

Анастасія Дідусенко

АНАЛОГ ФОРМУЛИ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФОРМАЛЬНИХ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ У КВАНТОВОМУ АНАЛІЗІ

Анотація. У статті описано основні поняття у квантовому аналізі, що приводять до q -формули Тейлора, тобто квантовий диференціал, q -аналоги лінійних операторів та многочленів тощо. Також показано розклад формального степеневого ряду за q -формулою Тейлора).

Ключові слова: квантовий аналіз, q -диференціал, q -формула Тейлора, формальні степеневі ряди.

Квантовий аналіз стосується використання принципів і методів квантової механіки для аналізу та розуміння різних явищ. Він може застосовуватися в різних галузях, таких як квантові обчислення, квантова інформація та квантова теорія поля.

У стандартному численні теорема Тейлора забезпечує наближення функції за допомогою поліноміального розкладу навколо певної точки. Цей розклад включає похідні функції в цій точці. Розглянемо основні поняття, що стосуються формули Тейлора у квантовому аналізі, починаючи з квантового диференціала.

Означення 1 ([3]). Розглянемо довільну функцію $f(x)$. Її q -диференціалом будемо називати вираз

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x). \quad (1)$$

Відмінність квантового диференціала від звичайного – відсутність симетрії у формулі для диференціала добутку похідних двох функцій. Для $d_q x = (q-1)x$ маємо:

$$\begin{aligned} d_q(f(x)g(x)) &= f(qx)g(qx) - f(x)g(x) = \\ &= f(qx)g(qx) - f(qx)g(x) + f(qx)g(x) - f(x)g(x), \end{aligned}$$

звідси,

$$d_q(f(x)g(x)) = f(qx)d_q g(x) + g(x)d_q f(x). \quad (2)$$

У формулі (1) функції $f(x)$ і $g(x)$ рівносильні, тому має місце рівність

$$d_q(f(x)g(x)) = g(qx)d_q f(x) + f(x)d_q g(x).$$

Означення 2 ([3]). Вираз

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} \quad (3)$$

називається q -похідною функції $f(x)$.

Зазначимо, що $\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x) = \frac{df(x)}{dx}$, якщо функція $f(x)$ диференційована.

У квантовому аналізі, як і у класичному, диференціювання є лінійним оператором. Тобто, для довільних констант a і b та довільних функцій $f(x)$ і $g(x)$ буде виконуватись рівність $D_q(af(x) + bg(x)) = aD_q f(x) + bD_q g(x)$.

Обчислимо $D_q x^n$, де n – натуральне число. За означенням

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1}. \quad (4)$$

Для відношення $\frac{q^n - 1}{q-1}$ введемо наступне позначення:

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q-1} = q^{n-1} + \dots + 1. \quad (5)$$

Цю величину будемо називати q -аналогом додатного цілого числа n . Тоді формулу (4) можна записати у вигляді

$$D_q x^n = [n] x^{n-1}, \quad (6)$$

що схоже на формулу для обчислення звичайної похідної функції x^n . Зауважимо, що $[n] = q^{n-1} + \dots + 1 \rightarrow 1 + 1 + \dots + 1 = n$ при $q \rightarrow 1$. Величина $[n]$ відіграє важливу роль в q -аналізі.

У класичному аналізі функція $f(x)$, яка має похідні усіх порядків, називається аналітичною при $x = a$. Теорема Тейлора стверджує, що степеневий ряд має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n. \quad (7)$$

Розклад аналітичної функції в ряд часто дозволяє поширити означення функції на більш широку область значень змінної x . Розглянемо аналог формули Тейлора у квантовому аналізі.

Теорема 1 ([3]). Нехай a – деяке число, D – лінійний оператор у просторі многочленів, а $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots\}$ – послідовність многочленів, які задовольняють умови:

- а) $P_0(a) = 1$ і $P_n(a) = 0$ для будь-якого $n \geq 1$;
- б) $\deg P_n(x) = n$;
- в) $DP_n(x)P_{n-1}(x)$ для будь-якого $n \geq 1$, і $D(1) = 0$.

Тоді для довільного многочлена $f(x)$ степеня N справедлива узагальнена формула Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^N (D^n f)(a) P_n(x). \quad (8)$$

Доведення. З умови а) і б) слідує рівність $P_0(x) = 1$. Нехай V – простір многочленів, ступінь яких не перевищує N . Зрозуміло, що $\dim V = N + 1$. Многочлени $P_0(x), P_1(x), \dots, P_N(x)$ належать простору V і є лінійно незалежними, оскільки за умовою б) їх степені строго зростають. Звідси, вони утворюють базис простору V , тому довільний многочлен $f(x) \in V$ може бути представлений у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=0}^N c_k P_k(x) \quad (9)$$

для деяких визначених коефіцієнтів c_k .

Припускаючи, що $x = a$ і використавши умову а), отримаємо $c_0 = f(a)$.

Використаємо тепер n -разів оператор D до обох частин рівняння (9), де $1 \leq n \leq N$. Тоді з умов б) і в) легко отримати рівність

$$(D^n f)(x) = \sum_{k=n}^N c_k D^n P_k(x) = \sum_{k=n}^N c_k P_{k-n}(x).$$

Поклавши в рівність $x = a$ і використавши умову а), отримаємо

$$c_n (D^n f)(a), \quad 0 \leq n \leq N$$

а тому $f(x) = \sum_{n=0}^N (D^n f)(a) P_n(x).$

Для D_q , який є лінійним оператором у просторі многочленів, застосуємо теорему 1 для $D \equiv D_q$. Для цього нам знадобиться q -аналог числа $n!$:

$$[n]! = \begin{cases} 1, & \text{для } n = 0, \\ [n] \cdot [n-1] \cdot \dots \cdot [1], & \text{для } n \geq 1. \end{cases} \quad (10)$$

Нехай $a = 0$. Тоді для оператора $D \equiv D_q$ неважко підібрати послідовність многочленів $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots\}$, яка задовольняє теорему 1:

$$P_n(x) = \frac{x^n}{[n]!}. \quad (11)$$

Справді, при $P_0(0) = 1$, $P_n(0) = 0$ для $n \geq 1$, $\deg P_n = n$, використовуючи формулу (6), отримаємо для $n \geq 1$ рівність

$$D_q P_n(x) = \frac{D_q x^n}{[n]!} = \frac{[n] x^{n-1}}{[n]!} = \frac{x^{n-1}}{[n-1]!} = P_{n-1}(x).$$

Знайдемо послідовність многочленів $P_n(x)$ для довільного $a \neq 0$. Легко перевірити, що многочлени $P_n(x) = \frac{(x-a)^n}{[n]!}$ не задовольняють умовам теореми

1, наприклад, $\frac{D_q (x-a)^2}{[2]!} \neq x-a$. Знайдемо декілька перших многочленів $P_n(x)$

і виведемо загальну формулу.

Зрозуміло, що $P_0(x) = 1$. З рівностей $D_q P_1(x) = 1$ та $P_1(a) = 0$ очевидно слідує, що $P_1(x) = x - a$.

Для виконання відношень $D_q P_2(x) = x - a$ та $P_2(a) = 0$, має місце рівність

$$P_2(x) = \frac{x^2}{[2]} - ax - \frac{a^2}{[2]} + a^2 = \frac{(x-a)(x-qa)}{[2]}.$$

Аналогічно

$$P_3(x) = \frac{(x-a)(x-qa)(x-q^2a)}{[2][3]}$$

і так далі. Природньо припустити, що

$$P_n(x) = \frac{(x-a)(x-qa)\dots(x-q^{n-1}a)}{[n]!}. \quad (12)$$

Ця формула узгоджується з формулою (11) при $a = 0$. Введемо наступне означення.

Означення 3 ([3]). Покладемо

$$(x-a)_q^n = \begin{cases} 1, & \text{для } n = 0, \\ (x-a)(x-qa)\dots(x-q^{n-1}a), & \text{для } n \geq 1. \end{cases} \quad (13)$$

Цей многочлен є q -аналогом многочлена $(x-a)^n$.

Оскільки послідовність многочленів $P_n(x) = \frac{(x-a)_q^n}{[n]!}$ задовольняє умови

теореми 1 відносно лінійного оператора D_q , то будь-який многочлен допускає q -розклад Тейлора.

Теорема 2 ([3]). Зафіксуємо довільне число c . Тоді для будь-якого многочлена $f(x)$ степеня N має місце q -розклад Тейлора:

$$f(x) = \sum_{j=0}^N (D_q^j f)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]!}. \quad (14)$$

Нехай $f(x) = x^n$, де n – додатне ціле число, а $c = 1$. При $j \leq n$ маємо

$$\begin{aligned} (D_q^j f)(x) &= [n] D_q^{j-1} x^{n-1} = [n][n-1] D_q^{j-2} x^{n-2} = \dots = \\ &= [n][n-1] \dots [n-j+1]. \end{aligned} \quad (15)$$

а, отже,

$$(D_q^j f)(1) = [n][n-1] \dots [n-j+1]. \quad (16)$$

Звідси q -формула Тейлора для $f(x) = x^n$ та $c = 1$ матиме вигляд

$$x^n = \sum_{j=0}^n \frac{[n] \dots [n-j+1]}{[j]!} (x-1)_q^j = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (x-1)_q^j. \quad (17)$$

Будемо називати q -біноміальними коефіцієнтами величини

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n][n-1] \dots [n-j+1]}{[j]!} = \frac{[n]!}{[j]![n-j]!}. \quad (18)$$

Легко побачити, що q -біноміальні коефіцієнти при $q \rightarrow 1$ прямують до звичайних біноміальних коефіцієнтів, а рівність (17) перетворюється у звичайну формулу бінома.

Перейдемо тепер до тотожностей, що мають нескінченні суми і добутки. Покажемо, що при невеликих обмеженнях узагальнену формулу Тейлора (8) при $a = 0$ і, відповідно, q -формулу Тейлора (14) при $c = 0$ можна застосувати не лише до многочленів, але й до формальних степеневих рядів. Ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

будемо вважати формальним, оскільки нам не важлива його збіжність. Це дозволяє деякі операції з такими рядами визначати формально. Наприклад, похідна формального степеневого ряду визначається його почленним диференціюванням. Окрім того, природньо вважати, що $f(0) = c_0$, хоча в усіх інших випадках ряд може бути розбіжним.

$$\text{Для формального степеневого ряду } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \text{ похідну } D_q f(x)$$

визначаємо за формулою

$$D_q f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [k] c_k x^{k-1}.$$

Очевидно, що $[k]! c_k = (D_q^k f(x))(0)$.

Звідси слідуватиме, що два формальних степеневих ряди, які збігаються в деякому околі точки $x = 0$ для однієї і тієї ж функції, почленно рівні.

Теорема 3 ([3]). Нехай у просторі формальних степеневих рядів задано лінійний оператор D , а послідовність многочленів $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots\}$ задовольняє умовам теореми 1 при $a = 0$. Окрім того, припустимо, що степінь молодшого одночлена в $P_j(x)$ прямує до нескінченності при $j \rightarrow \infty$. Тоді для будь-якого формального степеневих ряду $f(x)$ справедлива узагальнена формула Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (D^n f)(0) P_n(x)$$

Наслідок 1 ([3]). Для будь-якого формального степеневих ряду $f(x)$ справедлива q -формула Тейлора

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (D_q^j f)(0) \frac{x^j}{[j]!}.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{(1-x)_q^n}$. Використавши ділення «кутиком»,

легко показати, що $f(x)$ представлена у вигляді формального степеневих ряду. Знайдемо розклад функції $f(x)$ в q -ряд Тейлора. За формулою (3.12) отримаємо

$$D_q f(x) = D_q \frac{1}{(1-x)_q^n} = \frac{[n]}{(1-x)_q^{n+1}}.$$

Тоді за індукцією

$$D_q^j f(x) = \frac{[n][n+1] \dots [n+j-1]}{(1-x)_q^{n+j}}.$$

Звідси, $(D_q^j f(x))(0) = [n][n+1]\dots[n+j-1]$ для будь-якого $j \geq 1$.

Тому має місце рівність

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[n][n+1]\dots[n+j-1]}{[j]!} x^j, \quad (19)$$

яка є й-аналогом розкладу в ряд Тейлора функції $f(x) = \frac{1}{(1-x)^n}$. Формула (19)

називається формулою бінома Гейне.

У контексті квантового аналізу формула Тейлора може стосуватися різних речей, але в цілому вона включає апроксимацію квантових функцій за допомогою рядів Тейлора або пов'язаних розкладів. Це наближення часто використовується для спрощення обчислень або для дослідження поведінки квантових систем у певних режимах.

Список використаних джерел:

1. Bashir A., Sotiris N., Jessada T. Quantum calculus. New concepts, impulsive IVPs and BVPs, Inequalities. World Scientific. 2016. 288 p. DOI: <https://doi.org/10.1142/10075>
2. Jackson F. H. On q-functions and a certain difference operator. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*. V.46 (2). 1908. P. 253–281. DOI: [doi:10.1017/S0080456800002751](https://doi.org/10.1017/S0080456800002751)
3. Kac V. Classification of infinite-dimensional simple groups of supersymmetries and quantum field theory. *Proceedings of the conference "Visions in Mathematics toward the year 2000"*, GAFA. Special volume. 2000. P. 162–183.
4. Kac V., Cheung P. Quantum calculus. Universitext. Springer-Verlag. 2002. 118 p.

ANALOGUE OF TAYLOR'S FORMULA FOR FORMAL POWER SERIES IN QUANTUM ANALYSIS

Abstract. The article describes the basic concepts in quantum analysis that lead to Taylor's q-formula, i.e. quantum differential, q-analogs of linear operators and polynomials, etc. The expansion of a formal power series by Taylor's q-formula is also shown.

Keywords: quantum analysis, q-differential, Taylor's q-formula, formal power series.

Науковий керівник: Сергій Бак, доктор фіз.-мат. наук, професор.