Андрій Кошелєв, Сергій Бак, Галина Ковтонюк

ЛАНЦЮГ ТОДИ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В ОПТИЦІ ТА ФОТОНІЦІ

Анотація. *Стаття присвячена ланцюгу Тоди, який є важливою нелінійною моделлю, яка використовується для вивчення інтегровних систем. Він описує динаміку взаємодії частинок, що рухаються вздовж одновимірного ланцюга та взаємодіють через експоненціальний потенціал. Ланцюг Тоди є класичним прикладом цілком інтегровної системи з точно розв'язуваними рівняннями руху, що робить його корисним для дослідження солітонів та поведінки динамічних систем. Модель знаходить застосування в різних галузях науки, включаючи оптику, фотоніку, фізику плазми, та термодинаміку. Вона допомагає моделювати поведінку солітонів у волоконно-оптичних комунікаціях, нелінійних оптичних матеріалах та інших фізичних системах, а також досліджувати квантові ефекти в оптичних системах.*

Ключові слова: *ланцюг Тоди, солітони, інтегровні системи, нелінійні динамічні системи, оптика, фотоніка, квантова оптика, нелінійні хвилі, волоконно-оптичні комунікації.*

У 1953 році нобелівський лауреат з фізики Енріко Фермі попросив своїх колег по Лос-Аламоській лабораторії Станіслава Улама, Джона Пасту та Мері Цингу допомогти дослідити задачу про термалізацію енергії в нелінійних дискретно навантажених струнах на прикладі коливання 64 важок, пов'язаних одна з одною пружинками. Створюючи початкове коливання, вчені хотіли з'ясувати, як ця початкова мода буде розподілятися по всіх інших модах. Передбачалося, що енергія в кінці кінців рівномірно розподілиться між модами. Практично задача зводилася до дослідження поведінки системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$m\ddot{q}_n(t) = U'\big(q_{n+1}(t) - q_n(t)\big) - U'\big(q_n(t) - q_{n-1}(t)\big),\ n = \overline{1, N}, \tag{1}$$

де $q_n(t)$ – відхилення n-ої важки в момент часу t, m – маса важки, $N = 64$. У 1954 році, після проведення розрахунків цієї задачі на ЕОМ «MANIAC I», очікуваного результату вони не отримали, але виявили, що перекачування енергії в дві або три моди на початковому етапі розрахунку дійсно відбувається, але потім спостерігається повернення до початкового стану ([7]). Як з'ясувалося пізніше, в ланцюжку виникають особливі хвилі, які не дають енергії рівномірно розподілятися по всій її довжині. Пізніше їх назвали солітонами (див. [13]).

Праці Е. Фермі, Дж. Пасти та С. Улама дали поштовх для великої кількості подальших математичних, зокрема, чисельних та аналітичних досліджень (див., наприклад, [2-5; 8; 12]).

До систем типу Фермі-Пасти-Улама належить цілком інтегровна ґратка (або ланцюг) Тоди, названа на честь японського фізика Морікацу Тоди, який у 1971 році вказав на існування в ньому солітонних розв'язків ([9; 10]). На жаль, ґратка Тоди є єдиною відомою повністю інтегровною системою типу Фермі-Пасти-Улама. Переважна більшість існуючих результатів стосуються точних і наближених часткових розв'язків або чисельного моделювання.

Ланцюг Тоди використовується в різних галузях фізики та математики для вивчення інтегровних систем. Це нелінійна модель, яка описує динаміку взаємодії частинок, що рухаються вздовж одновимірного ланцюга, де частинки взаємодіють через експоненційний потенціал [11].

Динаміка цього ланцюга описується нескінченною системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\ddot{q}_n(t) = e^{q_{n-1}(t)-q_n(t)} - e^{q_n(t)-q_{n+1}(t)}, \;\; n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Виявляється, що система (1) має солітонні розв'язки, які представляють собою стабільні хвильові пакети. Вони можуть рухатися вздовж ланцюга без зміни форми та швидкості. Це важливо для розуміння динаміки нелінійних хвиль. Ланцюг Тоди також допускає розв'язки з кількома солітонами, які можуть взаємодіяти між собою. При цьому після взаємодії солітони відновлюють свою початкову форму і швидкість, демонструючи еластичну взаємодію. Це показує, як нелінійні системи можуть зберігати структуру хвиль навіть при взаємодії.

Ґратка Тоди є цілком інтегровною системою, що означає, що вона має нескінченну кількість інтегралів руху, які роблять її поведінку передбачуваною і стабільною. Це дозволяє точно розв'язувати його рівняння руху та вивчати динаміку солітонів ([6]).

Ланцюг Тоди є ключовим прикладом у теорії солітонів, яка вивчає стабільні, самопідтримувані хвильові структури, що зберігають свою форму та швидкість при взаємодії з іншими хвилями та середовищем (рис. 1).

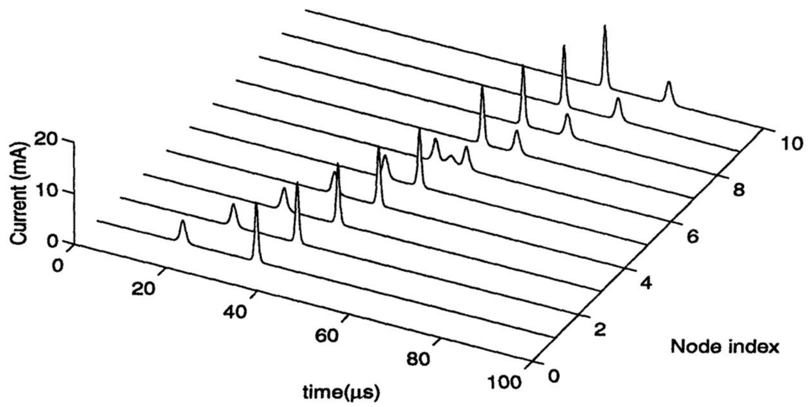

Рис. 1. Моделювання двох солітонів у діодній решітці. Кожна горизонтальна траса показує струм через один з діодів

Для розв'язування рівнянь ланцюга Тоди часто використовується метод обернення спектральної задачі (Inverse Scattering Transform, IST) [11]. Цей метод дозволяє звести нелінійну задачу до лінійної спектральної задачі, яку можна розв'язати аналітично.

Солітони можуть використовуватися для передачі інформації на великі відстані без втрат, оскільки вони зберігають свою форму та енергію. Це знайшло застосування у волоконно-оптичних комунікаціях (рис. 2).

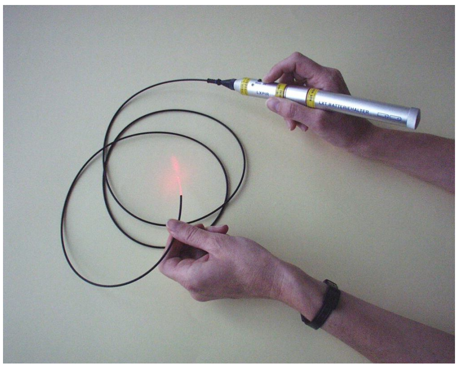

Рис. 2. Пучок світла у оптоволокні

Солітони ланцюга Тоди використовуються для моделювання поширення імпульсів у різних нелінійних середовищах, таких як плазма, нелінійні оптичні матеріали та інші фізичні системи. Дослідження солітонів у ланцюзі Тоди допомагає вивчати інші нелінійні явища, такі як хвилі удару, фрактальні структури та хаотична динаміка.

Використання ланцюга Тоди в оптиці та фотоніці зосереджено на вивченні нелінійних хвильових процесів, розробці нових оптичних пристроїв та передачі інформації за допомогою солітонів.

В оптиці солітони є світловими імпульсами, які зберігають свою форму при поширенні в нелінійному середовищі. Ланцюг Тоди моделює взаємодію таких імпульсів, демонструючи їх стабільність і еластичну взаємодію. Це корисно для розробки оптичних волокон, де солітони можуть передавати сигнали на великі відстані без дисперсійних втрат. Високопотужні лазерні імпульси у волоконно-оптичних лініях можуть створювати нелінійні ефекти, що призводить до формування солітонів [14]. Ланцюг Тоди допомагає моделювати такі процеси, забезпечуючи розуміння того, як контролювати та оптимізувати передачу даних в телекомунікаційних системах.

Ланцюг Тоди може бути використаний для вивчення динаміки хвиль у фотонних кристалах – матеріалах з періодичною структурою, які маніпулюють світлом (рис. 3). Це дозволяє створювати пристрої з унікальними оптичними властивостями, такі як свічення та управління світловими потоками на нанорівні. В фотоніці нелінійні ефекти, такі як самофокусування та чотирихвильова зміна, є критичними для розвитку нових технологій. Ланцюг Тоди дозволяє моделювати ці явища, що допомагає у створенні нових оптичних компонентів та матеріалів, здатних ефективно взаємодіяти зі світлом.

Ланцюг Тоди використовується для моделювання поведінки лазерних імпульсів у нелінійних середовищах. Це важливо для розробки нових типів лазерів та посилення їх продуктивності, таких як фемтосекундні лазери.

Ланцюг Тоди сприяє створенню оптичних перемикачів та логічних елементів, які працюють на основі нелінійних ефектів. Це перспективна область для розвитку оптичних комп'ютерів та інших пристроїв, що працюють зі світлом замість електронів.

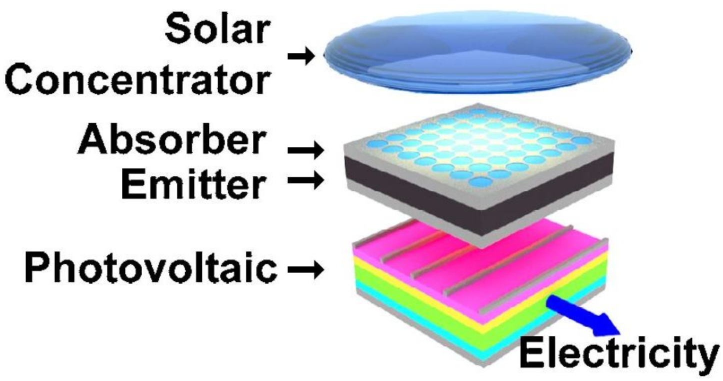

Рис. 3. Схема сонячної панелі де в якості поглинача (absorber) використовуються фотонні кристали

Ланцюг Тоди використовується для моделювання поведінки лазерних імпульсів у нелінійних середовищах. Це важливо для розробки нових типів лазерів та посилення їх продуктивності, таких як фемтосекундні лазери.

Ланцюг Тоди сприяє створенню оптичних перемикачів та логічних елементів, які працюють на основі нелінійних ефектів. Це перспективна область для розвитку оптичних комп'ютерів та інших пристроїв, що працюють зі світлом замість електронів.

Ланцюг Тоди використовується для моделювання хвильових процесів у нанофотонних структурах, таких як метаматеріали та нанорозмірні резонатори. Це дозволяє досліджувати нові феномени та розробляти пристрої з унікальними властивостями.

Інтегровність ланцюга Тоди дозволяє досліджувати квантові ефекти в оптичних системах, включаючи квантові солітони та їх взаємодію. Це важливо для розвитку квантових комунікацій та квантових обчислень.

Таким чином, ланцюг Тоди є потужним інструментом у теорії солітонів, який дозволяє вивчати стабільні хвильові структури та їх взаємодію у різних фізичних системах. Його інтегровність та наявність точних розв'язків роблять його ідеальною моделлю для аналізу та застосування в різних галузях науки і техніки. Завдяки своїй математичній красі та фізичній значущості, ланцюг Тоди є важливим інструментом у багатьох дослідницьких областях.

Список використаних джерел:

1. Ablowitz M. J., Segur H. Solitons and the Inverse Scattering Transform. Cambridge. 1981. P. 91.
2. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50, № 1. P.75-87.
3. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of traveling solitary waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 270, № 3 (February). P. 397-406.
4. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 252, № 4 (January). P. 453-462.
5. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Solitary traveling waves in Ferm-Pasta-Ulam type systems with nonlocal interaction on 2D-lattice. *Український математичний вісник*. 2024. Т. 21, № 1. С. 1-15.
6. D'Souza L. D. Implementation of a Circuit for Communication Using Solitons. Massachusetts institute of technology. 1996.
7. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonliniear problems. Los Alamos Sci. Lab. Rept. LA-1940. 1955. Reprinted in Lect. Appl. Math. 1974. Vol. 15. 156 p.
8. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices. London – Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.
9. Toda M. Theory of Nonlinear Lattices. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1981. 205 p.
10. Toda M. Waves in nonlinear lattice. Suppl. *Theory Phys.* 1970. № 45. P. 174-200.
11. Ueno K., Takasaki K. Toda lattice hierarchy. Group representations and systems of differential equations. 1984.
12. Бак С. М. Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці : дис. ... докт. фіз.-мат. наук : 01.01.02. Вінниця, 2020. 336 с.
13. Бак С. М. Основи теорії солітонів. Навчальний посібник (для студентів спеціальності 111 Математика). Вінниця: ФОП Рогальська І. О., 2021. 100 с.
14. Чадюк В. О. Оптоелектроніка: від макро до нано. Київ: НТУУ «КПІ», 2012. С. 28.

TODA CHAIN AND ITS APPLICATION IN OPTICS AND PHOTONICS

Abstract. *The article is devoted to the Toda chain, which is an important nonlinear model used to study integrated systems. It describes the dynamics of the interaction of particles moving along a one-dimensional chain and interacting through an exponential potential. The Toda chain is a classic example of a fully integrable system with exactly solvable equations of motion, which makes it useful for studying solitons and the behavior of dynamical systems. The model finds application in various fields of science, including optics, photonics, plasma physics, and thermodynamics. It helps to model the behavior of solitons in fiber-optic communications, nonlinear optical materials, and other physical systems, as well as to investigate quantum effects in optical systems.*

Keywords: *Toda chain, solitons, integrable systems, nonlinear dynamic systems, optics, photonics, quantum optics, nonlinear waves, fiber-optic communications.*