

Анна Гетманчук, Сергій Бак, Галина Ковтонюк

ІСНУВАННЯ І СТІЙКІСТЬ МУЛЬТИБРИЗЕРІВ В ДИСКРЕТНИХ РІВНЯННЯХ ТИПУ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

Анотація. У статті розглядаються питання існування та стійкості мультибризерів у нелінійних дискретних рівняннях типу Клейна–Гордона з лінійними зв'язками між вузлами, що виходять за межі взаємодії найближчих сусідів.

Ключові слова: дискретні рівняння типу Клейна–Гордона, дискретні бризери, мультибризери, гамільтоніан, існування, стійкість.

Вступ. Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи мають широке застосування при моделюванні складних квантових явищ. Серед таких систем найбільш відомими є системи типу Фермі–Пасти–Улама, дискретні нелінійне рівняння типу Шредінгера, дискретні рівняння типу Клейна–Гордона.

Серед розв'язків таких систем особливе місце займають біжучі і стоячі хвилі та дискретні бризери. Біжучі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна–Гордона вивчалися в статтях [1–6]. Умови існування стоячих хвиль в таких рівняннях досліджено в працях [7–9]. Періодичні розв'язки (дискретні бризери) таких систем вивчалися в працях [10–23].

Зазначимо, що дискретні бризери – це просторово локалізовані, часово-періодичні розв'язки нелінійних гратчастих систем. Іншими словами, бризер – це «дихаючий солітон», тобто коливання, затиснене на одному єдиному вузлі ґратки. З часу їх чисельного відкриття та строгого теоретичного обґрунтування ці об'єкти привернули широку увагу завдяки застосуванням у фізиці конденсованого стану, біофізиці, нелінійній оптиці та атомній фізиці. Зокрема, мультибризери – розв'язки, у яких збуджено кілька сусідніх вузлів ґратки, – є важливим класом нелінійних мод, що безпосередньо впливають на процеси перенесення енергії та стабільність нелінійних гратчастих систем. Класичний ланцюг Клейна–Гордона з взаємодіями лише найближчих сусідів є найбільш вивченою моделлю для таких структур. Зокрема, доведено, що між послідовними осциляторами допускаються лише фазові різниці $\phi = 0$ або $\phi = \pi$. Однак у

реальних фізичних системах – зокрема у моделях ДНК, зигзагоподібних хвилевидних масивах нелінійної оптики та двовимірних кристалічних ґратках – взаємодії між вузлами не обмежуються найближчими сусідами. Наявність взаємодій далекого радіусу суттєво змінює топологію розв'язків і їхню стійкість, що робить узагальнення теорії мультибрізерів на цей випадок актуальною науковою задачею.

Метою цієї статті є дослідження існування та стійкості за першим наближенням мультибрізерів в дискретних рівняннях типу Клейна–Гордона з довільним радіусом взаємодії r .

Виклад основного матеріалу. Розглянемо класичні дискретні рівняння Клейна–Гордона в безрозмірних змінних (з $r = 1$)

$$\ddot{q}_i = -V'(q_i) + \varepsilon(q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1}), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

де $q_i(t)$ – узагальнена координата i -го осцилятора (відхилення від положення рівноваги), ε – малий параметр, $V(x)$ – нелінійний потенціал на вузлі. Рівняння (1) описують динаміку осциляторів в нескінченному ланцюзі з лінійною взаємодією найближчих сусідів (рис. 1). Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь. Зауважимо, що система (1) є гамільтоновою з гамільтоніаном

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left[\frac{p_i^2}{2} + V(q_i) \right] + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} (q_i - q_{i-1})^2.$$

З фізичної точки зору гамільтоніан визначає повну енергію системи.

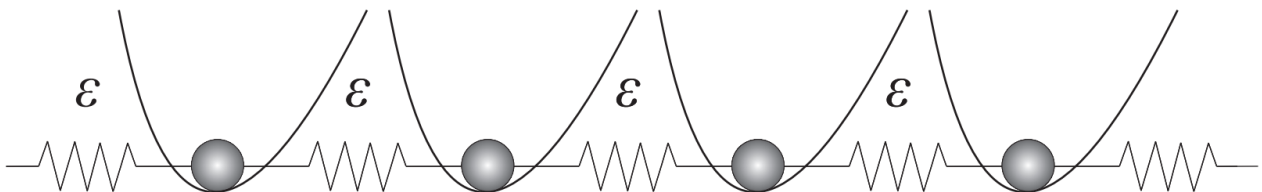


Рис. 1. Класичний ланцюг Клейна–Гордона з взаємодією найближчих сусідів

Рівняння (1) передбачають взаємодію лише найближчих осциляторів (локальна взаємодія). Проте більш загальним є випадок нелокальної взаємодії, коли кожен осцилятор взаємодіє з r сусідами з кожного боку (рис. 2).

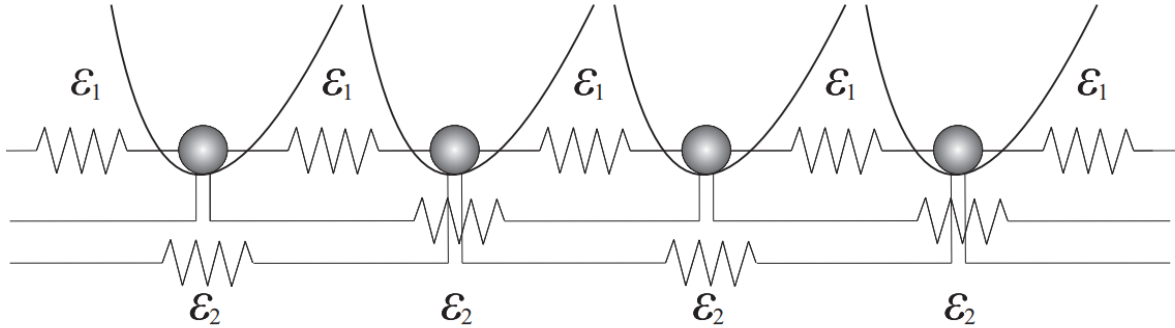


Рис. 1. Ланцюг Клейна–Гордона з нелокальною взаємодією при $r = 2$

У випадку нелокальної взаємодії при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ рівняння динаміки ланцюга осциляторів мають вигляд

$$\ddot{q}_i = -V'(q_i) + \varepsilon \sum_{j=1}^r (q_{i-j} + q_{i+j} - 2q_i), \quad i \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Припускається, що кожен послідовний n осциляторів, починаючи з першого, знаходяться у стані спокою, а кожний $(n+1)$ -й осцилятор (будемо такі осцилятори називати «центральними») рухається незалежною періодичною орбітою з частотою ω .

Функцію координати кожного осцилятора при $\varepsilon = 0$ можна розкласти в ряд Фур'є:

$$q_i(w_i) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(J_i) \cos(mw_i),$$

де A_m – гармонійні амплітуди, J_i – дія, яка залишається сталою вздовж орбіти в антиконтинуальній границі (випадок відсутності взаємодії сусідніх осциляторів).

Виявляється, що періодичний у часі та локалізований у просторі рух збуджених осциляторів збережеться і при $\varepsilon = 0$, створюючи мультибризери тієї самої частоти ω , якщо різниця фаз між сусідніми центральними осциляторами задовольняє певним умовам. Таку властивість збереження мультибризерів

називають *персистентністю*. Умови персистентності мультибризерів мають вигляд ([12]):

$$\frac{\partial H_1}{\partial \phi_i} = 0 \Rightarrow M(\phi) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} m A_m^2 \sin(m\phi_i) = 0, \quad i = 1 \dots n,$$

де $\phi_i = w_{i+1} - w_i$ – фазова різниця між сусідніми осциляторами. У класичному випадку ($r=1$) єдиними розв'язками є $\phi_i = 0$ або $\phi_i = \pi$ (синфазний та протифазний мультибризер). При $r \geq 2$ з'являються розв'язки з $\phi_i \notin \{0, \pi\}$ $\phi_i \notin \{0, \pi\}$ – так звані мультибризери із зсувом фаз.

Зауважимо, що часто мультибризер є персистентним (існує), але лінійно нестійким (швидко руйнується через експоненціальне зростання амплітуди збурень). Тобто *стійкість* показує, чи витримає цей мультибризер малі збурення в реальному часі. Стійкість залежить від типу нелінійності та знаку зв'язку між вузлами. Виявляється, що для системи (1) при $P \equiv \varepsilon \frac{\partial w}{\partial J} < 0$ єдиним лінійно стійким є протифазний мультибризер, а при $P > 0$ – синфазний.

Висновки. Таким чином, у роботі досліджено питання існування і стійкості мультибризерів в дискретних рівняннях типу Клейна–Гордона з лінійними взаємодіями, що відкриває перспективи для подальших теоретичних і прикладних досліджень.

Список використаних джерел:

1. Bak S. M. Periodic traveling waves in chains of oscillators. *Communications in Mathematical Analysis*. 2007. Vol. 3, № 1. P. 19-26.
2. Bak S. N., Pankov A. A. Traveling waves in systems of oscillators on 2D-lattices. *Journal of Mathematical Sciences*. 2011. Vol. 174, № 4 (April). P. 437-452.
3. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 217, № 2 (August). P. 187-197.
4. Bak S.M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice. *Ukrainian mathematical Journal*. 2017. Vol. 69, № 4. P.509-520.
5. Bak S. M., Kovtoniuk H.M. Existence of solitary traveling waves in discrete Klein–Gordon-type equations with nonlocal interaction. *Journal of Mathematical Sciences*. 2024. Vol. 285 (5). P. 639-651.

6. Bak S. M., Kovtoniuk H. M. Existence and construction of solitary waves in discrete Klein–Gordon-type equations with power nonlinearities via constrained minimization *Український математичний вісник*. 2026. Т. 23, № 1. С. 1-14.
7. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна–Гордона зі степеневими нелінійностями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика та інформатика*. 2021. Том 39, № 2. С. 7-21.
8. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна–Гордона із насичуваними нелінійностями. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць*. 2021. Вип. 22. С. 5-19.
9. Бак С.М., Ковтонюк Г.М. Існування біжучих і стоячих хвиль в системах осциляторів. *Проблеми математики та інформатики в педагогічному ЗВО: теорія і практика: колективна монографія [Електронний ресурс] / за заг. ред. М. М. Ковтонюк, С. М. Бака*. Вінниця: ВНТУ, 2023. С. 4-53.
10. Бак С. М., Панков О. А. Про періодичні коливання нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. *Доповіді НАН України*. 2004. №9. С.13-16.
11. Бак С. М. Існування періодичних за часом розв'язків системи осциляторів на двовимірній ґратці. *Карпатські математичні публікації*. 2012. Т. 4, №2. С. 175-196.
12. Koukouloyannis V., Kevrekidis P. G., Cuevas J., Rothos V. Multibreathers in Klein-Gordon chains with interactions beyond nearest neighbors. arXiv:1204.5496, 2012.
13. MacKay R. S., Aubry S. Proof of the existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators. *Nonlinearity*. 1994. Vol. 7. P. 1623–1643.
14. Koukouloyannis V., Kevrekidis P. G. On the stability of multibreathers in Klein–Gordon chains. *Nonlinearity*. 2009. Vol. 22. P. 2269–2285.
15. Cuevas J., Koukouloyannis V., Kevrekidis P. G., Archilla J. F. R. Multibreather and vortex breather stability in Klein–Gordon lattices: Equivalence between two different approaches. *Int. J. Bifur. Chaos*. 2011. Vol. 21. P. 2161–2177.
16. Kevrekidis P. G. Non-nearest-neighbor interactions in nonlinear dynamical lattices. *Phys. Lett. A*. 2009. Vol. 373. P. 3688–3693.
17. Chong C., Carretero-Gonzalez R., Malomed B. A., Kevrekidis P. G. Variational approximations in discrete nonlinear Schrödinger equations with next-nearest-neighbor couplings. *Physica D*. 2011. Vol. 240. P. 1205–1212.
18. Aubry S. Breathers in nonlinear lattices: existence, linear stability and quantization. *Physica D*. 1997. Vol. 103. P. 201–250.
19. Flach S., Gorbach A. V. Discrete breathers – Advances in theory and applications. *Phys. Rep.* 2008. Vol. 467. P. 1–116.
20. Peyrard M. Nonlinear dynamics and statistical mechanics of DNA. *Nonlinearity*. 2004. Vol. 17. P. R1–R40.
21. Pelinovsky D. E., Sakovich A. Multi-site breathers in Klein-Gordon lattices: stability, resonances and bifurcations. arXiv:1111.2557, 2011.
22. Koukouloyannis V., MacKay R. S. Existence and stability of 3-site breathers in a triangular lattice. *J. Phys. A: Math. Gen.* 2005. Vol. 38. P. 1021–1030.
23. Efremidis N. K. Discrete solitons in nonlinear zigzag optical waveguide arrays with tailored diffraction properties. *Phys. Rev. E*. 2002. Vol. 65. 056607.

EXISTENCE AND STABILITY OF MULTIBREATHERS IN DISCRETE KLEIN–GORDON-TYPE EQUATIONS

Abstract. *The article considers the existence and stability of multibreathers in nonlinear discrete equations of the Klein–Gordon-type with linear connections between nodes that go beyond the interaction of nearest neighbors.*

Keywords: *discrete Klein–Gordon-type equations, discrete breathers, multibreathers, Hamiltonian, existence, stability.*