

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет математики, фізики і комп'ютерних наук

Кафедра математики та інформатики

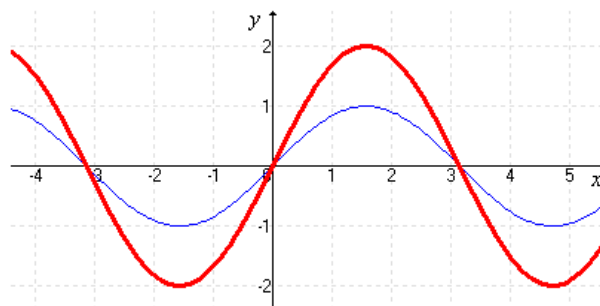
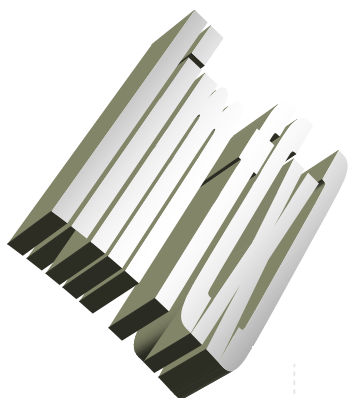
РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА

з математичного аналізу

I семестр

**Вступ до математичного аналізу. Диференціальне
числення функції однієї змінної**

для студентів предметної спеціальності
014.09 Середня освіта (Інформатика)



Вінниця 2023

Затверджено рішенням кафедри математики та інформатики ВДПУ імені Михайла Коцюбинського, протокол №1 від 14 серпня 2023 року.

Автор-укладач: доктор фізико-математичних наук,
професор **Бак С. М.**

Рецензенти: доктор педагогічних наук,
професор **Ковтонюк М. М.**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Тимошенко О. З.**

Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. I семестр. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної (для студентів предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика)) [Електронне видання]. Вінниця, 2023. 72 с.

Індивідуальний робочий зошит студента

Дисципліна: математичний аналіз.

Розділи: Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної.

Передмова

Робочий зошит з математичного аналізу призначений для використання студентами предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика) при вивченні розділів «Вступ до математичного аналізу» і «Диференціальне числення функції однієї змінної».

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних тем, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю.

Робочий зошит складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання.

Після кожного розділу подано зразок контрольної роботи. Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

1. Робочий план студента

Робочий план студента складений на основі навчальної програми з математичного аналізу, затвердженої Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Таблиця 1. Структура навчальної дисципліни

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	денна форма					
	усього	зокрема				
		лк	пз	лз	із	с.р.
1	2	3	4	5	6	7
1-й семестр						
Розділ 1. Вступ до математичного аналізу						
Тема 1. Математичний аналіз як розділ математики	4	2	0	0	0	2
Тема 2. Множина дійсних чисел	6	2	2	0	0	2
Тема 3. Функції та їх класифікація	6	2	2	0	0	2
Тема 4. Збіжні послідовності	8	2	2	0	0	4
Тема 5. Границя функції у точці	10	2	4	0	0	4
Тема 6. Функції, неперервні в точці	10	2	4	0	0	4
Разом за розділом 1	44	12	14	0	0	18
Розділ 2. Диференціальне числення функції однієї змінної						
Тема 1. Похідна та диференціал	7	2	1	0	0	4
Тема 2. Похідні та диференціали вищих порядків	7	2	1	0	0	4
Тема 3. Формула Тейлора та її застосування	7	2	1	0	0	4
Тема 4. Застосування похідної при знаходженні границь функцій у точці	7	2	1	0	0	4
Тема 5. Дослідження функцій на монотонність, екстремум та опуклість	8	2	2	0	0	4
Тема 6. Повне дослідження функції і побудова графіка	10	2	4	0	0	4

функції						
Разом за розділом 2	46	12	10	0	0	24
Усього годин за 1-й семестр	90	24	24	0	0	42

Розподіл балів (за видами діяльності)

№	Вид діяльності	Коефіцієнт вартості (бали)	Кількість робіт	Результат (бали)
1.	Домашні завдання	1	10	10
2.	Конспект	10	1	10
3.	Контрольна робота	20	2	40
4.	Колоквіум/тест	20	1	20
Всього за семестр:				80
Залік				20
Підсумковий рейтинговий бал				100

Шкала оцінювання: сто балова, ECTS, розширена

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за розширеною шкалою
		<i>Для екзамену, заліку, курсової роботи, практики</i>
90-100	A	ВІДМІННО
80-89	B	ДУЖЕ ДОБРЕ
75-79	C	ДОБРЕ
60-74	D	ЗАДОВІЛЬНО
50-59	E	ДОСТАТНЬО
35-49	FX	НЕЗАДОВІЛЬНО З МОЖЛИВІСТЮ ПОВТОРНОГО СКЛАДАННЯ
1-34	F	НЕПРИЙНЯТНО З ОБОВ'ЯЗКОВИМ ПОВТОРНИМ ВИВЧЕННЯМ ДИСЦИПЛІНИ

Тема: Множини. Дійсні числа. Модуль дійсного числа

✎1. Задайте переліком елементів множини:

1.1. B – множину коренів рівняння $x^4 - 4x^2 = 0$;

1.2. $H = \{x : (x-2)(x+2) = 0\}$;

1.3. A – множину натуральних чисел, кратних 3 і менших за 25;

1.4. C – множину коренів рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$;

1.5. $D = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$;

1.6. $E = \{2n+1 : n \in \mathbb{N} \text{ і } n \leq 20\}$;

1.7. $F = \{x : x^2 - 2x + 2 = 0\}$.

Відповідь: 1) $\{-2, 0, 2\}$; 2) $\{-2; 2\}$; 3) $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$;

4) $\{2; 3\}$; 5) $\{1; 2\}$; 6) $\{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$; 7) $\emptyset$.

✎2. Дано: $A = \{x : x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $B = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$. Знайти: $A \cap B$. Відповідь: $\{2\}$.

✎3. Дано: $A = \{x : x^2 - 4x + 3 = 0\}$, $B = \{x : x^2 - 7x + 12 = 0\}$. Знайти: $A \cup B$. Відповідь: $\{1, 3, 4\}$.

✎4. Задайте переліком елементів множини:

4.1. $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x + \frac{1}{x} \leq 2 \text{ і } x > 0\right\}$;

4.2. $B = \left\{x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{4} \leq 2^x < 5\right\}$;

4.3. $C = \left\{x \in \mathbb{R} : \sin x + \cos x = 1 \text{ і } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$;

4.4. $B = \left\{x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{9} \leq 3^x < 10\right\}$;

4.5. $C = \{x \in \mathbb{R} : \sin^2 2x = 1 \text{ і } 0 < x < \pi\}$;

4.6. $C = \left\{x \in \mathbb{R} : \sin x + \cos x = \sqrt{2} \text{ і } 0 < x < \frac{\pi}{2}\right\}$.

Відповідь: 1) $\{1\}$; 2) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$; 3) $\{0; \pi/2\}$; 6) $\{0; \pi/4\}$.

✎5. Знайти об'єднання, переріз та різницю множин A і B :

$$5.1. A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 2\}, B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\};$$

$$5.2. A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x > 0\}, B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 > 0\};$$

$$5.3. A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} < 0\right\}, B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x - 1}{x + 2} \leq 0\right\};$$

$$5.4. A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x + 2} > x\}, B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{\sqrt{x + 2}} < \frac{1}{x}\right\};$$

$$5.5. A = \left\{x \in \mathbb{R} : \sin x > \frac{1}{2}\right\}, B = \left\{x \in \mathbb{R} : \cos x \leq \frac{1}{2}\right\};$$

$$5.6. A = \{x \in \mathbb{R} : 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 \geq 0\}, B = \left\{x \in \mathbb{R} : \log_{\frac{1}{2}}(x - 1,5) > 1\right\}.$$

Відповідь: 1) $A \cup B = (0; 3]$, $A \cap B = [1; 2)$, $A \setminus B = (0; 1)$; 2) $A \cup B = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$, $A \cap B = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$, $A \setminus B = (2; 3)$; 3) $A \cup B = (-\infty; 2) \cup (3; 4)$, $A \cap B = (-2; 1]$, $A \setminus B = (-\infty; -2] \cup (1; 2) \cup (3; 4)$

6. *Знайдіть точну нижню межу множин:*

$$6.1. X = [3; 6),$$

$$6.2. X = \left\{\frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$$

7. *Знайдіть точну верхню межу множин:*

$$7.1. X = \left\{-\frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$7.2. X = \{E(f), \text{ де } f(x) = 6 \cos 3x\}$$

8. *Знайдіть множину верхніх і нижніх меж множини розв'язків нерівності $\log_4 \frac{9 - 2x}{x + 2} < 0$.*

9. *Знайдіть точні верхню і нижню межі множини розв'язків нерівності $\log_8 \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \log_{\frac{1}{8}} \left(1 - \frac{x}{6}\right) \leq 1$.*

10. *Виконайте дії та запишіть у вигляді нескінченного десяткового дробу:*

$$10.1. \frac{1}{3} + \frac{2}{7};$$

$$10.3. \frac{4}{7} + 0,3;$$

$$10.5. -\frac{29}{11};$$

$$10.2. \frac{2}{3} - 0,17;$$

$$10.4. -\frac{5}{6} \cdot (-0,4);$$

$$10.6. \frac{37}{13};$$

$$10.7. \frac{229}{54};$$

$$10.8. \frac{5}{33};$$

$$10.9. \frac{223}{111}.$$

✎11. Обчислити і результати записати у вигляді звичайного дробу:

$$11.1. \frac{0,1(2)+0,3(4)}{0,4(5)-0,2(3)};$$

$$11.2. \frac{0,70(14)}{0,00(62)}.$$

Відповідь: 1) 2; 2) 112.

✎12. Які з даних чисел раціональні, а які – ірраціональні:

$$12.1. \frac{\sqrt{6,3 \cdot 1,7} \cdot \left(\sqrt{\frac{6,3}{1,7}} - \sqrt{\frac{1,7}{6,3}} \right)}{\sqrt{(6,3+1,7)^2 - 4 \cdot 6,3 \cdot 1,7}};$$

$$12.2. \sqrt{9-4\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}};$$

$$12.3. \sqrt{11-4\sqrt{7}} + \sqrt{16-6\sqrt{7}};$$

$$12.4. (\sqrt{3}-\sqrt{2})\left(\sqrt{4-2\sqrt{3}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right);$$

$$12.5. \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}};$$

$$12.6. \frac{\sqrt{17+12\sqrt{2}}-1}{\sqrt{2}+1};$$

$$12.7. (4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}};$$

$$12.8. \sqrt[3]{99-70\sqrt{2}} \cdot \sqrt{17+12\sqrt{2}};$$

$$12.9. \frac{\sqrt{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{19\sqrt{7}-50}}{(\sqrt{7}-2)(1-\sqrt{3})};$$

$$12.10. \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Відповідь: 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 1; 6) 2; 7) 2; 8) 1.

✎13. Нехай α і β – ірраціональні числа, а r – раціональне число. Які з чисел можуть бути раціональними:

$$13.1. \alpha + \beta;$$

$$13.4. \sqrt{r};$$

$$13.7. \sqrt{\alpha + r};$$

$$13.2. \alpha + r;$$

$$13.5. \alpha\beta;$$

$$13.8. \sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}};$$

$$13.3. \sqrt{\alpha};$$

$$13.6. \alpha r;$$

$$13.9. \sqrt{\alpha + \sqrt{r}};$$

$$13.10. \sqrt{r + \sqrt{\alpha}}.$$

Відповідь: 1), 4), 5), 8), 9).

✎14. Довести, що не існує раціонального числа r такого, що:

$$14.1. r^2 = 5;$$

$$14.3. r^2 + 3r + 1 = 0;$$

$$14.2. r^3 = 7;$$

$$14.4. r^3 - 7r + 1 = 0.$$

✎15. Розв'язати рівняння:

$$15.1. |x+1| = 4;$$

$$15.12. \frac{|2-x|}{2x-4} = \frac{1}{2};$$

$$15.2. |x-1| = 2;$$

$$15.13. |x+1| = x-1;$$

$$15.3. |1-x| = 3;$$

$$15.14. |x+1| = 2x+1;$$

$$15.4. |2x-4| = 3;$$

$$15.15. |2x+1| = x;$$

$$15.5. |x+1| = -4;$$

$$15.16. |2-x| = 2x-10;$$

$$15.6. |5-4x| = 4;$$

$$15.17. |2-x| = 2x+10;$$

$$15.7. |-x-2| = 1;$$

$$15.18. |2-2x| = 4x+6;$$

$$15.8. |3x-2| = 11;$$

$$15.19. |x-2| = 2x-4;$$

$$15.9. |-5x-10| = 5;$$

$$15.20. |5-3x| = 2x;$$

$$15.10. |x+2| = -2-x;$$

$$15.21. |4-x^2| = 12;$$

$$15.11. \frac{|x+2|}{x+2} = 1;$$

$$15.22. |3x^2-2| = 7.$$

Відповідь: 1) $\{3; -5\}$; 2) $\{3; -1\}$; 3) $\{4; -2\}$; 4) $\{3,5; 0,5\}$; 5) $\emptyset$;

6) $\{2,25; 0,25\}$; 7) $\{-1; 3\}$; 8) $\left\{-3; 4\frac{1}{3}\right\}$; 9) $\{-1; -3\}$; 10) $(-\infty; -2]$;

11) $(-2; +\infty)$; 12) $(2; +\infty)$; 13) $\emptyset$; 14) 0; 15) $\emptyset$; 16) 8; 17) $-\frac{8}{3}$; 18) $-\frac{2}{3}$;

19) 2; 20) $\{1; 5\}$; 21) ± 4 ; 22) $\pm\sqrt{3}$.

✎16. Розв'язати рівняння:

$$16.1. ||x^2-4|+2| = 1;$$

$$16.7. ||3-x|-4| = 2;$$

$$16.2. ||2-x|+1| = 1;$$

$$16.8. |6-|x|| = 1;$$

$$16.3. ||x|+6| = 7;$$

$$16.9. ||1+2x|+2| = 3;$$

$$16.4. ||x|-6| = 7;$$

$$16.10. ||x^2+1|-1| = -4+4x;$$

$$16.5. ||x-1|-1| = 1;$$

$$16.11. |-4-|-2x-2|| = 1;$$

$$16.6. ||x-2|-1| = 2;$$

$$16.12. |5-|2-3x|| = x-1;$$

$$16.13. |5 + |1 - 2x|| = 10;$$

$$16.14. |3 - 2|x|| = -2 - x;$$

$$16.15. |x - |4 - x|| + 2x = 4;$$

$$16.16. ||3x - 3| - 6| = 1;$$

$$16.17. ||4x| - 2x| = 2;$$

$$16.18. |5 - 2|x|| = x - 1;$$

$$16.19. |-4 - |2x - 2|| = 1;$$

$$16.20. |x^2 - 2|x| + 1| = 1.$$

Відповідь: 1) $\emptyset$; 2) 2; 3) ± 1 ; 4) ± 13 ; 5) $\{\pm 1; 3\}$; 6) $\{-1; 5\}$;

7) $\{-3; 9; 5; 1\}$; 8) $\{\pm 5; \pm 7\}$; 9) $\{0; -1\}$; 10) 2; 11) $\emptyset$; 12) $\{2; 3\}$;

13) $\{-2; 3\}$; 14) $-2, 5$; 15) $(-\infty; 2]$; 16) $\left\{-1\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; 2\frac{2}{3}; 3\frac{1}{3}\right\}$; 17) ± 2 ;

18) $\{2; 4\}$; 19) $\emptyset$; 20) $\{0; \pm 2\}$.

17. Розв'язати рівняння:

$$17.1. |x + 2| + |x| = 2;$$

$$17.2. |x - 1| + |x - 1| = 1;$$

$$17.3. |2x - 1| + |1 - 2x| = 2;$$

$$17.4. |x - 1| + |1 - 2x| = 2;$$

$$17.5. 1 + |x - 1| = |3 - x|;$$

$$17.6. |x - 1| = |3 - x|;$$

$$17.7. |x - 3| + |x + 2| - |x - 4| = 3;$$

$$17.8. |3x - 5| = |5 - 2x|;$$

$$17.9. |x - 1| + |2 - x| + |3 - x| = 2;$$

$$17.10. |3x - 8| + |3x - 2| = 6;$$

$$17.11.$$

$$|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 4x + 6| = 1;$$

$$17.12. |x^2 - 9| + |x - 2| = 5;$$

$$17.13. |x - 13| + |6 - 5x| = 7;$$

$$17.14. |7x - 12| + |7x - 11| = 1;$$

$$17.15. |x^2 - 4x| + |x - 3| - 3 = 0;$$

$$17.16. |7x - 12| + |7x - 11| = 4;$$

$$17.17. |4x - 1| = |3x - 1|;$$

$$17.18. |x| - 2|x + 1| + 3|x + 2| = 0;$$

$$17.19. \frac{|1 - x| + |x| - 3}{\sqrt{2x - 3}} = 0;$$

$$17.20. \frac{|x + 2| + |1 - x| - 3}{\sqrt{x - 1}} = 0;$$

$$17.21. \frac{|x + 3| + |x + 2| - 1}{\sqrt{x + 3}} = 0;$$

$$17.22. |x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 1;$$

$$17.23. |x^2 - 25| + |x^2 - 1| = 24;$$

$$17.24. |x^2 - 4x| + 3 = x^2 + |x - 5|.$$

Відповідь: 1) $[-2; 0]$; 2) $[1; 2]$; 3) $\{0; 1\}$; 4) $\left\{0; \frac{4}{3}\right\}$; 5) $\frac{3}{2}$; 6) 2;

- 7) $\{2; -6\}$; 8) $\{0; 2\}$; 9) 2; 10) $\left[\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right]$; 11) $\emptyset$; Вказівка. Зробити заміну $x^2 - 4x = t$; 12) $\left\{-3; \frac{-1+\sqrt{65}}{2}\right\}$; 13) $\emptyset$; 14) $\left[\frac{11}{7}; \frac{12}{7}\right]$;
 15) $\left\{0; 3; \frac{3+\sqrt{33}}{2}\right\}$; 16) $\{13,5; 9,5\}$; 17) $\left\{0; \frac{2}{7}\right\}$; 18) -2; 19) 2; 20) $\emptyset$;
 21) $(-3; -2]$; 22) $\emptyset$; Вказівка. Позначити $x^2 = t$; 23) $[-5; -1) \cup [1; 5]$;
 24) $\left\{-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; 2\right\}$.

18. Розв'язати рівняння:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 18.1. $\ x + 1 - 2 = 3$; | 18.9. $\ 2x - 1 - 2x + 1 = 2$; |
| 18.2. $\ x - 1 + 1 - 1 = 1$; | 18.10. $\ 5 - 5x - 5x - 1 = 3$; |
| 18.3. $\ x - 1 - 2 = 3$; | 18.11. $\ 4x + 1 - 4x + 2 = 2$; |
| 18.4. $\ 1 - x - 2 = 1$; | 18.12. $\ x + 3 - x - 2 = 2x + 1 $; |
| 18.5. $\ x - 1 - 2 - 1 = 2$; | 18.13. $\ x - 4 - x + 2 = 6$; |
| 18.6. $\ x - 2 - x = 1$; | 18.14. $\ x + 3 - x - 3 = x + 3 + x - 3 $; |
| 18.7. $\ x - 3 - x + 2 = 6$; | 18.15. $\ x - 8 - x + 1 = x - 8 + x + 1 $. |
| 18.8. $\ x - x + 1 = 1$; | |

- Відповідь:** 1) ± 4 ; 2) $\{0; 2\}$; 3) ± 6 ; 4) $\{\pm 4; \pm 2; 0\}$; 5) $\{-4; 6\}$;
 6) $\{0,5; 1,5\}$; 7) -2,5; 8) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$; 9) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$;
 10) $\{0,3; 0,9\}$; 11) $\emptyset$; 12) $[-3; 2]$; 13) $[-2; 4]$; 14) ± 3 ; 15) $\{-1; 8\}$.

19. Розв'язати нерівність:

- | | |
|--------------------------|-----------------------------|
| 19.1. $ x + 1 \geq 2$; | 19.8. $ 5x - 2 > 1$; |
| 19.2. $ x + 1 < 2$; | 19.9. $ -2x - 1 \geq 5$; |
| 19.3. $ x - 3 \leq 4$; | 19.10. $ 3x - 1 \geq 1$; |
| 19.4. $ x - 3 > 4$; | 19.11. $ 2 - 5x \leq 1$; |
| 19.5. $ x + 1 > 4$; | 19.12. $ 2x - 1 < 3$; |
| 19.6. $ x - 3 \leq 2$; | 19.13. $ -4x + 2 \geq 2$; |
| 19.7. $ 3x + 1 < 2$; | 19.14. $ 3x - 5 \geq 10$; |

$$19.15. |2x - 7| \leq 5;$$

$$19.16. |5 - x| > \frac{1}{2}.$$

Відповідь: 1) $(-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$; 2) $(-3; 1)$; 3) $[-1; 7]$;

4) $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$; 5) $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$; 6) $[1; 5]$; 7) $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$;

8) $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$; 9) $(-\infty; -2] \cup (3; +\infty)$; 10) $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$;

11) $\left[\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right]$; 12) $(-1; 2)$; 13) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$; 14) $(-\infty; -5/3] \cup [5; +\infty)$;

15) $[1; 6]$; 16) $\left(-\infty; \frac{9}{2}\right) \cup \left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$.

20. Розв'язати нерівність:

$$20.1. \|x + 2| - 2| \leq 1;$$

$$20.11. \|x - 1| - 3| > x + 2;$$

$$20.2. \|3 - x| - 4| > 2;$$

$$20.12. \|2x + 1| - 1| < x;$$

$$20.3. \|2 - x| - 1| > 1;$$

$$20.13. \|2x + 1| - 1| \geq x;$$

$$20.4. \|5 + x| - 3| < 4;$$

$$20.14. \|2x - 2| - 3| < 4 + x;$$

$$20.5. \|2x + 1| - 1| \geq 1;$$

$$20.15. \|2x - 2| - 3| \geq -4;$$

$$20.6. \|3x - 1| - 4| > 2;$$

$$20.16. \|2x - 4| - 1| \geq 2x;$$

$$20.7. \|4 - x| - 1| \leq 2;$$

$$20.17. \|x + 3| - 2| > 2x + 1;$$

$$20.8. \|4 - 2x| - 2| \geq 1;$$

$$20.18. \|x - 3| - 2| < 2x + 1;$$

$$20.9. \|x| - 1| \leq x + 1;$$

$$20.19. |x^2 - 3| \geq 3x + 1;$$

$$20.10. \|3x - 3| < x + 3;$$

$$20.20. \|x^2 - x + 1| - 1| > x - 1.$$

Відповідь: 1) $[-5; -3) \cup [-1; 1]$; 2) $(-\infty; -3) \cup (1; 5) \cup (9; +\infty)$;

3) $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$; 4) $(-12; 2)$; 5) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

6) $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right] \cup \left(-\frac{1}{3}; 1\right) \cup (3, 5; +\infty)$; 7) $[1; 7]$;

8) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}; +\infty\right)$; 9) $[-1; +\infty)$; 10) $(-3; 0) \cup (3; +\infty)$;

$$11) (-\infty; -2); 12) \emptyset; 13) x \in \mathbb{R}; 14) (-2; 9); 15) x \in \mathbb{R}; 16) \left(-\infty; \frac{3}{4}\right];$$

$$17) (-\infty; 0); 18) (0; +\infty); 19) \left(-\infty; \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right] \cup [4; +\infty); 20) (2; 5);$$

$$21) x \in \mathbb{R}.$$

21. Розв'язати нерівність:

$$21.1. |x| + |1-x| \geq 0;$$

$$21.2. |x| + |x-1| \geq 0,5;$$

$$21.3. |-x| + |1-x| \leq 1;$$

$$21.4. |x| + |x-1| \leq 2;$$

$$21.5. |x| + |x-1| \geq 1;$$

$$21.6. |x| + |x-1| > 1;$$

$$21.7. |x^2| \leq |x|;$$

$$21.8. |x+1| + |x-2| \leq 3;$$

$$21.9. |x-1| + |x-3| > 5;$$

$$21.10. |x-2| + |3-x| \leq 4;$$

$$21.11. |2x-1| + |2x-2| \geq 1;$$

$$21.12. |2x+5| + |-2x-3| \leq 1;$$

$$21.13. |2x-1| + |2x+1| > 2;$$

$$21.14. 2|x| \leq 4 + |x+1|;$$

$$21.15. |x-2| \geq |x^2-4|;$$

$$21.16.$$

$$|x^2-x-2| \geq |x^2-3x-4|;$$

$$21.17. |x^2+1| \leq |x-2|;$$

$$21.18. |x^2-1| \leq x+2;$$

$$21.19. |x^2-4| \leq x-2;$$

$$21.20. |x^2-1| \geq x-1;$$

$$21.21. |x^2-4| > |x+2|;$$

$$21.22. |x^2-9| > x+3;$$

$$21.23. |x^2-9| + |x-2| \geq 5;$$

$$21.24. |x-3| + |x-1| \geq |2x-4|;$$

$$21.25. |x-2| + |3-x| \geq 1.$$

Відповідь: 1) $x \in \mathbb{R}$; 2) $x \in \mathbb{R}$; 3) $[0; 1]$; 4) $[-0,5; 1,5]$; 5) $x \in \mathbb{R}$;

6) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; 7) $[-1; 1]$; 8) $[-1; 2]$; 9) $(-\infty; -0,5) \cup (4,5; +\infty)$;

10) $[1; 4]$; 11) $x \in \mathbb{R}$; 12) $\emptyset$; 13) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 14) $[-3; 5]$;

15) $\{2\} \cup [-3; -1]$; 16) $\{1\} \cup [3; +\infty)$; 17) $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$;

- 18) $\left[\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$; 19) 2; 20) $x \in \mathbb{R}$; 21) $(-\infty; -2) \cup (-2; 1] \cup$
 $\cup [3; +\infty)$; 22) $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$; 23) $(-\infty; 2] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{65}}{2}; +\infty\right)$;
 24) $x \in \mathbb{R}$; 25) $x \in \mathbb{R}$.

📖 Практичне заняття №2

Тема: Функції дійсної змінної

✍ 1. Знайти область визначення функції $f(x)$, якщо:

1.1. $f(x) = \frac{x}{x+1}$;

1.2. $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-6x+8}$;

1.3. $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x^3-4x}$;

1.4. $f(x) = \frac{1}{x+|x|}$;

1.5. $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$;

1.6. $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{1-3x+2x^2}}$;

1.7.

$f(x) = \log_2(4-x) - \log_2(x+7)$;

1.8. $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}} \frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}}$;

1.9. $f(x) = \arcsin x + \sqrt{\frac{2}{4x-1}}$;

1.10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-2|x-1|}}$;

1.11.

5) $[-2; 1]$; 6) $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup [3; +\infty)$; 7)

$f(x) = \arccos \frac{2x}{1+x^2} + \sqrt{x^2(x-1)^2}$ ($x \neq 0$); 8) $(-1; 1) \cup (1; 4]$; 9)

$\left(\frac{1}{4}; 1\right]$; 10) $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$; 11) $[3; +\infty)$.

Відповідь: 1) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; 2)

$\mathbb{R} \setminus \{2; 4\}$; 3) $\mathbb{R} \setminus \{0; \pm 2\}$; 4)

$(0; +\infty)$;

✍

✍ 2. Знайти множину значень функції $f(x)$, якщо:

2.1. $f(x) = 2x-5$, $x \in [-2; 2]$;

2.3. $f(x) = \sqrt{2+x-x^2}$;

2.2. $f(x) = |x-1|$, $x \in [0; 5]$;

2.4. $f(x) = \log_3(1-2\cos x)$;

$$2.5. f(x) = \sin x + |\sin x|;$$

$$2.6. f(x) = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$2.7. f(x) = 2^{|\cos x|};$$

$$2.8. f(x) = \frac{2}{3 - \sin x};$$

$$2.9. f(x) = x^2 - x^4, x \in [-1; 4];$$

$$2.10. f(x) = ax + \frac{b}{x}, ab > 0.$$

Відповідь: 1) $[-9; -2]$; 2) $[0; 4]$; 3) $\left[0; \frac{3}{2}\right]$; 4) $(-\infty; 1]$; 6) $[-1; 1]$;

7) $[1; 2]$; 8) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$; 9) $\left[-240; \frac{1}{4}\right]$; 10) $(-\infty; -2\sqrt{ab}] \cup [2\sqrt{ab}; +\infty)$.

3. Знайти композиції $f \circ g$ і $g \circ f$, та вказати їх області визначення для заданих функцій:

$$3.1. f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}.$$

$$3.2. f(x) = g(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

$$3.3. f(x) = 10^x, g(x) = \lg x.$$

$$3.4. f(x) = x^5, g(x) = x + 5.$$

$$3.5. f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; +\infty), \\ 0, & x \in (-\infty; 0), \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; +\infty), \\ x^2, & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

$$3.6. f(x) = \ln x^2, g(x) = \sin x.$$

4. Перевірити на парність і непарність функції:

$$4.1. y = \sin(\cos x);$$

$$4.2. y = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}};$$

$$4.3. y = \ln \frac{1-x}{1+x};$$

$$4.4. y = \log_2(x + \sqrt{1+x^2});$$

$$4.5. y = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2};$$

$$4.6. y = \log_2 \frac{1+\sin x}{1-\sin x};$$

$$4.7. y = |x-1| + |x+1| - 2|x|;$$

$$4.8. y = \arccos(\cos x);$$

$$4.9. y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$4.10. y = \frac{|\sin x|}{1 - \cos x}.$$

5. Дослідити на обмеженість функції:

$$5.1. y = x^2 + 3x + 5, x \in [1; 3];$$

$$5.2. y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1; 1);$$

$$5.3. y = \frac{|x+1|}{x^2+1};$$

$$5.4. y = x^4 - 2x^2 + 3;$$

$$5.5. y = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4);$$

$$5.6. y = |x| - |x+1|;$$

$$5.7. y = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{x^2-1};$$

$$5.8. y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x};$$

$$5.9. y = x - [x];$$

$$5.10. y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1};$$

$$5.11. y = 0,3^{x^2-1};$$

$$5.12. y = \frac{1}{\lg(2+x^4)};$$

$$5.13. y = 2^{-\sqrt{x}};$$

$$5.14. y = \sin^3 3x - 4\sin 17x.$$

Відповідь: 1) обмежена; 2) обмежена знизу, необмежена зверху; 3) обмежена; 4) обмежена знизу, необмежена зверху; 5) обмежена знизу, необмежена зверху; 6) обмежена; 7) обмежена; 8) обмежена; 9) обмежена; 10) обмежена; 13) обмежена; 14) обмежена.

6. Знайти проміжки монотонності функцій:

$$6.1. y = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}};$$

$$6.2. y = 3^{|x|};$$

$$6.3. y = 2x^2 + x + 4;$$

$$6.4. y = x + \frac{1}{x};$$

$$6.5. y = |2x-1|;$$

$$6.6. y = \frac{x-3}{2x+1};$$

$$6.7. y = \sqrt{x+2} - 1;$$

$$6.8. y = \sin x - 3\cos x;$$

$$6.9. y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x;$$

$$6.10. y = \log_2 ||x| - 1|.$$

Відповідь: 1) зростає на $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$; 2) зростає на $[0; +\infty)$; спадає на $(-\infty; 0)$; 4) зростає на $(-\infty; -1]$ і $[1; +\infty)$; спадає на $[-1; 0)$ і $(0; 1]$; 5) спадає на $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$; зростає на $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 6) зростає на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ і на $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 7) зростає на $[-2; +\infty)$; 8) зростає на $\left[\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$; 9) функція стала на $\left(\frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{2}(k+1)\right), k \in \mathbb{Z}$; 10) спадає на $(-\infty; -1)$ і $(0; 1)$; зростає на $(-1; 0)$ і $(1; +\infty)$.

7. Довести, що якщо функція $f(x) = \sin x + \cos bx$ періодична, то число b є раціональним числом.

Доведення. 1) $D(f) = \mathbb{R}$;

2) Нехай $T \neq 0$ – період функції $f(x)$. Тоді для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ правильна рівність

$$\sin(x+T) + \cos b(x+T) = \sin x + \cos bx.$$

Покладемо тут $x = 0$ та $x = -T$, отримаємо дві рівності:

$$\sin T + \cos bT = 1,$$

$$-\sin T + \cos bT = 1.$$

Додавши та віднявши їх, матимемо

$$\begin{cases} 2\cos bT = 2, \\ 2\sin T = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bT = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ T = \pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Leftrightarrow b = \frac{2m}{k} \in \mathbb{Q}.$$

Отже, b – раціональне число. ■

8. Довести, що якщо функція $f(x)$ періодична з періодом $T \neq 0$, то функція $f(ax+b)$, $a > 0$ є періодичною з періодом $\frac{T}{a}$.

Доведення. 1) Покажемо, що число $T_1 = \frac{T}{a}$ є періодом функції

$$f(ax+b): \quad f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right) = f((ax+b)+T) = f(ax+b).$$

2) Покажемо, що $\frac{T}{a}$ – найменший додатний період. Припустимо, що існує додатне число T_1 , яке є також періодом функції $f(ax+b)$:

$$f(a(x+T_1)+b) = f(ax+b).$$

Візьмемо довільну точку $x_1 \in D(f)$ і покладемо $x_1 = \frac{x-b}{a}$ ($x = ax_1 + b$). Обчислимо значення функції в точці x :

$$\begin{aligned} f(ax_1+b) &= f\left(a \cdot \frac{x-b}{a} + b\right) = f(a(x_1+T_1)+b) = \\ &= f((ax_1+b) + aT_1) = f(x + aT_1). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що період $T \leq aT_1 \Rightarrow \frac{T}{a} \leq T_1$.

Отже, $\frac{T}{a}$ – найменший додатний період функції $f(ax + b)$. ■

Знайти найменший період функції:

8.1. $y = \sin 2x$;

8.2. $y = \operatorname{tg} 3x$;

8.3. $y = 3\cos \frac{x}{2}$;

8.4. $y = 5\sin \pi x$;

8.5. $y = \operatorname{ctg} \frac{3x}{2}$;

8.6. $y = \sin \frac{\pi x}{4}$;

8.7. $y = \operatorname{ctg} 4x$;

8.8. $y = \cos \frac{x}{3}$;

8.9. $y = 10\operatorname{tg} 15x$.

Відповідь: 1) π ; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) 4π ; 4) 2; 5) $\frac{2\pi}{3}$; 6) 8; 7) $\frac{\pi}{4}$; 8) 6π ; 9) $\frac{\pi}{15}$.

9. Переконатись, що кожна з заданих функцій періодична і знайти її період:

9.1. $y = \sin \frac{x}{2} + \operatorname{tg} x$;

9.2. $y = \sin \frac{2x+1}{2}$;

9.3. $y = \sqrt{\sin 3x}$;

9.4. $y = 1 + \sqrt{\log_2 \cos x}$;

9.5. $y = 2^{\sin x}$;

9.6. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$;

9.7. $y = \arcsin(\sin x)$;

9.8. $y = \sqrt{|\sin x|}$.

Знаходження періоду функції.

1. Функції $y = \cos ax + \cos bx$, $y = \sin ax + \cos bx$, $y = \frac{\cos ax}{\sin bx}$,
 $y = \operatorname{tg} ax + \operatorname{ctg} bx$ періодичні, якщо число $\frac{a}{b}$ є раціональним числом, і

неперіодичні, якщо $\frac{a}{b}$ – ірраціональне число.

2. Період функції

$$y = c_1 \sin n_1 x + \dots + c_k \sin n_k x + d_1 \cos m_1 x + \dots + d_l \cos m_l x,$$

де сума ніяких двох або більше членів ряду тотожно не дорівнює нулю, $c_i, d_j \in \mathbb{R}$, $n_i, m_j \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, l}$, знаходимо за формулою:

$$T = \frac{2\pi}{\operatorname{HCD}(n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_l)}. \quad (1)$$

3. Аналогічно, період функції

$$y = c_1 \operatorname{tg} n_1 x + \dots + c_k \operatorname{tg} n_k x + d_1 \operatorname{ctg} m_1 x + \dots + d_l \operatorname{ctg} m_l x,$$

Знаходимо за формулою

$$T = \frac{\pi}{HCD(n_1, \dots, n_k, m_1, \dots, m_l)}. \quad (2)$$

4. Якщо $n_i = \frac{s_i}{r_i}$, $m_j = \frac{p_j}{q_j}$, де s_i, r_i, p_j, q_j – натуральні числа, то період функції $y = c_1 \sin n_1 x + \dots + c_k \sin n_k x + d_1 \cos m_1 x + \dots + d_l \cos m_l x$, становить

$$T = 2\pi \frac{HCK(r_1, \dots, r_k, q_1, \dots, q_l)}{HCD(s_1, \dots, s_k, p_1, \dots, p_l)}. \quad (3)$$

5. А період функції $y = c_1 \operatorname{tg} n_1 x + \dots + c_k \operatorname{tg}_k x + d_1 \operatorname{ctg}_1 x + \dots + d_l \operatorname{ctg} m_l x$, знаходимо за формулою

$$T = \pi \frac{HCK(r_1, \dots, r_k, q_1, \dots, q_l)}{HCD(s_1, \dots, s_k, p_1, \dots, p_l)}. \quad (4)$$

✎ 10. Знайти період функції $y = \sin \frac{2}{3}x + \cos \frac{4}{9}x + \cos \frac{8}{27}x$.

Розв'язання. Для вищезгаданої формули (3) маємо: $n_1 = \frac{2}{3}$,

$m_1 = \frac{4}{9}$, $m_2 = \frac{8}{27}$, тоді $s_1 = 2$, $r_1 = 3$, $p_1 = 4$, $p_2 = 8$, $q_1 = 9$, $q_2 = 27$.

Отже, $T = \frac{HCK(3, 9, 27)}{HCD(2, 4, 8)} \cdot 2\pi = \frac{27}{2} \cdot 2\pi = 27\pi$.

Відповідь: 27π .

✎ 11. Знайти період функції $y = \sin 2x + 3\sin(3x - 2) - 0,5\cos\left(\frac{4}{5}x + 1\right)$.

Розв'язання. Використовуючи раніше згадувану формулу $T = \frac{2\pi}{\omega}$, маємо:

функція $\sin 2x$ має період $\frac{2\pi}{2} = \pi$;

$\sin(3x - 2)$ має період $\frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$;

$-0,5\cos\left(\frac{4}{5}x + 1\right)$ має період $\frac{2\pi}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{2}\pi$.

Основним періодом даної функції $y \in \text{НСК}$ періодів $\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{2}\pi$. Для знаходження НСК зведемо коефіцієнти $1, \frac{2}{3}, \frac{5}{2}$ при π до спільного знаменника: $\frac{6}{6}\pi, \frac{4}{6}\pi, \frac{15}{6}\pi$, або $6 \cdot \frac{\pi}{6}, 4 \cdot \frac{\pi}{6}, 15 \cdot \frac{\pi}{6}$.

$$\text{НСК}(6, 4, 15) = 60.$$

Отже, основний період даної функції y рівний: $T_0 = 60 \cdot \frac{\pi}{6} = 10\pi$.

Відповідь: 10π .

12. Знайти найменший період функції:

$$12.1. y = 3\sin 4x + 6\sin x + \sin(x - \pi) + 5\sin(x + \pi);$$

$$12.2. y = \sin 2x + \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

$$12.11. y = \cos \frac{x}{3} + \sin \frac{2}{5}x;$$

$$12.3. y = \cos \frac{x}{3} + \operatorname{tg} \frac{x}{5};$$

$$12.12. y = \sin x - |\sin x|;$$

$$12.4. y = \sin \frac{3x}{4} + 5\cos \frac{2x}{3};$$

$$12.13. y = \sin^4 x;$$

$$12.5. y = \sin x + \cos x;$$

$$12.14.$$

$$y = \sin 3x - \sin x \cos x + \cos 4x;$$

$$12.6. y = 2\operatorname{ctg} 3x - 4\operatorname{tg} 2x;$$

$$12.15. y = \cos 5x \cos 3x;$$

$$12.7. y = \sin 2x - \cos 5x;$$

$$12.16. y = \operatorname{tg} \frac{3x}{4} + \operatorname{ctg} \frac{2x}{3};$$

$$12.8. y = \cos^2 x;$$

$$12.17.$$

$$12.9. y = |\sin x|;$$

$$y = \cos \frac{\pi x}{3} + \cos \frac{\pi x}{4} + \cos \frac{\pi x}{5}.$$

$$12.10. y = \sin \frac{x}{2} + \cos 2x;$$

Відповідь: 1) $\frac{\pi}{2}$. 2) 2π . 3) 30π . 4) 24π . 5) $\frac{\pi}{2}$. 6) π ; 7) π ; 8) π ; 9) π ;

10) 4π ; 11) 30π ; 12) 2π ; 13) π ; 14) 2π ; 15) π ; 16) 12π ; 17) 120 .

13. На області визначення функції знайти функцію, обернену до заданої:

$$13.1. y = \frac{x-1}{x+2};$$

$$13.2. y = 4^{x+1} - 1;$$

$$13.3. y = \log_2(x-1);$$

Відповідь: 1) $y = \frac{2x+1}{1-x}$; 2) $y = \log_4(x+1) - 1$; 3) $y = 2^x + 1$;

14. Використовуючи правила побудови графіків функцій $y = f(-x)$, $y = f(x+a)$, $y = f(x)+b$, побудуйте графіки функцій:

$$14.1 \ y = \frac{1}{x+2};$$

$$14.5 \ y = \sqrt{5-x} + 3;$$

$$14.2 \ y = \sqrt{3-x};$$

$$14.6 \ y = -\frac{x+2}{x+5};$$

$$14.3 \ y = \log_{\frac{1}{2}}(x-4);$$

$$14.7 \ y = 1 - \arcsin(-x);$$

$$14.4 \ y = x^2 + 4x + 6;$$

$$14.8 \ y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2.$$

15. Використовуючи правила побудови графіків функцій $y = f(kx)$, $y = kf(x)$, побудуйте графіки функцій:

$$15.1 \ y = \sqrt[5]{4x};$$

$$15.5 \ y = \sqrt[3]{4+3x};$$

$$15.2 \ y = \cos 2x;$$

$$15.6 \ y = 2 - \frac{1}{\pi} \arccos x;$$

$$15.3 \ y = 3 \log_3 x;$$

$$15.7 \ y = -\frac{1}{3} 5^x;$$

$$15.4 \ y = \cos \frac{x}{3};$$

$$15.8 \ y = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

16. Використовуючи правила побудови графіків функцій $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$, побудуйте графіки функцій:

$$16.1 \ y = \log_4 |x|;$$

$$16.5 \ y = \frac{1}{1-3|x|};$$

$$16.2 \ y = \sin\left|x - \frac{\pi}{4}\right|;$$

$$16.6 \ y = \frac{|x|-2}{|x|+3};$$

$$16.3 \ y = \left|\frac{4-x}{5-2x}\right|;$$

$$16.7 \ y = x^2 - 4|x| + 7$$

$$16.4 \ y = |\operatorname{tg} 2x + 1|;$$

$$16.8 \ y = |x^2 - 6|x| + 8|.$$

Практичне заняття №3

Тема: Числові послідовності. Границя числової послідовності

1. Знайти перші шість членів послідовності (x_n) , заданої формулою загального члена:

1.1. $x_n = 3$;

1.2. $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$;

1.3. $x_n = (-1)^n + (-1)^{n+1}$;

1.4. $x_n = \sin \frac{n\pi}{2}$;

1.5. $x_n = n \sin \frac{n\pi}{2} + n^2 \cos \frac{n\pi}{2}$;

1.6. $x_n = n^{(-1)^n}$;

1.7. $x_n = \frac{n!}{n^n + 1}$;

1.8. $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$;

1.9. $x_n = \left[\sqrt{n^2 + n} \right]$;

1.10. $x_n = \sum_{k=1}^n k$.

2. Знайти перші n членів послідовності, заданої рекурентно:

2.1. $x_1 = 1, x_{n+1} = 2x_n$;

2.2. $x_1 = 1, x_{n+1} = 3x_n - 2$;

2.3. $x_1 = 3, x_{n+1} = x_n - n$;

2.4. $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{x_n}{n}$;

2.5.

$x_1 = x_2 = 1, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$;

2.6.

$x_1 = -1, x_2 = 0, x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$;

2.7.

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = x_{n+1} \cdot x_n$;

2.8. $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{x_{n+1}}{x_n}$;

2.9.

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$;

2.10.

$x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)$.

3. Дослідити на монотонність послідовності:

3.1. $x_n = \frac{n+2}{0,5n-5}$;

3.4. $x_n = \frac{n^3}{2^n}$;

3.2. $x_n = \frac{3n+4}{n+2}$;

3.5. $x_n = \frac{n^3}{n^2 - 2n + 3}$;

3.3. $x_n = \frac{6^{n+1}}{n!}$;

3.6. $x_n = \frac{n^2}{n^3 + 32}$;

$$3.7. x_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n};$$

$$3.8. x_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n.$$

Відповідь: 1) спадає для $n \geq 11$; 2) зростає; 3) спадає для $n > 5$; 4) спадає.

4. Довести, що послідовність (x_n) обмежена:

$$4.1. x_n = \frac{2-n}{\sqrt{n^2+3}};$$

$$4.3. x_n = \frac{n^2+3}{n^2+4n+5};$$

$$4.2. x_n = \frac{3n+(-1)^n}{9n-1};$$

$$4.4. x_n = \frac{3^n}{4^n+1};$$

$$4.5. x_n = \underbrace{\sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{4}}}}_{n \text{ коренів}}$$

(Вказівка. Використайте метод

математичної індукції);

$$4.6. x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 2}{2};$$

$$4.7. x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + \frac{1}{x_n}.$$

5. Послідовність (x_n) задана формулою загального члена. Для заданого числа ε вказати такий номер n_0 , що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon}$$

$$5.1. x_n = \frac{n+1}{n}, a = 1, \varepsilon = \frac{1}{2}; 0,1; 0,001;$$

$$5.2. x_n = \frac{2n}{n^3+1}, a = 0, \varepsilon = \frac{1}{2}; 0,1; 0,01;$$

$$5.3. x_n = 3 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}, a = 3, \varepsilon = 0,05; 0,08; 0,004;$$

$$5.4. x_n = \frac{2n^2 - n + 2}{n^2 + 3n - 1}, a = 2, \varepsilon = \frac{1}{2}; 0,1; 0,001.$$

$$5.5. x_n = (-1)^n \frac{1}{7^n}, a = 0;$$

$$5.6. x_n = \frac{n+1}{n+2}, a = 1;$$

$$5.7. x_n = 2^n, a = +\infty;$$

$$5.8. x_n = -n^2, a = -\infty;$$

$$5.9. x_n = \frac{3n-2}{2n-4}, a = \frac{3}{2};$$

$$5.10. x_n = \frac{4n-1}{2n+1}, a = 2;$$

6. Довести за означенням, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$:

$$6.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n} = 3;$$

$$6.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0;$$

$$6.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - 1}{2n^2 + 3n + 4} = \frac{1}{2};$$

$$6.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 2}{n^2 + n + 1} = 3;$$

$$6.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{(n + 1) \cdot 2^n} = 0;$$

$$6.6. \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{3^n}{5n + 3^n} = 1.$$

7. Знайти границю:

$$7.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 + 7n + 1}{n^2 + 1};$$

$$7.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3}{3n - 4};$$

$$7.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 1}{n^2 + n};$$

$$7.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 4}{2n^2 + n + 3};$$

$$7.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)};$$

$$7.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^2;$$

$$7.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{2n+3} - \frac{2+3n^2}{2n^2-7} \right);$$

$$7.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2};$$

$$7.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4}{n + 5n^2 + 8}.$$

$$7.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^{n-1}};$$

$$7.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n^2+1)^2 - (n^2-1)^2};$$

$$7.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1}.$$

$$7.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3-1}{5n^3-1} - \frac{2-n}{5n+3} \right);$$

$$7.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^2 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}.$$

Відповідь: 1) -2 ; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0 ; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 1 ; 6) $\frac{4}{9}$; 7) 1 ; 8) ∞ ; 9) ∞ ;

10) 4950 .

8. Знайти границю:

$$8.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+3}};$$

$$8.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - n} - \sqrt{2n} \right);$$

$$8.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3n^2 + 2n - 1} - \sqrt{3n^2 - 4n + 8} \right);$$

$$8.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{2 + n^2}};$$

$$8.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}} - \sqrt{n} \right);$$

$$8.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[4]{n^4 + n^2} - n \right);$$

$$8.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[p]{n^p + (p-1)n^{p-1}} - n \right);$$

$$8.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt[3]{n^3 + n^2} \right);$$

$$8.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \sqrt[3]{5n^2} + \sqrt[4]{9n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n}) \sqrt{7 - n + n^2}};$$

$$8.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt[3]{3n^3 + 3} + \sqrt[4]{n^5 + 1}}.$$

Відповідь: 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) ∞ ; 4) $\sqrt{3}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 0; 7) $\frac{p-1}{p}$; 8) $\frac{1}{6}$; 9) $\sqrt{3}$;

10) 0.

9. Знайти границю:

$$9.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!};$$

$$9.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!};$$

$$9.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!};$$

$$9.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{((n+1)! + n!) \cdot n};$$

$$9.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{(n+2)! + (n+3)!};$$

$$9.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \cdot n!}{(n+1)!}.$$

Відповідь: 1) 0; 2) 1; 3) 0; 4) 1; 5) 0; 6) 1.

10. Знайти границю:

$$10.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{2^n + 5};$$

$$10.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{n^2 + 2 \cdot 3^n};$$

$$10.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-4}{7n+5} - \frac{5^n+1}{4-3 \cdot 5^n} \right);$$

$$10.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + (-1)^n)^n}{3^n \ln(n+2)};$$

$$10.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg(n^2 + n - 1)}{\lg(n^{10} + n^5 + 1)};$$

$$10.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 5^n + \lg(n+1)}{n^2 - 5^n + \lg(n+1)};$$

$$10.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n + \log_3 n}{\log_3 n + \log_4 n};$$

$$10.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n^{1000} + 1)}{n+2}.$$

Відповідь: 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{16}{21}$; 4) 0; 5) $\frac{1}{5}$; 6) -1; 7) $\frac{\log_2 e + \log_3 e}{\log_3 e + \log_4 e}$; 8) 0.

11. Знайти границю:

$$11.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(n+2)}{n+2};$$

$$11.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sin \frac{\pi(n+1)}{n+2};$$

$$11.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln 2 + \sqrt{n}}{\sqrt{2n+3}} + \frac{\cos n}{n^2} \right);$$

$$11.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{n} \cos n \right);$$

$$11.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1};$$

$$11.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sin n}{2n + \sin n}.$$

Відповідь: 1) 0; 2) 0; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) 0; 5) 0; 6) $\frac{1}{2}$.

12. Знайти границю:

$$12.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{n^2};$$

$$12.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right);$$

$$12.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{2} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \dots + \frac{n}{n^3} \right)};$$

$$12.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{1+3+\dots+(2n-1)}}{2n^2+n-1};$$

$$21.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+3+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right);$$

$$12.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}};$$

$$12.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \right);$$

$$12.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+4+\dots+2^{n-1}}{2^{n+1}};$$

$$12.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) \right);$$

$$12.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}.$$

Відповідь: 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $-\frac{3}{2}$; 6) -1 ; 7) $\frac{2}{3}$; 8) $\frac{1}{2}$; 9) $\frac{3}{2}$;

10) $\frac{4}{3}$.

13. Знайти границю:

13.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right);$

13.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right);$

13.3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 18} + \dots + \frac{1}{(7n-3)(7n+4)} \right);$

13.4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 16} + \dots + \frac{1}{(7n-5)(7n+2)} \right).$

Відповідь: 1) 1; 2) $\frac{1}{28}$; 3) $\frac{1}{28}$; 4) $\frac{1}{14}$.

14. Дослідити на збіжність числову послідовність, якщо:

14.1. $x_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3};$

14.2. $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n;$

14.3. $x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n};$

14.4. $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!};$

14.5. $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n};$

14.6. $x_n = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \dots + \frac{n}{4^{n-1}};$

14.7. $x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{4n};$

14.8. $x_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$

14.9. $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}};$

$$14.10. x_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}.$$

15. Знайти границю:

$$15.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n-9};$$

$$15.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{3n};$$

$$15.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n};$$

$$15.5. \lim_{n \rightarrow \infty} 8n(\ln(n+3) - \ln(n+1));$$

$$15.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1+n}{n^2+2}\right)^{2n};$$

$$15.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+5}{2n-3}\right)^{3n-4}.$$

Відповідь: 1) e^2 ; 2) e^{-5} ; 3) e^2 ; 4) e^{-12} ; 5) 16; 6) e^{12} .

16. Знайти границю послідовності (x_n) , заданої рекурентно:

$$16.1. x_1 = 5, x_{n+1} = \sqrt{5 + x_n}, n \in \mathbb{N};$$

$$16.2. x_1 = 0, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}, n \in \mathbb{N};$$

$$16.3. x_1 = 13, x_{n+1} = \sqrt{12 + x_n}, n \in \mathbb{N};$$

$$16.4. x_1 = \sqrt{a}, x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}, a > 0;$$

$$16.5. x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{x_n}{3}, n \in \mathbb{N};$$

$$16.6. x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, n \in \mathbb{N};$$

$$16.7. x_1 = \frac{a}{2}, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + a}{2}, n \in \mathbb{N}, a \in [0; 1];$$

$$16.8. x_1 = 1, x_{n+1} = x_n^2 + a, n \in \mathbb{N}, a \in \left[0; \frac{1}{4}\right];$$

$$16.9. x_1 = 1, x_{n+1} = 1 - \frac{1}{4x_n}, n \in \mathbb{N};$$

$$16.10. x_1 = 0, x_{n+1} = \frac{1}{4(1-x_n)}, n \in \mathbb{N};$$

$$16.11. x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_n), n \in \mathbb{N};$$

$$16.12. x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n}, n \in \mathbb{N}.$$

Практичне заняття №4

Тема: Границя функції. Обчислення границі функції, виходячи з означення. Односторонні границі. Нескінченно малі і нескінченно великі функції

✎1. Для заданих функцій $f(x)$ і точки x_0 знайти границю $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ і $\forall \varepsilon > 0$ вказати $\delta > 0$ таке, що

$$\forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon:$$

1.1. $f(x) = 3x - 2$, $x_0 = 1$, $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0,001$.

1.2. $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$, $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0,001$.

1.3. $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$, $x_0 = -1$, $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0,001$.

1.4. $f(x) = \frac{x-1}{2(x+1)}$, $x_0 = 3$, $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0,001$.

1.5. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $x_0 = \infty$, $\varepsilon = 0,2$.

1.6. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$, $x_0 = \infty$, $\varepsilon = 0,1$.

1.7. $f(x) = 4x - 3$, $x_0 = 2$, $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0,001$.

1.8. $f(x) = \sqrt{x+4}$, $x_0 = 5$, $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0,001$.

1.9. $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$, $x_0 = \infty$, $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0,001$.

1.10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x_0 = +\infty$, $\varepsilon = 0,1$; $\varepsilon = 0,01$; $\varepsilon = 0,001$.

✎2. Довести (знайти $\delta(\varepsilon)$):

2.1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{6x^5 - 5x + 1}{x - \frac{1}{3}} = -1$.

2.2. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x - \frac{1}{2}} = -5$.

2.3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x - 3} = 9$.

2.4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} = 2$.

✎3. Довести, що не існують границі функцій $f(x) = \sin x$ і $\varphi(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$.

✎4. Довести, що не існують границі функцій у точці x_0 :

$$4.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}.$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}}.$$

$$4.3. f(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 0, \\ -2, & x < 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

$$4.4. f(x) = \operatorname{sign} x^2, x_0 = 0.$$

$$4.5. f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ x-2, & x < 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

$$4.6. f(x) = \cos \frac{1}{x}, x_0 = 0.$$

5. Перевірити, чи має ліву і праву границі у точці $x = a$ функція:

$$5.1. y = \frac{x}{|x|}, x = 0.$$

$$5.2. y = \operatorname{sgn} x, x = 0.$$

$$5.3. y = [x], x = -1.$$

$$5.4. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases} x = 0; x = \pi.$$

$$5.5. y = (0,5)^{\frac{1}{x}}, x = 0.$$

$$5.6. y = \operatorname{arctg}(tg x), x = 0; x = \frac{\pi}{2}; x = \pi.$$

$$5.7. y = \frac{1}{(x-1)^2}, x = 1.$$

$$5.8. y = \frac{4x+3}{64x^2+27}, x = -\frac{3}{4}.$$

$$5.9. f(x) = \begin{cases} 1+x, & x > 0, \\ 1-x, & x \leq 0, \end{cases} x = 0; x = 1.$$

$$5.10. f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ b+x, & x \geq 0, \end{cases} x = 0; x = 1.$$

6. Знайти границю функції:

$$6.1. \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 3x - 4).$$

$$6.2. \lim_{x \rightarrow 2} (x\sqrt{x+2} - x^2 - x).$$

$$6.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+4}{6-5x}.$$

$$6.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 6}{x + 2}.$$

$$6.5. \lim_{x \rightarrow 2} (3x)^{x^2}.$$

$$6.6. \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2)^{\lg x}.$$

$$6.7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x^3 + 2 \cos x).$$

$$6.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3x} - x^3}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} + 2x}.$$

Відповідь: 1) 1; 2) -2; 3) 7; 4) 3; 5) 6^4 ; 6) 1; 7) $\frac{\pi^3}{64} + \sqrt{2}$; 8) $\frac{1}{3}$.

✎7. Знайти точку, в якій функція $y = f(x)$ має границею число A :

$$7.1. f(x) = (x^2 - 6x)^2 - 2(x - 3)^2, A = 81.$$

$$7.2. f(x) = 7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right), A = 9.$$

$$7.3. f(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}, A = 1.$$

$$7.4. f(x) = \frac{\log_2(9 - 2^x)}{3 - x}, A = 1.$$

Відповідь: 1) 3; $3 \pm 2\sqrt{5}$; 2) 2; $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) 0.

✎8. Знайти границю функції:

$$8.1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

$$8.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}.$$

$$8.2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 8}.$$

$$8.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3}.$$

$$8.3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 - x + 2}.$$

$$8.6. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 11x - 21}{x^2 - 9x + 14}.$$

$$8.7. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x^2 + 2x)^2 - 14(x^2 + 2x) - 15}{x^4 - 29x^2 + 100}.$$

$$8.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}.$$

$$8.11. \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x - a)}{(x - a)^2}.$$

$$8.9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x^{11} + 2}{x^{50} + 2x^{30} - 3}.$$

$$8.12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{101} - 101x + 100}{x^2 - 2x + 1}.$$

$$8.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1)^5 - (1 - 3x^2)^6}{3x^2 - x^3}.$$

Відповідь: 1) 4; 2) $\frac{3}{4}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 10; 5) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{17}{5}$; 7) $\frac{64}{105}$; 8) $\frac{m}{n}$;

12) 5050.

✎9. Знайти границю функції:

$$9.1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x - 3}.$$

$$9.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}.$$

$$9.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1}.$$

$$9.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}.$$

$$9.5. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}.$$

$$9.6. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}.$$

$$9.7. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}. \text{ (Заміна } x = z^{15}).$$

$$9.8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x^2 - 4}.$$

Відповідь: 1) $\frac{1}{2}$; 2) -3 ; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 5) -2 ; 6) $-\frac{1}{2}$; 7) $\frac{5}{3}$; 8) $\frac{1}{16}$.

✎ 10. Знайти границю функції:

$$10.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{1 - x - x^2}.$$

$$10.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 4 + \sin x}{x - 2}.$$

$$10.3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1+x)(1+2x) \cdot \dots \cdot (1+10x)}{x^{10} + 1}.$$

$$10.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

$$10.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^{15} (3x-1)^{31}}{(x^2 + 13x + 4)^{23}}.$$

$$10.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt[3]{8x^3 + x}}{\sqrt{x^2 + 5}}.$$

$$10.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+5)^5 + (x+6)^5 + (x+7)^5}{x^5 + 5^5}.$$

$$10.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2 (3-7x)^2}{(2x-1)^4}.$$

$$10.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^{20} (2x+3)^{15}}{(3x+17)^{35}}.$$

$$10.10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{20} - \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^{20}}{x^{20}}.$$

Відповідь: 1) -2 ; 2) 2 ; 3) $10!$; 4) 1 ; 5) $2^{15} \cdot 3^{31}$; 6) 3 ; 7) 3 ; 8) $\frac{49}{16}$; 9) $\frac{2^{15}}{3^{35}}$;

10) 2^{20} .

✎11. Знайти границю функції:

$$11.1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + x + 2} \right).$$

$$11.2. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right).$$

$$11.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2 + 4x} - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 4} \right).$$

$$11.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^2}}} - \sqrt{x^2} \right).$$

$$11.5. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right), m, n \in \mathbb{N}. \text{ (Заміна } x-1=y.)$$

$$11.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} - \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1} \right).$$

Практичне заняття №5

Тема: Техніка знаходження границь функцій. Таблиця „чудових” границь

✎1. Знайти границю функції:

$$1.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{\sin 2x}.$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\arcsin 3x}.$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}.$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x - \sin 2x}.$$

$$1.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}.$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt[4]{x+1} - 1}.$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}.$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sin(x-2)}{x^2 - 4} + 2^{\frac{1}{(x-2)^2}} \right).$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{1 - 4 \sin^2 x}.$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \frac{\sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)}{1 - 8 \cos^3 x}.$$

$$1.13. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - \sqrt[3]{\sin 3x}}{\sqrt{\operatorname{tg} \frac{3x}{2}} - 1}.$$

$$1.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{tgx} - \sqrt{tg1}}{\sqrt[3]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin 1}}.$$

Відповідь: 1) 3; 2) 2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) 0; 6) 0; 7) $\frac{9}{4}$; 8) 16; 9) $\frac{1}{3}$; 10) $+\infty$;

2. Знайти границю функції:

$$2.1. \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}.$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}.$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 1}{2^x - 1}.$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x).$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{tg 3x} - 1}{\sin 3x}.$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{2x}.$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - \sqrt{1+x}}{x}.$$

$$2.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x+x^2) + \ln(1-3x+x^2)}{x^2}.$$

$$2.15. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}.$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}.$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}.$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1+\sin x^2} - 1}.$$

$$2.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x^2 + 2x)}{\arcsin 2x}.$$

$$2.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 5x}.$$

$$2.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln tg\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right)}{x}.$$

$$2.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sqrt{1+\sin x^2} - 1}.$$

3. Знайти границю функції:

$$3.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \right)^{x^2}.$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{1+x} - x \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$3.3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + 3x^4 \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

$$3.4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + ctgx)^{tgx}.$$

$$3.5. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}.$$

$$3.6. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{tg^2 x}.$$

$$3.7. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 6x)^{ctg^2 x}.$$

$$3.8. \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+x))^{ctgx}.$$

$$3.9. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xe^x + 1}{x\pi^x + 1} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$3.10. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \arctg^2 x)^{\frac{1}{\arctg x^2}}.$$

Відповідь: 1) e^8 ; 2) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 3) e^3 ; 4) e ; 5) $\sqrt{e}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; 7) e^{-18} ; 8) $e^{\frac{1}{e}}$; 9) $\frac{e}{\pi}$; 10) $\sqrt{e}$.

4. Знайти значення α і β , при яких функція є нескінченно малою:

4.1. $f(x) = \ln(1 + e^{3x}) - \alpha x - \beta, x \rightarrow +\infty; x \rightarrow -\infty.$

4.2. $f(x) = x \arctg x - \alpha x - \beta, x \rightarrow +\infty; x \rightarrow -\infty.$

4.3. $f(x) = x^\alpha \sin \frac{1}{x^\beta}, x \rightarrow 0 + 0.$

4.4. $f(x) = \frac{\ln(1 + x^\alpha)}{x^\beta}, x \rightarrow 0 + 0.$

4.5. $f(x) = x^\alpha \arctg \frac{1}{x^\beta}, x \rightarrow 0 + 0.$

4.6. $f(x) = (1 - x^\alpha)^{x^\beta}, x \rightarrow 0 + 0.$

5. Знайти значення α і β , при яких функції $f(x)$ і $g(x) = \alpha x^\beta$ еквівалентні:

5.1. $f(x) = \sqrt{2x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}, x \rightarrow +0; x \rightarrow +\infty.$

5.2. $f(x) = \sqrt{1 - 2x} - \sqrt[3]{1 - 3x}, x \rightarrow 0.$ (Вказівка. Використати формулу Тейлора).

5.3. $f(x) = 2e^{x^4} + (\cos x - 1)^2 + x^5 - 2, x \rightarrow 0.$

5.4. $f(x) = \sin^2 2x + \arcsin^2 x + 2 \arctg x^2, x \rightarrow 0.$

5.5. $f(x) = 1 - \cos\left(1 - \cos \frac{1}{x}\right), x \rightarrow \infty.$

6. 1) Визначити, які із наступних функцій при $x \rightarrow 0$ будуть нескінченно малими одного порядку, вищого порядку, нижчого порядку у порівнянні з x ; 2) визначити порядок малості у порівнянні із нескінченно малою $\beta(x) = x$:

6.1. $\alpha(x) = -\frac{x}{2}.$

6.2. $\alpha(x) = \sqrt[3]{\sin x}.$

6.3. $\alpha(x) = x + \sqrt[3]{\sin x}.$

6.4. $\alpha(x) = \sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - x}.$

6.5. $\alpha(x) = \tg x - \sin x.$

6.6. $\alpha(x) = \sqrt{4 + x} - 2.$

6.7. $\alpha(x) = \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt{1 + x}}.$

6.8. $\alpha(x) = \tg \sqrt[3]{x^3 \sqrt{x}}.$

$$6.9. \alpha(x) = \lg\left(1 - \frac{1}{2}\sin x\right).$$

$$6.10. \alpha(x) = \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}.$$

Відповідь: 1) 6.1, 6.4, 6.6, 6.7, 6.9 – одного порядку; 6.5, 6.6 – вищого порядку; 6.2, 6.3, 6.8 – нижчого порядку; 2) 6.2, 6.3 – порядок 2; 6.5 – порядок 3; 6.8 – порядок $\frac{4}{9}$; 6.10 – порядок 2.

7. Визначити порядок малості наступних нескінченно малих функцій відносно нескінченно малої функції $\beta(x) = x - 1$ при $x \rightarrow 1$:

$$7.1. \alpha(x) = x^3 + 2x - 3.$$

$$7.3. \alpha(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x}}.$$

$$7.2. \alpha(x) = \ln(x^2 + 2x - 2).$$

$$7.4. \alpha(x) = x^x - 1.$$

Відповідь: 1), 2), 3), 4) нескінченно малі першого порядку.

8. Визначити порядок наступних нескінченно великих функцій відносно нескінченно великої функції $\beta(x) = x$:

$$8.1. \alpha(x) = 3x^2 + 5x - 3.$$

$$8.4. \alpha(x) = \ln(2 + e^{3x^2}).$$

$$8.2. \alpha(x) = \frac{3x^3}{1 - 2x + x^2}.$$

$$8.5. \alpha(x) = \sqrt{3 + \sqrt{x}}.$$

$$8.3. \alpha(x) = \sqrt[5]{x^3} - \sqrt{x} + \sqrt{x}.$$

Відповідь: 1), 4) другого порядку; 2) першого порядку; 3) порядку $\frac{3}{5}$; 5) порядку $\frac{1}{4}$.

9. При $x \rightarrow 1$ наступні функції є нескінченно великими. Визначити їх порядок у порівнянні із нескінченно великою функцією

$$\beta(x) = \frac{1}{x-1}, x \rightarrow 1:$$

$$9.1. \alpha(x) = \frac{x^2}{x^3 - 1}.$$

$$9.4. \alpha(x) = \frac{1}{\sin \pi x}.$$

$$9.2. \alpha(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1 - x^2}}.$$

$$9.5. \alpha(x) = \frac{1}{e^{\cos \frac{\pi}{2} x} - 1}.$$

$$9.3. \alpha(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Відповідь: 1) другого порядку; 2) першого порядку; 3) першого порядку; 4) порядку $\frac{2}{3}$.

Практичне заняття №6

Тема: Функції, неперервні в точці, їх властивості. Точки розриву, їх класифікація

✎1. Виходячи з означення ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$), довести неперервність функцій:

1.1. $y = 3x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$.

1.3. $y = \cos(ax + b), x \in \mathbb{R}$.

1.2. $y = \frac{x^3 + x - 1}{2x^2 + 3x - 5}, x \in (2; 3)$.

1.4. $y = \frac{x^2 \cos x}{1 + \sin^2 x}, x \in \mathbb{R}$.

✎2. Виходячи з означення неперервності функції в термінах „ $\varepsilon - \delta$ ”, довести неперервність функцій:

2.1. $y = \frac{x+3}{2-3x}, x_0 = \frac{1}{2}$.

2.3. $y = \operatorname{tg} x, x_0 \in D(y)$.

2.2. $y = \sqrt{x}, x_0 \in D(y)$.

2.4. $y = \frac{1}{x^2}, x_0 \in D(y)$.

✎3. Виходячи з означення неперервності функції ($\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$), довести неперервність функцій:

3.1. $y = x^2 + 3x + 1, x_0 \in \mathbb{R}$.

3.3. $y = \arcsin x, x_0 \in (-1; 1)$.

3.2. $y = 2^x, x_0 \in \mathbb{R}$.

3.4. $y = \sqrt[3]{x}, x_0 \in \mathbb{R}$.

✎4. Знайти односторонні границі функцій:

4.1. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 2, \\ -2x+1, & x > 2, \end{cases} x_0 = 2$.

4.2. $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}, x_0 = 0$.

4.3. $f(x) = \frac{x^3 - 1}{|x - 1|}, x_0 = 1$.

4.4. $f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}, x_0 = 0$.

$$4.5. f(x) = \cos \frac{\pi}{x}, x_0 = 0.$$

$$4.6. f(x) = x + \frac{2}{1 + 2^{\frac{1}{2-x}}}, x_0 = 2.$$

$$4.7. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2}, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ -2x, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases} x_0 = 0, x_0 = 1.$$

$$4.8. f(x) = \frac{\cos x}{3 - 2^{\frac{1}{\sin x}}}, x_0 = 0.$$

✎5. Дослідити на неперервність композиції $f \circ g$ і $g \circ f$:

$$5.1. f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = 1 + x^2.$$

$$5.2. f(x) = \operatorname{sgn} x, g(x) = x(1 - x^2).$$

$$5.3. f(x) = \operatorname{sgn}(x - 1), g(x) = \operatorname{sgn}(x + 1).$$

✎6. Знайти множину точок неперервності функцій:

$$6.1. f(x) = x^2 - 2x - 3.$$

$$6.5. f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x.$$

$$6.2. f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^3 - 3x^2 - 3x + 2}.$$

$$6.6. f(x) = \sqrt{\sin^3 x}.$$

$$6.3. f(x) = \sqrt{9 - 4x^2}.$$

$$6.7. f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

$$6.4. f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$6.8. f(x) = x^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}.$$

✎7. Виходячи з неперервності показникової функції, довести неперервність функцій:

$$7.1. y = \operatorname{ch} x.$$

$$7.3. y = \operatorname{cth} x.$$

$$7.2. y = \operatorname{th} x.$$

$$7.4. y = \log_a x, a > 0, a \neq 1.$$

✎8. Виходячи з неперервності тригонометричних функцій, довести неперервність обернених тригонометричних функцій:

$$8.1. y = \arcsin x.$$

$$8.3. y = \operatorname{arctg} x.$$

$$8.2. y = \arccos x.$$

$$8.4. y = \operatorname{arcctg} x.$$

✎9. Довести, що якщо $f(x)$ – неперервна функція, то неперервними будуть:

9.1. $y = |f(x)|$.

9.2. $y = f(|x|)$.

✎10. Знайти значення a , при якому функція $f(x)$ буде неперервною:

10.1. $f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n - 1}{x}, & x \neq 0, n \in N, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

10.2. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{ctg} 2x, & x \neq 0, |x| < \frac{\pi}{2}, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

10.3. $f(x) = \begin{cases} (\pi + 2x) \operatorname{tg} x, & x \neq -\frac{\pi}{2}, -\pi < x < \frac{\pi}{2}, \\ a, & x = -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

10.4. $f(x) = \begin{cases} \frac{c^x - 1}{x}, & x \neq 0, c > 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

10.5. $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

10.6. $f(x) = \begin{cases} x \ln x^2, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

10.7. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ a(x-1), & x > 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$

✎11. Дослідити функцію на неперервність, встановити характер точок розриву і побудувати графік:

11.1. $y = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 0, \\ x - 1, & x > 0. \end{cases}$

11.2. $y = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & x < 0, \\ 5x - x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

11.3. $y = \begin{cases} 1 - x^3, & x < 0, \\ (x-1)^3, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4 - x, & x > 2. \end{cases}$

$$11.4. y = \begin{cases} 2^x, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ x - 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$11.5. y = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ 1, & x = \frac{\pi}{4}, \\ x^2 - \frac{\pi^2}{16}, & \frac{\pi}{4} < x \leq \pi. \end{cases}$$

$$11.6. y = \begin{cases} -x, & x \leq -1, \\ \frac{2}{x-1}, & x > -1. \end{cases}$$

$$11.7. y = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x < 0, \\ (x+1)^2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1-x, & x > 2. \end{cases}$$

$$11.8. y = x - E(x).$$

$$11.9. y = \frac{1}{x - E(x)}.$$

$$11.10. y = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{x^2 - x}.$$

12. Знайти точки розриву функції, встановити їх рід, довизначити функцію в точках усувного розриву, знайти стрибки в точках розриву I роду:

$$12.1. y = \frac{x}{x^2 + x - 6}.$$

$$12.2. y = \frac{1}{x^3 - 3x^2 - 4x}.$$

$$12.3. y = \frac{\frac{x}{1} - \frac{x+1}{1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}.$$

$$12.4. y = \frac{x}{\cos x}.$$

$$12.5. y = \frac{\arcsin x}{\sin 2x}.$$

$$12.6. y = \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{x^3 - x^2}.$$

$$12.7. y = \frac{2}{1 - 2^x}.$$

$$12.8. y = \lg(x^2 + 3x).$$

$$12.9. y = \frac{1}{\ln|x-1|}.$$

$$12.10. y = \operatorname{sgn}(x^2 - 2x - 3).$$

$$12.11. y = \operatorname{sgn}(\cos x).$$

$$12.12. y = \arcsin \frac{1}{x}.$$

$$12.13. y = (-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}.$$

$$12.14. y = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x^2}.$$

$$12.15. y = \frac{3^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}}}.$$

13. Дослідити на неперервність і побудувати графік функції $f(x)$:

$$13.1. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^n}.$$

$$13.2. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}.$$

$$13.3. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n x.$$

$$13.4. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + xe^{nx}}.$$

$$13.5. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg}(n \operatorname{ctg} x).$$

$$13.6. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + x^{2n}}.$$

📖 Практичне заняття №7

🕒 Контрольна робота №1 (зразок)

✍1. Які з даних чисел є раціональними, а які ірраціональними:

$$\frac{\sqrt{37 + 12\sqrt{7}} - 1}{\sqrt{7} + 1}.$$

✍2. Обчислити границі числових послідовностей:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}); \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 3}{2n + 1} \right)^{n+1}.$$

✍3. Обчислити границю функції:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5 - x} - \sqrt{x + 1}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{x + \arcsin x^3}.$$

✍4. Дослідити функцію на неперервність, встановити характер точок розриву та побудувати графік:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x \leq 2, \\ x + 3, & x > 2. \end{cases}$$

Практичне заняття №8

Тема: Означення похідної. Таблиця похідних. Правила диференціювання

1. Користуючись означенням похідної, обчислити похідні таких функцій:

а) $y = 3x^2 - 4x$. б) $y = \frac{1}{x}$. в) $y = \sqrt{x}$. г) $y = \cos 3x$.

д) $y = \frac{1}{x^2 + 2}$.

2. Дослідити на диференційовність функції:

а) $f(x) = |x|$. б) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leq 1, \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1. \end{cases}$

3. Користуючись загальними правилами диференціювання, знайти похідні від таких функцій:

а) $y = x\sqrt{x}$. б) $y = \sqrt[3]{4x\sqrt{5x}}$.

в) $\varphi(t) = \frac{\sqrt{t} \cdot \sqrt[3]{t}}{2t^2 \cdot \sqrt{t^3}}$. г) $y = \frac{2}{3}x^3 - 6x^2 + 7x - 8$.

д) $y = \arctg x + x + \operatorname{arcc}tg x$. е) $y = \cos \frac{\pi}{3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5}$.

є) $y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$. ж) $y = (3x^2 - 7x + 2)(1 - 2x - 6x^3)$.

з) $y = 2x \cos x$. и) $y = \log_2 x \cdot \ln x \cdot \log_3 x$.

і) $y = x^2 \arctg x$. ї) $y = \frac{2x^2 - 5}{x + 5}$.

й) $y = \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1}$.

4. Користуючись загальними правилами диференціювання, знайти похідні від таких функцій:

а) $f(x) = 2x \cos x$. б) $f(x) = e^x (x^2 - 4x + 10)$.

$$\text{в)} f(x) = x^2 \operatorname{ctg} x$$

$$\text{г)} f(x) = x^8 \operatorname{ctg} x.$$

$$\text{е)} f(x) = 12x^2 \cdot \sqrt[3]{x^7} \cdot \ln x.$$

$$\text{в)} f(x) = x^2 \cos x$$

$$\text{д)} f(x) = \sqrt[3]{x} \log_3 x.$$

$$\text{е)} f(x) = x^7 \cdot \operatorname{ctg} x \cdot 2^x.$$

$$\text{ж)} f(x) = (x-1)(x^2+5) \sin x.$$

$$\text{з)} f(x) = x^3 \sin x \cdot \ln x.$$

$$\text{и)} y = \frac{1-x^3}{1-x^5}.$$

$$\text{і)} y = \frac{2}{(1-x^2)(1+x^4)}.$$

$$\text{ї)} y = \frac{8-3\sqrt{x^3}+2x}{1+6x\sqrt{x}-3x^2}.$$

$$\text{й)} y = \frac{\operatorname{arctg} x}{\arcsin x}.$$

✎5. Обчислити значення похідної в заданій точці:

$$\text{а)} y = \frac{5-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}-1}, x_0 = 1.$$

$$\text{б)} y = \frac{2^x}{\sin x}, x_0 = 5.$$

$$\text{в)} y = \frac{\sqrt[3]{x^5}}{\operatorname{tg} x}, x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{г)} y = \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x^2}}, x_0 = 7.$$

$$\text{д)} y = \frac{\log_4 x}{x^2}, x_0 = 4.$$

$$\text{е)} y = \frac{6x^5}{\log_2 x}, x_0 = 2.$$

$$\text{е)} y = \frac{x^3+1}{x^3-1}, x_0 = 2.$$

$$\text{ж)} y = \frac{x}{\arcsin x}, x_0 = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{з)} y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}, x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

✎6. Знайти похідні функцій:

$$\text{а)} y = (x^3 - 2x^2 + 5)^8.$$

$$\text{б)} y = \left(\sqrt{x} - \frac{2}{x} \right)^{20}.$$

$$\text{в)} y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

$$\text{г)} y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$\text{д)} y = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1}}.$$

$$\text{е)} y = 3^{\operatorname{arctg}(x+\pi)}.$$

$$\text{е)} y = \sin \cos^2 x \cdot \cos \sin^2 x.$$

$$\text{ж)} y = \cos(3 \arccos x).$$

✎7. Знайти похідні функцій (логарифмічне диференціювання):

$$\text{а)} y = (x^2 + 1)^{2x}.$$

$$\text{б)} y = x^{\frac{x}{\ln^2 x}}.$$

в) $y = a^{a^a} + a^{a^x} + a^{x^a} + x^{a^a} + a^{x^x} + x^{x^x}$. г) $y = (\arcsin^2 x)^{\arctg x}$.
 д) $y = (chx)^{e^x}$. е) $y = \sqrt[3]{\arctg \sqrt[5]{\cos \ln^3 x}}$.

8. Знайти похідну функції, заданої параметрично:

а) $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}, y = \sqrt{1-\sqrt{t}}, t_0 = \frac{1}{64}; M_0(1; 1)$.

б) $x = \sin^2 t, y = \cos^2 t, t_0 = \frac{\pi}{4}; M_0\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right)$.

в) $x = a \cdot ch t, y = b \cdot sh t, t_0 = \ln 2; M_0(a \cdot ch 1; b \cdot sh 1)$.

г) $x = \ln \sin \frac{t}{2}, y = \ln \sin t, 0 < t < \pi$.

д) $x = t \cdot \ln t, y = \frac{\ln t}{t}, t_0 = 1$.

е) $x = a(sh t - t), y = a(ch t - 1), t_0 = 0$.

є) $x = t^3 - 3\pi, y = t^3 - 6 \arctg t, t_0 = 1$.

Практичне заняття №9

Тема: Геометричний і механічний зміст похідної. Формула Тейлора. Застосування похідної при знаходженні границь функцій у точці

1. Написати рівняння дотичної і нормалі до графіка функції:

а) $y = 2 - 4x - 3x^2, x_0 = -2$. б) $y = 2 \cos \frac{x}{2}, x_0 = \frac{3\pi}{2}$.

в) $y = \sqrt{x^2 + 1}, x_0 = 2$. г) $y = xe^{-x}, x_0 = 0$.

д) $y = 2 \cos \frac{x}{2}, x_0 = \frac{3\pi}{2}$. е) $y = x^2 e^{-x}, x_0 = 1$.

є) $y = \sqrt{2x-1}, x_0 = 5$. ж) $y = 2x^3 - 3x, x_0 = 1$.

з) $y = \tg\left(x - \frac{\pi}{4}\right), x_0 = \frac{\pi}{2}$. и) $y = \frac{3x-4}{\sqrt[3]{x+4}}, x_0 = 1$.

і) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ в точках перетину з віссю Ох.

ї) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t_0 = \frac{\pi}{2}$.

2. Знайти абсцису точки, в якій дотична до графіка функції $y = 5x^5 - 3x^3 + x + 1$ паралельна прямій $y = x$.

3. Знайти кути, під якими перетинаються лінії:

а) $x + y - 4 = 0$ і $2y = 8 - x^2$.

б) $x^2 + 4y^2 = 4$ і $4y = 4 - 5x^2$.

в) $y = \sin x$ і $y = \cos x$.

г) $y = x^2$ і $x = y^2$.

д) $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$ і $x = 1$.

е) $y = e^{x/2}$ і $x = 2$.

є) $x^2 + y^2 = 5$ і $y^2 = 4x$.

ж) $y^2 = 2x^3$ і $64x - 48y - 11 = 0$.

4. Точка здійснює гармонічні коливання за законом $x = 15 \sin 3t$. Знайти миттєву швидкість точки в момент часу t_0 .

5. Кількість радіоактивної речовини в момент часу t виражається

формулою $m = M \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, де T – так званий період піврозпаду, а M –

початкова кількість речовини (в момент часу $t = 0$). Знайти миттєву швидкість розпаду речовини в момент часу t_0 .

6. Довжина вертикально поставленої драбини рівна 5 м. Нижній кінець драбини починає відсуватися від стіни зі сталою швидкістю 2 м/с. З якою швидкістю опускається в момент часу t верхній кінець драбини? Чому дорівнює його прискорення в цей момент часу?

7. Резервуар, що має форму півкулі, заповнюється водою. Вважаючи, що радіус кулі рівний R_0 , а швидкість його заповнення v_0 , визначити швидкість підняття рівня води в резервуарі.

Розклад основних елементарних функцій за формулою Тейлора.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^{2n})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n), \quad |x| < 1$$

8. Розкласти $f(x)$ в околі точки x_0 по формулі Тейлора до n -го порядку включно:

а) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 1; n = 3.$

б) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}, x_0 = 1; n = 4.$

в) $f(x) = x^3 \ln x, x_0 = 1; n = 4.$

г) $f(x) = \frac{x}{x-1}, x_0 = 2; n = 3.$

д) $f(x) = x^{80} - x^{40} + x^{20}, x_0 = 1; n = 4.$

е) $f(x) = (\sin x)^{\sin x}, x_0 = 1; n = 2.$

є) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x, x_0 = 1; n = 2.$

ж) $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = -1; n = 5.$

9. Функцію $f(x)$ подати у вигляді формули Маклорена з залишковим членом $o(x^n)$, якщо:

а) $f(x) = (x+5)e^{2x}.$

б) $f(x) = \ln \frac{3+x}{2-x}.$

в) $f(x) = e^x \ln(1+x), n = 4.$

г) $f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+x-12}.$

д) $f(x) = \ln \frac{1+2x}{1-x}.$

е) $f(x) = (1+x^2) \ln \sqrt{1+x}.$

є) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{9-6x+x^2}}.$

ж) $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x+4}.$

10. За допомогою формули Тейлора наближено обчислити значення з точністю до ε :

а) $\sqrt[5]{250}, \varepsilon = 10^{-4}.$

б) $\sin 18^\circ, \varepsilon = 10^{-4}.$

в) $\operatorname{arctg} 0,8, \varepsilon = 10^{-3}.$

г) $\arcsin 0,45, \varepsilon = 10^{-3}.$

д) $(1,1)^{1,2}, \varepsilon = 10^{-5}.$

е) $\ln(1,1), \varepsilon = 10^{-4}.$

11. Знайти границю за допомогою формули Тейлора:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\operatorname{tg} x} - e^x + x^2}{\arcsin x - \sin x}.$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{1-x} + \frac{x^2}{2}}{\ln \frac{1+x}{1-x} - 2x}.$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\operatorname{sh} \frac{x}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt[5]{1 - \frac{x^2}{2}}}{\operatorname{ch}(\sin x) - e^{\frac{x^2}{2}}}.$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - x + \frac{x^3}{6}}{x - \operatorname{th} x}.$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x}.$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\cos x + \arcsin x - 3\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1-x^2)}.$$

$$и) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x^2} - x \operatorname{ctg} x}{x \sin x}.$$

12. Знайти границю функції, використовуючи, де це можливо, правила Лопітала:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}.$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}.$$

$$в) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x+1}}{\sqrt{2+x+x}}.$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}.$$

$$д) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{\ln \cos(2x^2 - x)}.$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}.$$

$$е) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}.$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x + \frac{x^2}{2} - 1}.$$

$$и) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$і) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

$$к) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^2}{\sin^6 2x}.$$

Практичне заняття №10

Тема: Дослідження функції на монотонність, екстремум та опуклість

Завдання 1. Знайти проміжки монотонності та екстремуми функції $f(x)$ на області визначення:

а) $f(x) = x^3 + 3x^2$.

б) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$.

в) $f(x) = x^4(1-x)^3$.

г) $f(x) = (x^3 - 10)(x + 5)^2$.

д) $f(x) = x^2(x - 12)^2$.

е) $f(x) = (x + 2)^2(x - 3)^3$.

є) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x - 1)^2}$.

ж) $f(x) = \frac{x^4}{(x + 1)^3}$.

з) $f(x) = \frac{10}{8x^2 - 24x + 23}$.

и) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$.

і) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$.

ї) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$.

к)

$$f(x) = (x - 2)\cos \pi x - \frac{1}{\pi}\sin \pi x.$$

Завдання 2. Довести тотожності:

а) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2x$.

б) $\cos^4 x - \frac{1}{8}\cos 4x = 2\cos^2 x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{5}{8}$.

в) $\arctg x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

л) $f(x) = (x + 1)\arctg x - \frac{\pi}{4}x^2 - x$.

м) $f(x) = (x - 1)e^{3x}$.

н) $f(x) = (3 - x^2)e^x$.

о) $f(x) = x^3e^{-4x}$.

п) $f(x) = x^4e^{-x^2}$.

с) $f(x) = x + \sqrt{3 - x}$.

т) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

у) $f(x) = \frac{1}{\ln(x^4 + 4x^3 + 30)}$.

ф)

$$f(x) = x^2 - 4x - 1 - \ln(x^2 - 4x + 4).$$

ц) $f(x) = \ln(x^2 - 1) - 2\arctg x$.

ч) $f(x) = x + \sqrt{3 - x}$.

ш) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + x}$.

щ) $f(x) = \sqrt[3]{(x - 2)^2(x - 4)^2}$.

ю) $f(x) = \sqrt[3]{(1 - x)(x - 2)^2}$.

$$\text{г) } \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \leq 0.$$

$$\text{д) } \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi - 2 \operatorname{arctg} x, & x \geq 1, \\ 2 \operatorname{arctg} x, & -1 \leq x \leq 1, \\ -\pi - 2 \operatorname{arctg} x, & x \leq -1. \end{cases}$$

$$\text{е) } \arcsin x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\arccos \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

3. Довести нерівності:

$$\text{а) } e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad x > 0.$$

$$\text{б) } x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \quad x > 0.$$

$$\text{в) } x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad x > 0,$$

$$\text{г) } \operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{д) } \sin x + \operatorname{tg} x > 2x, \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{е) } \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} > \frac{x}{y}, \quad 0 < y < x < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{є) } \frac{\cos y}{2 + \sin y} < \frac{\cos x}{2 + \sin x}, \quad 0 < x < y < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{ж) } 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}, \quad x > 0,$$

$$\text{з) } \ln(1+x) > \frac{x}{1+x}, \quad x > 0,$$

$$\text{и) } \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}, \quad x, y \geq 0,$$

$$\text{і) } \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\text{ї) } \operatorname{arctg} x \leq x, \quad x \geq 0.$$

4. Знайти найбільше і найменше значення функції на заданому проміжку:

$$\text{а) } y = x^3 + 3x^2 - 72x + 90, \quad [-5; 5].$$

$$\text{є) } y = x + \frac{4}{(x-2)^2}, \quad [0; 5].$$

$$\text{б) } y = x^3 - 6x^2 + 9, \quad [-1; 2].$$

$$\text{ж) } y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}, \quad [0; 1].$$

$$\text{в) } y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1, \quad [-1; 2].$$

$$\text{з) } y = 4\sin 2x - 2\sin 4x, \quad [0; \pi].$$

$$\text{г) } y = x + \sqrt{x}, \quad [0; 4].$$

$$\text{д) } y = 1 - 3x^2 - x^3, \quad [-1; 1].$$

$$\text{и) } y = \sin 2x - x, \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{е) } y = x^3 - 2x|x-2|, \quad [0; 3].$$

$$\text{i)} y = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x, [\pi; 2\pi]. \quad \text{ii)} y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}, [0; 1].$$

$$\text{к)} y = 2\ln^3 x - 9\ln^2 x + 12\ln x, \left[e^{\frac{3}{4}}; e^3 \right].$$

$$\text{л)} y = |x^2 + 2x - 3| + 1,5\ln x, [0,5; 4].$$

5. Знайти інтервали опуклості і точки перегину функції:

$$\text{а)} y = 2x^4 - 3x^2 + x - 1.$$

$$\text{з)} y = \frac{x^3}{x^2 + 3a^2}, a > 0.$$

$$\text{б)} y = x^5 - 10x^2 + 3x.$$

$$\text{и)} y = \sqrt[3]{x+3}.$$

$$\text{в)} y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5.$$

$$\text{і)} y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}.$$

$$\text{г)} y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50.$$

$$\text{ї)} y = \ln(1+x^2).$$

$$\text{д)} y = (x+2)^6 + 2x + 2.$$

$$\text{ж)} y = x \operatorname{arctg} x.$$

$$\text{е)} y = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$\text{з)} y = (x+1)^4 + e^x.$$

$$\text{є)} y = \frac{x^3}{12+x^2}.$$

$$\text{й)} y = x^4(12\ln x - 7).$$

$$\text{ж)} y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}.$$

$$\text{к)} y = x^4(12\ln x - 7).$$

$$\text{л)} y = e^{\operatorname{arctg} x}.$$

6. Довести нерівності:

$$\text{а)} \frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^n, x > 0, y > 0, n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{б)} \frac{e^x + e^y}{2} \geq e^{\frac{x+y}{2}}.$$

$$\text{в)} x \ln x + y \ln y \geq (x+y) \ln \frac{x+y}{2}, x > 0, y > 0.$$

$$\text{г)} \sqrt{\sin x \sin y} \leq \sin \frac{x+y}{2}, x, y \in (0; \pi).$$

$$\text{д)} e^{\frac{x+y}{2}} + 2 \leq \sqrt{(e^x + 2)(e^y + 2)}.$$

$$\text{е)} \frac{2(x+y)}{2-(x+y)} \geq \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y}, x > 1, y > 1.$$

$$\text{є)} \cos \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \geq \frac{1}{2} (\cos x^2 + \cos y^2), x, y \in \left[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right].$$

Практичне заняття №11

Тема: Асимптоти. Повне дослідження функції і побудова її графіка

№1. Знайти асимптоти кривих:

а) $y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$.

б) $y = xe^x$.

в) $y = x + \frac{\sin x}{x}$.

г) $y = x \arctg x$.

д) $y = \ln(4 - x^2)$.

е) $y = \frac{\sqrt{4x^4 + 1}}{|x|}$.

є) $y = 3\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$.

ж) $y = \frac{2x^2 - 9}{x + 2}$.

з) $y = \frac{x^5}{x^4 - 1}$.

и) $y = xe^{-x}$.

і) $y = x \operatorname{arccctg} x$.

ї) $y = x + \frac{\ln x}{x}$.

№2. Дослідити функцію та побудувати її графік:

а) $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

є) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

л) $y = \frac{e^x}{1 + x}$.

б) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$.

ж) $y = \frac{x^3 + x + 2}{x}$.

м) $y = \ln \frac{x}{x - 1}$.

в) $y = 3x^2 - x^3$.

з) $y = x^3 \sqrt{(x + 1)^2}$.

н) $y = \ln(4 - x^2)$.

г) $y = \frac{x^3}{4(2 - x)^2}$.

і) $y = x\sqrt{4 - x^2}$.

о) $y = x^2 e^{-x}$.

д) $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$.

ї) $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

п) $y = x - \ln(x + 1)$.

е) $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$.

й) $y = xe^{-x}$.

р) $y = x + \frac{\ln x}{x}$.

к) $y = x + e^{-x}$.

Практичне заняття №12

Контрольна робота №2 (зразок)

✎1. Знайти похідну функції: $y = \frac{3 \operatorname{arccctg}(2x-5)}{(x+1)^4}$.

✎2. Записати рівняння дотичної та нормалі до графіка функції в точці x_0 : $y = 2 \cos \frac{x}{2}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$.

✎3. Знайти границі, використовуючи правила Лопіталя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$.

✎4. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:
 $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

Список рекомендованої літератури

Основна

1. Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. I семестр (спеціальність 014.09 Середня освіта (Інформатика)). Вінниця, 2017. 57 с.
2. Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. II семестр (спеціальність 014.09 Середня освіта (Інформатика)). Вінниця, 2018. 26 с.
3. Бак С.М. Робочий зошит студента зі вступу до математичного аналізу (для студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)). Вінниця, 2022. 61 с.
4. Бак С.М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. III семестр. Визначений інтеграл. Ряди (для студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)). Вінниця, 2020. 38 с.
5. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу. Вступ в аналіз. Диференціальне числення функції однієї змінної. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: «Едельвейс і К», 2008. 299 с.
6. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу. Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер», 2013. 289 с.

Додаткова

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: У 3-х ч.: Підр. Київ: Вища школа, 1990. Ч. 1. 383 с.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: У 3-х ч.: Підр. Київ: Вища школа, 1991. Ч. 2. 366 с.
3. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.І. Математичний аналіз: Підручник. Київ: Знання, 2008. 421 с.
4. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по началам анализа. Киев: «Магістр – S», 1998. 416 с.
5. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Київ: Вища школа, 1994. Ч. 1. 423 с.
6. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Київ: Вища школа, 1995. Ч. 2. 509 с.

Навчальне видання

Бак Сергій Миколайович

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ
І семестр

Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції
однієї змінної

для студентів предметної спеціальності
014.09 Середня освіта (Інформатика)

Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Times.
Ум. друк. арк. 3