Література

1. Вайникко Г.М. О сходимости и устойчивости метода коллокации / Г.М. Вайникко // Диференц. Уравнения. – 1965. –1, №2. – С. 244-254.
2. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы решения линейных дифференциальных и интегральных уравнений / А.Ю. Лучка. – Киев: Наук. Думка, 1980. – 264 с.
3. Поселюжна В.Б., Колокаційно-ітеративний метод розв′язування диференціальних та інтегральних рівнянь / В.Б. Поселюжна, Л.М. Семчишин– Тернопіль: ТНЕУ, 2013. – 203 с.

С.М. Бак
м. Вінниця

ПРО ІСНУВАННЯ ВІДОКРЕМЛЕНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В СИСТЕМІ НЕЛІНІЙНО ЗВ'ЯЗАНИХ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Аннотація. *Розглядається система звичайних диференціальних рівнянь, яка описує динаміку нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. За допомогою методу критичних точок одержано результат про існування відокремлених біжучих хвиль.*

Ключові слова: *відокремлені біжучі хвилі, нелінійні осцилятори, двовимірна ґратка, критичні точки.*

Annotation. *We consider a system of differential equations that describes the dynamics of an infinite system of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on the 2d-lattice. By the method of critical points, we obtain a result on existence of the solitary travelling waves.*

Keywords: *solitary travelling waves, nonlinear oscillators, 2d-lattice, critical points.*

Вступ. У цій статті будемо розглядати рівняння, які описують динаміку нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на плоскій цілочисловій ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ – узагальнена координата (n, m)-го осцилятора в момент часу t. Передбачається, що кожний осцилятор нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\begin{gathered}\ddot{q}_{n,m} = U'\left(q_{n+1,m} - q_{n,m}\right) - U'\left(q_{n,m} - q_{n-1,m}\right) + \\ +U'\left(q_{n,m+1} - q_{n,m}\right) - U'\left(q_{n,m} - q_{n,m-1}\right) - V'\left(q_{n,m}\right),\ (n, m) \in \mathbb{Z}^2,\end{gathered} \tag{1}$$

Рівняння (1) – це зчисленна система звичайних диференціальних рівнянь, причому при $V(r) \equiv 0$ (1) є двовимірним аналогом системи Фермі–Пасти–Улама, а при $V(r) = K(1-\cos r)$ – дискретним рівнянням sin-Ґордона на двовимірній ґратці.

Досить детальні результати про біжучі хвилі в ланцюгах Фермі–Пасти–Улама можна знайти у працях О. Панкова, зокрема в [15] наведено найбільш повний огляд результатів. Результати досліджень таких систем із фізичної точки зору можна знайти в монографії [9]. У статті [6] встановлено умови існування періодичних біжучих хвиль у системі Фермі–Пасти–Улама на двовимірній ґратці. Водночас ланцюги осциляторів розглядались у кількох працях, зокрема, в [12] результати отримано методами теорії біфуркацій, а в [1, 8] встановлено умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль за допомогою методу критичних точок. У рофес [2, 5, 10, 11] вивчались біжучі хвилі для систем лінійно зв'язаних осциляторів, розміщених на двовимірних ґратках. Зокрема, в [10] досліджувались система із непарною 2π-періодичною нелінійністю, а в [11] взагалі розглядалися лінійні осцилятори. В статті [2] одержано умови існування періодичних І відокремлених біжучих хвиль. У статті [14] встановлено існування періодичних та гомоклінічних біжучих хвиль для нескінченного ланцюга нелінійно зв'язаних нелінійних частинок. У статті [7] одержано результат про існування періодичних біжучих хвиль для дискретного рівняння sin-Ґордона на двовимірній ґратці, у статті [3] – результат про існування дозвукових періодичних біжучих хвиль для нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці, а у статті [4] – умови існування надзвукових хвиль для такої системи.

Постановка задачі. Основний результат. Зазначимо, що біжуча хвиля у двовимірному випадку має вигляд $q_{n,m}(t) = u(n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct)$, де функція неперервного аргументу $u(s)$ називається профілем, а константа $c \neq 0$ – швидкістю біжучої хвилі. Для її профілю $u(s)$ рівняння (1) набуває вигляду

$$\begin{aligned} c^2u''(s) &= U'\big(u(s+\cos\varphi)-u(s)\big) - U'\big(u(s)-u(s-\cos\varphi)\big) + \\ &+U'\big(u(s+\sin\varphi)-u(s)\big) - U'\big(u(s)-u(s-\sin\varphi)\big) - V'\big(u(s)\big). \end{aligned} \tag{2}$$

Нас цікавлять відокремлені біжучі хвилі, профіль яких задовольняє крайову умову

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s) = 0. \tag{3}$$

Скрізь далі будемо розглядати потенціали U і V вигляду:

(i) $U(r) = \dfrac{c_0^2}{2}r^2 + f(r), V(r) = -\dfrac{a^2}{2}r^2 + g(r)$, де $c_0 \geq 0$, $a > 0$.

Також припустимо, що неквадратична частина кожного з цих потенціалів $h \in \{f; g\}$ задовольняє такі умови:

(ii) $h(0) = h'(0) = 0$ і $h'(r) = o(r)$ при $r \to 0$;

(iii) існує $\mu > 2$ таке, що $0 \leq \mu h(r) \leq rh'(r)$, $r \neq 0$.

Основним результатом є наступна теорема:

Теорема 1. Нехай виконуються умови $(i)-(iii)$. Тоді для будь-якого $c > c_0$ рівняння (2) має розв'язок, який задовольняє умову (3).

Література

1. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів / С. М. Бак // Математичні студії – 2006. – 26, № 2. – С. 140 – 153.
2. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. – 2010. – 7, № 2. – С. 154 – 175.
3. Бак С. М. Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв’язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фіз.-мат. Науки: зб. наук. Праць. – 2014. – Вип. 10. – С. 17 – 23.
4. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв’язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фіз.-мат. Науки: зб. наук. Праць. – 2015. – Вип. 12. – С. 5 – 12.
5. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. – 2011. – 35, № 1. – С. 60 – 65.
6. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі–Пасти–Улама на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. – 2012. – 37, № 1. – С. 76 – 88.
7. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні sin-Ґордона на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фіз.-мат. Науки: зб. наук. Праць. – 2013. – Вип. 9. – С. 5 – 10.
8. Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators / S. M. Bak // Communications in Math. Anal. – 2007. – 3, № 1. – P. 19 – 26.
9. Gallavotti G. The Fermi – Pasta – Ulam problem. A status report / G. Gallavotti // Lect. Notes Phys. – Berlin: Springer, 2008. – 302 p.
10. Feckan M. V. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. – 2007. – 20. – P. 319 – 341.
11. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and Contin. Dynam. Systems. – 2003. – 3, № 1. – P. 105 – 114.
12. Ioos G. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators / G. Ioos, K. Kirchgässner // Communications in Math. Phys. – 2000. – 211. – P. 439 – 464.
13. Lions P. L. The concentration-compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case, part 2 / P. L. Lions // Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire. – 1984. – 1, № 4. – P. 223 – 283.
14. Makita P. D. Periodic and homoclinic travelling waves in infinite lattices / P. D. Makita // Nonlinear Anal. – 2011. – 74. – P. 2071 – 2086.
15. Pankov A. Traveling waves and periodic oscillations in Fermi –Pasta –Ulam lattices / A. Pankov. – London; Singapore: Imperial College Press, 2005. – 196 p.