

УДК 517.97

Сергій Бак

канд. фіз.-мат. наук, доцент,
доцент кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,

Галина Ковтонюк

канд. пед. наук, старший викладач
кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського,

Іван Печериця

студент факультету математики,
фізики і технологій
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

**ПРО ІСНУВАННЯ СТОЯЧИХ ХВИЛЬ З ПЕРІОДИЧНОЮ
АМПЛІТУДОЮ В ДИСКРЕТНОМУ НЕЛІНІЙНОМУ РІВНЯННІ ТИПУ
ШРЕДІНГЕРА ІЗ НАСИЧУВАНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ НА
ДВОВИМІРНІЙ ГРАТЦІ**

Анотація. Вивчається дискретне нелінійне рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці. Одержано результат про існування розв'язків у вигляді стоячих хвиль з періодичною амплітудою.

Ключові слова: дискретне нелінійне рівняння Шредінгера, двовимірна ґратка, стоячі хвилі, критичні точки, многовид Нехарі.

Abstract. A discrete nonlinear Schrödinger equation with saturable nonlinearity on a two-dimensional lattice is studied. We obtain the result of the existence of solutions in the form of standing waves with periodic amplitude.

Key words: discrete nonlinear Schrödinger equation, 2D-lattice, standing waves, critical points, Nehari manifold.

Останнім часом значну увагу приділяють моделям, дискретним за просторовою змінною. В статтях [1; 2; 7; 8; 15; 16; 19; 20] досліджено питання існування біжучих хвиль в системах осциляторів на двовимірній ґратці. В той же час для систем Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці відомі декілька праць [3; 17], в яких отримано умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль. В статтях [6; 9; 18] вивчались біжучі хвилі для дискретного рівняння \sin -Гордона на двовимірній ґратці. В статтях [4; 5; 14; 21; 22] досліджувалось питання існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера.

В даній роботі вивчається дискретне нелінійне рівняння типу Шредінгера на плоскій цілочисловій ґратці із насичуваною нелінійністю

$$i\dot{\psi}_{n,m}(t) - a_{n,m}\psi_{n+1,m}(t) - a_{n-1,m}\psi_{n-1,m}(t) - b_{n,m}\psi_{n,m+1}(t) - b_{n,m-1}\psi_{n,m-1}(t) - c_{n,m}\psi_{n,m}(t) + \frac{\mu|\psi_{n,m}(t)|^2}{1+|\psi_{n,m}(t)|^2}\psi_{n,m}(t) = 0, \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^2, \quad (1)$$

де $\psi_{n,m}(t)$ – хвильова функція (n, m) -ї частинки, $(a_{n,m}), (b_{n,m}) \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$.

Стоячі хвилі в цьому випадку мають вигляд

$$\psi_{n,m}(t) = u_{n,m} \exp(-i\omega t), \quad (2)$$

де $(u_{n,m}) \in \mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega \in \mathbb{R}$ – частотою.

Будемо вивчати стоячі хвилі з k -періодичною амплітудою, тобто відповідно

$$u_{n+k,m} = u_{n,m+k} = u_{n,m}. \quad (3)$$

Підставляючи стоячу хвилю (2) в рівняння (1), одержимо рівняння

$$\omega u_{n,m} - a_{n,m}u_{n+1,m} - a_{n-1,m}u_{n-1,m} - b_{n,m}u_{n,m+1} - b_{n,m-1}u_{n,m-1} - c_{n,m}u_{n,m} + \frac{\mu u_{n,m}^3}{1+u_{n,m}^2} = 0. \quad (4)$$

Позначимо через $(Lu)_{n,m} = a_{n,m}u_{n+1,m} + a_{n-1,m}u_{n-1,m} + b_{n,m}u_{n,m+1} + b_{n,m-1}u_{n,m-1} + c_{n,m}u_{n,m}$.

Всюди далі припустимо, що виконується наступна умова:

(i) послідовності $(a_{n,m})$ і $(b_{n,m})$ періодичні, тобто $a_{n+k,m} = a_{n,m+k} = a_{n,m}$,
 $b_{n+k,m} = b_{n,m+k} = b_{n,m}$, $c_{n+k,m} = c_{n,m+k} = c_{n,m}$ і нижньою межею спектра оператора L
є число 0.

За допомогою варіаційного методу із використанням многовиду Нехарі одержано наступний результат ([13]):

Теорема. Нехай виконується умова (i), $\omega + \mu > 0$, $\omega < 0$. Тоді для будь-якого $k \geq 2$ рівняння (4) має два нетривіальні k -періодичні розв'язки $\pm u^{(k)}$.

Список використаних джерел:

1. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. – 2010. – Т. 7, №2. – С. 154–175.
2. Бак С. М. Існування відокремлених біжучих хвиль для системи нелінійно зв'язаних осциляторів на двовимірній ґратці // Український математичний журнал. – 2017. – Т. 69, №4. – С. 435–444.
3. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці // Математичні студії. – 2012. – Т. 37, №1. – С. 76–88.
4. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінґера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – 2017. – Вип. 16. – С. 21-29.
5. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінґера із насичуванню нелінійністю // Математичні студії. – 2010. – Т. 33, №1. – С. 78–84.
6. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні \sin -Гордона на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. – Вип. 9. – С. 5–10.
7. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. – Вип. 10. – С. 17–23.
8. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. – Вип. 12. – С. 5–12.
9. Бак С. М. Існування гетероклінічних біжучих хвиль у системі осциляторів на двовимірній ґратці // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2014. – Т. 57, №3. – С. 45–52.
10. Бак С. М. Існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. –

- Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. – Вип. 5. – С. 3-9.
11. Бак С.М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці / С.М. Бак, О.О. Баранова, Ю.П. Білик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. – Вип. 4. – С. 18-24.
 12. Бак С.М. Коректність задачі Коші для нескінченної системи нелінійних осциляторів з кубічним потенціалом на двовимірній ґратці / С.М. Бак, К.Є. Рум'янцева // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. – Вип. 6. – С. 29-36.
 13. Бак С.М. Стоячі хвилі з періодичною амплітудою в дискретному нелінійному рівнянні типу Шредінґера із насичуваною нелінійністю на двовимірній ґратці / С.М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. – Вип. 18. – С. 5-14.
 14. Мезенцев В. К. Двумерные солитоны в дискретных системах / В. К. Мезенцев, С. Л. Мушер, И. В. Рыженкова, С. К. Турицын // Письма в ЖЭТФ. – 1994. – Т. 60, вып. 11. – С. 815-821.
 15. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice / S. M. Bak // Journal of Mathematical Sciences, 2016. – Vol. 217, №2 (August). – P. 187–197.
 16. Bak S.M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice / S. M. Bak // Ukrainian mathematical Journal. – 2017. – Vol. 4 (69). – P.509-520.
 17. Bak S.M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice / S. M. Bak, G. M. Kovtonyuk // Matematychni Studii. – 2018. – Vol. 50, No.1. – P.75-87.
 18. Bak S. The existence of heteroclinic traveling waves in the discrete sine-Gordon equation with nonlinear interaction on a 2D-lattice / S. Bak // Journal of mathematical physics, analysis, geometry. – 2018. – Vol. 14, № 1. – P. 16-26.
 19. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. – 2007. – 20. – P. 319–341.
 20. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. – 2003. – Volume 3, №1 (February). – P. 105–114.
 21. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations // Nonlinearity. – 2006. – 19. – P. 27–40.
 22. Pankov A. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity / A. Pankov, V. Rothos // Proc. Royal Society A. – 2008. – 464. – P. 3219–3236.