

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет математики, фізики і комп'ютерних наук

Кафедра математики та інформатики

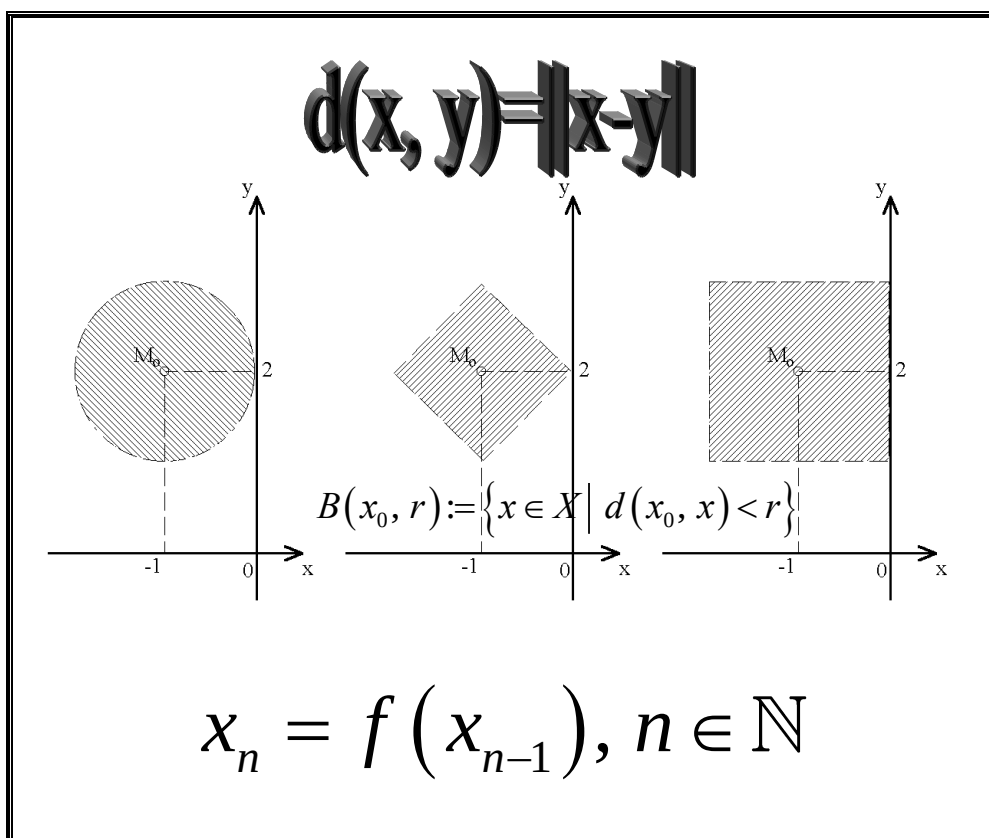
РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА

з функціонального аналізу

(для студентів предметної спеціальності
014.04 Середня освіта (Математика))

V семестр

Метричні і нормовані простори



*Схвалено і рекомендовано до видання вченою радою факультету
математики фізики і комп'ютерних наук,
протокол №2 від 30.09.2026 року.*

Рецензенти: доктор педагогічних наук,
професор **Ковтонюк М. М.**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Панасенко О. Б.**

Бак С. М. Робочий зошит студента з функціонального аналізу
(для студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта
(Математика)) [Електронне видання]. Вінниця, 2026. 40 с.

Індивідуальний робочий зошит студента

Дисципліна: функціональний аналіз

Розділи: Метричні простори. Нормовані простори

Автор-укладач: доктор фізико-математичних наук, професор
Бак С. М.

Передмова

Робочий зошит з функціонального аналізу призначений для використання студентами предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) при вивченні розділів «Метричні простори» та «Нормовані простори».

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних розділів, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю.

Робочий зошит складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання та зразків текстів контрольних робіт. До кожного заняття подано запитання для самопідготовки.

Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

1. Робочий план студента.

Робочий план студента складений на основі авторської навчальної програми з функціонального аналізу.

Таблиця 1. Розподіл годин

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	денна форма здобуття освіти					
	усього	зокрема				
		ЛК	ПЗ	ЛЗ	ІЗ	СР
1	2	3	4	5	6	7
<i>Розділ 1. Метричні простори</i>						
Тема 1. Метричні простори	14	4	4	0	0	6
Тема 2. Збіжні послідовності у метричних просторах	10	2	2	0	0	6
Тема 3. Повні метричні простори	10	2	2	0	0	6
Тема 4. Відображення метричних просторів	14	4	4	0	0	6
Тема 5. Теореми про нерухому точку	14	4	4	0	0	6
Разом за розділом 1	62	16	16	0	0	30
<i>Розділ 2. Нормовані простори</i>						
Тема 1. Нормовані простори	14	4	4	0	0	6
Тема 2. Лінійні оператори і функціонали	14	4	4	0	0	6
Тема 3. Диференційовні відображення нормованих просторів	15	4	4	0	0	7
Тема 4. Евклідові простори	15	4	4	0	0	7
Разом за розділом 2	58	16	4	0	0	26
Усього годин	120	32	32	0	0	56

Таблиця 2. Теми лекцій

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
-------	------------	-----------------

1.	Метричні простори	4
2.	Збіжні послідовності у метричних просторах	4
3.	Відображення метричних просторів	4
4.	Теореми про нерухому точку	6
5.	Нормовані простори	2
6.	Лінійні оператори і функціонали	4
7.	Теорема про збіжність ряду Неймана та її застосування до розв'язування інтегральних рівнянь	2
8.	Евклідові простори	4
9.	Диференційовні відображення нормованих просторів	2
	Усього годин	32

Таблиця 3. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Поняття метричного простору. Основні властивості метрики	2
2.	Топологія метричного простору	2
3.	Збіжність у метричних просторах	2
4.	Повні метричні простори. Компактні і зв'язні множини	2
5.	Відображення метричних просторів	2
6.	Стискуючі відображення. Теорема Банаха	2
7.	Застосування принципу стискуючих відображень	2
8.	Контрольна робота	2
9.	Лінійні і нормовані простори	2
10.	Банахові простори	2
11.	Лінійні оператори і функціонали. Обмеженість і норма	2
12.	Спектр лінійного оператора. Спряжений оператор	2
13.	Розв'язування інтегральних рівнянь методом ітерованих ядер	2
14.	Диференціювання операторів і функціоналів. Похідні Фреше і Гато	2
15.	Евклідові та гільбертові простори	2
16.	Контрольна робота	2
	Разом:	32

Таблиця 4. Розподіл балів за видами контролю та самостійної роботи

№	Вид поточного контролю та самостійної роботи	Кількість балів
1.	Домашні завдання	10
2.	Конспект	10
3.	Контрольна робота 1	20
4.	Контрольна робота 2	20
5.	Колоквіум	20
6.	Підсумковий тест	20
Загальна кількість балів		100

Таблиця 3. Шкала оцінювання: сто балова, ECTS, розширена

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за розширеною шкалою
		<i>Для екзамену, заліку, курсової роботи, практики</i>
90-100	A	ВІДМІННО
80-89	B	ДУЖЕ ДОБРЕ
75-79	C	ДОБРЕ
60-74	D	ЗАДОВІЛЬНО
50-59	E	ДОСТАТНЬО
35-49	FX	НЕЗАДОВІЛЬНО З МОЖЛИВІСТЮ ПОВТОРНОГО СКЛАДАННЯ
1-34	F	НЕПРИЙНЯТНО З ОБОВ'ЯЗКОВИМ ПОВТОРНИМ ВИВЧЕННЯМ ДИСЦИПЛІНИ

Розділ 1. МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

Практичне заняття № 1-2

Тема: Поняття метричного простору. Основні властивості метрики. Топологія метричного простору

З1. Нехай $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$. Чи буде d відстанню в $\mathbb{R}$, якщо $d(x; y)$ за означенням дорівнює:

а) $\sqrt{|x - y|}$;

б) $|x - y|^2$;

в) $|x^3 - y^3|$;

г) $\arctg|x - y|$;

д) $\sin^2(x - y)$;

е) $\ln(1 + |x - y|)$;

є) $\min\{1, |x - y|\}$;

ж) $|x^3 - y^3|(2x^2 + y^2)$;

з) $\frac{\ln(1 + |x - y|)}{1 + \ln(1 + |x - y|)}$;

и) $\frac{2|x - y|}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}}$.

З2. Чи буде функція $d(x, y) = d((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ відстанню в $\mathbb{R}^2$, якщо $d(x, y)$ за означенням дорівнює:

а) $2|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$;

б) $\min\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$;

в) $\begin{cases} |x_2 - y_2|, & \text{якщо } x_1 = y_1, \\ |x_2| + |y_2| + |x_1 - y_1|, & \text{якщо } x_1 \neq y_1; \end{cases}$

г) $(\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\})^2$;

д) $\max\{2|x_1 - y_1|, 3|x_2 - y_2|\}$;

е) $\sqrt{2(x_1 - y_1)^2 + 3(x_2 - y_2)^2}$;

є) $\sqrt{\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}}$;

ж) $\sqrt{2(x_1 - y_1)^2 + (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + (x_2 - y_2)^2}$;

з) $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + 2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + (x_2 - y_2)^2}$;

и) $(\sqrt{|x_1 - y_1|} + \sqrt{|x_2 - y_2|})^2$?

3. Чи буде функція

$$d(x, y) = d((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n))$$

відстанню в $\mathbb{R}^n$, якщо $d(x, y)$ за означенням дорівнює:

а) $\max_{i=1, n} |x_i - y_i|$;

б) $\sum_{i=2}^n |x_i - y_i|$;

в) $\sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i - y_i|$, де $\alpha_i > 0$ для $i = \overline{1, n}$;

г) $\min_{i=1, n} |x_i - y_i|$;

д) $\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i |x_i - y_i|^2}$, де $\alpha_i > 0$ для $i = \overline{1, n}$?

4. Чи буде функція $d(f, g)$ відстанню в $C_{[0;1]}$, якщо $d(f, g)$ за означенням дорівнює:

а) $\max_{x \in [0;1]} |f(x) - g(x)|$;

д) $\ln \left(1 + \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \right)$;

б) $\min_{x \in [0;1]} |f(x) - g(x)|$;

е) $\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$;

в) $\int_0^1 e^x |f(x) - g(x)| dx$;

є) $\max_{x \in [0;1]} |f'(x) - g'(x)|$?

г) $\sqrt{\int_0^1 x (f(x) - g(x))^2 dx}$;

5. Нехай $C_{[0; \pi]}$ наділено евклідовою метрикою. Чи належать точки:

а) $f_1(x) = x$;

в) $f_3(x) = \frac{1}{2}$;

б) $f_2(x) = 1 - \left| \frac{2}{\pi} x - 1 \right|$;

г) $f_4(x) = -\frac{4x^2}{\pi^2} + \frac{4x}{\pi}$

кулі $B(\sin x, 1)$? Яка з цих точок є найближчою до центра кулі?

6. Множина $\mathbb{R}$ наділена метрикою

$$d(x, y) = \ln(1 + |x - y|).$$

Знайти переріз двох куль $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$ і $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

✎7. Довести, що у метричному просторі $C_{[0;1]}$ з рівномірною метрикою точка $f_1(x) = x^2 - x - 1 \in$ внутрішньою точкою множини $A = \{f \mid f \in C_{[0;1]}, f(x) < x\}$, а точка $f_2(x) = x \in$ межевою і граничною для цієї ж множини.

✎8. Знайти для множини A множини $A^0, \partial A, A', \overline{A}, \overline{CA}, (CA)^0$, якщо A множина точок метричного простору $\mathbb{R}^2$ з евклідовою метрикою означається так:

а) $A = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$;

б) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 \leq 0\}$;

в) $A = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$.

✎9. Множина $\mathbb{R}^2$ наділена однією з метрик

$$d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2|,$$

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4(y_1 - y_2)^2},$$

$$d_3((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Зобразити на координатній площині одну з множин точок метричного простору $(\mathbb{R}^2, d_i)$:

а) $B((0, 0), 2), (\mathbb{R}^2, d_1)$; г) $B((1, 2), 1), (\mathbb{R}^2, d_1)$;

б) $\overline{B}((2, 2), 1), (\mathbb{R}^2, d_2)$; д) $\overline{B}((0, 1), 2), (\mathbb{R}^2, d_2)$;

в) $S((1, 1), 2), (\mathbb{R}^2, d_3)$; е) $S((2, 1), 1), (\mathbb{R}^2, d_3)$.

📖 Практичне заняття № 3-4

Тема: Збіжність у метричних просторах. Компактні і зв'язні множини

✎1. Довести, що коли послідовність точок метричного простору збігається, то збігається до тієї самої границі і будь-яка її підпослідовність.

✎2. Довести, що якщо послідовність (x_n) точок метричного простору (X, d) збіжна, то для будь-якої точки $x_0 \in X$ числа множини $\{d(x_n, x_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ обмежена.

✎3. Довести, що точка x_0 є точкою дотикання множини A тоді і тільки тоді, коли існує послідовність (x_n) точок цієї множини, границя якої є точка x_0 . Яку додаткову умову треба накласти на послідовність (x_n) , щоб точка x_0 була граничною?

✎4. Довести, що послідовність $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ точок множини $\mathbb{R}^+$ відносно метрик:

а) $d(x, y) = |x - y|$;

б) $d(x, y) = \frac{|x - y|}{xy}$;

в) $d(x, y) = \arctg|x - y|$;

г) $d(x, y) = |\arctg x - \arctg y|$;

д) $d(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$

є збіжною і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

✎5. Довести, що послідовність $\left(\left(\frac{3n-1}{2n}, \frac{n+2}{n}\right)\right)$ точок метричного простору $\mathbb{R}^2$ з евклідовою метрикою збігається до точки $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

✎6. Довести, що послідовність $\left(\left(\frac{n+1}{n}, \frac{n+1}{n}\right)\right)$ точок метричного простору $\mathbb{R}^2$ відносно метрик:

а) $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$;

б) $d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$;

в) $d_3((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$

збігається, а відносно метрики

г) $d_4((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \begin{cases} |y_1 - y_2|, & \text{якщо } x_1 = x_2, \\ |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2|, & \text{якщо } x_1 \neq x_2 \end{cases}$

розбігається.

✎7. Знайти границі послідовностей точок метричного простору $\mathbb{R}^2$ з евклідовою метрикою:

а) $\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{(n-1)^2}{(n+1)^3 - (n-1)^3}\right)\right)$;

- б) $\left(\left(\frac{3-2n^3}{4+3n^3}, \frac{(n+1)^4 - n^4}{n^4 + 3} \right) \right);$
- в) $\left(\left(\sqrt{\frac{n}{2} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^3} + \dots + \frac{n}{n^3} \right)}, \frac{1}{n+1} \sin \frac{\pi(n+1)}{n+2} \right) \right);$
- г) $\left(\left(n \cdot \operatorname{tg} \frac{2}{n}, \frac{1}{n^2 + 1} \sum_{k=1}^n k \right) \right);$
- д) $\left(\left(\frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}}, n \cdot \operatorname{arctg} \frac{5}{n^2} \right) \right);$
- е) $\left(\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \frac{a^n + 1}{a^n + 2} \right) \right), \quad a > 1;$
- є) $\left(\left(\frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n + 1}}{n+1}, \frac{\sqrt[4]{n^5 + 2} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt[5]{n^4 + 2} - \sqrt{n^3 + 1}} \right) \right);$
- ж) $\left(\left(\left(1 + \frac{2}{n} \right)^n, \left(1 - \frac{3}{5n} \right)^n \right) \right);$
- з) $\left(\left(\left(\frac{2n}{2n+1} \right)^n, n(\ln(2n+3) - \ln 2n) \right) \right);$

8. Знайти границі послідовностей (x_n) точок метричного простору $C_{[a; b]}$ з рівномірною метрикою:

- а) $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right), \quad x_n \in C_{[0; 1]};$ е) $\left(\frac{\sin nx}{n} \right), \quad x_n \in C_{[-2; 2]};$
- б) $(x^n - x^{2n}), \quad x_n \in C_{[0; 0,5]};$ є) $(x \operatorname{arctg} nx), \quad x_n \in C_{[0,5; 2]};$
- в) $\left(\frac{nx}{1+n+x} \right), \quad x_n \in C_{[0; 1]};$ ж) $\left(e^{-(x-n)^2} \right), \quad x_n \in C_{[-2; 2]};$
- г) $\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \right), \quad x_n \in C_{[-1; 1]};$ з) $\left(n(\sqrt[n]{x} - 1) \right), \quad x_n \in C_{[1; 2]};$
- и) $\left(\frac{x^n}{1+x^n} \right), \quad x_n \in C_{[2; 3]};$ и) $\left(\sqrt[n]{1+x^n} \right), \quad x_n \in C_{[0; 2]}.$

д) $\left(n \sin \frac{x}{n}\right), x_n \in C_{[0; \pi]}.$

9. Довести, що у метричному просторі $\mathbb{R}^2$ з евклідовою метрикою:

а) множина $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ – компактна множина;

б) множина $\{(x, y) | |x| + |y| < 1\}$ – відносно компактна, але не компактна;

в) множина $\{(x, y) | |x| \leq 1\}$ не є відносно компактною множиною.

10. З'ясувати, які з множин точок метричного простору $\mathbb{R}$ з природною метрикою компактні:

а) $\{x | 5x - 20 \leq x^2 \leq 8x\};$

б) $\{x | \sqrt[4]{10+x} - \sqrt{2-x} > 0\};$

в) $\{x | (x-1)(3-x)(x-2)^2 > 0\};$

г) $\left\{x \mid \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)} \leq 2,5\right\};$

д) $\left\{x \mid \frac{1}{2} + \log_9 x - \log_3 5x > \log_{\frac{1}{3}}(x+3)\right\};$

е) $\{x | \log_2(4^x - 12) \leq x, \log_2(4^x - 12) \geq 0\};$

є) $\left\{x \mid \log_{\frac{1}{2}}(1-|x|) > \frac{1}{2}\right\};$

ж) $\{x | \sin^2 x - \sin x \leq 0, |x| \leq 10\};$

11. З'ясувати, які з множин точок метричного простору $\mathbb{R}^2$ з евклідовою метрикою компактні:

а) $\{(x, y) | x + y \leq 1, x - y \leq 1, x \geq 10\};$

б) $\{(x, y) | x^2 - |x| + 1 = |y| \leq 1\};$

в) $\{(x, y) | |x| + |y| \leq 1, y - |y| = x - |x|\};$

г) $\left\{(x, y) \mid |y| = \frac{|x|}{x} - x^2\right\};$

$$д) \{(x, y) \mid |x^2 - x| < y \leq 1\};$$

$$е) \{(x, y) \mid x^2 - 2|x| + y^2 \leq 0\};$$

$$є) \{(x, y) \mid \log_{|y|}|x| \geq 0, \max\{|x|, |y|\} \leq 2\};$$

$$ж) \{(x, y) \mid \sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0, \max\{|x|, |y|\} \leq 2\};$$

12. З'ясувати, чи будуть фундаментальними у просторі $\mathbb{R}$ з природною метрикою послідовності:

$$а) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right);$$

$$е) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\sin k}{2^k} \right)$$

$$б) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right).$$

$$є) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right);$$

$$в) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} \right);$$

$$з) \left(\frac{n^2 + 1}{n} \right);$$

$$д) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right);$$

$$ж) \left(1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2} \right);$$

$$г) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right);$$

13. Довести, що послідовності:

$$а) \left(\frac{n^2}{n^2 + x^2} \right);$$

$$г) \left(\sqrt{n} \sin \frac{x}{n\sqrt{n}} \right);$$

$$б) \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \right);$$

$$д) \left(\frac{n}{x^2 + n^2} \operatorname{arctg} \sqrt{nx} \right)$$

$$в) \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right);$$

точок метричного простору $C_{[0;1]}$ з рівномірною метрикою є фундаментальними.

14. З'ясувати, які з множин точок метричного простору $\mathbb{R}$ з природною метрикою є зв'язними:

$$а) \left\{ x \mid \frac{9x+1}{2} - \frac{9x+3}{3} < \frac{9x-3}{6} \right\};$$

- б) $\left\{x \mid \sqrt{\frac{1+x}{x}} + \frac{1}{x} = 5\right\};$
 в) $\{x \mid \lg^2 x^2 = 1\};$
 г) $\{x \mid |x| + |x-1| = 1\};$
 д) $\{x \mid |x|^3 + |x-1|^3 = 9\};$
 е) $\left\{x \mid \left|\frac{2}{x-4}\right| > 1\right\};$
 є) $\{x \mid \log_{0,5}(2x+6) > \log_{0,5}(x+8)\};$
 ж) $\{x \mid x^2 \log_2 0,3 - 2 \log_2 0,09 > 0\};$

Практичне заняття № 5

Тема: Відображення метричних просторів. Неперервні відображення.

З1. *Задано відповідність $(x, y) \rightarrow (2x - y + 1; -x + 2y - 1)$.*

1.1. *Переконайтесь, що ця відповідність задає відображення $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, і, скориставшись матрицями $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, запишіть це відображення формулою $Y = AX + B$, де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Знайдіть образи: а) точок $(2; 3), (-4; 4)$; б) бісектриси першого і третього координатних кутів; в) прямої $x + y = 3$; г) параболи $y = x^2$; д) кола $x^2 + y^2 = 1$.*

1.2. *Розв'яжіть рівняння $Y = AX + B$ відносно X і знайдіть прообрази: а) точок $(2, 3), (-11, 11)$; б) прямої $x - y = 2$; в) прямої $x + y = 3$; г) параболи $y = x^2$; д) кола $x^2 + y^2 = 1$.*

Вказівка. *Для знаходження образу кривої, заданої рівнянням, перейдіть до параметричного задання кривої $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, знайдіть образ $(\varphi(t), \psi(t))$ і з рівнянь*

$$\begin{cases} 2\varphi(t) - \psi(t) + 1 = x, \\ -\varphi(t) + 2\psi(t) - 1 = y \end{cases}$$

виключіть параметр t . Для визначення типу кривої другого порядку

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$$

Знайдіть $I_1 = a_{11} + a_{22}$, $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Якщо $I_2 > 0$, $I_1 I_3 < 0$, то маємо еліпс; якщо $I_2 < 0$, $I_3 \neq 0$, то гіперболу; якщо $I_2 = 0$, $I_3 \neq 0$, то параболу.

2. Задано відповідність $f(x) \rightarrow \int_0^1 (x^2 - f^2(x)) dx$. Переконайтесь, що ця відповідність задає відображення $F : C_{[0;1]} \rightarrow \mathbb{R}$. 2.1. Знайдіть образи точок $f_1(x) = 2x^2 - 1$, $f_2(x) = \sin \pi x$. 2.2. Опишіть множину точок виду $f(x) = x^2 + bx + c$, які є прообразом нуля, тобто розв'яжіть рівняння $F(f) = 0$ в класі функцій виду $x^2 + bx + c$.

3. Задано відповідність $(x, y) \rightarrow t^2 + (x + y)t + xy$. Переконайтесь, що ця відповідність задає відображення $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow C_{[0;1]}$. Знайдіть образ точки $(-1; 1)$ і прообрази функцій $f_1(t) = t^2 + 3t - 2$, $f_2(t) = t^2 - 5t + 6$.

4. Довести, що функціонали $f(x(t)) : C_{[a;b]} \rightarrow \mathbb{R}$ (метрика рівномірна) неперервні, якщо:

4.1 $f_1(x) := \int_a^b x(t) dt$; 4.2 $f_2(x) := \min_{[a;b]} x(t)$; 4.3 $f_2(x) := \max_{[a;b]} x(t)$.

5. Дослідити на неперервність відображення $f : C_{[0;1]} \rightarrow C_{[0;1]}$ (метрика рівномірна), якщо:

5.1 $f(x) = \varphi x$, де $\varphi = \varphi(t)$ - фіксована функція з $C_{[0;1]}$, а $x = x(t) \in C_{[0;1]}$;

5.2 $f(x) = x^2$, а $x = x(t) \in C_{[0;1]}$; 5.3 $f(x(t)) := \int_0^t x(s) ds$;

5.4 $f(x(t)) := \int_0^t x^2(s) ds$; 5.5 $f(x(t)) := \int_0^t \sin(t - x) x(s) ds$.

В. 1) неперервне; 2) неперервне; 3) неперервне; 4) ні; 5) неперервне.

6. Довести, що оператори $F : C_{[0;1]} \rightarrow C_{[0;1]}$ (метрика рівномірна) є рівномірно неперервними, якщо:

$$6.1 \quad F(f(x)) := \int_0^x e^{xu} \sin(f(u)) du;$$

$$6.2 \quad F(f(x)) := \int_0^1 \sin(1 + xf(u)) du;$$

$$6.3 \quad F(f(x)) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 f\left(\frac{xu}{n}\right) du.$$

Вказівки: 1) $d(F(f_1), F(f_2)) \leq ed(f_1, f_2);$ 2)

$$d(F(f_1), F(f_2)) \leq d(f_1, f_2);$$

3) $d(F(f_1), F(f_2)) \leq ed(f_1, f_2).$

7. Довести, що відображення $F(f(x)) = f'(x)$ метричного простору $C_{[0;1]}$ з рівномірною метрикою в себе не є неперервним в точці $f_0(x) = x^2$.

Вказівка. Розгляньте послідовність $f(x) = x^2 - \frac{x^n}{n}$.

📖 Практичне заняття № 6

Тема: Стискуючі відображення. Теорема Банаха

1. Знайдіть $D(f)$, $E(f)$ і нерухомі точки відображення $f(x)$, якщо:

1.1 $f(x) = 2 + \sqrt{9 - x};$

1.2 $f(x) = \frac{5a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \sqrt{a^2 + x^2},$ де $a > 0;$

1.3 $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2x - 3} - \frac{3}{2};$

1.4 $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} + 1;$

1.5 $f(x) = \frac{5}{3}\sqrt{2x^2 + 3x + 9} - \frac{2}{3}x^2 - 1.$

2. Знайдіть нерухомі точки відображення:

2.1. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ за правилом $y_1 = 2x_2 + 3x_2, y_2 = -2x_1 + 3x_1^2;$

2.2. $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ за правилом $y_1 = x_2x_3, y_2 = 2x_1x_3, y_3 = 3x_1x_2;$

✎5. Переконайтесь, що відображення простору $C_{[0;1]}$ в себе за правилом:

$$5.1. f(x) \rightarrow e^x + \int_0^x e^{x-t} f(t) dt;$$

$$5.2. f(x) \rightarrow x - \int_0^x (x-t) f(t) dt;$$

$$5.3. f(x) \rightarrow x + 4 \int_0^x (t-x) f(t) dt;$$

$$5.4. f(x) \rightarrow 1 + 2 \int_0^x \cos(x-t) f(t) dt;$$

$$5.5. f(x) \rightarrow \sin x + 2 \int_0^x \cos(x-t) f(t) dt$$

мають нерухомі точки відповідно: 1) e^{2x} , 2) $\sin x$, 3) $\frac{1}{2} \sin 2x$, 4) $1 + 2xe^x$, 5) xe^x .

✎6. Чи є задані відображення стискуючими?

$$6.1. f(x) = x^2 \text{ на } \left[0; \frac{1}{3}\right];$$

$$6.2. f(x) = 4x - 4x^2 \text{ на } [0;1];$$

$$6.3. f(x) = x + \frac{1}{x} \text{ на } [1; +\infty);$$

$$6.4. u = 0,7x + 0,8y, v = 0,2x + 0,05y \text{ на } R^2;$$

$$6.5. F(y) = \frac{1}{3} \int_0^x y(t) dt \text{ на } C_{[0;2]} \text{ з рівномірною метрикою.}$$

✎7. В метричному просторі $C_{[0;1]}$ з рівномірною метрикою визначити, які з перетворень мають нерухомі точки, є стискуючими відображеннями:

$$7.1. x(t) \rightarrow -x(t);$$

$$7.2. x(t) \rightarrow |x(t)|;$$

$$7.3. f(x(t)) = x\left(\frac{t}{2}\right);$$

$$7.4 \quad f(x(t)) = \int_0^t x(u) du, \quad t \in [0; 1];$$

$$7.5 \quad f(x(t)) = 1 + \int_0^t x(u) du, \quad t \in [0; 1];$$

$$7.6 \quad f(x(t)) = \int_0^t \left(\int_0^u x(v) dv \right) du = \int_0^t (t-u)x(u) du, \quad t \in [0; 1].$$

8. Довести, що в просторі $(\mathbb{R}, d)$ з евклідовою метрикою відображення

$$f(x) := x + \frac{\pi}{2} - \arctg x, \quad x \in \mathbb{R}$$

задовольняє умову

$$\forall \{x, y\} \subset \mathbb{R}, x \neq y: |f(x) - f(y)| < |x - y|$$

і не має нерухомих точок.

9. Нехай функція $F \in C_{[a,b] \times \mathbb{R}}$ задовольняє умову:

$$\exists m > 0, \exists M \geq m, \forall x \in [a, b] \text{ і } \forall \{y_1, y_2\} \subset \mathbb{R}, y_1 \neq y_2:$$

$$m \leq \frac{F(x, y_1) - F(x, y_2)}{y_1 - y_2} \leq M.$$

Довести, що $\exists! f \in C_{[a,b]}, \forall x \in [a, b]: F(x, f(x)) = 0$.

10. Нехай (X, d) - компактний метричний простір, а відображення $f: X \rightarrow X$ задовольняє умову:

$$\forall \{x, y\} \subset X, x \neq y: d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Довести, що відображення f має єдину нерухому точку.

Практичне заняття № 7

Тема: Застосування принципу стискуючих відображень

1. Доведіть, що послідовність, задана рекурентним співвідношенням, має границю і знайдіть її, якщо:

$$1.1. \quad x_1 = 1, \quad x_n = \frac{x_{n-1}}{2 + x_{n-1}};$$

$$1.2. \quad x_1 = \sqrt{2}, \quad x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}};$$

$$1.3. \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_n = \frac{1}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2};$$

$$1.4. \quad x_1 = 5, \quad x_{n+1} = \frac{2 + x_n^2}{2x_n}.$$

✎2. Доведіть, що послідовність ланцюгових дробів:

$$2.1. \quad 2, \quad 2 + \frac{1}{2}, \quad 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \quad 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}, \quad \dots,$$

$$2.2. \quad 3, \quad 3 + \frac{1}{3}, \quad 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}, \quad 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}}, \quad \dots$$

має границю і знайдіть її.

✎3. Переконайтесь, що система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок, і знайдіть його з точністю до 0,01 методом послідовних наближень, взявши за нульове наближення точку $(0;0;0)$, якщо:

$$3.1. \quad \begin{cases} 10x - 2y + z = 9, \\ x + 5y - z = 8, \\ 4x + 2y + 8z = 32, \end{cases}$$

$$3.2. \quad \begin{cases} x + y + z = 4, \\ x + 5y - 6z = 5, \\ 3x - 2y + 7z = 4, \end{cases}$$

$$3.3. \quad \begin{cases} 10x + 2y + 3z = 25, \\ 3x + 6y - 2z = 10, \\ 5x + 3y + 9z = 22, \end{cases}$$

$$3.4. \quad \begin{cases} 7x - 3y + 2z = 12, \\ 10x + 5y - 4z = 22, \\ 8x + 2y - 5z = 10. \end{cases}$$

✎4. Методом послідовних наближень Пікара знайти n -е наближення до розв'язку задачі Коші:

$$4.1. \quad y' = 2x - y, \quad y(0) = 2, \quad n = 3.$$

$$4.2. \quad y' = x - y, \quad y(0) = 1, \quad n = 3.$$

$$4.3. \quad y' = 2y - 2x^2 - 3, \quad y(0) = 2, \quad n = 2.$$

$$4.4. \quad y' = 2x^3 - y^2 - 2x, \quad y(0) = 1, \quad n = 2.$$

$$4.5. \quad y' = x^3 + y - e^x, \quad y(0) = 1, \quad n = 3.$$

✎5. Методом послідовних наближень розв'язати інтегральні рівняння:

$$5.1. f(x) = 1 + \int_0^x f(t)dt, \quad f_0(x) \equiv 0;$$

$$5.2. f(x) = x - \int_0^x (x-t)f(t)dt, \quad f_0(x) \equiv 0;$$

$$5.3. f(x) = 1 - \int_0^x (x-t)f(t)dt, \quad f_0(x) \equiv 0;$$

$$5.4. f(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \int_0^1 xtf(t)dt, \quad f_0(x) \equiv 0;$$

$$5.5. f(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t)dt + e^x - \frac{1}{2}(e-1), \quad f_0(x) \equiv 0.$$

Практичне заняття № 8

Контрольна робота № 1 (Зразок)

✎1. Задано функцію $d_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$. Перевірити чи є метрикою d_1 в $\mathbb{R}$, якщо: $d_1(x, y) = |\sin(x - y)|$.

✎2. Задано функцію $d_2 : C_{[0;1]} \times C_{[0;1]} \rightarrow [0; +\infty)$. Перевірити чи є метрикою d_2 в $C_{[0;1]}$, якщо: $d_2(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$.

✎3. Множина $\mathbb{R}^2$ наділена однією з метрик $d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + 2|y_1 - y_2|$,

$$d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 4(y_1 - y_2)^2},$$

$$d_3((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}.$$

Зобразити на координатній площині одну з множин точок метричного простору $(\mathbb{R}^2, d_i)$: $B((2, 1), 1)$, $\bar{B}((2, 1), 1)$, $S((2, 1), 1)$.

✎4. Методом послідовних наближень знайти розв'язок інтегрального рівняння:

$$y(x) = \lambda \int_0^1 xty(t)dt + \frac{5}{6}x, \quad y_0(x) \equiv 0.$$

Розділ 2. НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ

📖 Практичне заняття № 9-10

Тема: Лінійні і нормовані простори. Банахові простори

✎1. Знайти точку перетину пари прямих $x = (1-t_1)a_1 + t_1a_2, t_1 \in \mathbb{R}$ і $x = (1-t_2)b_1 + t_2b_2, t_2 \in \mathbb{R}$ в просторі $\mathbb{R}^4$:

1.1. $a_1 = (2, 1, 1, 3), a_2 = (4, 4, 2, 4), b_1 = (1, 1, 2, 1), b_2 = (2, 3, 3, 1).$

1.2. $a_1 = (2, 1, 1, -3), a_2 = (4, 4, 2, -4), b_1 = (1, 1, 2, 2), b_2 = (2, 3, 3, 3).$

1.3. $a_1 = (2, 1, 3, -3), a_2 = (4, 4, 4, -4), b_1 = (1, 1, 1, 2), b_2 = (2, 3, 1, 3).$

1.4. $a_1 = (2, 1, 3, -3), a_2 = (4, 2, 4, -4), b_1 = (1, 2, 1, 2), b_2 = (2, 3, 1, 3).$

1.5. $a_1 = (1, 1, 3, -3), a_2 = (4, 2, 4, -4), b_1 = (1, 2, 1, 2), b_2 = (3, 3, 1, 3).$

✎2. Знайти точку перетину пари прямих $x = (1-t_1)a_1 + t_1a_2, t_1 \in \mathbb{R}$ і $x = (1-t_2)b_1 + t_2b_2, t_2 \in \mathbb{R}$ в просторі $C_{[a,b]}$:

2.1. $a_1 = x^2 - x + 6, a_2 = x^2 - 1,5x + 7,25,$

$b_1 = 3x^2 + x + 3, b_2 = 4x^2 + x + 4.$

2.2. $a_1 = -2x^2 + 3x - 5, a_2 = -5x^2 + 5x - 11,$

$b_1 = x^2 - 2x - 1, b_2 = x^2 - 0,8x - 0,2.$

2.3. $a_1 = 4x^2 - 3x - 3, a_2 = 4,6x^2 - 3,8x - 3,8,$

$b_1 = -x^2 + x + 4, b_2 = -3x^2 + x + 7.$

2.4. $a_1 = 5x^2 - x + 2, a_2 = 21x^2 - 9x + 6,$

$b_1 = x^2 - 4x - 3, b_2 = x^2 - 3\frac{2}{7}x - 2\frac{3}{7}.$

2.5. $a_1 = -3x^2 + 2x - 7, a_2 = x^2 + x + 1,$

$b_1 = x^2 - 7x + 6, b_2 = x^2 + 65x - 39.$

✎3. Довести, що в означенні нормованого простору аксіому 1^0 можна замінити на аксіому: якщо $\|x\| = 0$, то $x = 0$.

✎4. Нехай X – нормований простір та $x_n, x, y_n, y \in X$ ($n \in \mathbb{N}$).

Довести, що:

4.1. Якщо $x_n \rightarrow x$, то (x_n) – обмежена послідовність.

4.2. Якщо $x_n \rightarrow x, \lambda_n \rightarrow \lambda, \lambda_n \in \mathbb{R}$, то $\lambda_n x_n \rightarrow \lambda x$.

4.3. Якщо $x_n \rightarrow x$, то $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

4.4. Якщо $x_n \rightarrow x$ і $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$, то $y_n \rightarrow x$.

4.5. Якщо $x_n \rightarrow x$, то $\|x_n - y\| \rightarrow \|x - y\|$.

4.6. Якщо $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, то $\|x_n - y_n\| \rightarrow \|x - y\|$.

5. Нехай X – нормований простір. Довести, що для будь-яких елементів $x, y \in X$ виконується нерівність

$$\|x\| \leq \max \{\|x + y\|, \|x - y\|\}.$$

6. Нехай X – нормований простір. Довести, що для довільної множини $A \subset X$ множина A' замкнена.

7. Переконайтесь, що у наступних випадках виконуються аксіоми норми, тобто визначена коректно. Що означає збіжність послідовності у кожному із перерахованих нижче просторів?

7.1. Простір E^m стовпців $x = (x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in \mathbb{R}$) з нормою

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

7.2. Простір C^m стовпців $x = (x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in \mathbb{R}$) з нормою

$$\|x\| = \max_{1 \leq k \leq m} |x_k|.$$

7.3. Простір l^m стовпців $x = (x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in \mathbb{R}$) з нормою

$$\|x\| = \sum_{k=1}^m |x_k|.$$

7.4. Простір l_p^m ($p > 1$) стовпців $x = (x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in \mathbb{R}$) з нормою

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

7.5. Простір l_1 послідовностей $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ ($x_k \in \mathbb{R}$), які

задовольняють умову $\sum_{k=1}^\infty |x_k| < \infty$, з нормою $\|x\| = \sum_{k=1}^\infty |x_k|$.

7.6. Простір l_2 послідовностей $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ ($x_k \in \mathbb{R}$), які

задовольняють умову $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 < \infty$, з нормою $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$

7.7. Простір l_p ($p > 1$) послідовностей $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ ($x_k \in \mathbb{R}$), які задовольняють умову $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, з нормою $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

7.8. Простір m обмежених послідовностей $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ ($x_k \in \mathbb{R}$) з нормою $\|x\| = \sup_k |x_k|$.

7.9. Простір c_0 послідовностей $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ ($x_k \in \mathbb{R}$), які збігаються до нуля, з нормою $\|x\| = \max_k |x_k|$.

7.10. Простір c збіжних послідовностей $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ ($x_k \in \mathbb{R}$) з нормою $\|x\| = \sup_k |x_k|$.

8. Переконайтесь, що у наступних випадках виконуються аксіоми норми, тобто визначена коректно. Що означає збіжність послідовності у кожному із перерахованих нижче просторів?

8.1. Простір $C_{[a,b]}$ неперервних на $[a, b]$ функцій з нормою $\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$.

8.2. Простір $C_{[a,b]}^k$ k разів неперервно диференційовних на $[a, b]$ функцій з нормою $\|x\| = \sum_{i=0}^k \max_{t \in [a,b]} |x^{(i)}(t)|$.

8.3. Простір $M[a, b]$ всіх обмежених на $[a, b]$ функцій з нормою $\|x\| = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|$.

8.4. Простір K неперервних на $\mathbb{R}$ фінітних функцій (рівних нулю зовні деякого інтервалу, свого для кожної функції) з нормою $\|x\| = \max_t |x(t)|$.

8.5. Простір $\tilde{L}_p[a, b]$ неперервних на $[a, b]$ функцій з нормою $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$.

9. Довести, що будь-яка фундаментальна послідовність у нормованому просторі обмежена.

✎10. Нехай X – нормований простір, $x_n \in X$ – фундаментальна послідовність та підпослідовність x_{n_k} збігається. Довести, що вся послідовність x_n збігається.

✎11. Нехай X – нормований простір, $x_n \in X$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|$ збігається. Довести, що x_n – фундаментальна послідовність.

✎12. У лінійному просторі многочленів, заданих на $[a, b]$, покладемо

$$12.1. \|x\|_1 = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|.$$

$$12.2. \|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

а) Перевірити аксіоми норми.

б) Чи буде який-небудь із отриманих просторів банаховим?

Відповідь: б) Ні для обох норм. Послідовність

$x_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$, $n \in \mathbb{N}$, фундаментальна в обох нормах, однак

розбіжна у просторі, що розглядається.

✎13. У лінійному просторі дійсних неперервно диференційовних на $[a, b]$ функцій $\tilde{H}^1[a, b]$ покладемо

$$\|x\| = \left(\int_a^b (x^2(t) + x'^2(t)) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

а) Перевірити аксіоми норми.

б) Чи буде отриманий простір банаховим?

Відповідь: б) Ні.

✎14. Які із наступних просторів є банаховими?

14.1. Простір E^m стовпців $x = (x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in \mathbb{R}$) з нормою

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

14.2. Простір c^m стовпців $x = (x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in \mathbb{R}$) з нормою

$$\|x\| = \max_{1 \leq k \leq m} |x_k|.$$

14.3. Простір l^m стовпців $x = (x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in \mathbb{R}$) з нормою

$$\|x\| = \sum_{k=1}^m |x_k|.$$

14.4. Простір l_p^m ($p > 1$) стовпців $x = (x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in \mathbb{R}$) з нормою

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^m |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

14.5. Простір l_1 послідовностей $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ ($x_k \in \mathbb{R}$), які

задовольняють умову $\sum_{k=1}^\infty |x_k| < \infty$, з нормою $\|x\| = \sum_{k=1}^\infty |x_k|$.

14.6. Простір l_2 послідовностей $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ ($x_k \in \mathbb{R}$), які

задовольняють умову $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 < \infty$, з нормою $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

14.7. Простір l_p ($p > 1$) послідовностей $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ ($x_k \in \mathbb{R}$), які

задовольняють умову $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < \infty$, з нормою $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

14.8. Простір m обмежених послідовностей $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ ($x_k \in \mathbb{R}$)

з нормою $\|x\| = \sup_k |x_k|$.

14.9. Простір c_0 послідовностей $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ ($x_k \in \mathbb{R}$), які

збігаються до нуля, з нормою $\|x\| = \max_k |x_k|$.

14.10. Простір c збіжних послідовностей $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ ($x_k \in \mathbb{R}$) з

нормою $\|x\| = \sup_k |x_k|$.

Відповідь: усі.

15. Які із наступних просторів є банаховими?

15.1. Простір $C_{[a,b]}$ неперервних на $[a, b]$ функцій з нормою

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

15.2. Простір $C_{[a,b]}^k$ k разів неперервно диференційовних на $[a, b]$ функцій з нормою $\|x\| = \sum_{i=0}^k \max_{t \in [a,b]} |x^{(i)}(t)|$.

15.3. Простір $M[a, b]$ всіх обмежених на $[a, b]$ функцій з нормою $\|x\| = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|$.

15.4. Простір K неперервних на $\mathbb{R}$ фінітних функцій (рівних нулю зовні деякого інтервалу, свого для кожної функції) з нормою $\|x\| = \max_t |x(t)|$.

15.5. Простір $\tilde{L}_p[a, b]$ неперервних на $[a, b]$ функцій з нормою $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$.

Відповідь: усі, крім 8.4 та 8.5.

Практичне заняття № 11-12

Тема: Лінійні оператори і функціонали. Спектр оператора. Спряжений оператор

✎1. Нехай X, Y – лінійні простори, $A: X \rightarrow Y$ – лінійний оператор і система елементів $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ лінійно залежна. Довести, що система $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n$ лінійно залежна.

✎2. Нехай X, Y – лінійні простори, $A: X \rightarrow Y$ – лінійний оператор і система елементів $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ лінійно незалежна. Чи вірно, що система $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n$ лінійно незалежна.

Відповідь: Взагалі кажучи ні.

✎3. Нехай на лінійному просторі X задані дві еквівалентні норми, $A: X \rightarrow X$ – лінійний оператор. довести, що в обох нормах він буде одночасно або обмеженим або необмеженим.

✎4. Нехай X, Y – лінійні простори, $A: X \rightarrow Y$ – обмежений лінійний оператор. Довести, що $\|A\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

✎5. Довести, що лінійний оператор $A: X \rightarrow Y$ обмежений тоді і тільки тоді, коли існує $c \in \mathbb{R}, c > 0$ таке, що для будь-якого

$x \in S_1(0) \subset X$ виконується нерівність $\|Ax\| \leq c$. Якщо ця умова виконується, то $\|A\| = \sup_{x \in X, \|x\|=1} \|Ax\|$.

✎6. Довести, що наступні оператори є лінійними обмеженими та знайти їх норми:

$$6.1. A: C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, (Ax)(t) = t^2 x(0).$$

$$6.2. A: C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, (Ax)(t) = \int_0^t x(s) ds.$$

$$6.3. A: C_{[a,b]}^1 \rightarrow C_{[a,b]}, (Ax)(t) = x(t).$$

$$6.4. A: C_{[a,b]}^1 \rightarrow C_{[a,b]}, (Ax)(t) = \frac{dx}{dt}.$$

$$6.5. A: L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1], (Ax)(t) = t \int_0^1 x(s) ds.$$

$$6.6. A: C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, (Ax)(t) = \int_0^1 (t^2 + 2s) x(s) ds.$$

$$6.7. A: C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, (Ax)(t) = \int_0^1 e^{3t-2s} x(s) ds.$$

$$6.8. A: C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, (Ax)(t) = \int_0^1 \sin \pi(t-s) x(s) ds.$$

✎7. З'ясувати, чи є наступні функціонали лінійними обмеженими, і якщо так, то знайти їх норми:

$$7.1. f(x) = x\left(\frac{a+b}{2}\right), x(t) \in C_{[a,b]}.$$

$$7.2. f(x) = x(a) - x(b), x(t) \in C_{[a,b]}.$$

$$7.3. f(x) = \int_{-1}^1 x(t) \operatorname{sgn} t dt, x(t) \in C_{[-1,1]}.$$

$$7.4. f(x) = \int_0^1 t |x(t)| dt, x(t) \in C_{[0,1]}.$$

$$7.5. f(x) = x(1), x(t) \in C_{[0,1]}, \|x\| = \int_0^1 |x(t)| dt.$$

$$7.6. f(x) = \int_{-1}^1 t^2 x(t) \operatorname{sgn} t dt, x(t) \in L_p([-1, 1]), 1 \leq p \leq +\infty.$$

$$7.7. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (x_n + x_{n+1}), x \in l_2.$$

$$7.8. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos n, x \in X = \left\{ x \in l_2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos n - \text{збіжний} \right\}.$$

8. Знайти спектр оператора $A: C_{[0;1]} \rightarrow C_{[0;1]}$, який задається рівністю:

$$8.1. (Ax)(t) = tx(t).$$

$$8.2. (Ax)(t) = x(0)t.$$

$$8.3. (Ax)(t) = tx(1) - t^2 x(0).$$

$$8.4. (Ax)(t) = \int_0^t x(s) ds.$$

$$8.5. (Ax)(t) = \int_0^1 e^t s x(s) ds.$$

9. Знайти оператор, спряжений до оператора:

$$9.1. A: L_2[0;1] \rightarrow L_2[0;1], (Ax)(t) = \int_0^t x(s) ds.$$

$$9.2. A: L_2[0;1] \rightarrow L_2[0;1], (Ax)(t) = \int_0^1 \sin(t^2 s) x(s) ds.$$

$$9.3. A: L_2[0;1] \rightarrow L_2[0;1], (Ax)(t) = \int_0^1 t^2 x(s) ds.$$

$$9.4. K: L_2[a; b] \rightarrow L_2[a; b], (Kx)(t) = \int_a^b K(s, t) x(s) ds.$$

$$9.5. A: C_{[0;1]} \rightarrow C_{[0;1]}, (Ax)(t) = tx(t).$$

$$9.6. A: l_1 \rightarrow l_1, (Ax) = (x_2, x_1, x_3, x_4, \dots).$$

$$9.7. A: l_1 \rightarrow l_1, (Ax) = (0, 0, x_1, x_2, \dots).$$

$$9.8. A: l_1 \rightarrow l_1, (Ax) = (x_1 - 2x_3, x_2 + 4x_3, x_3, x_4, \dots).$$

$$9.9. A: l_1 \rightarrow l_1, (Ax) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_3, x_4, \dots).$$

$$9.10. A: l_1 \rightarrow l_1, (Ax)_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j.$$

Практичне заняття № 13

Тема: Розв'язування інтегральних рівнянь методом ітерованих ядер

✎1. Методом ітерованих ядер знайти резольвенту і розв'язок рівняння Фредгольма 2-го роду:

$$1.1. y(x) = \lambda \int_0^1 xty(t)dt + x.$$

$$1.2. y(x) = \int_0^1 \frac{x}{t^2 + 1} y(t)dt + x^2 + 1.$$

$$1.3. y(x) = \int_0^1 e^{x+t} y(t)dt + 1.$$

$$1.4. y(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos t \cdot y(t)dt - 1.$$

$$1.5. y(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 xe^t y(t)dt + 1.$$

$$1.6. y(x) = \int_{-1}^0 (1+x)(1-t)y(t)dt - 1.$$

$$1.7. y(x) = 2 \int_{-1}^1 x^2 t^2 y(t)dt + 1.$$

$$1.8. y(x) = \int_{-1}^1 xty(t)dt - x.$$

$$1.9. y(x) = \lambda \int_0^1 x^2 ty(t)dt + x.$$

$$1.10. y(x) = \lambda \int_0^1 t^2 y(t)dt + x^2.$$

✎2. Методом ітерованих ядер знайти резольвенту і розв'язок рівняння Вольтерри 2-го роду:

$$2.1. y(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x xy(t)dt + x.$$

$$2.2. y(x) = \frac{1}{2} \int_0^x y(t) dt + 1.$$

$$2.3. y(x) = \int_0^x (x-t)y(t) dt + 1.$$

$$2.4. y(x) = -\int_0^x e^{x-t} y(t) dt - 3x^2.$$

$$2.5. y(x) = \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2} y(t) dt + e^x.$$

$$2.6. y(x) = \int_0^x e^{x^2-t^2} y(t) dt + e^{x^2}.$$

$$2.7. y(x) = \int_0^x \frac{2+\cos x}{2+\cos t} y(t) dt - e^x \sin x.$$

$$2.8. y(x) = \int_0^x \frac{ch x}{cht} y(t) dt + ch x.$$

$$2.9. y(x) = \int_0^x a^{x-t} y(t) dt + a^x.$$

$$2.10. y(x) = \int_0^x 2xy(t) dt - x.$$

Відповіді: 1.1. $R(x, t, \lambda) = \frac{3xt}{3-\lambda}, \quad y = \frac{3x}{3-\lambda}. \quad 1.2.$

$R(x, t, 1) = \frac{2}{2-\ln 2} \frac{x}{t^2+1}, \quad y = x^2 + \frac{2x}{2-\ln 2} + 1. \quad 1.3. \quad R(x, t, 1) = \frac{2e^{x+t}}{3-e^2},$

$y = \frac{2(e-1)}{3-e^2} e^x + 1. \quad 1.4. \quad R(x, t, 1) = 2 \sin x \cos t, \quad y = -2 \sin x - 1. \quad 1.5.$

$R\left(x, t, \frac{1}{2}\right) = \frac{xe^{t+1}}{e-1}, \quad y = \frac{e+1}{2} x + 1. \quad 1.6. \quad R(x, t, 1) = 3(1+x)(1-t),$

$y = \frac{3x+1}{2}. \quad 1.7. \quad R(x, t, 2) = 5x^2 t^2, \quad y = \frac{20}{3} x^2 + 1. \quad 1.8. \quad R(x, t, 1) = 3xt,$

$y = -3x. \quad 1.9. \quad R(x, t, \lambda) = \frac{4x^2 t}{4-\lambda}, \quad y = \frac{4\lambda}{12-3\lambda} x^2 + x. \quad 1.10.$

$$R(x, t, \lambda) = \frac{3t^2}{3-\lambda}, \quad y = x^2 + \frac{3\lambda}{15-5\lambda}. \quad 2.1. \quad R\left(x, t, -\frac{1}{2}\right) = xe^{\frac{t^2-x^2}{4}}, \quad y = xe^{-\frac{x^2}{4}}.$$

$$2.2. \quad R\left(x, t, \frac{1}{2}\right) = e^{\frac{x-t}{2}}, \quad y = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{2}} + 3\right). \quad 2.3. \quad R(x, t, 1) = sh(x-t), \quad y = ch x.$$

$$2.4. \quad R(x, t, -1) = 1, \quad y = x^3 - 3x^2. \quad 2.5. \quad R(x, t, 1) = \frac{1+x^2}{1+t^2}e^{x-t}, \\ y = e^x \left((1+x^2) \operatorname{arctg} x + 1 \right). \quad 2.6. \quad R(x, t, 1) = e^{x-t} e^{x^2-t^2}, \quad y = e^{x^2+x}. \quad 2.7.$$

$$R(x, t, 1) = \frac{2+\cos x}{2+\cos t} e^{x-t}, \quad y = e^x \left((2+\cos x) \ln \frac{2+\cos x}{3} - \sin x \right). \quad 2.8.$$

$$R(x, t, 1) = \frac{ch x}{cht} e^{x-t}, \quad y = e^x ch x. \quad 2.9. \quad R(x, t, 1) = a^{x-t} e^{x-t}, \quad y = e^x. \quad 2.10.$$

$$R(x, t, 1) = 2xe^{x^2-t^2}, \quad y = -xe^{x^2}.$$

📖 Практичне заняття № 14

Тема: Евклідові та гільбертові простори

❏1. У лінійному просторі $\mathbb{R}^n$ над полем $\mathbb{R}$ скалярний добуток двох векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ означається так:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = \vec{x} A \vec{y}^T = \\ = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix},$$

де A – симетрична додатно визначена матриця, тобто

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, |A| > 0.$$

Квадратична форма $\vec{x} A \vec{x}^T$ – додатно визначена (тобто $\vec{x} A \vec{x}^T > 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ і $\vec{x} \neq 0$, $\vec{x} A \vec{x}^T = 0$ тільки при $\vec{x} = \vec{0}$) тоді і тільки тоді, коли A – симетрична додатно визначена матриця.

Переконайтесь, що задана матриця A означає скалярний добуток в $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{lll}
 1.1. \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} & 1.2. \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} & 1.3. \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \\
 1.4. \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} & 1.5. \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{8} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{7} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} & 1.6. \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{7} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

✎2. Довести, що в означенні евклідового простору аксіому 4⁰ можна замінити на аксіому: $(x, x) \geq 0$, причому якщо $(x, x) = 0$, то $x = 0$.

✎3. Довести, що у просторі зі скалярним добутком:

3.1. Для будь-яких елементів x, y, z справедлива тотожність

Аполлонія: $\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x + y}{2}\right\|^2.$

3.2. Для будь-яких елементів x, y, z справедлива нерівність Птолемея: $\|x - z\| \cdot \|y - t\| \leq \|x - y\| \cdot \|z - t\| + \|y - z\| \cdot \|x - t\|$. Коли у ній справедлива рівність?

✎4. Довести, що у евклідовому просторі елементи x та y ортогональні тоді і тільки тоді, коли $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$.

✎5. Нехай X – дійсний нормований простір і для будь-яких $x, y \in X$ виконується рівність паралелограма:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Довести, що формула

$$(x, y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

задає в X скалярний добуток, який відповідає нормі в X , тобто такий, що $(x, x) = \|x\|^2$.

✎6. Переконалися, що наступні простори є евклідовими.

6.1. Простір E^m стовпців $x = (x_k)_{k=1}^m$ ($x_k \in \mathbb{R}$), якщо

$$(x, y) = \sum_{k=1}^m x_k \cdot y_k.$$

6.2. Простір l_2 послідовностей $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ ($x_k \in \mathbb{R}$), які задовольняють умову $\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 < \infty$, якщо $(x, y) = \sum_{k=1}^\infty x_k \cdot y_k$.

✎7. Нехай E – евклідов простір. Довести, що для будь-яких $x, y \in E$ справедлива нерівність $|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$.

✎8. Нехай E – евклідов простір. Довести, що для будь-яких $x, y \in E$ справедлива нерівність $\sqrt{(x+y, x+y)} \leq \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}$.

✎9. Нехай E – евклідов простір. Довести, що для будь-яких $x, y \in E$ правильна рівність $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

✎10. У лінійному просторі неперервних на $[0; +\infty)$ функцій $x(t)$ таких, що $\int_0^{+\infty} |x(t)|^2 e^{-t} dt$ збігається, покладемо

$$(x, y) = \int_0^{+\infty} x(t)y(t)e^{-t} dt.$$

Перевірити виконання аксіом скалярного добутку.

✎11. У лінійному просторі $\tilde{L}_2[a, b]$ неперервних на $[a, b]$ функцій покладемо

$$(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt.$$

Чи є цей простір гільбертовим?

Відповідь: ні.

✎12. У лінійному просторі $\tilde{H}_1[a, b]$ неперервно диференційовних на $[a, b]$ функцій покладемо

$$(x, y) = \int_a^b (x(t)y(t) + x'(t)y'(t)) dt.$$

Чи є цей простір гільбертовим?

13. У лінійному просторі послідовностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ ($x_k \in \mathbb{R}$)

таких, що $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$, покладемо

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k x_k y_k,$$

де $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $0 < \lambda_k < 1$. Чи буде отриманий евклідов простір гільбертовим?

Відповідь: Взагалі кажучи ні. Нехай ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ збігається і для вибраного $\varepsilon > 0$ номер n_0 такий, що $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \lambda_k < \varepsilon$. Розглянемо

послідовність $x_n = \left(\underset{n}{1, \dots, 1}, 0, 0, \dots \right)$. Тоді при $m, n > n_0$ маємо $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$, але x_n не є збіжною.

14. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – ортогональна система у гільбертовому просторі H , $x = \sum_{k=1}^n x_k$. Довести, що $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$.

15. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ – ортогональна система у гільбертовому просторі H . Довести, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ збігається в H тоді і тільки тоді, коли збігається числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^2$.

16. Нехай e_n ($n \in \mathbb{N}$) – ортонормована система у гільбертовому просторі H , λ_n – послідовність дійсних чисел. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ збігається в H тоді і тільки тоді, коли $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$.

17. Перевірити, чи буде дана система функцій ортогональною, якщо це так, то нормувати її:

17.1. $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots$ на $[0, \pi]$.

17.2. $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots$ на $[0, \pi]$.

17.3. $\sin x, \sin 3x, \dots, \sin(2n+1)x, \dots$ на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

17.4. $1, \cos \frac{\pi x}{2}, \cos \frac{2\pi x}{2}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{2}, \dots$ на $[0, 2]$.

17.5. $\sin \frac{\pi x}{2}, \sin \frac{2\pi x}{2}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{2}, \dots$ на $[0, 2]$.

Практичне заняття № 15

Тема: Диференціювання операторів і функціоналів. Похідні Фреше і Гато

✎1. Довести, що похідна Фреше диференційовного в точці відображення визначається єдиним чином.

✎2. Довести, що якщо оператор f диференційовний за Фреше в точці x , то f неперервний в цій точці.

✎3. Нехай оператор $f : X \rightarrow Y$ диференційовний за Фреше. Довести, що якщо $f(x) = \text{const}$, то $f'(x) = 0$ (нульовий оператор).

✎4. Довести, що похідною Фреше лінійного неперервного відображення є саме це відображення.

✎5. Нехай f, g – два неперервних відображення з X в Y . Довести, що якщо f та g диференційовні за Фреше в точці x , то:

5.1. Відображення $f+g$ також диференційовне в цій точці, причому $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

5.2. Відображення Cf , де $C = \text{const}$, також диференційовне в цій точці, причому $(Cf)'(x) = Cf'(x)$.

✎6. Знайти диференціал Фреше функціоналу $\varphi(x) = \|x\|$ в точці x дійсного гільбертового простору.

✎7. Знайти диференціал Фреше функціоналу:

$$7.1. \varphi : C_{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = \left(\int_a^b x^2(t) dt \right)^4.$$

$$7.2. \varphi : C_{[a,b]}^1 \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = \sqrt{1 + (x'(a))^2}.$$

$$7.3. \varphi: C_{[0,1]} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = |x(0)|.$$

$$7.4. \varphi: C_{[a,b]} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = \left(\int_a^b x(t) dt \right)^2.$$

8. Нехай X – евклідов простір. Знайти похідну Гато функціоналу $f(x) = \frac{1}{2} \|x\|^2, x \in X$.

9. Якщо диференціал Гато функціоналу f є обмеженим, то він називається градієнтом і позначається $\langle \text{grad } f(x), h \rangle$. Нехай H – дійсний гільбертів простір, $f(x) = \|x\|$. Обчислити $\text{grad } f(x)$.

10. Знайти диференціал Гато функціоналу:

$$10.1. f: L_2[0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_0^1 x^3(t) dt.$$

$$10.2. f: L_2[0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(\int_0^1 x^2(t) dt \right)^3.$$

Відповіді: 6. $\frac{(x, h)}{\|x\|}$. 7.1. $8 \left(\int_a^b x^2(t) dt \right)^3 \int_a^b x(t) h(t) dt$. 7.2. $\frac{x'(a)h'(a)}{\sqrt{1+(x'(a))^2}}$.

7.3. $\frac{x(0)h(0)}{|x(0)|}$. 7.4. $2 \int_a^b x(t) dt \int_a^b h(t) dt$. 8. x 9. $\frac{x}{\|x\|}$. 10.1. $3 \int_0^1 x^2(t) h(t) dt$.

10.2. $6 \left(\int_0^1 x^2(t) dt \right)^2 \int_0^1 x(t) h(t) dt$.

Практичне заняття № 16
8 Контрольна робота № 2
(Зразок)

✎1. Довести, що простір l_2 послідовностей $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ ($x_k \in \mathbb{R}$), які задовольняють умову $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty$, є нормованим з нормою

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

✎2. Знайти норму оператора

$$A: C_{[0,1]} \rightarrow C_{[0,1]}, \quad (Ax)(t) = \int_0^1 (t^3 + 2s)x(s)ds.$$

✎3. Методом ітерованих ядер знайти резольвенту і розв'язок інтегрального рівняння:

$$y(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x xy(t)dt + x.$$

✎4. Знайти оператор, спряжений до оператора: $A: l_1 \rightarrow l_1$,
 $(Ax) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_3, x_4, \dots)$.

Рекомендована література

Основна

1. Бак С. М. Робочий зошит студента з функціонального аналізу (для студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)). Вінниця, 2023. 37 с.
2. Збірник задач з функціонального аналізу. Видання друге, виправлене і доповнене. / Укладачі В. Б. Брайман, О. Ю. Константинов, О. Г. Кукуш, Ю. С. Мішура, О. Н. Нестеренко, А. В. Чайковський. Київ: КНУ, 2023. 313 с. URL: <https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2023/01/faproblembookfull2ed.pdf>
3. Ковтонюк М.М., Томусяк А.А. Основи функціонального аналізу. Навчальний посібник для фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: ПП «Едельвейс і К», 2011. 574 с.
4. Лисенко З. М., Шанін Р. В. Функціональний аналіз. Частина І: Метричні простори. Конспект лекцій. Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2022. 78 с. URL: <https://dspace.onu.edu.ua/server/api/core/bitstreams/ea0ee6c4-607c-407d-a299-a5f073fb9be1/content>

Додаткова

1. Бак С. М. Диференціальні та інтегральні рівняння. Посібник для студентів спеціальності Середня освіта (Фізика). 2-ге вид., випр. і доп. Вінниця: ФОП Рогальська І. О., 2018. 360 с.
2. Бак С.М., Ковтонюк М.М. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. Посібник для студентів математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ. Вінниця: ПП «Едельвейс і К», 2011. 400 с.
3. Томусяк А.А., Ковтонюк М.М., Вотякова Л.А. Відображення метричних просторів. Вінниця: ПП «Едельвейс і К», 2009. 162 с.
4. Mokin B. I., Mokin V. B., Mokin O. B. Functional analysis in information technologies: textbook [Electronic resource]. Vinnytsia: VNTU, 2024, (PDF, 129 p.). URL: <https://iq.vntu.edu.ua/repository/getfile.php/9598.pdf>

Навчальне видання

Бак Сергій Миколайович

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
З ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

для студентів предметної спеціальності
014.04 Середня освіта (Математика)

Формат 60x84/16.

Папір офсетний. Гарнітура Book Antiqua.

Ум. друк. арк. 1,5
