

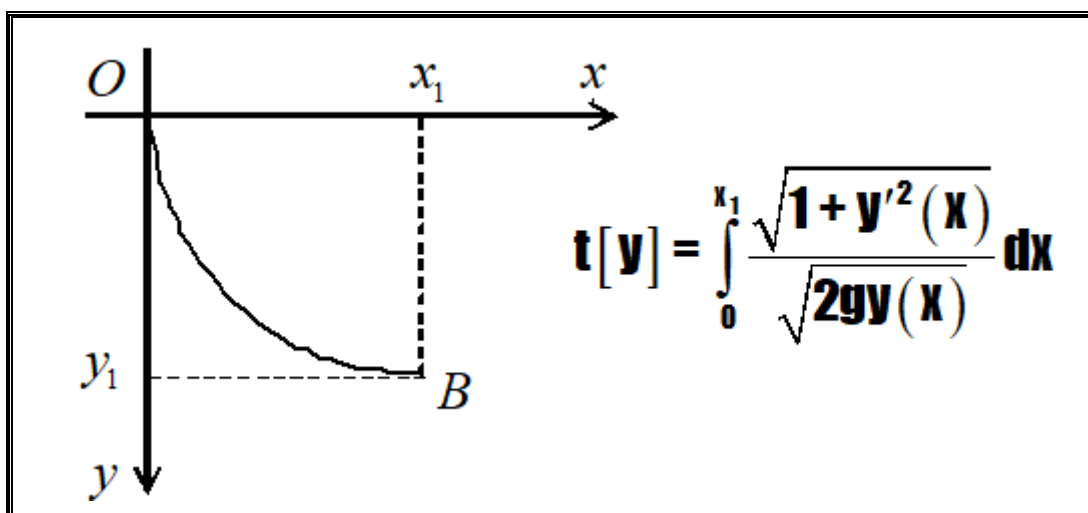
Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет математики, фізики і комп'ютерних наук

Кафедра математики та інформатики

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА

*з інтегральних рівнянь і варіаційного
числення*

(для студентів спеціальності 111 Математика)



*Схвалено і рекомендовано до видання вченою радою факультету
математики фізики і комп'ютерних наук,
протокол №2 від 30.09.2026 року.*

Рецензенти: доктор педагогічних наук,
професор **Ковтонюк М. М.**,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Панасенко О. Б.**

Бак С. М. Робочий зошит студента з інтегральних рівнянь і
варіаційного числення (для студентів спеціальності 111
Математика) [Електронне видання]. Вінниця, 2026. 31 с.

Індивідуальний робочий зошит студента

Дисципліна: інтегральні рівняння і варіаційне числення

Розділи: Типи інтегральних рівнянь. Наближені методи
розв'язування інтегральних рівнянь. Інтегральні рівняння з
виродженим ядром. Постановка варіаційної задачі. Умови
існування екстремуму функціоналу. Варіаційний метод
розв'язування крайових задач. Варіаційні задачі на умовний
екстремум.

Автор-укладач: доктор фізико-математичних наук, професор
Бак Сергій Миколайович

Передмова

Робочий зошит з інтегральних рівнянь і варіаційного числення призначений для використання студентами денної форми навчання спеціальності 111 Математика при вивченні розділів «Типи інтегральних рівнянь», «Наближені методи розв'язування інтегральних рівнянь», «Інтегральні рівняння з виродженим ядром», «Постановка варіаційної задачі. Умови існування екстремуму функціоналу», «Варіаційний метод розв'язування крайових задач», «Варіаційні задачі на умовний екстремум».

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних розділів, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю.

Робочий зошит складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання та зразків текстів контрольних робіт. До кожного заняття подано запитання для самопідготовки.

Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

Робочий план студента

Робочий план студента складений на основі робочої програми з інтегральних рівнянь і варіаційного числення.

Таблиця 1. Розподіл годин

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	денна форма здобуття освіти					
	усього	зокрема				
		ЛК	ПЗ	ЛЗ	ІЗ	СР
1	2	3	4	5	6	7
Розділ 1. Типи інтегральних рівнянь						
Тема 1. Основні типи інтегральних рівнянь	8	1	1	0	0	6
Тема 2. Зв'язок між задачею Коші і рівняннями типу Врольтерри	8	1	1	0	0	6
Разом за розділом 1	16	2	2	0	0	12
Розділ 2. Наближені методи розв'язування інтегральних рівнянь						
Тема 1. Розв'язування інтегральних рівнянь методом послідовних наближень	9	1	2	0	0	6
Тема 2. Розв'язування інтегральних рівнянь методом ітерованих ядер	9	1	2	0	0	6
Разом за розділом 2	18	2	4	0	0	12
Розділ 3. Інтегральні рівняння з виродженим ядром						
Тема 1. Інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром	11	2	2	0	0	7
Тема 2. Метод визначників Фредгольма	11	2	2	0	0	7
Разом за розділом 3	22	4	4	0	0	14
Розділ 4. Постановка варіаційної задачі. Умови існування екстремуму функціоналу						
Тема 1. Варіація та екстремум функціоналу	10	2	1	0	0	7

Тема 2. Найпростіша задача варіаційного числення	11	2	2	0	0	7
Тема 3. Узагальнення найпростішої задачі варіаційного числення	10	2	1	0	0	7
Разом за розділом 4	31	6	4	0	0	21
Розділ 5. Варіаційний метод розв'язування крайових задач						
Тема 1. Крайові задачі для диференціальних рівнянь другого порядку	10	2	1	0	0	7
Тема 2. Крайові задачі варіаційного числення	10	2	1	0	0	7
Разом за розділом 5	20	4	2	0	0	14
Розділ 6. Варіаційні задачі на умовний екстремум						
Тема 1. Задачі на умовний екстремум	13	2	4	0	0	7
Разом за розділом 6	13	2	4	0	0	7
Усього годин	120	20	20	0	0	80

Таблиця 2. Розподіл балів за видами контролю та самостійної роботи

№	Вид поточного контролю та самостійної роботи	Кількість балів
1.	Домашні завдання	20
2.	Конспект	20
3.	Контрольна робота 1	20
4.	Контрольна робота 2	20
5.	Колоквіум	20
Загальна кількість балів		100

Таблиця 3. Шкала оцінювання: стобальна, ECTS, розширена

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за розширеною шкалою
		<i>Для екзамену, заліку, курсової роботи, практики</i>
90-100	A	ВІДМІННО
80-89	B	ДУЖЕ ДОБРЕ
75-79	C	ДОБРЕ
60-74	D	ЗАДОВІЛЬНО
50-59	E	ДОСТАТНЬО
35-49	FX	НЕЗАДОВІЛЬНО З МОЖЛИВІСТЮ ПОВТОРНОГО СКЛАДАННЯ
1-34	F	НЕПРИЙНЯТНО З ОБОВ'ЯЗКОВИМ ПОВТОРНИМ ВИВЧЕННЯМ ДИСЦИПЛІНИ

📖 Практичне заняття № 1

Тема: Інтегральні рівняння та їх типи. Зв'язок між задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь і рівняннями типу Вольтерри

№1. Визначити тип інтегрального рівняння. Перевірити, чи є задана функція його розв'язком:

$$1.1. y(x) + \int_0^1 x(e^{xt} - 1)y(t)dt = e^x - x, y(x) = 1.$$

$$1.2. \int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}} dt = 1, y(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}}.$$

$$1.3. y(x) - \int_0^\pi \cos(x+t)y(t)dt = 1, y(x) = 1 - \frac{4\sin x}{2-\pi}.$$

$$1.4. y(x) + \int_0^x \frac{t}{1+x^2} y(t)dt = \frac{1}{1+x^2}, y(x) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

$$1.5. y(x) + \lambda \int_0^1 y(t) \sin xt dt = 1, y(x) = e^x.$$

$$1.6. y(x) - \int_0^\pi (x^2 + t)y(t) \cos t dt = \sin x, y(x) = \cos x.$$

$$1.7. y(x) - 4 \int_0^{+\infty} e^{-(x+t)} y(t) dt = (x-1)e^{-x}, y(x) = xe^{-x}.$$

$$1.8. \int_0^x (x-t)^2 y(t) dt = x^3, y(x) = 3.$$

$$1.9. y(x) - 3 \int_0^\pi K(x, t)y(t)dt = 1, y(x) = \cos 2x,$$

$$K(x, t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leq x \leq t, \\ \sin t \cos x, & t \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$1.10. y(x) - \int_0^{\pi} K(x, t) y(t) dt = \sqrt{x} - \frac{x}{3} + \frac{x^3}{6}, y(x) = \sqrt{x},$$

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{x(2-t)}{2}, & 0 \leq x \leq t, \\ \frac{t(2-x)}{2}, & t \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

2. Скласти інтегральне рівняння, яке рівносильне задачі Коші:

$$2.1. y' + 2xy = e^x, y(0) = 1.$$

$$2.2. y' - x \sin y = 2, y(\pi) = \pi.$$

$$2.3. y' - y = 0, y(0) = 1.$$

$$2.4. y'' + xy' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

$$2.5. y'' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$2.6. y'' + y = \cos x, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$2.7. y'' - 5y' + 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$2.8. y'' + y = \cos x, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

$$2.9. y'' - \sin x \cdot y' + e^x y = x, y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

$$2.10. y'' + (1 + x^2)y = \cos x, y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

3. Розв'язати інтегральне рівняння, звівши його до задачі Коші:

$$3.1. y(x) = x + \int_0^x xty(t) dt.$$

$$3.2. y(x) = e^x + \int_0^x y(t) dt.$$

$$3.3. y(x) = x - 1 + 2 \int_0^x (x-t)y(t) dt.$$

$$3.4. y(x) = x - \int_0^x e^{x-t} y(t) dt.$$

$$3.5. \quad x - \int_0^x e^{x+t} y(t) dt = 0.$$

$$3.6. \quad x - \int_0^x e^{x-t} y(t) dt = 0.$$

$$3.7. \quad y(x) = 1 + 2 \int_0^x \frac{2t+1}{(2x+1)^2} y(t) dt.$$

$$3.8. \quad y(x) = e^x + \int_0^x y(t) dt.$$

$$3.9. \quad y(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x-t) y(t) dt.$$

$$3.10. \quad y(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x-t) y(t) dt.$$

Відповіді: 1.1.–1.4., 1.7., 1.8., 1.10. – Так. 1.5., 1.6., 1.9. – Ні. 2.1.

$$y(x) = 1 + \int_0^x (e^t - 2ty(t)) dt. \quad 2.2. \quad y(x) = \pi + \int_0^x (2 + t \sin y(t)) dt. \quad 2.3.$$

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t) dt. \quad 2.4. \quad \varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t) \varphi(t) dt. \quad 2.5. \quad \varphi(x) = -x +$$

$$+ \int_0^x (t-x) \varphi(t) dt. \quad 2.6. \quad \varphi(x) = \cos x - \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt. \quad 2.7. \quad \varphi(x) = 5 - 6x +$$

$$+ \int_0^x (5 - 6(x-t)) \varphi(t) dt. \quad 2.8. \quad \varphi(x) = \cos x - x - \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt. \quad 2.9.$$

$$\varphi(x) = x - \sin x + e^x (x-1) + \int_0^x (\sin x - e^x (x-t)) \varphi(t) dt. \quad 2.10. \quad \varphi(x) =$$

$$= \cos x - 2x(1+x^2) - \int_0^x (1+x^2)(x-t) \varphi(t) dt + x^3 - 2x + 3. \quad 3.1. \quad y = xe^{\frac{x^3}{3}}.$$

$$3.3. \quad y = \frac{\sqrt{2}-2}{4} e^{\sqrt{2}x} - \frac{\sqrt{2}+2}{4} e^{-\sqrt{2}x}. \quad 3.4. \quad y = x - \frac{x^2}{2}. \quad 3.5. \quad y = (1-x)e^{-2x}.$$

$$3.6. \quad y = 1 - x. \quad 3.7. \quad y = \frac{4x+1}{2x+1}. \quad 3.8. \quad y = (1+x)e^x. \quad 3.9. \\ y = e^{\frac{x}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right). \quad 3.10. \quad y = x.$$

📖 Практичне заняття № 2

Тема: Розв'язування інтегральних рівнянь методом послідовних наближень

№1. Методом послідовних наближень знайти розв'язок рівняння Фредгольма 2-го роду:

$$1.1. \quad y(x) = \int_0^1 xty(t)dt + 2x, \quad y_0(x) \equiv 0.$$

$$1.2. \quad y(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 t \cdot y(t)dt + 1, \quad y_0(x) \equiv 0.$$

$$1.3. \quad y(x) = \pi \int_0^1 (1-x) \sin 2\pi t \cdot y(t)dt + \frac{1-x}{2}, \quad y_0(x) \equiv 0.$$

$$1.4. \quad y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} t \sin x \cdot y(t)dt + 2 \sin x, \quad y_0(x) \equiv 0.$$

$$1.5. \quad y(x) = 4 \int_0^1 x^2 t^2 y(t)dt + x, \quad y_0(x) \equiv x.$$

$$1.6. \quad y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xty(t)dt + \frac{5}{6}x, \quad y_0(x) \equiv 0.$$

$$1.7. \quad y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 y(t)dt + \sin \pi x, \quad y_0(x) \equiv 0.$$

$$1.8. \quad y(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 t \cdot y(t)dt - 1, \quad y_0(x) \equiv 1.$$

$$1.9. \quad y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xt^2 y(t)dt + 1, \quad y_0(x) \equiv 0.$$

$$1.10. y(x) = \frac{1}{3} \int_0^1 xt^2 y(t) dt - 1, y_0(x) \equiv 1.$$

2. Методом послідовних наближень знайти розв'язок рівняння Вольтерри 2-го роду:

$$2.1. y(x) = \int_0^x y(t) dt + 1, y_0(x) \equiv 0.$$

$$2.2. y(x) = -\int_0^x y(t) dt + x + \frac{x^2}{2}, y_0(x) \equiv 0.$$

$$2.3. y(x) = \int_0^x xy(t) dt + 1 - x^2, y_0(x) \equiv 0.$$

$$2.4. y(x) = \int_0^x ty(t) dt + 1, y_0(x) \equiv 0.$$

$$2.5. y(x) = x - \int_0^x (x-t)y(t) dt, y_0(x) \equiv 0.$$

$$2.6. y(x) = 1 - \int_0^x (x-t)y(t) dt, y_0(x) \equiv 0.$$

$$2.7. y(x) = 1 + \int_0^x (x-t)y(t) dt, y_0(x) \equiv 1.$$

$$2.8. y(x) = x + 1 - \int_0^x y(t) dt, y_0(x) \equiv 1.$$

$$2.9. y(x) = x + 1 - \int_0^x (x-t)y(t) dt, y_0(x) \equiv 1.$$

$$2.10. y(x) = 2x + 2 - \int_0^x y(t) dt, y_0(x) \equiv 1.$$

Відповіді: 1.1. $y = 3x$. 1.2. $y = \frac{2}{3}$. 1.3. $y = 1 - x$. 1.4. $y = 4\sin x$. 1.5.

$y = 5x^2 + x$. 1.6. $y = x$. 1.7. $y = \sin \pi x + \frac{2}{\pi}$. 1.9. $y = 1 + \frac{4}{21}x$. 2.1. $y = e^x$.

2.2. $y = x$. 2.3. $y = 1$. 2.4. $y = e^{\frac{x^2}{2}}$. 2.5. $y = \sin x$. 2.6. $y = \cos x$. 2.7. $y = \operatorname{ch} x$. 2.8. $y = 1$. 2.9. $y = e^x$. 2.10. $y = 2$.

Практичне заняття № 3

Тема: Розв'язування інтегральних рівнянь методом ітерованих ядер

Завдання 1. Методом ітерованих ядер знайти резольвенту і розв'язок рівняння Фредгольма 2-го роду:

$$1.1. y(x) = \lambda \int_0^1 xty(t)dt + x.$$

$$1.2. y(x) = \int_0^1 \frac{x}{t^2 + 1} y(t)dt + x^2 + 1.$$

$$1.3. y(x) = \int_0^1 e^{x+t} y(t)dt + 1.$$

$$1.4. y(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos t \cdot y(t)dt - 1.$$

$$1.5. y(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 xe^t y(t)dt + 1.$$

$$1.6. y(x) = \int_{-1}^0 (1+x)(1-t)y(t)dt - 1.$$

$$1.7. y(x) = 2 \int_{-1}^1 x^2 t^2 y(t)dt + 1.$$

$$1.8. y(x) = \int_{-1}^1 xty(t)dt - x.$$

$$1.9. y(x) = \lambda \int_0^1 x^2 ty(t)dt + x.$$

$$1.10. y(x) = \lambda \int_0^1 t^2 y(t) dt + x^2.$$

2. Методом ітерованих ядер знайти резольвенту і розв'язок рівняння Вольтерри 2-го роду:

$$2.1. y(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x xy(t) dt + x.$$

$$2.2. y(x) = \frac{1}{2} \int_0^x y(t) dt + 1.$$

$$2.3. y(x) = \int_0^x (x-t) y(t) dt + 1.$$

$$2.4. y(x) = -\int_0^x e^{x-t} y(t) dt - 3x^2.$$

$$2.5. y(x) = \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2} y(t) dt + e^x.$$

$$2.6. y(x) = \int_0^x e^{x^2-t^2} y(t) dt + e^{x^2}.$$

$$2.7. y(x) = \int_0^x \frac{2 + \cos x}{2 + \cos t} y(t) dt - e^x \sin x.$$

$$2.8. y(x) = \int_0^x \frac{ch x}{cht} y(t) dt + ch x.$$

$$2.9. y(x) = \int_0^x a^{x-t} y(t) dt + a^x.$$

$$2.10. y(x) = \int_0^x 2xy(t) dt - x.$$

Відповіді: 1.1. $R(x, t, \lambda) = \frac{3xt}{3-\lambda}, \quad y = \frac{3x}{3-\lambda}. \quad 1.2.$

$R(x, t, 1) = \frac{2}{2-\ln 2} \frac{x}{t^2+1}, \quad y = x^2 + \frac{2x}{2-\ln 2} + 1. \quad 1.3. \quad R(x, t, 1) = \frac{2e^{x+t}}{3-e^2},$

$$y = \frac{2(e-1)}{3-e^2} e^x + 1. \quad 1.4. \quad R(x, t, 1) = 2 \sin x \cos t, \quad y = -2 \sin x - 1. \quad 1.5.$$

$$R\left(x, t, \frac{1}{2}\right) = \frac{x e^{t+1}}{e-1}, \quad y = \frac{e+1}{2} x + 1. \quad 1.6. \quad R(x, t, 1) = 3(1+x)(1-t),$$

$$y = \frac{3x+1}{2}. \quad 1.7. \quad R(x, t, 2) = 5x^2 t^2, \quad y = \frac{20}{3} x^2 + 1. \quad 1.8. \quad R(x, t, 1) = 3xt,$$

$$y = -3x. \quad 1.9. \quad R(x, t, \lambda) = \frac{4x^2 t}{4-\lambda}, \quad y = \frac{4\lambda}{12-3\lambda} x^2 + x. \quad 1.10.$$

$$R(x, t, \lambda) = \frac{3t^2}{3-\lambda}, \quad y = x^2 + \frac{3\lambda}{15-5\lambda}. \quad 2.1. \quad R\left(x, t, -\frac{1}{2}\right) = x e^{\frac{t^2-x^2}{4}}, \quad y = x e^{\frac{x^2}{4}}.$$

$$2.2. \quad R\left(x, t, \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{x-t}{2}}, \quad y = \frac{1}{4} \left(e^{\frac{x}{2}} + 3 \right). \quad 2.3. \quad R(x, t, 1) = \operatorname{sh}(x-t), \quad y = \operatorname{ch} x.$$

$$2.4. \quad R(x, t, -1) = 1, \quad y = x^3 - 3x^2. \quad 2.5. \quad R(x, t, 1) = \frac{1+x^2}{1+t^2} e^{x-t},$$

$$y = e^x \left((1+x^2) \operatorname{arctg} x + 1 \right). \quad 2.6. \quad R(x, t, 1) = e^{x-t} e^{x^2-t^2}, \quad y = e^{x^2+x}. \quad 2.7.$$

$$R(x, t, 1) = \frac{2+\cos x}{2+\cos t} e^{x-t}, \quad y = e^x \left((2+\cos x) \ln \frac{2+\cos x}{3} - \sin x \right). \quad 2.8.$$

$$R(x, t, 1) = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{cht}} e^{x-t}, \quad y = e^x \operatorname{ch} x. \quad 2.9. \quad R(x, t, 1) = a^{x-t} e^{x-t}, \quad y = a^x e^x. \quad 2.10.$$

$$R(x, t, 1) = 2x e^{x^2-t^2}, \quad y = -x e^{x^2}.$$

📖 Практичне заняття № 4

Тема: Інтегральне рівняння Фредгольма другого роду з виродженим ядром. Метод визначників Фредгольма

№1. Знайти розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду з виродженим ядром:

$$1.1. \quad y(x) = \int_{-1}^1 x t y(t) dt + 1.$$

$$1.2. y(x) = \int_0^1 xty(t)dt + 2x.$$

$$1.3. y(x) = 4 \int_0^1 x^2 t^2 y(t)dt + x.$$

$$1.4. y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 xty(t)dt + \frac{5}{6}x.$$

$$1.5. y(x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tg t \cdot y(t)dt + ctg x.$$

$$1.6. y(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 t \cdot y(t)dt + 1.$$

$$1.7. y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} t \sin x \cdot y(t)dt + 2 \sin x.$$

$$1.8. y(x) = \int_0^1 (x-t)y(t)dt + 2.$$

$$1.9. y(x) = \int_0^1 (x^2 - t)y(t)dt + x.$$

$$1.10. y(x) = \int_{-1}^1 (x^2 - xt)y(t)dt - x.$$

2. Методом визначників Фредгольма знайти розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду з виродженим ядром:

$$2.1. y(x) = \lambda \int_0^1 (x-t)y(t)dt + x.$$

$$2.2. y(x) = \lambda \int_0^1 \left(\frac{x}{t^2 + 1} + 1 \right) y(t)dt + x^2 + 1.$$

$$2.3. y(x) = \lambda \int_0^1 (e^{x+t} - e^{-x-t})y(t)dt.$$

$$2.4. y(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xt^2 + x^2t) y(t) dt - 1.$$

$$2.5. y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x-t) y(t) dt + x.$$

$$2.6. y(x) = \lambda \int_0^1 (x \ln t - t \ln x) y(t) dt + \frac{6}{5}(1-4x).$$

$$2.7. y(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-t) y(t) dt + \cos x.$$

$$2.8. y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x-t) y(t) dt + \cos x.$$

$$2.9. y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos t + t^2 \sin x + \cos x \sin t) y(t) dt + x.$$

$$2.10. y(x) = \lambda \int_0^{2\pi} (\sin x \cos t - \sin 2x \cos 2t + \sin 3x \cos 3t) y(t) dt + \cos x.$$

Відповіді: 1.1. $y=1$. 1.2. $y=3x$. 1.3. $y=5x^2+x$. 1.4. $y=x$. 1.5.

$$y = \frac{\pi}{2} + \operatorname{ctg} x. \quad 1.6. \quad y = \frac{2}{3}. \quad 1.7. \quad y = 4 \sin x. \quad 1.8. \quad y = \frac{12}{13}x + \frac{12}{13}. \quad 1.9.$$

$$y = \frac{1}{3}x^2 + x - \frac{5}{18}. \quad 1.10. \quad y = -\frac{3}{5}x. \quad 2.1. \quad y = \frac{6\lambda+12}{\lambda^2+12}x - \frac{4\lambda}{\lambda^2+12}. \quad 2.4.$$

$$y = \frac{20\lambda^2}{12\lambda^2-45}x^2 + \frac{10\lambda}{4\lambda^2-15}x - 1, \quad \lambda \neq \pm \frac{\sqrt{15}}{2}. \quad 2.5. \quad y = -\frac{2\lambda\pi}{1+\lambda^2\pi^2}(\cos x +$$

$$+ \lambda\pi \sin x) + x. \quad 2.6. \quad y = \frac{2\lambda^2x + \left(\frac{\lambda^2}{4} + \lambda\right)\ln x}{1 + \frac{29}{48}\lambda^2} + \frac{6}{5}(1-4x). \quad 2.8.$$

$$y = 2\frac{2\cos x + \lambda\pi \sin x}{4 + \lambda^2\pi^2}. \quad 2.9. \quad y = \frac{2\lambda\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}(\lambda\pi x - 4\lambda\pi \sin x + \cos x) + x.$$

$$2.10. y = \lambda\pi \sin x + \cos x.$$

Практичне заняття № 5

Контрольна робота № 1

1. Методом послідовних наближень знайти розв'язок рівняння Фредгольма (або Вольтерри) 2-го роду:

$$y(x) = \int_0^1 xty(t)dt + 2x, y_0(x) \equiv 0.$$

2. Методом ітерованих ядер знайти резольвенту і розв'язок рівняння Фредгольма 2-го роду: $y(x) = \lambda \int_0^1 xty(t)dt + x$.

3. Методом ітерованих ядер знайти резольвенту і розв'язок рівняння Вольтерри 2-го роду: $y(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x xy(t)dt + x$.

4. Знайти розв'язок інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду з виродженим ядром:

$$y(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x-t)y(t)dt + x.$$

📖 Практичне заняття № 6

Тема: Варіаційні задачі. Рівняння Ейлера

Запитання для самопідготовки:

1. Поняття функціоналу. Варіація і її властивості. Необхідна умова екстремуму.

2. Рівняння Ейлера.

3. Найпростіші випадки інтегровності рівняння Ейлера.

4. Необхідні умови екстремуму функціоналів вигляду

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx.$$

5. Необхідна умова екстремуму функціоналів, які залежать від похідних більш високого порядку.

Знайти варіацію функціоналу:

$$1.1. J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (x + y) dx.$$

$$1.2. J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y) dx.$$

$$1.3. J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y^4 dx.$$

$$1.4. J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2) dx.$$

$$1.5. J[y] = \int_0^1 (y'^2 + 12xy) dx.$$

$$1.6. J[y] = \int_0^1 (x^2 y' + y^2) dx.$$

$$1.7. J[y] = \int_{x_0}^{x_1} yy' dx.$$

$$1.8. J[y] = y^2(0) + \int_{-1}^1 (xy + y'^2) dx.$$

$$1.9. J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 - y'^2) dx.$$

$$1.10. J[y] = \int_0^{\pi} y' \sin y dx.$$

2. Знайти екстремалі функціоналу:

$$2.1. J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx.$$

$$2.2. J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y'(1+x^2 y') dx.$$

$$2.3. J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx.$$

$$2.4. J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (xy' + y'^2) dx.$$

$$2.5. J[y] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1+y^2}{y'^2} dx.$$

$$2.6. J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 - 2y \sin x) dx.$$

$$2.7. J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (16y^2 - y''^2 + x^2) dx.$$

$$2.8. J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (2xy + y'''^2) dx.$$

$$2.9. J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y'''^2 + y^2 - 2yx^3) dx.$$

$$2.10. J[y_1, y_2] = \int_{x_0}^{x_1} (2y_1y_2 - 2y_1'^2 + y_1'^2 - y_2'^2) dx.$$

З3. Знайти допустимі екстремалі функціоналу:

$$3.1. J[y] = \int_0^1 (y'^2 + xy) dx, y(0) = y(1) = 0.$$

$$3.2. J[y] = \int_1^e (2y - x^2 y'^2) dx, y(1) = e, y(e) = 0.$$

$$3.3. J[y] = \int_0^1 (e^y + xy') dx, y(0) = 0, y(1) = 1.$$

$$3.4. J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 6y \operatorname{sh} 2x) dx, y(0) = y(1) = 0.$$

$$3.5. J[y] = \int_0^\pi (4y \cos x + y'^2 - y^2) dx, y(0) = y(\pi) = 0.$$

$$3.6. J[y] = \int_0^1 (y'^2 + yy' + 12xy) dx, y(0) = y(1) = 0.$$

$$3.7. J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + xy) dx, y(0) = y(1) = 0.$$

$$3.8. J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2ye^x) dx, y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{2e}.$$

$$3.9. J[y_1, y_2] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_1' y_2' - y_1 y_2) dx, y_1(0) = 0, y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$$

$$y_2(0) = 0, y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

$$3.10. J[y_1, y_2] = \int_0^1 (y_1' y_2' + 6xy_1 + 12x^2 y_2) dx, y_1(0) = 0, y_1(1) = 1,$$

$$y_2(0) = 0, y_2(1) = 1.$$

Відповіді: 1.1. $\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \delta y dx$. 1.7. $\delta J = \int_{x_0}^{x_1} (y' \delta y + y \delta y') dx$. 1.8.

$\delta J = 2y(0)\delta y(0) + \int_{-1}^1 (x\delta y + 2y'\delta y') dx$. 1.9. $\delta J = 2 \int_{x_0}^{x_1} (y\delta y - y'\delta y') dx$.

1.10. $\delta J = \int_0^\pi (y' \cos y \cdot \delta y + \sin y \cdot \delta y') dx$. 2.1. $(x - C_2)^2 + y^2 = C_1^2$. 2.2.

$y = \frac{C_1}{x} + C_2$. 2.3. $y = C_1 \sin(4x + C_2)$. 2.4. $y = -\frac{x^2}{4} + C_1 x + C_2$. 2.5.

$y = sh(C_1 x + C_2)$. 2.6. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$. 2.7.

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x$. 2.8.

$y = \frac{x^7}{7!} + C_1 x^5 + C_2 x^4 + C_3 x^3 + C_4 x^2 + C_5 x + C_6$. 2.9. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} +$

$+ e^{\frac{x}{2}} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + e^{-\frac{x}{2}} \left(C_5 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_6 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + x^3$. 2.10.

$y_1 = (C_1 x + C_2 - 2C_3) \cos x + (C_3 x + 2C_1 + C_4) \sin x$, $y_2 = (C_1 x + C_2) \cos x +$
 $+(C_3 x + C_4) \sin x$. 3.1. $y = \frac{x^3 - x}{12}$. 3.2. $y = \frac{e}{x} - \ln x$. 3.3. Допустимих

екстремалей не існує. 3.4. $y = sh 2x - \frac{sh 2}{sh 1} sh x$. 3.5. $y = (C + x) \sin x$.

3.6. $y = x^3 - x$. 3.7. $y = \frac{sh x}{2sh 1} - \frac{x}{2}$. 3.8. $y = \frac{x}{2} e^x - sh x$. 3.9.

$y_1 = \sin x$, $y_2 = -\sin x$. 3.10. $y_1 = x^4$, $y_2 = x^3$.

Практичне заняття № 7

Тема: Достатні умови екстремуму

Запитання для самопідготовки:

1. Повторити матеріал з попередньої теми.

2. Достатні умови екстремуму функціоналів вигляду

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx.$$

З1. Дослідити на екстремум функціонал в класі неперервних функцій:

1.1. $J[y] = \int_0^1 (1 - y^2) dx, y(0) = y(1) = 0.$

1.2. $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + 2xyy') dx, y(x_0) = y_0, y(x_1) = y_1.$

1.3. $J[y] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y') dx, y(0) = 1, y(1) = 2.$

1.4. $J[y] = \int_0^1 (y''^2 - 48y) dx, y(0) = 1, y'(0) = -5, y(1) = y'(1) = -2.$

1.5. $J[y] = \int_0^1 (y''^2 + 4y'^2 + 3x) dx, y(0) = 1, y'(0) = 3, y(1) = 4, y'(1) = 3.$

З2. Користуючись посиленими достатніми умовами Лежандра, дослідити на екстремум функціонал:

2.1. $J[y] = \int_1^e \left(x + 2y + \frac{y'^2 x}{2} \right) dx, y(1) = 3, y(e) = 2e + 1.$

2.2. $J[y] = \int_0^1 e^x (2y^2 + y'^2) dx, y(0) = 1, y(1) = e.$

2.3. $J[y] = \int_0^e (e + x) y'^2 dx, y(0) = 1 - \ln 2, y(e) = 1.$

2.4. $J[y] = \int_0^e \frac{e^{-y}}{y'} dx, y(0) = 1, y(e) = 1 + \ln 2.$

З3. Дослідити на екстремум функціонал. Вказати тип екстремуму (сильний чи слабкий):

$$3.1. J[y] = \int_0^1 e^x \left(y^2 + \frac{1}{2} y'^2 \right) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$$

$$3.2. J[y] = \int_0^1 e^y y'^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \ln 4.$$

$$3.3. J[y] = \int_1^2 \frac{x^3}{y'^2} dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 4.$$

$$3.4. J[y] = \int_0^a \frac{dx}{y'}, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b \quad (a > 0, b > 0).$$

$$3.5. J[y] = \int_0^1 (1+x) y'^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

$$3.6. J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 - y'^2) dx, \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$3.7. J[y] = \int_{-1}^2 y' (1 + x^2 y') dx, \quad y(-1) = 1, \quad y(2) = 4.$$

$$3.8. J[y] = \int_{-1}^1 (y'^3 + y'^2) dx, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 3.$$

$$3.9. J[y] = \int_1^2 (xy'^4 - 2yy'^3) dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

$$3.10. J[y] = \int_0^a (1 - e^{-y'^2}) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(a) = b \quad (a > 0).$$

Відповіді: 1.1. На прямій $y = 0$ досягається максимум функціоналу. 1.2. Варіаційна задача не має змісту. 1.3. В класі неперервних функцій екстремум не досягається. 1.4. На кривій $y = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 1$ досягається мінімум функціоналу. 1.5. На прямій $y = 3x + 1$ досягається мінімум функціоналу. 2.1. На прямій $y = 2x + 1$ досягається мінімум функціоналу. 2.2. На кривій $y = e^x$ досягається мінімум функціоналу. 2.3. На кривій

$y = \ln \frac{x+e}{2}$ досягається мінімум функціоналу. 2.4. На кривій $y = \ln(x+e)$ досягається мінімум функціоналу. 3.1. На кривій $y = e^x$ досягається сильний (і слабкий) мінімум функціоналу. 3.2. На кривій $y = 2\ln(x+1)$ досягається сильний (і слабкий) мінімум функціоналу. 3.3. На кривій $y = x^2$ досягається слабкий мінімум функціоналу. 3.4. На прямій $y = \frac{b}{a}x$ досягається слабкий мінімум функціоналу. 3.5. На кривій $y = \log_2(x+1)$ досягається сильний (і слабкий) мінімум функціоналу. 3.6. На кривій $y = \sin x + \cos x$ досягається сильний (і слабкий) максимум функціоналу. 3.7. В класі неперервних функцій екстремум не досягається. 3.8. На прямій $y = 2x+1$ досягається слабкий мінімум функціоналу. 3.9. На прямій $y = x-1$ досягається слабкий мінімум функціоналу. 3.10. На прямій $y = \frac{b}{a}x$ досягається слабкий мінімум при $|b| < \frac{a}{\sqrt{2}}$ і слабкий максимум при $|b| > \frac{a}{\sqrt{2}}$; при $|b| = \frac{a}{\sqrt{2}}$ екстремуму немає.

Практичне заняття № 8

Тема: Крайові задачі для диференціальних рівнянь 2-го порядку. Метод Рітца для крайової задачі

Запитання для самопідготовки:

1. Поняття крайової задачі.
2. Класифікація крайових умов.
3. Однорідні і неоднорідні крайові задачі.
4. Зведення лінійної крайової задачі для звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку до варіаційної задачі.

5. Ідея методу Рітца.

6. Метод Рітца для крайової задачі.

З1. Знайти розв'язок однорідної крайової задачі:

1.1. $y'' - 3y' + 2y = 0, y(0) = y'(1) = 0.$

1.2. $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = y(2) = 0.$

1.3. $y'' + 5y' + 4y = 0, y(1) = 0, y'(2) + y(2) = 0.$

1.4. $y'' + y = 0, y'(0) = y'(\pi) = 0.$

1.5. $y'' + 6y' + 9y = 0, y(0) = y'(1) = 0.$

1.6. $y'' + 6y' + 25y = 0, y'(0) = y'(\pi) = 0.$

1.7. $y'' - 2y' + y = 0, y(-2) = y'(1) = 0.$

1.8. $y'' - 4y' + 5y = 0, y(-1) = y(0) = 0.$

1.9. $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = y(2) = 0.$

1.10. $y'' + 6y' + 13y = 0, y(0) = y(\pi) = 0.$

З2. Знайти розв'язок неоднорідної крайової задачі:

2.1. $y'' + 2y' - 3y = x^2 + 3x + 1, y(1) = 0, y'(2) = 0.$

2.2. $y'' + 4y' - 5y = 2x - 1, y(0) = 1, y(2) = -1.$

2.3. $y'' + 5y' + 4y = 3x - 2, y(-1) = 0, y(1) = 0.$

2.4. $y'' - 6y' + 9y = e^x, y(0) = 0, y'(1) = 0.$

2.5. $y'' + 4y' + 4y = 0, y(-1) = 1, y(1) = 0.$

2.6. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}, y'(0) = 1, y'(2) = 3.$

2.7. $y'' - 2y' + y = xe^x, y(0) = 2, y(1) = 3.$

2.8. $y'' - 4y' + 5y = \sin x, y'(-1) = 0, y'(0) = 0.$

2.9. $y'' - 6y' + 25y = \sin 4x, y(0) = 1, y'(\pi) = 0.$

2.10. $y'' - 6y' + 13y = 0, y'(0) = 1, y'(\pi) = 2.$

3. Побудувати варіаційну задачу для крайової задачі і знайти її наближений розв'язок $y_2(x)$:

3.1. $y'' + xy = 1, y(0) = y(1) = 0.$

3.2. $y'' + (x+1)y = x-1, y(-1) = y(1) = 0.$

3.3. $y'' - 5xy = 2x-1, y(0) = y(1) = 0.$

3.4. $y'' + 4xy = 3x-2, y(-2) = y(1) = 0.$

3.5. $y'' - 3xy = x+1, y(-1) = y(1) = 0.$

3.6. $y'' + 13xy = 1, y(0) = y(1) = 0.$

3.7. $y'' + 25y = x, y(-2) = y(2) = 0.$

3.8. $y'' + 5xy = 1, y(0) = y(1) = 0.$

3.9. $y'' + y = x, y(-2) = y(1) = 0.$

3.10. $y'' + 4(x-1)y = 2, y(0) = y(1) = 0.$

Відповіді: 1.2. $y = 0.$ 1.4. $y = C \cos x.$ 2.1.

$y = \frac{e^3(89e^4 - 75e^3)}{27(3 + e^4)}e^{-3x} + \frac{89 + 25e^3}{9e(3 + e^4)}e^x - \frac{1}{3}x^2 - \frac{13}{9}x - \frac{41}{27}.$ 2.3.

$y = \frac{11e^8 - 35}{16e(e^6 - 1)}e^{-x} + \frac{e^2(35 - 11e^2)}{16(e^6 - 1)}e^{-4x} + \frac{3}{4}x - \frac{23}{16}.$ 2.6. $y = \left(-\frac{3}{8}e^{-4} + \frac{17}{8} + \left(\frac{3}{4}e^{-4} - \frac{13}{4}\right)x + x^2\right)e^{2x}.$ 2.9.

$y = e^{3x} \left(\frac{211}{219} \cos 4x + \frac{4 + 211e^{3\pi}}{292e^{3\pi}} \sin 4x \right) + \frac{8}{219} \cos 4x + \frac{1}{73} \sin 4x.$

📖 Практичне заняття № 9

Тема: Варіаційні задачі на умовний екстремум. Метод множників Лагранжа

Запитання для самопідготовки:

1. Варіаційні задачі на умовний екстремум. Задача Лагранжа.
2. Ізопериметричні задачі.
3. Варіаційні принципи.

✎1. Знайти геодезичну лінію, яка сполучає дві задані точки A і B на поверхні $\varphi(x, y, z) = 0$. Знайти її довжину:

- 1.1. $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 1)$, $\varphi(x, y, z) = 2x - y + z - 2$.
- 1.2. $A(0; -2; 3)$, $B(1; -3; 1)$, $\varphi(x, y, z) = x - 3y + 2z - 12$.
- 1.3. $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; -1)$, $\varphi(x, y, z) = 2x + 3y + 4z - 9$.
- 1.4. $A(0; 0; 10)$, $B(1; -3; 3)$, $\varphi(x, y, z) = 5x - 3y + 2z - 20$.
- 1.5. $A(0; 0; -1)$, $B(1; 1; 0)$, $\varphi(x, y, z) = 3x + 2y - 5z - 5$.
- 1.6. $A(-1; 0; 3)$, $B(1; -2; -1)$, $\varphi(x, y, z) = x - y + z - 2$.
- 1.7. $A(0; -1; 1)$, $B(2; -1; -1)$, $\varphi(x, y, z) = x - 3y + z - 4$.
- 1.8. $A(-2; 1; -1)$, $B(0; -3; -7)$, $\varphi(x, y, z) = 5x + y + z + 10$.
- 1.9. $A(1; 4; 0)$, $B(2; 1; 2)$, $\varphi(x, y, z) = -x + y + 2z - 3$.
- 1.10. $A(0; 1; 1)$, $B(1; 1; 0)$, $\varphi(x, y, z) = -2x + 3y - 2z - 1$.

✎2. Знайти екстремалі ізопериметричної задачі:

- 2.1. $J[y] = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx$, $y(0) = y(1) = 0$, $\int_0^1 y^2 dx = 2$.
- 2.2. $J[y] = \int_0^1 y'^2 dx$, $y(0) = -4$, $y(1) = 4$, $\int_0^1 xy dx = 0$.

$$2.3. J[y] = \int_0^1 (y'^2 + 2xy) dx, y(0) = 0, y(1) = 1, \int_0^1 y dx = 1.$$

$$2.4. J[y] = \int_1^2 y' (1 + x^2 y') dx, y(1) = y(2) = 0, \int_1^2 (x + y) dx = \frac{3}{2}.$$

2.5.

$$J[y] = \int_{-1}^1 (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx, y(-1) = y(1) = 0, \int_{-1}^1 (x - 2y) dx = 0.$$

$$2.6. J[y] = \int_{-1}^1 (y'^2 + yy' + 12xy) dx, y(-1) = y(1) = 0, \int_{-1}^1 (x^2 + y) dx = 2.$$

$$2.7. J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + xy) dx, y(0) = y(1) = 0, \int_0^1 (2x - 3y) dx = 2.$$

$$2.8. J[y] = \int_1^2 (xy' + y'^2) dx, y(1) = 0, y(2) = 2, \int_1^2 (x^2 + 3y) dx = -2.$$

$$2.9. J[y] = \int_0^1 y'^2 dx, y(0) = y(1) = 0, \int_0^1 y dx = 1.$$

$$2.10. J[y_1, y_2] = \int_0^1 (y_1'^2 + y_2'^2 - 4xy_2' - 4y_2) dx, y_1(0) = 0, y_1(1) = 1,$$

$$y_2(0) = 0, y_2(1) = 1, \int_0^1 (y_1'^2 - xy_1' - y_2'^2) dx = 2.$$

Відповіді: 1.1. $y = 2x - 1, z = 3, l = \sqrt{5}$. 2.1. $y = \pm 2 \sin n\pi x, n \in \mathbb{Z}$. 2.2.

$$y = 5x^3 + 3x - 4. 2.4. y = 0. 2.10. y_1 = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{2}x, y_2 = x; y_1 = 3x^2 - 2x,$$

$$y_2 = x.$$

Практичне заняття № 10

Контрольна робота № 2

✎1. Знайти варіацію функціоналу: $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2) dx$.

✎2. Знайти допустимі екстремалі функціоналу:

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + xy) dx, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

✎3. Дослідити на екстремум функціонал:

$$J[y] = \int_0^1 e^x \left(y^2 + \frac{1}{2} y'^2 \right) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$$

✎4. Знайти екстремалі ізопериметричної задачі:

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad \int_0^1 y^2 dx = 2.$$

Рекомендована література

Основна

1. Бак С.М. Диференціальні рівняння і варіаційне числення: Посібник. Вінниця: «Едельвейс і К», 2014. 96 с.
2. Бак С.М. Диференціальні та інтегральні рівняння: Посібник 2-ге вид., випр. і доп. Вінниця: ФОП Рогальська І. О., 2018. 360 с.
3. Головач Г.П., Калайда Г.П. Збірник задач з диференціальних і інтегральних рівнянь. Київ: Техніка, 1997. 285 с.
4. Кривошея С.А., Перестюк М.О., Бурим В.М. Диференціальні та інтегральні рівняння. Київ: Либідь, 2004. 408 с.
5. Моклячук М. П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Київ: ВПЦ «Експрес», 2003. 380 с.

Додаткова

1. Бак С.М., Ковтонюк М.М. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу: Посібник. Вінниця: «Едельвейс і К», 2011. 400 с.
2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. Київ: Наукова думка, 1986. 544 с.
3. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: У 3-х ч.: Підр. Київ: Вища школа, 1992. Ч. 3. 359 с.
4. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах: Навч. посіб. Київ: Либідь, 2003. 504 с.
5. Томусяк А.А., Ковтонюк М.М. Диференціальні рівняння: У 2-х ч.: Навч. посіб. Вінниця: ПП «ТД «Едельвейс і К»», 2009. Ч. 1. 248 с.
6. Томусяк А.А., Ковтонюк М.М. Диференціальні рівняння: У 2-х ч.: Навч. посіб. Вінниця: ТОВ «фірма «Планер»», 2012. Ч. 2. 388 с.

Електронне навчальне видання

Бак Сергій Миколайович

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
З ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ
для студентів спеціальності
111 Математика

21001, м. Вінниця, вул. Острозького, 32