Я.А. Коменського: «Все повинно здійснюватися так послідовно, щоб сьогоднішнє закріплювало вчорашнє і торувало шлях для завтрашнього».

*Висновки***.** Під час вивчення математики старшокласниками продуктивним є використання системного підходу. Це ефективний метод підвищення якості отримання учнями інформації та подальшого засвоєння. Тому систематизування навчального матеріалу забезпечує свідоме осмислення учнями математичного знання та зменшує їхнє перевантаження.

Хоча системний підхід до засвоєння знань досить широко висвітлений в наукових працях, але існує проблема його формування під час вивчення математики у старшокласників, тому даний підхід потребує подальшого опрацювання.

Список використаних джерел

1. Лозова В. І., Троцко Г. В. Теоретичні основи виховання і навчання: навчальний посібник / Харк. держ. пед. ун-т. ім. Г.С. Сковороди. Вид. 2-ге, випр. і доп. Харків : «ОВС», 2002. 400 с.

2. Пидкасистый П. И. Педагогика. Учебное пособие для студентов педагогических вузов и педагогических колледжей. Москва : Педагогическое общество России, 2001. 640 с.

3. Фіцула М. М. Педагогіка: навчальний посібник для студентів вищих педагогічних закладів освіти. Київ : Видавничий центр "Академія", 2002. 528 с.

4. Гончаренко С. У., Кушнір В. М, Кушнір Г. М. Методологічні особливості наукових поглядів на педагогічний процес. *Шлях освіти*. 2008. №4(50). С. 2-10.

5. Фоміцька Н. В. Методологія системного підходу та наукових досліджень : опорний конспект лекцій. Харків : Вид-во ХарРІ НАДУ "Магістр", 2015. 60 с.

THE PROBLEM OF SYSTEMITY FORMATION IN HIGH SCHOOL STUDENTS DURING THE LEARNING OF MATHEMATICS.

Abstract. *Analyzing psycho-logical and pedagogical and philosophical literature is defined concept of systemity as a pedagogical category. It is determined that systemity plays an important role in the Math learning and is considered as a principle of learning and quality of knowledge. This is an effective method of improving the quality of information received by high school students and further assimilation. As the analysis shows, there is a problem of formation of systemity in learning high school students.*

Keywords: *system, systemity, mathematics, principle of learning, formation.*

Любов Тютюн

ДОСЛІДЖЕННЯ ІНВЕРСІЇ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРОГРАМИ GEOGEBRA

Анотація. *У даній статті розглянуто деякі можливості використання програмного середовища GeoGebra під час вивчення інверсії та дослідженні її властивостей. Проаналізовано основні переваги даної програми та показано доцільність її застосування під час розв'язування задач на побудову методом інверсії. Наведено приклади таких задач. Для побудови рисунків і дослідження розв'язків використано програму GeoGebra.*

Ключові слова: *геометрія, задачі на побудову, інверсія, Geogebra.*

Постановка проблеми. Сучасні інформаційні технології все більше інтегруються в усі сфери суспільного життя, демократизуючи процес навчання, роблячи процес пізнання творчим, стимулюючи заняття самоосвітою, моделюючи різноманітні об'єкти і процеси. Ці властивості є важливими у процесі вивчення математики, зокрема геометрії. Особливо коли вчителю необхідно не передавати готові знання учням, а вчити, як їх здобувати. Тому актуальним залишається дослідження проблеми застосування різних прикладних програм під час вивчення математичних дисциплін майбутніми вчителями математики.

Метою даної публікації є розкрити основні переваги застосування програмного середовища GeoGebra під час дослідження властивостей інверсії, а також показати доцільність розв'язання задач на побудову методом інверсії у даній програмі.

Виклад основного матеріалу. Нині поширена значна кількість прикладних програм, якими викладачі користуються для розв'язування різноманітних математичних задач різних рівнів складності. Найчастіше використовуються вільні програмні продукти. Але все більшої популярності серед них набуває динамічне геометричне середовище GeoGebra.

Застосування програми GeoGebra у навчальному процесі надає можливість: створити динамічні моделі для ілюстрації, візуалізації та демонстрації різних математичних понять, означень, теорем тощо; впровадити конструктивний напрям у навчанні; організувати евристичну діяльність; підготувати навчальні матеріали шляхом співпраці.

Значний досвід використання даного програмного середовища у процесі викладання математичних дисциплін, зокрема «конструктивної геометрії», дозволяє стверджувати, що застосування програми GeoGebra сприяє розвитку просторового, логічного та дослідницького мислення, просторової уяви, просторового бачення студентів, спонукає їх до міркувань щодо властивостей заданих і шуканих фігур, які вони потім успішно використовують під час розв'язування геометричних задач. Саме тому, програмний засіб GeoGebra доцільно, на мою думку, використовувати для вивчення інверсії та дослідження її властивостей.

Однією з важливих переваг динамічного рисунка, виконаного в програмі GeoGebra, є ще те, що він надає можливість продемонструвати не лише кроки побудови як анімацію, а й одразу провести дослідження щодо існування розв'язків та їх кількості. Адже змінюючи на рисунку початкове положення окремо кожної, наприклад з точок A та B, кола ω чи прямої d, бачимо як змінюватиметься розташування допоміжних, а, отже, і шуканих фігур. Такі динамічні рисунки сприяють розвитку просторової уяви, просторового, логічного та дослідницького мислення, просторового бачення студента, спонукають його до міркувань щодо конструктивних властивостей заданих і шуканих фігур, які він успішно використовує під час розв'язування наступних задач. [1, с. 86]

Розглянемо приклади деяких задач на побудову, розв'язаних в середовищі GeoGebra методом інверсії, та особливості й переваги використання даної програми.

Працюючи в середовищі GeoGebra під час вивчення інверсії, ми з'ясували низку цікавих особливостей. Завдяки своїм перевагам програма допомагає з'ясувати та дослідити характерні властивості інверсії.

Розглянемо, наприклад, побудову образу прямої при інверсії. Нехай, ми маємо коло інверсії ω і пряму a. Розглянемо три випадки:

- ✓ a не перетинає ω, тоді пряма переходить у коло, яке проходить через центр інверсії;
- ✓ a дотикається до ω, тоді пряма переходить у коло, що проходить через центр інверсії і точку дотику;
- ✓ a перетинає ω у двох точках, тоді пряма переходить у коло, яке проходить через центр інверсії і точки перетину (на рис. 1, образом прямої a є коло a', зображене пунктирною лінією, яке проходить через три точки: O, A і B).

Наведемо приклад побудови образів простих фігур при інверсії (рис. 2). Для цього розглянемо коло інверсії ω з центром у точці O, в якому розміщено п'ятикутник $ABCDE$ (зображений пунктирною лінією). Під час інверсії точка A, яка лежала на колі, перейшла сама в себе, тобто вона є інваріантною (подвійною, нерухомою).

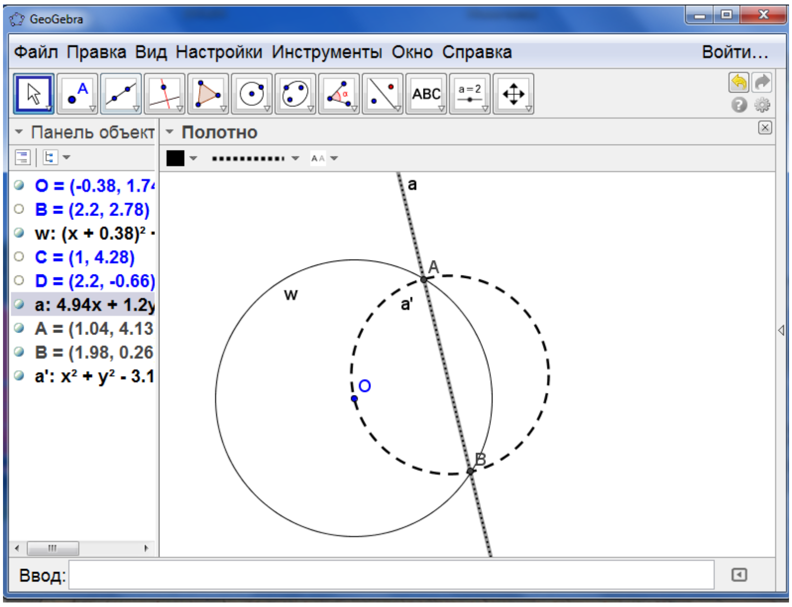

Рис. 1. Побудова образу прямої при інверсії

Точки B, C і E, які лежать всередині кола ω, переходять відповідно у точки I, J, Q. Точка D лежить поза колом, тому її образом є точка N, яка лежить всередині кола. Щоб перевірити правильність побудови, на рисунку зображені промені OA, OB, OC, OD і OE, які сполучають точки п'ятикутника, тобто прообрази і образи цих точок.

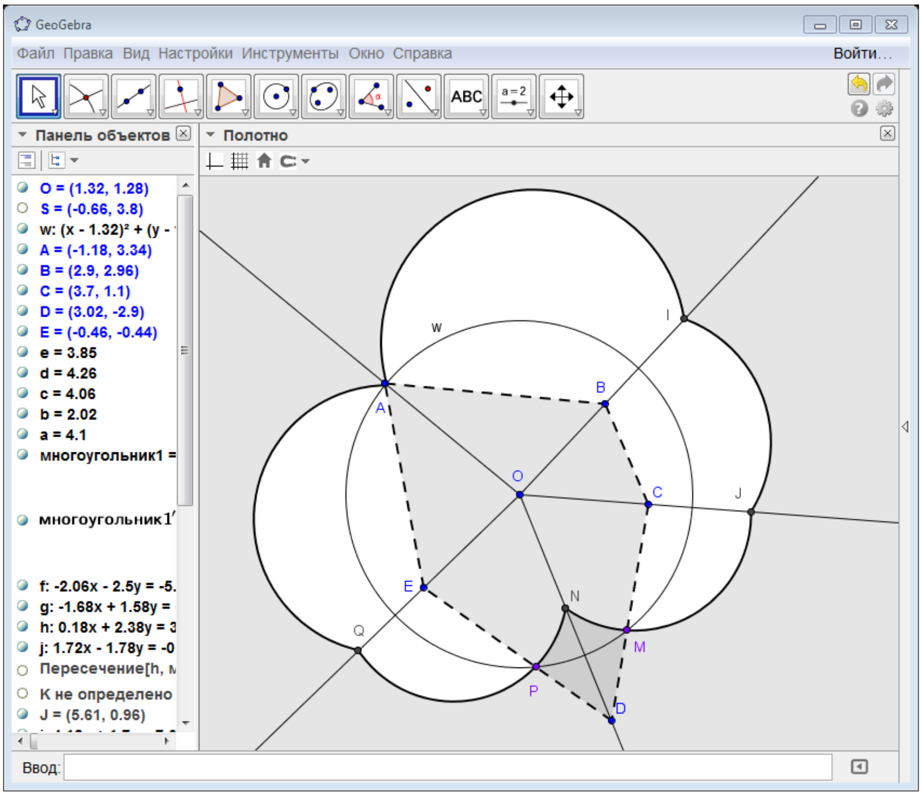

Рис. 2. Побудови образів простих фігур при інверсії

Розглянемо сторони п'ятикутника. Сторона AB, BC, AE відповідно преходять у дуги AI, IJ і QA. Відрізок CD перетинає коло інверсії ω у точці P, яка переходить сама в себе. Відрізок EP перейшов у дугу QP, PD – у дугу PN, DM – у дугу NM, MC – у дугу MJ. Отже, інверсія п'ятикутника побудована правильно, оскільки виконуються властивості інверсії. Зокрема, точки, які лежать всередині кола інверсії переходять у точки, які лежать зовні кола інверсії, і навпаки. Кожна точка кола, інверсна сама собі, тобто є інваріантною, а відрізки переходять у дуги, тощо.

Задача. Побудувати коло, яке дотикається до двох даних прямих і до даного кола [2, с. 373].

Розв'язуючи цю задачу методом інверсії використаємо так званий метод розширення. Нехай маємо кола m, n і дотичне до них коло p. Якщо коло p має з колами m і n однаковий дотик (зовнішній або внутрішній), то зі збільшенням або зменшенням його радіуса на деякий відрізок, щоб зберігся дотик, повинні зменшуватись або збільшуватись на той самий відрізок і радіуси кіл m і n (рис. 3.1).

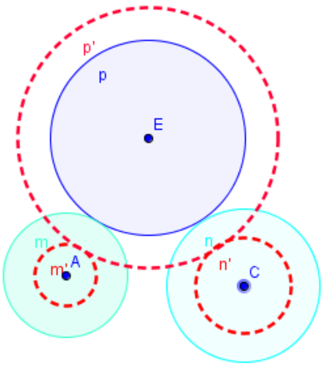

Рис. 3.1

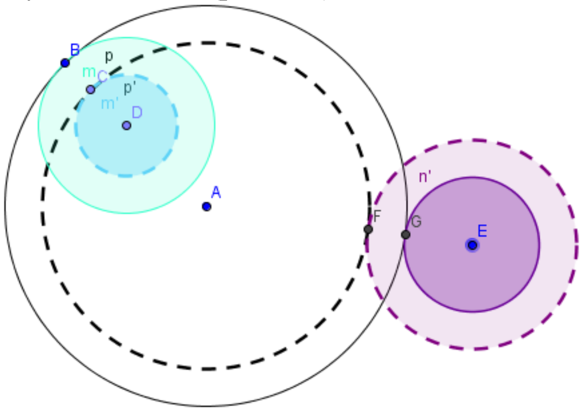

Рис. 3.2

Якщо ж коло p з m має внутрішній дотик, а з колом n – зовнішній (або навпаки), то зі збільшенням чи зменшенням його радіуса на деякий відрізок радіус одного з кіл m, n збільшуватиметься, а другого зменшуватиметься (рис. 3.2). Однак, проаналізувавши умову, дану задачу можна звести до задачі «Побудова кола, яке проходить через дану точку і дотикається до двох даних прямих». Шукане коло $K_1\ (O_1, R_1)$ одержимо з кола $K_1'(O_1, R_1')$, де $R_1' = R_1 + R$, як концентричне з колом K_1' і з радіусом $R_1 = R_1' - R$. Ця конфігурація визначається вихідними даними задачі.

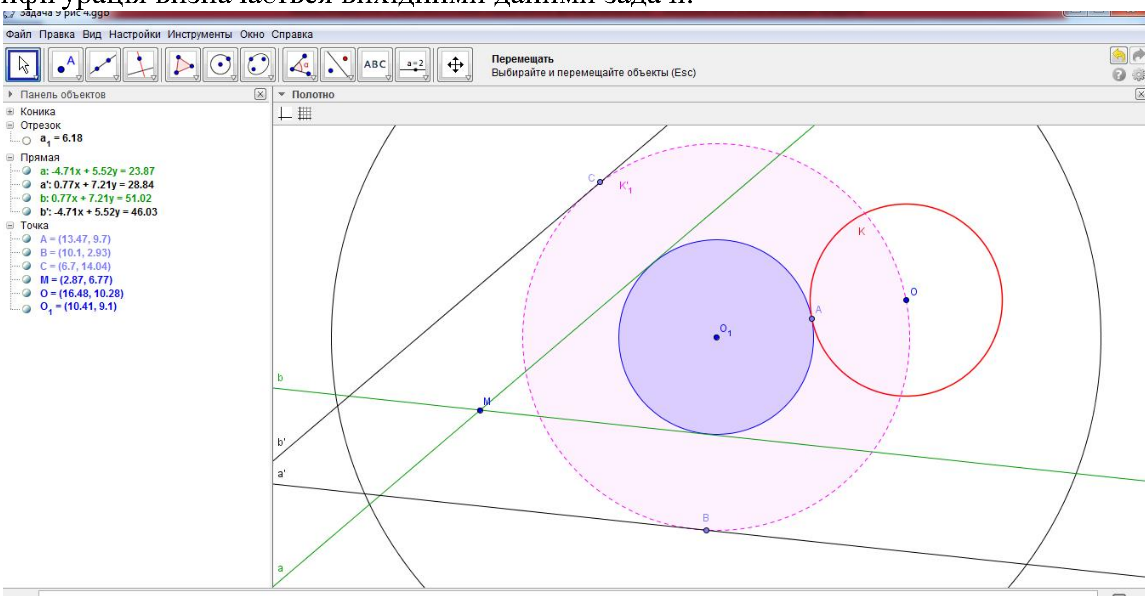

Рис. 4

Дана задача розв'язується досить легко за допомогою динамічного середовища GeoGebra. Адже змінюючи на рисунку початкове положення окремо кожної, наприклад з точок *A, B,* кола $K_1'(O_1, R_1')$ чи центра кола *O*₁, бачимо як змінюватиметься розташування допоміжних, а, отже, і шуканих фігур (рис. 4). Такі динамічні рисунки сприяють розвитку просторової уяви, просторового, логічного та дослідницького мислення, просторового бачення учня, спонукають його до міркування щодо конструктивних властивостей заданих і шуканих фігур, які він може успішно використовувати під час розв’язування наступних задач на побудову.

Задача. Побудувати коло, яке проходить через дану точку і дотикається до двох даних кіл [2, с. 372].

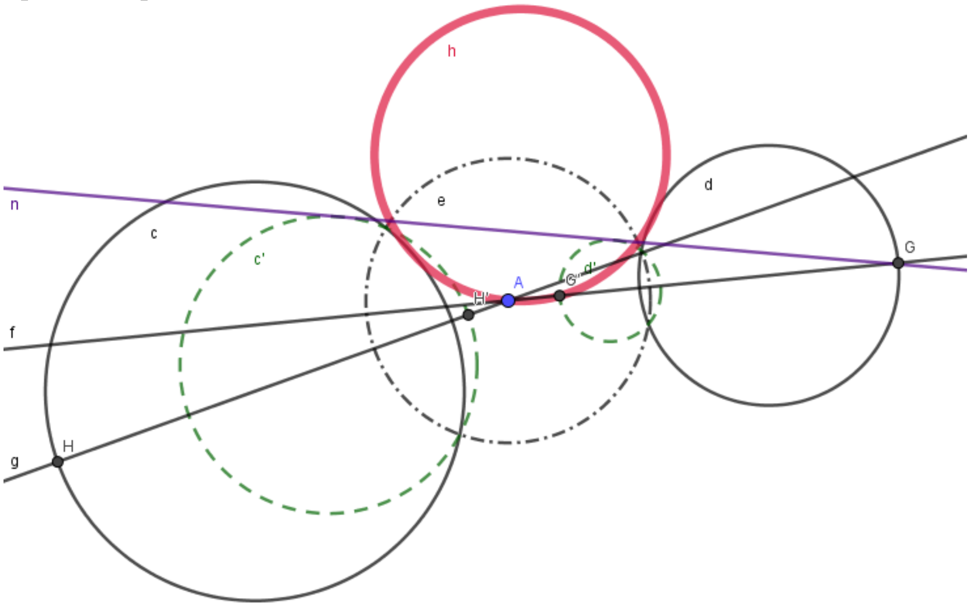

Рис. 5

Розв’язання. Нехай коло h побудоване (воно проходить через задану точку A і дотикається до заданих кіл d і c) (рис. 5). Побудуємо коло з довільним радіусом і центром у точці A. Розглянемо інверсію відносного цього кола.

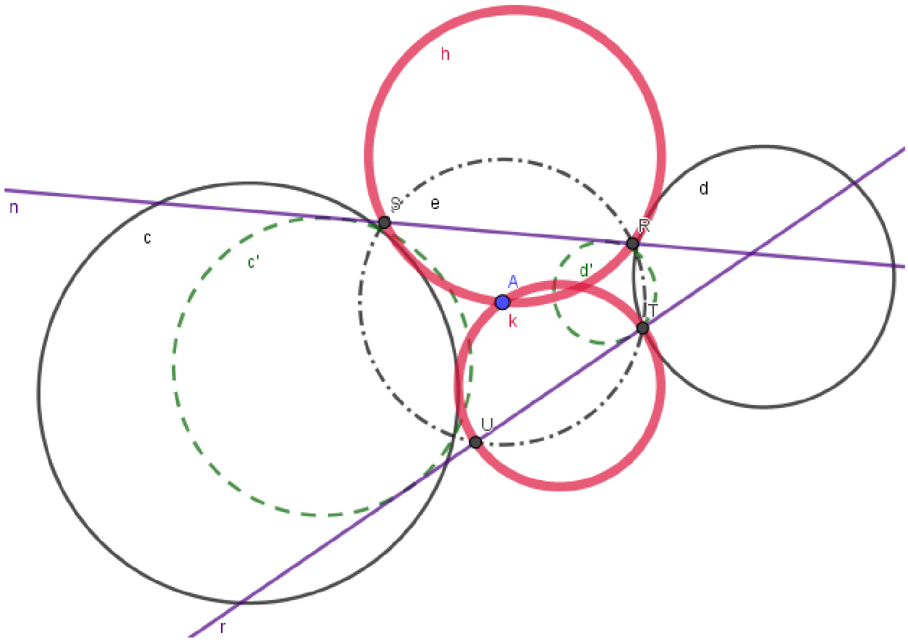

Рис. 6

Так як задані кола d і c не проходять через центр інверсії, то їх образи d' і c' відповідно, також не проходять через центр інверсії, а образом кола h, яке проходить через центр інверсії буде пряма n, яка не проходить через центр інверсії. Тоді, так як за умовою коло h дотикається до кіл c і d, то і пряма n повинна дотикатись до образів d' і c'. Отже, задача зводиться до побудови прямої n, яка при інверсії відносно кола, з центром у точці A, перетворюється в коло h.

Проілюструємо інверсію прямих n і r відносно кола e (кола h і k) (рис. 6, рис. 7).

Використавши програму GeoGebra досить легко провести етап дослідження розв'язків даної задачі. З умови задачі видно, що якщо точка A лежить всередині одного з заданих кіл, які не дотикаються, то задача розв'язку не матиме. Якщо точка A лежить всередині одного з заданих кіл, які дотикаються, то задача матиме 1 розв'язок (рис. 8).

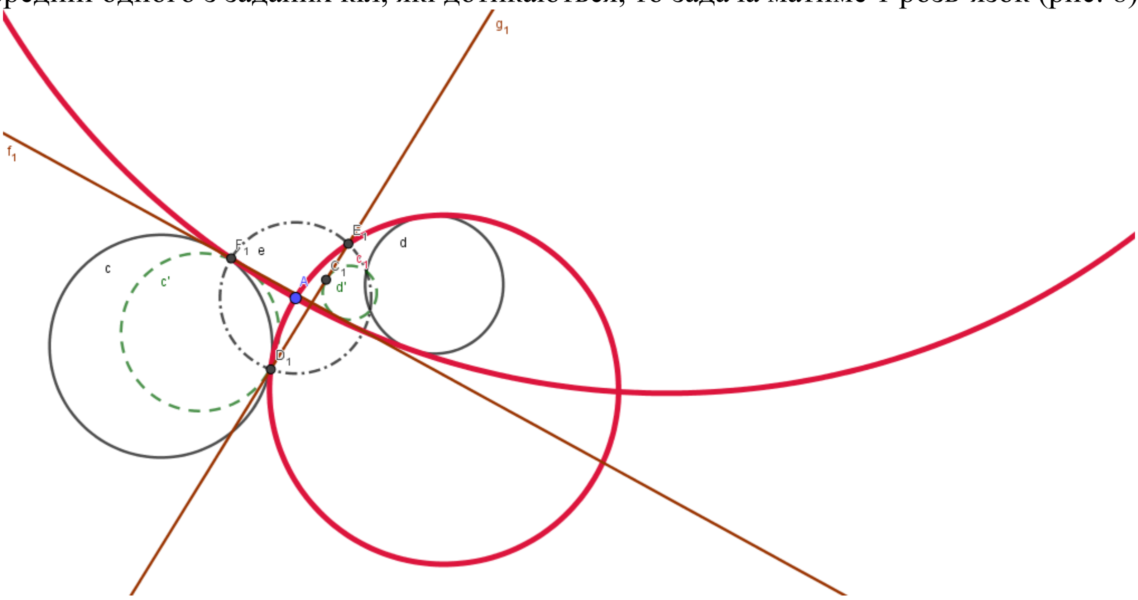

Рис. 7

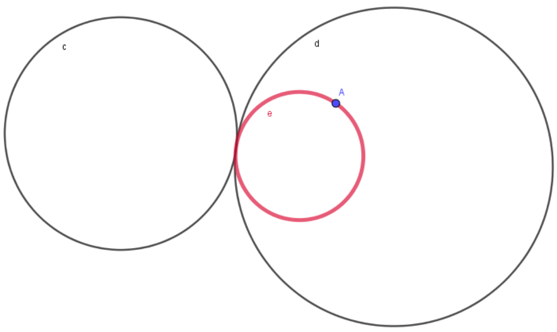

Рис. 8

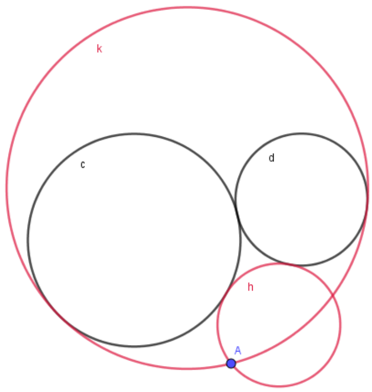

Рис. 9

Якщо кола перетинаються і точка A лежить ззовні відносно обох кіл, то задача має 2 розв'язки, 2 кола (рис. 9).

Висновки. Таким чином, використання динамічного геометричного середовища GeoGebra в процесі розв'язування геометричних задач, зокрема задач на побудову методом інверсії, надає можливість підвищити якість засвоєння навчального матеріалу студентами шляхом його унаочнення, підвищує рівень мотивації до навчання, залучає їх до дослідницької діяльності та самоосвіти, сприяє розвитку просторової уяви, спонукає студентів опановувати нові знання та отримувати навички самостійної роботи та творчого мислення. У процесі вивчення інверсії, вказана програма допомагає з'ясувати її властивості, побудувати інверсію будь-якої геометричної фігури, що допомагає студентам краще засвоїти теоретичний матеріал.

Список використаних джерел

1. Тютюн Л. А. Деякі аспекти використання інформаційно-телекомунікаційних технологій у процесі викладання геометрії в педагогічному університеті // *Науковий вісник Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки. Педагогічні науки*. – 2013. – №7. – С. 81–87.
2. Боровик В.Н. Геометричні перетворення площини: Навчальний посібник / В.Н. Боровик, І.В. Зайченко, М.М. Мурач, В.П. Яковець. – Суми: ВДТ «Університетська книга», 2003. – 504 с.
3. Тютюн Л. А. Особливості використання програмного засобу GEOGEBRA в процесі викладання геометрії // *Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського. Серія: Педагогіка і психологія*: Зб. наук. праць. – Випуск 36 / Редкол.: В.І. Шахов (голова) та ін. – Вінниця: ТОВ «Нілан ЛТД», 2012. – С. 281-284.

STUDY OF INVERSION AND ITS PROPERTIES USING THE PROGRAM GEOGEBRA

Abstract. *The main advantages of this program are analyzed and the expediency of its application in solving construction problems by the inversion method is shown. This article discusses some possibilities of using the GeoGebra software environment when studying inversion and studying its properties. Examples of such problems are given. GeoGebra was used to build the pictures and explore the solutions.*

Keywords: *geometry, construction problems, inversion, Geogebra.*

Діана Шаргородська, Олена Соя

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ БЕЗУМОВНОГО ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Анотація. *У статті досліджуються чисельні методи знаходження безумовного екстремуму функції однієї змінної. Теоретично обґрунтовані алгоритми декількох чисельних методів обчислення безумовного екстремуму функції однієї змінної. Зокрема описані алгоритми методу Больцано та методу золотого перерізу для знаходження мінімуму функції однієї змінної.*

Ключові слова: *функція однієї змінної, екстремум, інтервал, метод.*

Постановка проблеми. Сучасні стандарти до математичної підготовки студентів спеціальності 111 Математика досить високі. Зокрема, вони повинні вміти грамотно «перекладати» на математичну мову технічні, економічні, природничо-наукові та інші прикладні задачі, аналізувати залежність їх розв'язків від умов, режимів, параметрів реальних процесів і явищ, й обирати якнайкращі варіанти, тобто мати навички математичного моделювання й оптимізації реальних об'єктів. Оскільки в більшості випадків, важливих з практичної точки зору, процес аналітичного розв'язування задач оптимізації важкий і трудомісткий або взагалі неможливий, студент повинен володіти чисельними методами, розрахованими на застосування сучасних технологій [3].

Наближений, а за певних умов і точний розв'язок задач фундаментальної або прикладної математики можна знайти за допомогою чисельних методів, алгоритми яких ґрунтуються на побудові послідовності дій над скінченною множиною чисел. Основними завданнями чисельних методів, як навчальної дисципліни, є засвоєння основних теоретичних положень наближених методів, ознайомлення з алгоритмами розв'язування практичних завдань та їх чисельна реалізація. Зокрема, алгоритми, побудовані на основі інтерполяції чи апроксимації функцій, використовуються для розв'язування задач математичного аналізу. Основними критеріями ефективності того чи іншого чисельного методу є його стійкість та збіжність.

Мета статті – теоретично обґрунтувати й описати алгоритми декількох чисельних методів обчислення безумовного екстремуму функції однієї змінної.