t^2}{2} + 1 - t\right) dt = 1 + \int_0^x \left(2 + t - \frac{t^2}{2}\right) dt,$$

$$f_2(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

Третє наближення:

$$f_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + 2t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + 1 - t\right) dt = 1 + \int_0^x \left(2 + t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6}\right) dt,$$

$$f_3(x) = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}.$$

Четверте наближення:

$$f_4(x) = 1 + \int_0^x (f_3(t) + 1 - t) dt = 1 + \int_0^x \left(1 + 2t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{24} + 1 - t\right) dt,$$

$$f_4(x) = 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120}.$$

Побудуємо графіки наближень за допомогою редакторів GeoGebra і Mathcha (Рис.5, Рис.6):

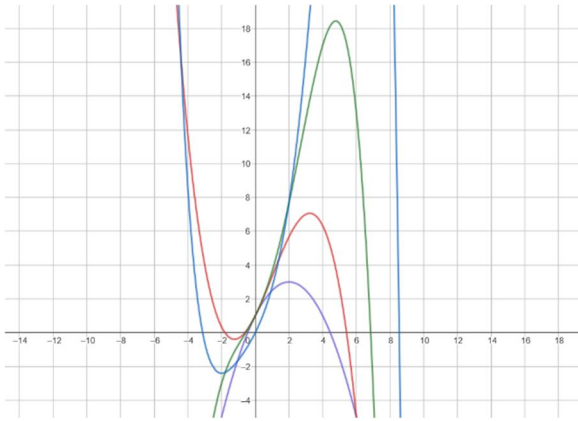


Рис.5 Редактор GeoGebra.

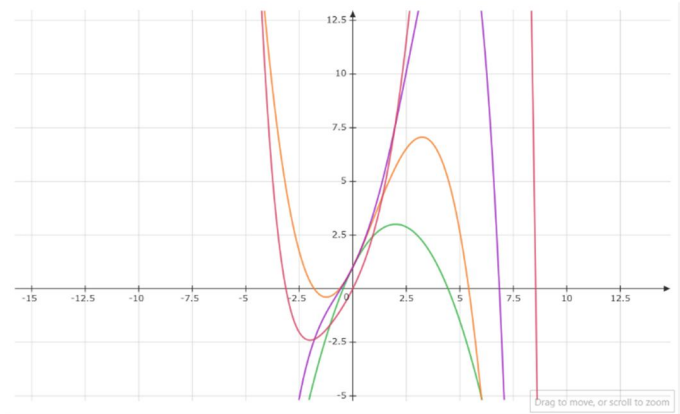


Рис.6 Редактор Mathcha.

Таким чином, у статті розглянуто особливості формування змістової лінії «Функція – Границя функції» для здобувачів вищої освіти спеціальностей 111 Математика та 014.04 Середня освіта (Математика). Використано принцип фундування, за допомогою якого досліджено трансдисциплінарні зв'язки понять «Функція» та «Границя функції» в математичному та функціональному аналізі, показано, як можна поглибити вивчення цих понять під час виконання курсових та дипломних робіт. Розвиток цієї змістової лінії формує у здобувачів вищої освіти уміння: будувати математичні моделі; ставити математичні задачі; вибирати найбільш вдалий математичний метод і алгоритм для розв'язування задачі; застосовувати для розв'язування задачі чисельні методи і сучасні математичні пакети і цифрові технології.

Література:

1. Ковтонюк М. М. Теоретичні і методичні основи фундаменталізації загальнопрофесійної підготовки майбутнього вчителя математики: дис. ... доктора пед. наук: 13.00.04. Вінниця, 2014. 386 с.
2. Лукашова, Т., Друшляк, М., & Хворостіна, Ю. (2023). Фундування знань у системі професійної підготовки майбутніх учителів математики при вивченні методу математичної індукції. *Фізико-математична освіта*, 38(3), 29–35. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2023-038-3-004>
3. Моторіна В.Г. Технологія підготовки вчителя математики до уроку: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних навчальних закладів. Друге доповнене і виправлене видання. Х.: Видавець Іванченко І. С., 2012. 318 с.
4. Шунда Н.М., Томусяк А.А., Ковтонюк М.М. Математика: Навчально-дослідна робота студентів. Методичні рекомендації для студентів. Вінниця. 1991. 45 с.
5. Qamrul Hasan Ansari, D. R. Sahu. Fired Point Theory and Variational Principles in Metric Spaces. *J. Funct. Anal.*, 2023. Chapter 2, p. 22-39.