

Вінницький державний педагогічний університет  
імені Михайла Коцюбинського  
Факультет математики, фізики і комп'ютерних наук

**Кафедра математики та інформатики**

**РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА**

*з математичного аналізу*

II семестр

**Інтегральне числення функції однієї змінної. Числові та  
функціональні ряди**

для студентів предметної спеціальності  
014.09 Середня освіта (Інформатика)



Вінниця 2024

## **Індивідуальний робочий зошит студента**

**Дисципліна:** математичний аналіз

**Розділи:** Інтегральне числення функції однієї змінної. Числові та функціональні ряди

**Автор-укладач:** доктор фізико-математичних наук,  
професор **Бак С. М.**

Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. II семестр. Інтегральне числення функції однієї змінної. Числові та функціональні ряди (для студентів предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика)) [Електронне видання]. Вінниця, 2024. 25 с.

**Рецензенти:** доктор педагогічних наук,  
професор **Ковтонюк М. М.**  
кандидат фізико-математичних наук,  
доцент **Тимошенко О. З.**

**Затверджено** рішенням кафедри математики та інформатики ВДПУ імені Михайла Коцюбинського, протокол № 8 від 13 грудня 2023 року.

## Передмова

**Робочий** зошит з математичного аналізу призначений для використання предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика) при вивченні розділів «Інтегральне числення функції однієї змінної» і «Числові та функціональні ряди».

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних тем, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю.

**Робочий** зошит складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання.

Після кожного розділу подано зразок контрольної роботи. Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

## Робочий план студента

Робочий план студента складений на основі навчальної програми з математичного аналізу, затвердженої Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

| Назви розділів і тем                                                 | Кількість годин |         |    |    |    |      |
|----------------------------------------------------------------------|-----------------|---------|----|----|----|------|
|                                                                      | денна форма     |         |    |    |    |      |
|                                                                      | усього          | зокрема |    |    |    |      |
|                                                                      |                 | лк      | пз | лз | із | с.р. |
| 1                                                                    | 2               | 3       | 4  | 5  | 6  | 7    |
| 2-й семестр                                                          |                 |         |    |    |    |      |
| Розділ 3. Інтегральне числення функції однієї змінної                |                 |         |    |    |    |      |
| Тема 1. Первісна та невизначений інтеграл                            | 6               | 2       | 2  | 0  | 0  | 2    |
| Тема 2. Інтегрування раціональних дробів                             | 6               | 2       | 2  | 0  | 0  | 2    |
| Тема 3. Інтегрування деяких ірраціональних функцій                   | 6               | 2       | 2  | 0  | 0  | 2    |
| Тема 4. Інтегрування деяких трансцендентних функцій                  | 8               | 2       | 2  | 0  | 0  | 4    |
| Тема 5. Визначений інтеграл                                          | 6               | 1       | 1  | 0  | 0  | 4    |
| Тема 6. Інтеграл зі змінною верхньою межею. Формула Ньютона-Лейбніца | 6               | 1       | 1  | 0  | 0  | 4    |
| Тема 7. Основні методи обчислення визначеного інтеграла              | 7               | 2       | 1  | 0  | 0  | 4    |
| Тема 8. Застосування визначених інтегралів                           | 11              | 4       | 3  | 0  | 0  | 4    |
| Разом за розділом 3                                                  | 56              | 16      | 14 | 0  | 0  | 26   |
| Розділ 4. Числові та функціональні ряди                              |                 |         |    |    |    |      |
| Тема 1. Числові ряди та їх збіжність                                 | 7               | 2       | 1  | 0  | 0  | 4    |
| Тема 2. Числові ряди з невід'ємними членами                          | 7               | 2       | 1  | 0  | 0  | 4    |
| Тема 3. Функціональні                                                | 8               | 2       | 2  | 0  | 0  | 4    |

|                                    |           |           |           |          |          |           |
|------------------------------------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|-----------|
| послідовності та ряди              |           |           |           |          |          |           |
| Тема 4. Степеневий ряд             | 12        | 2         | 6         | 0        | 0        | 4         |
| Разом за розділом 4                | 34        | 8         | 10        | 0        | 0        | 16        |
| <b>Усього годин за 2-й семестр</b> | <b>90</b> | <b>24</b> | <b>24</b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>42</b> |

#### Розподіл балів (за видами діяльності)

| №                                  | Вид діяльності    | Коефіцієнт вартості (бали) | Кількість робіт | Результат (бали) |
|------------------------------------|-------------------|----------------------------|-----------------|------------------|
| 1.                                 | Домашні завдання  | 1                          | 10              | 10               |
| 2.                                 | Конспект          | 10                         | 1               | 10               |
| 3.                                 | Контрольна робота | 20                         | 2               | 40               |
| 4.                                 | Колоквіум/Тест    | 20                         | 1               | 20               |
| <b>Всього за семестр:</b>          |                   |                            |                 | <b>80</b>        |
| <b>Залік</b>                       |                   |                            |                 | <b>20</b>        |
| <b>Підсумковий рейтинговий бал</b> |                   |                            |                 | <b>100</b>       |

#### Шкала оцінювання: сто балова, ECTS, розширена

| Сума балів за всі види навчальної діяльності | Оцінка ECTS | Оцінка за розширеною шкалою                               |
|----------------------------------------------|-------------|-----------------------------------------------------------|
|                                              |             | <i>Для екзамену, заліку, курсової роботи, практики</i>    |
| 90-100                                       | A           | ВІДМІННО                                                  |
| 80-89                                        | B           | ДУЖЕ ДОБРЕ                                                |
| 75-79                                        | C           | ДОБРЕ                                                     |
| 60-74                                        | D           | ЗАДОВІЛЬНО                                                |
| 50-59                                        | E           | ДОСТАТНЬО                                                 |
| 35-49                                        | FX          | НЕЗАДОВІЛЬНО З МОЖЛИВІСТЮ ПОВТОРНОГО СКЛАДАННЯ            |
| 1-34                                         | F           | НЕПРИЙНЯТНО З ОБОВ'ЯЗКОВИМ ПОВТОРНИМ ВИВЧЕННЯМ ДИСЦИПЛІНИ |

## Практичне заняття № 1

**Тема: Первісна та невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування**

**✎1.** Перевірити, чи функція  $F$  є первісною для функції  $f$  на проміжку  $X$ :

а)  $F(x) = x^3 + x^2 + 3x + 4$ ,  $f(x) = 3x^2 + 2x + 3$ ,  $X = \mathbb{R}$ ;

б)  $F(x) = -\frac{1}{x^2} + 5$ ,  $f(x) = \frac{2}{x^3}$ ,  $X_1 = (2; 5)$ ,  $X_2 = (-1; 1)$ ;

в)  $F(x) = \frac{1}{8} \arcsin^8 x$ ,  $f(x) = \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}$ ,  $X = (-1; 1)$ ;

г)  $F(x) = \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1} + 3$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x + 1}}$ ,  $X = \mathbb{R}$ ;

**✎2.** Обчислити інтеграли:

а)  $\int x(x+3)(x-2)dx$ ;                      б)  $\int \sqrt[3]{x\sqrt{x}\sqrt{x}} dx$ ;

в)  $\int \left( \frac{8}{x^3} + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x} \right) dx$ ;                      г)  $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x}} dx$ ;

д)  $\int 2^x \cdot 3^x \cdot e^x dx$ ;                      е)  $\int \frac{2^x + 3^x}{6^x} dx$ .

**✎3.** Обчислити інтеграли  $\left( \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \right)$ :

а)  $\int (4x-3)^7 dx$ ;                      б)  $\int \cos(ax+b)dx$ ,  $a \neq 0$ ;

в)  $\int \frac{dx}{(2x+5)^4}$ ;                      г)  $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b)dx$ ;

д)  $\int \sqrt{ax+bdx}$ ;                      е)  $\int \frac{dx}{\cos^2(ax+b)}$ ,  $a \neq 0$ .

**✎4.** Обчислити інтеграли:

а)  $\int \frac{(2x+7)dx}{x^2+7x+8}$ ;                      б)  $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$ ;

$$\text{в)} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x};$$

$$\text{г)} \int \frac{(tg^2 x - 2tg x + 1) dx}{\cos^2 x};$$

$$\text{д)} \int \frac{x dx}{(1-x^2)^2};$$

$$\text{е)} \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{2x} + 2}}.$$

**5. Обчислити інтеграли:**

$$\text{а)} \int x \cdot 2^x dx;$$

$$\text{б)} \int x^5 \ln x dx;$$

$$\text{в)} \int x^2 \cos x dx;$$

$$\text{г)} \int (ax^2 + bx + c) \sin 2x dx.$$

## 📖 Практичне заняття № 2

### Тема: Інтегрування раціональних функцій

**1. Обчислити інтеграли:**

$$\text{а)} \int \frac{x-4}{x^2-5x+6} dx;$$

$$\text{б)} \int \frac{x^3-7x+18}{x^2-3x+2} dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{3x-1}{x^3-x^2-2x} dx;$$

$$\text{д)} \int \frac{2x^2+3x+8}{(x+1)(2x+3)(3x+4)} dx;$$

$$\text{е)} \int \frac{x^7-5x^5+7x^4+4}{x^5-5x^3+4x} dx.$$

**2. Обчислити інтеграли:**

$$\text{а)} \int \frac{x^4}{(x+1)^2(x-2)} dx;$$

$$\text{б)} \int \frac{x^5+x}{(x+2)^2(x+3)^2} dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3};$$

$$\text{г)} \int \frac{2x^4+3x^2+x-1}{x^3-3x^2} dx.$$

**3. Обчислити інтеграли:**

$$\text{а)} \int \frac{dx}{x^2+4x+9};$$

$$\text{б)} \int \frac{2x+3}{x^2+8x+20} dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{(x+1)dx}{(x^2-6x+5)(x^2+6x+10)}; \quad \text{г)} \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx;$$

$$\text{д)} \int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4} dx;$$

$$\text{е)} \int \frac{3x+5}{x(x^2+1)^2} dx;$$

$$\epsilon) \int \frac{3x^4 - 4}{x^2(x^2 + 2)^3} dx;$$

$$\text{ж)} \int \frac{x(2x^2 + 2x - 1)}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

**4. Обчислити інтеграли методом Остроградського:**

$$\text{а)} \int \frac{x^4 + x^3 + x + 4}{(x^3 + 1)^2} dx;$$

$$\text{б)} \int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} dx; \quad \text{г)} \int \frac{2x+1}{(x^2 + 2x + 5)^2} dx; \quad \text{д)} \int \frac{(4x^2 - 8x)dx}{(x-1)^2(x^2 + 1)^2}.$$

### Практичне заняття № 3

**Тема: Інтегрування деяких ірраціональних функцій**

**1. Обчислити інтеграли ( $\int R(x, x^{r_1}, \dots, x^{r_k}) dx$ ):**

$$\text{а)} \int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x^2}};$$

$$\text{б)} \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3 + 1}};$$

$$\text{в)} \int \frac{x dx}{\sqrt{x + \sqrt[3]{x}}};$$

$$\text{г)} \int \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{5}{4}}\right) dx}{x^{\frac{1}{2}+1}}.$$

**2. Обчислити інтеграли**

$$\left(\int R\left(x, \sqrt[n]{(ax+b)^m}\right) dx; \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx\right):$$

$$\text{а)} \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{dx}{1-x};$$

$$\text{б)} \int \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{dx}{x\left(2 + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x}}\right)};$$

$$\text{д)} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}};$$

$$\text{е)} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}.$$

**3. Обчислити інтеграли за допомогою підстановок Ейлера:**

$$\text{а)} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}};$$

$$\text{б)} \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx;$$

$$\text{в)} \int \frac{x-1}{(x^2+2x)^{\frac{3}{2}}} dx; \quad \text{г)} \int \frac{x dx}{\sqrt{7x-10-x^2}};$$

$$\text{д)} \int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2} dx, \quad x > -1; \quad \text{е)} \int \frac{dx}{(1+\sqrt{x^2+x})^2}.$$

**4.** Обчислити інтеграли (частинні випадки квадратичних ірраціональностей):

$$\text{а)} \int \frac{x^{10} dx}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$\text{б)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+7}};$$

$$\text{в)} \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}};$$

$$\text{г)} \int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}};$$

$$\text{д)} \int \frac{x^3 dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}};$$

$$\text{е)} \int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}.$$

**5.** Обчислити інтеграли  $\int x^m (a+bx^n)^p dx$  за допомогою підстановок Чебишева:

$$\text{а)} \int \sqrt{x} (1+\sqrt[3]{x})^3 dx;$$

$$\text{б)} \int \frac{\sqrt{x} dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2};$$

$$\text{в)} \int \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}} dx;$$

$$\text{г)} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x^2}};$$

$$\text{д)} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}};$$

$$\text{е)} \int x\sqrt{1+x^4} dx;$$

$$\text{є)} \int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} dx;$$

$$\text{ж)} \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x} dx.$$

## Практичне заняття № 4

**Тема: Інтегрування деяких трансцендентних функцій**

**1.** Обчислити інтеграли:

$$\text{а)} \int \sin 2x \sin 3x dx;$$

$$\text{б)} \int \sin 7x \sin 15x dx;$$

$$\text{в)} \int \sin 3x \cos 8x dx;$$

$$\text{г)} \int \cos 4x \cos 9x dx;$$

д)  $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$ ;      е)  $\int \cos x \cos 3x \cos 5x dx$ .

**2.** Обчислити інтеграли, використовуючи універсальну підстановку  $\left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \right)$ :

а)  $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}$ ;      б)  $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$ ;  
 в)  $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$ ;      г)  $\int \frac{(1 + \sin x) dx}{\sin x (1 + \cos x)}$ .

**3.** Обчислити інтеграли, використовуючи тригонометричні підстановки:

а)  $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x}$ ;      б)  $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x}$ ;  
 в)  $\int \sin^7 2x \cos^5 2x dx$ ;      г)  $\int \frac{\sin 3x dx}{\cos x}$ ;  
 д)  $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^3 x}$ ;      е)  $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$ ;  
 є)  $\int \frac{\sin^2 x \cos x dx}{\sin^4 x - 1}$ ;      ж)  $\int \frac{(\cos^5 x + 2 \cos^3 x) dx}{\sin^4 x + \sin^2 x}$ .

**4.** Обчислити інтеграли, використовуючи тригонометричні підстановки:

а)  $\int \frac{\cos^2 x \sin^2 x dx}{\sin^8 x + \cos^8 x}$ ;      б)  $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$ ;  
 в)  $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x}$ ;      г)  $\int \frac{dx}{\cos^4 x \sin^2 x}$ ;  
 д)  $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$ ;      е)  $\int \operatorname{ctg}^6 x dx$ ;  
 є)  $\int \frac{(2 \operatorname{tg} x + 3) dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}$ ;      ж)  $\int \frac{(3 \cos x - 8 \sin x) dx}{7 \cos x + 4 \sin x}$ ;  
 з)  $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ ;      и)  $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$ .

**5.** Обчислити інтеграли:

а)  $\int \frac{x e^x dx}{(x+1)^2}$ ;      б)  $\int x e^{\sqrt{x}} dx$ ;

$$в) \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x dx;$$

$$г) \int \frac{\operatorname{ch}^3 x dx}{\operatorname{sh}^4 x}.$$

## 📖 Практичне заняття № 5

**Тема: Означення та основні властивості визначеного інтеграла.**

### Формула Ньютона-Лейбніца

**✎1.** Обчислити визначені інтеграли як границі інтегральних сум Рімана, розбивши відрізок інтегрування на  $n$  рівних частин:

$$а) \int_0^1 e^x dx; \quad б) \int_0^2 x^2 dx; \quad в) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx; \quad г) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx.$$

**✎2.** Користуючись геометричним змістом інтегралу обчислити:

$$а) \int_1^2 \sqrt{2x - x^2} dx; \quad б) \int_0^2 \sqrt{4x - x^2} dx;$$

$$в) \int_{-1}^5 \sqrt{5 + 4x - x^2} dx; \quad г) \int_{-1}^2 ||x| - 1| dx.$$

**✎3.** Довести, що кожний з інтегралів дорівнює нулю:

$$а) \int_{-3}^3 x \sqrt{9 - x^2} dx; \quad б) \int_{-10}^{10} \lg(x + \sqrt{1 + x^2}) dx;$$

$$в) \int_{-2}^2 (|x - 1| + |x + 1| - 2|x|) dx; \quad г) \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx.$$

**✎4.** Оцінити інтеграли:

$$а) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} dx; \quad б) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}};$$

$$в) \int_0^1 \frac{x^9 dx}{\sqrt{1 + x}}; \quad г) \int_{100}^{200} \frac{x^3 dx}{x^4 + x + 1}.$$

**✎5.** Обчислити інтеграли, користуючись формулою Ньютона-Лейбніца:

$$а) \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx; \quad б) \int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx;$$

$$в) \int_1^2 \frac{x^4 + x^2 - 2}{x^2} dx;$$

$$г) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^7 - 2x^5 + 3x^3 - x + 1}{\cos^2 x} dx.$$

**6.** Обчислити інтеграли, користуючись правилом заміни змінної:

$$а) \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}};$$

$$б) \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$в) \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}};$$

$$г) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}.$$

**7.** Обчислити інтеграли, користуючись формулою інтегрування частинами:

$$а) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \arctg x dx;$$

$$б) \int_1^2 x^3 \ln x dx;$$

$$в) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin x dx;$$

$$г) \int_0^1 e^x \cos x dx.$$

## 📖 Практичне заняття № 6

### Тема: Застосування визначеного інтеграла

**1.** Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій:

$$а) y = x^3, x = 1, x = 3;$$

$$б) y = x^2 + 4x, y = x + 4;$$

$$в) y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = 3x;$$

$$г) y = x^2 + 1, y = \frac{1}{2}x^2 + 1, x = 1, x = 2;$$

$$д) y = -x^2 - 4x, y = 1, x = -3, x = -1; \quad е) xy = 4, x + y - 5 = 0.$$

**2.** Знайти довжину кривої:

$$а) y = 2x^{\frac{3}{2}}, 0 \leq x \leq 2\sqrt{3};$$

$$б) y = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}, 0 \leq x \leq 9;$$

$$в) y = x^2 - 2x + 2, -1 \leq x \leq 1;$$

$$г) y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, 1 \leq x \leq 2.$$

**3.** Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими, навколо осі  $l$ :

$$а) y = 2x - x^2, y \geq 0, l: Ox; l: Oy;$$

б)  $y = x^2 + 1, x = 0, x = 1, y = 0;$

в)  $y = 2x, y = x + 3, x = 0, x = -1;$

г)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, l: Ox; l: Oy;$

д)  $x^2 + (y - b)^2 = a^2, l: Ox.$

**4.** Знайти статичні моменти  $M_x$  та  $M_y$  однорідної кривої:

а)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, x \geq 0, y \geq 0;$

б)  $y^2 = 2x, 0 \leq x \leq 2;$

в)  $x = a \sin^3 t, y = b \cos^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$

г)  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi;$

д)  $\rho = 2a \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$

е)  $\rho = ae^\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$

**5.** Знайти координати центра мас однорідної кривої:

а)  $x = R \cos \varphi, y = R \sin \varphi, |\varphi| \leq \alpha \leq \pi;$

б)  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, x \geq 0, y \geq 0;$

в)  $y = ach\left(\frac{x}{a}\right), |x| \leq b;$

г)  $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y, 1 \leq y \leq 2;$

д)  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi;$

**6.** Знайти статичні моменти  $M_x$  та  $M_y$  однорідної фігури, обмеженої кривими:

а)  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, x = 0, y = 0, a > 0, b > 0;$

б)  $y = \cos x, |x| \leq \frac{\pi}{2}, y = 0;$

в)  $y = x^2, y = \sqrt{x};$

г)  $x = \frac{2}{1+x^2}, y = x^2, x = 0, x \geq 0;$

д)  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi;$

е)  $\rho = a(1 + \cos \varphi), |\varphi| \leq \pi$ ;

є)  $\rho = a\varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$ .

**7.** Знайти координати центра мас однорідної фігури, обмеженої кривими:

а)  $y = h\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), y = 0, h > 0, a > 0$ ;

б)  $y^2 = \frac{x^3}{a}, x = a, y = 0, a > 0, y \geq 0$ ;

в)  $y = a \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right), y = 0, |x| = b, a > 0$ ;

г)  $y = \frac{2}{\pi}x, y = \sin x, y = 0$ ;

д)  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ ;

## Практичне заняття № 7

### Контрольна робота №1 (зразок)

**1.** Обчислити інтеграл від дробово-раціональної функції:

$$\int \frac{2x + 3}{x^2 + 8x + 20} dx.$$

**2.** Обчислити інтеграл від тригонометричної функції:

$$\int \sin^7 2x \cos^5 2x dx.$$

**3.** Обчислити інтеграл, користуючись формулою інтегрування частинами:

$$\int_1^2 x^3 \ln x dx.$$

**4.** Обчислити площу фігури, обмеженої кривими:  $y = 2 - x^2, y = x$ .

## Практичне заняття № 8

**Тема: Числові ряди та їх збіжність. Числові ряди з невід'ємними членами**

**1.** Знайти  $n$ -у часткову суму  $S_n$  ряду і суму  $S$  ряду:

а)  $\frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \dots + \frac{2}{5^n} + \dots;$

б)  $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right) + \dots;$

в)  $\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots;$

г)  $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots;$

д)  $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots;$

е)  $\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} + \dots;$

є)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3};$

ж)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2 - 24n - 5};$

з)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$

и)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)};$

і)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n} \cos \frac{3}{2^n};$

к)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}.$

**2.** Довести розбіжність ряду, використовуючи необхідну умову збіжності:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n;$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,001};$

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1};$

г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n};$

$$д) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n^2 + 1}{n+2} \arcsin \frac{1}{n^2 + 2n + 3}; \quad е) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)}.$$

**3.** Користуючись критерієм Коші, довести збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,

якщо:

$$а) u_n = \frac{\cos nx}{2^n};$$

$$б) u_n = \frac{\sin n\alpha}{n(n+1)};$$

$$в) u_n = \frac{\cos \alpha^n}{n^2};$$

$$г) u_n = \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}.$$

**4.** Скориставшись ознакою порівняння, дослідити на збіжність ряди:

$$а) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n};$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{n^2}{n+1}};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{4^n};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right);$$

$$д) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 5}{n^2 + 4};$$

$$е) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \cos n}{3^n + \sin n};$$

$$е) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{n+1}}{\sqrt{n}};$$

$$ж) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n + 1};$$

$$з) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1 + (-1)^n}{2}}{n^3 + 2};$$

$$и) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} (2 + (-1)^n)}{\ln(1+n)}.$$

**5.** Скориставшись ознакою Даламбера, дослідити на збіжність ряди:

$$а) 2 + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \dots + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)} + \dots;$$

$$б) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n+1)};$$

$$д) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n+2)}{2^n (n+1)!};$$

$$е) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n};$$

$$е) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 4^{3n}}.$$

**6.** Скориставшись ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{-n^2};$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(1+n)};$

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3} \right)^{n^{\frac{3}{2}}};$

г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{6n+1}{5n-3} \right)^{\frac{n}{2}} \left( \frac{5}{6} \right)^{\frac{2n}{3}};$

д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n^2}{2n+1} \right)^n \arcsin^n \frac{1}{n};$

е)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}}{(3n^2 + 2n + 1)^{\frac{n+3}{2}}};$

є)  $\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \dots$

$\left( \sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4} \right);$

ж)  $\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} + \dots$

**7.** Встановивши збіжність ряду, довести, що:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0;$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0;$

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{(2n)!} = 0;$

г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{4^{n^2}} = 0.$

**8.** Скориставшись інтегральною ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)};$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1) \ln(\ln(n+1))};$

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2;$

г)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1};$

д)  $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{(5n^2 - 9) \ln(n-2)}.$

## 📖 Практичне заняття № 9

### Тема: Степеневі ряди. Область збіжності

✎1. Знайти радіус збіжності  $R$ , інтервал і область збіжності степеневому ряду:

а)  $\frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{x^n}{n(n+2)} + \dots;$

б)  $\frac{\ln 2}{1} x^2 + \frac{\ln 3}{2} x^3 + \dots + \frac{\ln(n+1)}{n} x^{n+1} + \dots;$

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{3^{n-1} n \sqrt{n}};$

г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}};$

д)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(x-5)^{n+1}}{(n+1)!};$

е)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n \cdot 4^n};$

є)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n} (n+1) \ln(n+1)};$

ж)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n;$

з)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n (x+2)^n;$

и)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}} (x+2)^n;$

і)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n, \quad a > 0, \quad b > 0;$

ї)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}, \quad a > 0, \quad b > 0.$

✎2. Знайти радіус збіжності і суму степеневому ряду:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!};$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!};$

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (4x)^n;$

г)  $\sum_{n=1}^{\infty} 3n x^{3n-1};$

д)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3};$

е)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1};$

є)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^{n-1}};$

ж)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1};$

з)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^{3n-2}}{3n-2};$

и)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3x-1)^n}{n(n+3)}.$

✎3. Знайти суму числового ряду:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n!};$$

$$б) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{n!};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n+1)^2};$$

$$д) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)};$$

$$е) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)};$$

$$е) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2};$$

$$ж) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)};$$

$$з) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)};$$

$$и) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(3n+1)}.$$

**4.** Самостійно побудувати рівномірно збіжний функціональний ряд, з допомогою диференціювання або інтегрування його записати числовий ряд при конкретних значеннях  $x$ :

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!};$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1};$$

$$д) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

## Практичне заняття № 10

### Тема: Розклад функцій у степеневі ряди

**1.** Розкласти функцію  $f(x)$  в ряд Тейлора в околі точки  $x_0$ :

$$a) f(x) = x^3 + 2x + 2, \quad x_0 = -1;$$

$$б) f(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4, \quad x_0 = -1;$$

$$в) f(x) = x^6, \quad x_0 = -2;$$

$$г) f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 2, \quad n = 4;$$

$$д) f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}, \quad x_0 = 2;$$

$$е) f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$е) f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}, \quad x_0 = 0;$$

$$ж) f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x_0 = 0; \quad x_0 = 1.$$

**2.** Використовуючи відомі розклади функцій в степеневий ряд, розкласти функцію в ряд Маклорена:

$$a) \frac{x^{10}}{1-x};$$

$$б) \frac{x^2}{(1+x)^2};$$

$$в) \frac{1}{(1-x^3)^2};$$

$$\begin{array}{lll} \text{г)} (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}; & \text{д)} \frac{5x-4}{x+2}; & \text{е)} \frac{5-2x}{x^2-5x+6}; \\ \text{є)} \frac{1}{1+x+x^2}; & \text{ж)} \frac{1}{1-x-x^2}; & \text{з)} \frac{1}{x^3+x^2+3x+3}; \\ \text{и)} \ln \frac{2x+1}{x^2-4x+4}; & \text{і)} (x^2+5) \ln \frac{9-x^2}{4-x^2}; & \text{ї)} \ln(12-x-x^2); \\ \text{к)} \cos^2 x; & \text{л)} \sin 3x \sin 5x; & \text{м)} \sin^3 x. \end{array}$$

**3.** Використовуючи відомі розклади функцій в степеневий ряд, довести, що:

$$\begin{array}{l} \text{а)} \frac{1}{a+bx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^n}{a^{n+1}} x^n, \quad |x| < \left| \frac{a}{b} \right|, \quad ab \neq 0; \\ \text{б)} \frac{1}{x^2+a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{2(n+1)}} x^{2n}, \quad |x| < |a|, \quad a \neq 0; \\ \text{в)} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{a^{2n+1}(2n)!!} x^{2n}, \quad |x| < a, \quad a > 0; \\ \text{г)} \sqrt{a^2+x^2} = a + \frac{x^2}{2a} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{a^{2n-1}(2n)!!} x^{2n}, \quad |x| < a, \quad a > 0; \\ \text{д)} \ln(a+bx) = \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{b}{a} \right)^n \frac{x^n}{n}, \quad |x| < \frac{a}{|b|}, \quad a > 0, \quad b \neq 0. \end{array}$$

**4.** Розкласти у ряд Маклорена функцію  $f(x)$ , скориставшись рядом Маклорена для її похідної, і знайти радіус збіжності цього ряду:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} f(x) = \operatorname{arctg} x; & \text{б)} f(x) = \arcsin x; \\ \text{в)} f(x) = (1+x) \ln(1+x); & \text{г)} f(x) = \ln \left( x + \sqrt{x^2+1} \right); \\ \text{д)} f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-x}{1+2x}; & \text{е)} f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}; \\ \text{є)} f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}; & \text{ж)} f(x) = \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{16+x^4}}. \end{array}$$

**5.** Розкласти у ряд Маклорена функцію і знайти радіус збіжності ряду:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} x \ln \left( x + \sqrt{x^2+2} \right); & \text{б)} x \ln \left( x^2 + \sqrt{9+x^4} \right); \\ \text{в)} (x^2-1) \arcsin 2x^2; & \text{г)} x^2 \arccos 2x; \end{array}$$

$$д) x \arcsin x + \sqrt{1-x^2};$$

$$е) x \arccos x - \sqrt{1-x^2};$$

$$е) \ln \left( \pi \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \right) + \operatorname{arctg} \frac{x}{2};$$

$$ж) \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$$

**6.** Розкласти функцію в ряд Тейлора в околі точки  $x_0$  і знайти його радіус збіжності:

$$а) \frac{1}{x^2 - 5x + 6}, \quad x_0 = 1;$$

$$б) \frac{1}{(x^2 - 6x + 18)^2}, \quad x_0 = 3;$$

$$в) \frac{1}{\sqrt{x^2 - 12x + 40}}, \quad x_0 = 6;$$

$$г) (x+1) \cos^2 x, \quad x_0 = -1;$$

$$д) \cos^4 x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{2};$$

$$е) \ln(x^2 + 2x + 2), \quad x_0 = -1;$$

$$є) \ln(x^2 - 9x + 20), \quad x_0 = 3.$$

**7.** Використовуючи інтегрування, знайти суму ряду:

$$а) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1};$$

$$г) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$$

## Практичне заняття № 11

### Тема: Застосування степеневих рядів

**1.** Обчислити із заданою точністю  $\varepsilon = 10^{-4}$ :

$$а) \cos 1^0; \quad б) \cos 10^0; \quad в) \sin 10^0; \quad г) \sin 1^0;$$

$$д) \sqrt[3]{130}; \quad е) \sqrt[3]{500}; \quad є) \sqrt[3]{68}; \quad ж) \sqrt[7]{129};$$

$$з) \ln 1,2; \quad и) \ln 1,3; \quad і) \ln 0,98; \quad ї) \sqrt[10]{1000};$$

$$к) \sqrt{e}; \quad л) \frac{1}{\sqrt[3]{e}}; \quad м) \arcsin \frac{1}{3}; \quad н) \operatorname{arctg} \frac{\pi}{10}.$$

**2.** Обчислити інтеграли із заданою точністю  $\varepsilon = 10^{-4}$ :

$$а) \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$б) \int_0^1 \sin x^2 dx;$$

$$в) \int_0^{0,8} x^{10} \sin x dx;$$

$$\begin{array}{lll} \text{г)} \int_0^{0,5} x \ln(1+x^2) dx; & \text{д)} \int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx; & \text{е)} \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx; \\ \text{є)} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctg x}{x} dx; & \text{ж)} \int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}; & \text{з)} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}. \end{array}$$

**3. Знайти похідну  $k$ -го порядку функції  $f(x)$  у точці  $x_0$ :**

$$\begin{array}{l} \text{а)} f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad k=7, \quad x_0=0; \\ \text{б)} f(x) = x^6 e^x, \quad k=10, \quad x_0=0; \\ \text{в)} f(x) = x^2 \ln(4+x^2), \quad k=11, \quad x_0=0; \\ \text{г)} f(x) = \frac{1}{(x^2-6x+18)^2}, \quad k=6, \quad x_0=3; \\ \text{д)} f(x) = \ln \frac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}}, \quad k=4, \quad x_0=0; \\ \text{е)} f(x) = \ln \frac{x^2-2x+3}{2-x}, \quad k=7, \quad x_0=1. \end{array}$$

**4. Знайти границі:**

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin^2 x}{x^2} \right)^{(n)}; & \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} \right)^{(n)}; \\ \text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \left( \frac{\arctg x}{x} \right)^2 \right)^{(n)}; & \text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \arctg x \cdot \ln(1+x^2) \right)^{(n)}; \\ \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2x(1-x^2)} \ln \frac{1+x}{1-x} \right)^{(n)}; & \text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} \right)^{(n)}. \end{array}$$

**5. Обчислити похибку наближеної рівності**

$$\ln(n+1) \approx \ln n + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)^{2k-1}}$$

*і обчислити  $\ln 2, \ln 3, \ln 4, \ln 5, \ln 10$  з точністю до  $10^{-4}$ .*

## Практичне заняття № 12

### Контрольна робота № 2 (зразок)

✎1. Знайти суму ряду:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}$ .

✎2. Дослідити на збіжність ряд:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$ .

✎3. Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряду:  
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^{n-1}}$ .

✎4. Розвинути функцію у ряд Маклорена:  $f(x) = \ln(12 - x - x^2)$ .

## Список рекомендованої літератури

### Основна

1. Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. I семестр (спеціальність 014.09 Середня освіта (Інформатика)). Вінниця, 2017. 57 с.
2. Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. II семестр (спеціальність 014.09 Середня освіта (Інформатика)). Вінниця, 2018. 26 с.
3. Бак С.М. Робочий зошит студента зі вступу до математичного аналізу (для студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)). Вінниця, 2022. 61 с.
4. Бак С.М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. III семестр. Визначений інтеграл. Ряди (для студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)). Вінниця, 2020. 38 с.
5. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу. Вступ в аналіз. Диференціальне числення функції однієї змінної. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: «Едельвейс і К», 2008. 299 с.
6. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу. Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер», 2013. 289 с.

### Додаткова

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: У 3-х ч.: Підр. Київ: Вища школа, 1990. Ч. 1. 383 с.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: У 3-х ч.: Підр. Київ: Вища школа, 1991. Ч. 2. 366 с.
3. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.І. Математичний аналіз: Підручник. Київ: Знання, 2008. 421 с.
4. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по началам анализа. Киев: «Магістр – S», 1998. 416 с.
5. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Київ: Вища школа, 1994. Ч. 1. 423 с.
6. Шкіль М. І. Математичний аналіз. Київ: Вища школа, 1995. Ч. 2. 509 с.

### Інформаційні ресурси

1. Сайт Бака С. М. <https://sites.google.com/site/sajtbakasm/>
2. Сайт Ковтонюк М.М. [www.kovtonyuk.inf.ua](http://www.kovtonyuk.inf.ua)
3. <http://www.twirpx.com/>

**Навчальне видання**

**Бак Сергій Миколайович**

Комп'ютерна верстка та набір Бака С.М.

**РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА**  
**з математичного аналізу, II семестр.**  
**Інтегральне числення функції однієї змінної. Числові та**  
**функціональні ряди**

Для студентів предметної спеціальності  
014.09 Середня освіта (Інформатика)

---

21000, м. Вінниця, вул. Острозького, 32