

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет математики, фізики і комп'ютерних наук

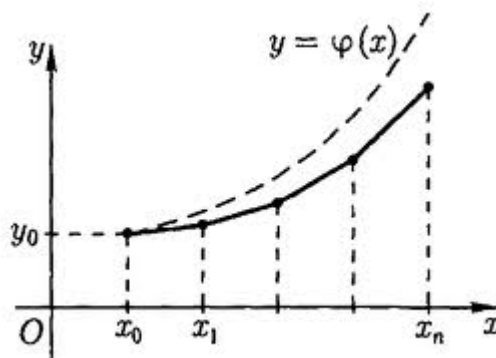
Кафедра математики та інформатики

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА

з диференціальних рівнянь

для студентів предметної спеціальності

А4.09 Середня освіта (Інформатика)



*Схвалено і рекомендовано до видання вченою радою факультету
математики фізики і комп'ютерних наук,
протокол №2 від 30.09.2026 року.*

Рецензенти: доктор педагогічних наук,
професор **Ковтонюк М. М.**,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Панасенко О. Б.**

Бак С. М. Робочий зошит студента з диференціальних рівнянь
(для студентів предметної спеціальності А4.09 Середня освіта
(Інформатика)) [Електронне видання]. Вінниця, 2026. 35 с.

Індивідуальний робочий зошит студента

Дисципліна: диференціальні рівняння

Розділи: Звичайні диференціальні рівняння 1-го порядку.

Звичайні диференціальні рівняння вищого порядку.

Математичні моделі і звичайні диференціальні рівняння

Автор-укладач: доктор фізико-математичних наук, професор
Бак Сергій Миколайович

Передмова

Робочий зошит з диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики призначений для використання студентами предметної спеціальності А4.09 Середня освіта (Інформатика) при вивченні розділів «Звичайні диференціальні рівняння 1-го порядку», «Звичайні диференціальні рівняння вищого порядку», «Математичні моделі і звичайні диференціальні рівняння».

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних розділів, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю.

Робочий зошит складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання та зразків текстів контрольних робіт. До кожного заняття подано запитання для самопідготовки.

Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

Робочий план студента

Робочий план студента складений на основі навчальної програми з диференціальних рівнянь.

Таблиця 1. Розподіл годин

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	денна форма здобуття освіти					
	усього	зокрема				
		ЛК	ПЗ	ЛЗ	ІЗ	СР
1	2	3	4	5	6	7
<i>Розділ 1. Звичайні диференціальні рівняння 1-го порядку</i>						
Тема 1. Диференціальні рівняння першого порядку	16	4	4	0	0	8
Тема 2. Наближені методи розв'язування задачі Коші	12	2	2	0	0	8
Разом за розділом 1	28	6	6	0	0	16
<i>Розділ 2. Звичайні диференціальні рівняння вищого порядку</i>						
Тема 1. Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку	11	2	1	0	0	8
Тема 2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	12	2	1	0	0	9
Тема 3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	13	2	2	0	0	9
Разом за розділом 2	36	6	4	0	0	26
<i>Розділ 3. Математичні моделі і звичайні диференціальні рівняння</i>						
Тема 1. Застосування звичайних диференціальних рівнянь до розв'язання задач геометрії	13	2	2	0	0	9
Тема 2. Застосування звичайних диференціальних рівнянь до розв'язування фізико-	13	2	2	0	0	9

технічних задач						
Разом за розділом 3	26	4	4	0	0	18
Усього годин	90	16	14	0	0	60

Таблиця 2. Теми лекцій

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Диференціальні рівняння першого порядку	4
2.	Наближені методи розв'язування задачі Коші	2
3.	Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку	2
4.	Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	2
5.	Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	2
6.	Застосування звичайних диференціальних рівнянь до розв'язання задач геометрії	2
7.	Застосування звичайних диференціальних рівнянь до розв'язування фізико-технічних задач	2
	Усього годин	16

Таблиця 3. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1.	Звичайні диференціальні рівняння. Неповні диференціальні рівняння 1-го порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними	2
2.	Однорідні диференціальні рівняння. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку. Рівняння в повних диференціалах	2
3.	Наближені методи розв'язування задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку	2
4.	Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами	2
5.	Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами	2
6.	Застосування звичайних диференціальних рівнянь	2
7.	Контрольна робота	2
	Усього годин	14

Таблиця 4. Розподіл балів за видами контролю та самостійної роботи

№	Вид поточного контролю та самостійної роботи	Кількість балів
1.	Домашні завдання	20
2.	Конспект	20
3.	Контрольна робота	40
4.	Колоквіум	20
Загальна кількість балів		100

Таблиця 3. Шкала оцінювання: сто балова, ECTS, розширена

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за розширеною шкалою
		<i>Для екзамену, заліку, курсової роботи, практики</i>
90-100	A	ВІДМІННО
80-89	B	ДУЖЕ ДОБРЕ
75-79	C	ДОБРЕ
60-74	D	ЗАДОВІЛЬНО
50-59	E	ДОСТАТНЬО
35-49	FX	НЕЗАДОВІЛЬНО З МОЖЛИВІСТЮ ПОВТОРНОГО СКЛАДАННЯ
1-34	F	НЕПРИЙНЯТНО З ОBOB'ЯЗКОВИМ ПОВТОРНИМ ВИВЧЕННЯМ ДИСЦИПЛІНИ

Практичне заняття № 1

Тема: Звичайні диференціальні рівняння. Неповні диференціальні рівняння 1-го порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними

Запитання для самопідготовки:

1. Яке рівняння називається диференціальним? Наведіть приклади.
2. У чому різниця між звичайними диференціальними рівняннями і рівняннями в частинних похідних?
3. Дайте означення розв'язку диференціального рівняння.
4. Що собою представляє інтегральна крива?
5. У чому полягає задача Коші для диференціального рівняння першого порядку?
6. Дайте означення загального розв'язку диференціального рівняння.
7. Як розв'язати неповне диференціальне рівняння $y' = f(x)$?
8. Дайте означення диференціального рівняння з відокремлюваними змінними. Як їх розв'язують?

№1. Перевірити, чи є задана функція розв'язком відповідного рівняння:

1.1. $yy' = x, y = x$.

1.2. $y' - 3y = 0, y = 5e^{3x}$.

1.3. $xy' + y = \cos x, y = \frac{\sin x}{x}$.

1.4. $y'' = 2y' - y, y = e^x$.

$$1.5. y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0, y = 2x + 3x^2.$$

$$1.6. a^2yy' + b^2x = 0, x = a \sin t, y = b \cos t.$$

$$1.7. (1 + xy)y' + y^2 = 0, x = te^t, y = e^{-t}.$$

2. Скласти диференціальне рівняння за даним його розв'язком. Знайти той розв'язок, який задовольняє задану початкову умову, та побудувати графік відповідної інтегральної кривої:

$$2.1. y = Cx^2, y(2) = 3.$$

$$2.2. y = Ce^x, y(0) = 1.$$

$$2.3. y = e^{2x}(C + x), y(0) = 0.$$

$$2.4. x^2 + 2y^2 = C^2, y(-1) = 5.$$

$$2.5. y = \sin(x + C), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$2.6. y = C \sin x + \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

3. Розв'язати неповне диференціальне рівняння 1-го порядку:

$$3.1. y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}.$$

$$3.2. y' = \cos(3x + 2).$$

$$3.3. y' = \sin 5x.$$

$$3.4. y' = e^{2x+4}.$$

$$3.5. y' = \frac{1}{2 + 3x}.$$

$$3.6. y' = \frac{1}{\sqrt{2 - 5x}}.$$

$$3.7. y' = \cos 3x, y(0) = 0$$

$$3.8. y' = \sin 2x, y(0) = 1$$

$$3.9. y' = \frac{1}{x^2 + 1}, y(0) = 0$$

$$3.10. y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, y(0) = 1$$

$$3.11. y' = 2^x, y(0) = \frac{1}{\ln 2}$$

$$3.12. y' = x^5 + x^3, y(0) = 0$$

$$3.13. y' = \operatorname{tg} x, y(0) = 1$$

$$3.14. y' = \cos^2 x \sin 2x.$$

$$3.15. y' = (\arcsin x)^2.$$

$$3.16. y' = \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

$$3.17. y' = \sqrt{x^2 + a^2}.$$

$$3.18. y' = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}.$$

$$3.19. y' = x^4 \cos x.$$

$$3.20. y' = \sin x \sin 2x \sin 4x.$$

$$3.21. y' = \frac{x}{(x^2 + 1)^3}.$$

$$3.22. y' = \frac{1 - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$3.23. y' = e^x \cos x.$$

4. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$4.1. y' = e^{ax+by}.$$

$$4.2. y' = \frac{1}{2y}.$$

$$4.3. y' = 1 + y^2.$$

$$4.4. x^2 y dx + x^3 dy = 0.$$

$$4.5. (y - x^2 y) dy = (x - xy^2) dx.$$

$$4.6. e^{-y^2} dx - y dx = 0.$$

$$4.7. y' = (2y + 1) \operatorname{ctg} x.$$

$$4.8. y' = \sqrt{4 - x^2}.$$

$$4.9. xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2.$$

$$4.10. x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0.$$

5. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову:

$$5.1. y' / \sin x = y \ln y, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$$

$$5.2. (1 + e^x)yy' = e^x, y(0) = 1.$$

$$5.3. y' \operatorname{tg} x = y + 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$5.4. \sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx, y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

$$5.5. y' = e^{x+y}, y(0) = 0.$$

$$5.6. (1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx, y(0) = 0.$$

$$5.7. \frac{yy'}{x} + e^y = 0, y(1) = 0.$$

$$5.8. y' = e^{x+y} + e^{x-y}, y(0) = 0.$$

Відповіді: 1.1.–1.7. Так. 2.2. $y' = y, y = e^x$. 2.4. $2x + 4yy' = 0,$

$$\frac{x^2}{51} + \frac{2y^2}{51} = 1. \quad 3.1. y = \ln|x + \sqrt{x^2 - 9}| + C. \quad 3.2. y = \frac{1}{3} \sin(3x + 2) + C. \quad 3.3.$$

$$y = -\frac{1}{5} \cos 5x + C. \quad 3.4. y = \frac{1}{2} e^{2x+4}. \quad 3.5. y = \frac{1}{3} \ln|2 + 3x| + C. \quad 3.6.$$

$$y = -\frac{2}{5}\sqrt{2-5x} + C. \quad 3.10. \quad y = \arcsin x + 1. \quad 3.13. \quad y = -\ln|\cos x| + 1. \quad 4.2.$$

$$y^2 = x + C. \quad 4.4. \quad y = \frac{C}{x}. \quad 5.2. \quad y^2 = 2\ln\frac{1+e^x}{2} + 1. \quad 5.8. \quad \operatorname{arctg} e^y = e^x + \frac{\pi}{4} - 1.$$

📖 Практичне заняття № 2

Тема: Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.

Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку.

Рівняння в повних диференціалах

Запитання для самопідготовки:

1. Дайте означення однорідного диференціального рівняння 1-го порядку. Як їх розв'язують?
2. Яке рівняння називається лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку?
3. У чому полягає суть методу Бернуллі?
4. У чому полягає суть методу Лагранжа?
5. Дайте означення диференціального рівняння в повних диференціалах. Як їх розв'язують?

✎1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1.1. \quad y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}.$$

$$1.2. \quad y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}.$$

$$1.3. \quad xdy - ydx = ydy.$$

$$1.4. \quad y' = \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

$$1.5. \quad (x+y)dx - (x-y)dy = 0.$$

$$1.6. \quad (x^2 + 2xy)dx + xydy = 0.$$

$$1.7. xy' = y^2 + 2x^2.$$

$$1.8. y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}.$$

$$1.9. xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

$$1.10. x^2 - y^2 + 2xy' = 0.$$

2. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову:

$$2.1. y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}, y(1) = 0.$$

$$2.2. y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, y(1) = 1.$$

$$2.3. \left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx = \left(\frac{x}{y} - 1\right) e^{\frac{x}{y}} dy, y(0) = 2.$$

$$2.4. xydy - y^2 dx = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}} dx, y(1) = 0.$$

$$2.5. xy' = x \sin \frac{y}{x} + y, y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$2.6. y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, y(1) = 2.$$

$$2.7. xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}, y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$2.8. xy' = x e^{\frac{y}{x}} + y, y(1) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$3.1. y' + y = x.$$

$$3.2. y' - y = e^x.$$

$$3.3. y' + 2y = x^2 + 2x.$$

$$3.4. y' + 2xy = 2x e^{-x^2}.$$

$$3.5. x^2 y' - xy = 1.$$

$$3.6. xy' - y = x^2 \cos x.$$

$$3.7. xy' - y = x^3(3 \ln x - 1).$$

$$3.8. (x^2 + 1)y' + 4xy = 3.$$

$$3.9. xy' + 2y = x^2.$$

$$3.10. (x^2 + y)dx = xdy.$$

$$3.11. (x^2 + 2x + 1)y' - (x + 1)y = x - 1.$$

$$3.12. (x + 1)dy - (2y + (x + 1)^4)dx = 0.$$

$$3.13. (1 + y^2)dx + xydy = \sqrt{1 + y^2} \sin y dy.$$

$$3.14. (1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x.$$

$$3.15. y' \sin x - y \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

4. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову:

$$4.1. y' + xy = x^3, y(0) = -2.$$

$$4.2. x \ln x y' + y = 2 \ln x, y(e) = 0.$$

$$4.3. y' \cos x - y \sin x = 1, y(0) = 1.$$

$$4.4. y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1.$$

$$4.5. (x^2 + x)y' = y + x^2 + x, y(0) = 1.$$

$$4.6. y' + y \cos x = \sin x \cos x, y(0) = 1.$$

$$4.7. y' \sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x, y(0) = 0.$$

$$4.8. y' \sin x - y \cos x = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$4.9. x(x^3 + 1)y' + (2x^3 - 1)y = \frac{x^3 - 2}{x}, y(1) = 1.$$

$$4.10. (1+x^2)\ln(1+x^2)y' - 2xy = x\ln(1+x^2), y(\sqrt{e}-1)=1.$$

5. Перевірити, чи є дане диференціальне рівняння рівнянням у повних диференціалах. Знайти його загальний розв'язок:

$$5.1. (x+y)dx + (x-y)dy = 0.$$

$$5.2. (x-y)dx - (x+y)dy = 0.$$

$$5.3. (2x-y+1)dx + (2y-x-1)dy = 0.$$

$$5.4. (x-y)dx + (2y-x+1)dy = 0.$$

$$5.5. (x+2y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0.$$

$$5.6. (x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0.$$

$$5.7. x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0.$$

$$5.8. 3x + y - 2 + y'(x-1) = 0.$$

$$5.9. 2x + 2y - 1 + y'(2x + y - 2) = 0.$$

$$5.10. (1 + x\sqrt{x^2 + y^2})dx + (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)ydy = 0.$$

$$5.11. 3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0.$$

$$5.12. y' = \frac{2x - y - 4}{2y + x + 5}.$$

$$5.13. ydy = (xdy + ydx)\sqrt{1+y^2}.$$

$$5.14. y'(y+2x)^2 = 4(y+2)^2.$$

$$5.15. xy' \cos y + \sin y = 0.$$

6. Перевірити, чи є дане диференціальне рівняння рівнянням у повних диференціалах. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову:

$$6.1. (\sin xy + xy \cos xy)dx + x^2 \cos xy dy = 0, y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$6.2. \frac{xdy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx, y(1) = 1.$$

$$6.3. 2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0, y(0) = 1.$$

$$6.4. \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2} = 0, y(1) = 0.$$

$$6.5. \left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y} \right) dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2} dy, y(1) = 1.$$

$$6.6. \frac{2x-y}{x^2+y^2} dx + \frac{2y+x}{x^2+y^2} dy = 0, y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$6.7. \frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0, y(1) = 1.$$

$$6.8. (\cos(x+y^2) + 3y) dx + (2y \cos(x+y^2) + 3x) dy = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Відповіді: 1.2. $e^{\frac{y}{x}} + \ln|x| + C = 0.$ 1.6. $\frac{x}{x+y} + \ln|x+y| = C.$ 3.3.

$$y = \frac{1}{4}(2x^2 + 2x - 1) + Ce^{-2x}. \quad 3.8. \quad y = \frac{x^3 + 3x + C}{(x^2 + 1)^2}. \quad 5.1. \quad \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C.$$

$$5.3. \quad x^2 + y^2 - xy + x - y = C. \quad 5.6. \quad \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} = C. \quad 5.10.$$

$$x + \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3} - \frac{y^2}{2} = C. \quad 6.3. \quad x^2 \cos^2 y + y^2 = 1. \quad 6.5. \quad x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 1.$$

Практичне заняття № 3

Тема: Наближені методи розв'язування задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку

Запитання для самопідготовки:

1. Сформулюйте теореми існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної?
2. У чому полягає суть методу послідовних наближень Пікара?
3. Як наближено розв'язують задачу Коші для диференціального рівняння 1-го порядку з використанням розкладання розв'язку в степеневий ряд?
4. У чому полягає суть методу ламаних Ейлера?

Завдання 1. Методом послідовних наближень Пікара знайти n -е наближення до розв'язку задачі Коші:

1.1. $y' = 2x - y, y(0) = 2, n = 3.$

1.2. $y' = x - y, y(0) = 1, n = 3.$

1.3. $y' = 2y - 2x^2 - 3, y(0) = 2, n = 2.$

1.4. $y' = 2x^3 - y - 2x, y(0) = 1, n = 2.$

1.5. $y' = x^3 + y - e^x, y(0) = 1, n = 3.$

1.6. $xy' = 2x - y, y(1) = 2, n = 3.$

1.7. $y' = x^3 - y^2 - 2x, y(1) = 1, n = 2.$

1.8. $y' = \sin 2x + \cos y, y(0) = 0, n = 3.$

1.9. $y' = x^2 - y^2, y(-1) = 0, n = 3.$

1.10. $y' = x - y^2, y(0) = 0, n = 3.$

2. Побудувати оцінку розв'язку задачі Коші многочленом третього степеня:

2.1. $y' = \ln y, y(1) = e^2$.

2.2. $y' = x - 2y, y(0) = 1$.

2.3. $y' = 2x - y, y(0) = 2$.

2.4. $y' = x^2 - y^2, y(-1) = 0$.

2.5. $y' = x - y^2, y(0) = 1$.

2.6. $y' = 2x^3 - y^2 - 2x, y(0) = 1$.

2.7. $xy' = x - 2y, y(1) = 1$.

2.8. $y' = \sin x + \cos 2y, y(0) = 0$.

2.9. $y' = x^3 + y^2 - e^x, y(0) = 1$.

2.10. $y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}, y(0) = 1$.

3. Знайти наближений розв'язок задачі Коші, скориставшись методом ламаних Ейлера з кроком $h = 0,1$. Побудувати ламану Ейлера:

3.1. $y' = 3x - y, y(1) = 1, [1; 2]$.

3.2. $y' = x + \cos y, y(2) = 3, [2; 3]$.

3.3. $y' = y, y(0) = 1, [0; 1]$.

3.4. $y' = \frac{1}{2}xy, y(0) = 1, [0; 1]$.

3.5. $y' = \frac{x}{y}, y(1) = 2, [1; 2]$.

3.6. $y' = x^2 + y^2, y(0) = 0, [0; 1]$.

3.7. $y' = x - y^2, y(0) = 1, [0; 1]$.

3.8. $y' = 2x + \cos y, y(1) = 2, [1; 2]$.

3.9. $y' = \sin 2x + \cos y, y(0) = 0, [0; 1]$.

3.10. $y' = \ln y$, $y(1) = e$, $[1; 2]$.

Відповіді: 1.1. $y_3(x) = 2 - 2x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{12}$. 1.5. $y_3(x) = \frac{x^6}{120} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} + x^2 + 3x + 4 - 3e^x$. 2.1. $P_3(x) = e^2 + 2(x-1) + \frac{(x-1)^2}{e^2} - \frac{(x-1)^3}{3e^4}$.
2.2. $P_3(x) = 1 - 2x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3$.

Практичне заняття № 4

Тема: Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

Запитання для самопідготовки:

1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння.
2. Знаходження загального розв'язку у випадку різних дійсних коренів характеристичного рівняння.
3. Знаходження загального розв'язку у випадку різних коренів характеристичного рівняння, серед яких є комплексні.
4. Знаходження загального розв'язку у випадку наявності кратних коренів характеристичного рівняння.

№1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1.1. $y'' - 8y' - 9y = 0$.

1.2. $y'' - 2y' - 3y = 0$.

1.3. $y'' - 4y' - 5y = 0$.

1.4. $y'' - 5y' + 6y = 0$.

- 1.5. $y'' - 3y' + 2y = 0$.
- 1.6. $y'' - 4y' + 3y = 0$.
- 1.7. $y'' - 5y' + 4y = 0$.
- 1.8. $y'' + 5y' + 6y = 0$.
- 1.9. $y'' + 5y' + 4y = 0$.
- 1.10. $y'' + 4y' + 3y = 0$.
- 1.11. $y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$.
- 1.12. $y''' + 9y'' + 23y' + 15y = 0$.
- 1.13. $y''' - 3y'' - 3y' + y = 0$.
- 1.14. $2y''' - 4y'' - 4y' + 2y = 0$.
- 1.15. $y''' - y'' - 16y' + 16y = 0$.
- 1.16. $y''' - 2y'' - 3y' + 6y = 0$.
- 1.17. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$.
- 1.18. $y^{IV} - 10y'' + 9y = 0$.
- 1.19. $y^{IV} - 4y''' + y'' + 6y' = 0$.
- 1.20. $y^{IV} + 9y''' + 23y'' + 15y' = 0$.

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

- 2.1. $y'' - 2y' + y = 0$.
- 2.2. $y'' + 4y' + 4y = 0$.
- 2.3. $y'' - 6y' + 9y = 0$.
- 2.4. $y'' + 2y' + y = 0$.
- 2.5. $y'' - 4y' + 4y = 0$.
- 2.6. $y''' - 2y'' + y' = 0$.
- 2.7. $y^{IV} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0$.
- 2.8. $y^{IV} + 2y''' - 3y'' - 4y' + 4y = 0$.
- 2.9. $y^{IV} - 2y'' + y = 0$.
- 2.10. $y^{IV} - 18y'' + 81y = 0$.

З3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

3.1. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

3.2. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

3.3. $y'' - 4y' + 13y = 0$.

3.4. $y'' - 6y' + 25y = 0$.

3.5. $y'' - 6y' + 13y = 0$.

3.6. $y''' - 2y'' + 2y' = 0$.

3.7. $y''' - 4y'' + 13y' = 0$.

3.8. $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$.

3.9. $y^{IV} - 6y''' + 25y'' = 0$.

3.10. $y^{IV} + 8y'' - 9y = 0$.

З4. Знайти розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

4.1. $y'' - 2y' - 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$.

4.2. $y'' - 4y' - 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$.

4.3. $y'' + 5y' + 4y = 0, y(1) = 1, y'(1) = 0$.

4.4. $y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$.

4.5. $y'' + 4y' + 4y = 0, y(1) = 1, y'(1) = 0$.

4.6. $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3$.

4.7. $y'' - 2y' + y = 0, y(1) = 2, y'(1) = 3$.

4.8. $y'' - 4y' + 5y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$.

4.9. $y'' - 6y' + 25y = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

4.10. $y'' - 6y' + 13y = 0, y(\pi) = 1, y'(\pi) = 2$.

Відповіді: 1.4. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. 1.11. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$. 1.20.

$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-3x} + C_4 e^{-5x}$. 2.3. $y = (C_1 + C_2 x) e^{3x}$. 2.7.

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3)e^{-2x}. \quad 3.3. \quad y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x). \quad 3.6.$$

$$y = C_1 + e^x(C_2 \cos x + C_3 \sin x). \quad 3.8. \quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x +$$

$$+ C_4 \sin 2x. \quad 3.9. \quad y = C_1 + C_2x + e^{3x}(C_3 \cos 4x + C_4 \sin 4x). \quad 4.6.$$

$$y = (x+1)e^{2x}.$$

Практичне заняття № 5

Тема: Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

Запитання для самопідготовки:

1. Як знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку, якщо відома фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння?
2. Інтегрування неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, права частина яких є многочленом.
3. Інтегрування неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, права частина яких має вигляд $e^{\alpha x}P_m(x)$.
4. Інтегрування неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, права частина яких має вигляд $P_m(x)\cos \beta x + Q_l(x)\sin \beta x$.
5. Інтегрування неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, права частина яких має вигляд $e^{\alpha x}(P_m(x)\cos \beta x + Q_l(x)\sin \beta x)$.

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих:

1.1. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.

1.2. $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^{3x}$.

1.3. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

1.4. $y'' - 6y' + 13y = e^{3x} \cos 2x$.

1.5. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin x$.

1.6. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

1.7. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

1.8. $y'' - y = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

1.9. $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$.

1.10. $y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 1)e^{2x}$.

1.11. $y''' - 7y'' - 10y' + 16y = x^2$.

1.12. $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^3 e^x$.

1.13. $y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{x^4}$.

1.14. $y^{IV} - 18y'' + 81y = x^4$.

1.15. $y^{IV} + 2y'' + y = \sin x$.

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів:

2.1. $y'' - 2y' - 3y = x^2 + x + 1$.

2.2. $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2$.

2.3. $y'' - y = x + 1$.

2.4. $y'' - 2y' = x^2 + 1$.

2.5. $y'' - 3y' + 2y = x^3$.

$$2.6. y''' - 2y'' = x - 2.$$

$$2.7. y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3.$$

$$2.8. y''' + 3y'' = x.$$

$$2.9. y''' - 4y' = x^2.$$

$$2.10. y''' - 7y'' + 6y = x^2.$$

$$2.11. y^{IV} + y'' = x^2 + x.$$

$$2.12. y^V - 4y''' = x^2 - 1.$$

$$2.13. y'' - 4y = e^{2x}.$$

$$2.14. y'' + y = 4e^x.$$

$$2.15. y'' + 7y' = e^{-7x}.$$

$$2.16. y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x.$$

$$2.17. y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x.$$

$$2.18. y'' - 4y' + 4y = xe^x.$$

$$2.19. y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x.$$

$$2.20. y'' + 4y' + 4y = x^2 e^{-2x}.$$

З3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів:

$$3.1. y'' - 3y' + 2y = \sin x.$$

$$3.2. y'' - 3y' + 2y = \cos x.$$

$$3.3. y'' + y = 4\sin x.$$

$$3.4. y'' - 2y' + 2y = 2\sin x.$$

$$3.5. y'' - 6y' + 13y = 4\sin x.$$

$$3.6. y'' - 4y' + 5y = 3\cos x.$$

$$3.7. y''' - y = \sin x.$$

$$3.8. y^{IV} + 8y'' + 16y = \cos x.$$

$$3.9. y'' - 3y' + 2y = x \cos x.$$

$$3.10. y'' - 9y = e^{3x} \cos x.$$

$$3.11. y'' - y' = e^x \sin x.$$

$$3.12. y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x} \cos x.$$

$$3.13. y''' - 2y' + 4y = e^x \sin x.$$

$$3.14. y'' - y = xe^x \sin x.$$

$$3.15. y'' - 4y' + 5y = xe^{2x} \cos x.$$

$$3.16. y^{IV} - y = 5e^x \sin x.$$

4. Знайти розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$4.1. y'' - 2y' - 3y = x^2 + x + 1, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$4.2. y'' - 4y' - 5y = x - 1, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

$$4.3. y'' + 5y' + 4y = 2x + 3, y(1) = 1, y'(1) = 0.$$

$$4.4. y'' - 6y' + 9y = e^x, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$4.5. y'' + 4y' + 4y = 2e^{2x}, y(1) = 1, y'(1) = 0.$$

$$4.6. y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}, y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

$$4.7. y'' - 2y' + y = xe^x, y(1) = 2, y'(1) = 3.$$

$$4.8. y'' - 4y' + 5y = \sin x, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$4.9. y'' - 6y' + 25y = \cos 4x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$4.10. y'' - 6y' + 13y = x \sin 2x, y(\pi) = 1, y'(\pi) = 2.$$

Відповіді: 1.2. $y = C_1 e^x + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} + C_2 \right) e^{3x}.$ 1.5.

$$y = e^{2x} \left(\left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{x}{2} + C_1 \right) \cos x + \left(C_2 - \frac{1}{4} \cos 2x \right) \sin x \right). \quad 1.8.$$

$$y = \left(C_1 - \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^x) \right) e^{-x} + \left(C_2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + e^x) \right) e^x. \quad 2.3.$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - x - 1. \quad 2.5. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{x^3}{2} + \frac{9}{4}x^2 + \frac{21}{4}x + \frac{45}{8}. \quad 2.19.$$

$$y = C_1 e^{-3x} + \left(\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16} + \frac{x}{32} + C_2 \right) e^x. \quad 3.2.$$

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x. \quad 3.5.$$

$$y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{4}{15} \sin x + \frac{2}{15} \cos x.$$

📖 Практичне заняття № 6

Тема: Застосування звичайних диференціальних рівнянь

✎1. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(2; 0)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці цієї кривої пропорційний квадрату абсциси точки дотику з коефіцієнтом пропорційності $k = 3$.

✎2. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 4)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці цієї кривої обернено пропорційний ординаті точки дотику з коефіцієнтом пропорційності $k = 2$.

✎3. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 2)$, якщо кожна дотична до неї перетинає пряму $y = 1$ в точці з абсцисою, що дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

✎4. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 2)$, якщо відрізок будь-якої її дотичної, який знаходиться між осями координат, ділиться в точці дотику у відношенні 2:1 (відраховуючи від осі Oy).

✎5. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(0; 1)$, якщо відрізок будь-якої її нормалі дорівнює 1.

✎6. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 0)$, якщо довжина відрізка осі абсцис, який відтинає її нормаль, на 2 більше абсциси точки дотику.

✎7. Знайти криву, яка проходить через точку M_0 , якщо відрізок її нормалі між осями координат ділиться точкою кривої у відношенні $m:n$:

7.1. $M_0(2; -1)$, $m:n=1:2$.

7.2. $M_0(-2; 3)$, $m:n=1:3$.

7.3. $M_0(0; 1)$, $m:n=2:3$.

7.4. $M_0(1; 0)$, $m:n=3:2$.

7.5. $M_0(2; -1)$, $m:n=3:1$.

✎8. Знайти криву, яка проходить через точку M_0 , якщо відрізок її дотичної між точкою дотику та віссю Oy ділиться в точці перетину з віссю Ox у відношенні $m:n$ (відраховуючи від осі Oy):

8.1. $M_0(2; -1)$, $m:n=1:1$.

8.2. $M_0(1; 2)$, $m:n=2:1$.

8.3. $M_0(1; -1)$, $m:n=3:1$.

8.4. $M_0(2; 1)$, $m:n=1:2$.

8.5. $M_0(1; -1)$, $m:n=1:3$.

✎9. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 3)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці цієї кривої обернено пропорційний абсцисі точки дотику з коефіцієнтом пропорційності $k=5$.

✎10. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(0; 3)$, якщо в кожній її точці тангенс кута нахилу дотичної до неї

пропорційний добутку координат точки дотику з коефіцієнтом пропорційності $k = -2$.

✎11. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 2)$, якщо площа трикутника, утвореного радіус-вектором будь-якої точки кривої, дотичною в цій точці та віссю абсцис, дорівнює 2.

✎12. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 0)$, якщо площа трапеції, утвореної дотичною, осями координат і ординатою точки дотику, дорівнює $\frac{3}{2}$.

✎13. Знайти ортогональні траєкторії ліній сім'ї гіпербол $xy = a$.

✎14. Знайти ортогональні траєкторії ліній сім'ї кіл $x^2 + y^2 = 2ax$.

✎15. Знайти ортогональні траєкторії ліній сім'ї кіл $x^2 + y^2 = 2ay$.

✎16. Знайти ортогональні траєкторії ліній сім'ї парабол $y^2 + 2ax = 0, a > 0$.

✎17. Знайти ізогональні траєкторії ліній сім'ї гіпербол $xy = a, \alpha = 45^\circ$.

✎18. Знайти ізогональні траєкторії ліній сім'ї кіл $x^2 + y^2 = 2ax, \alpha = 60^\circ$.

✎19. Знайти ізогональні траєкторії ліній сім'ї парабол $y^2 = 4ax, a > 0, \alpha = 30^\circ$.

✎20. Знайти ізогональні траєкторії ліній сім'ї еліпсів $3x^2 + y^2 = a, a > 0, \alpha = 45^\circ$.

✎21. В електронагрівальну піч з температурою середовища $T_c = 1000^\circ\text{C}$ помістили заготовку з температурою $T_0 = 200^\circ\text{C}$. Через дві години температура заготовки підвищилася до $T_1 = 500^\circ\text{C}$. Знайти температуру заготовки через 4 години, якщо відомо, що швидкість зміни температури заготовки

пропорційна різниці температури середовища і температури заготовки.

✎22. Температура тіла впродовж 20 хвилин знизилася від 100°C до 60°C . Температура повітря $T_n = 20^{\circ}\text{C}$. Знайти час, за який температура тіла знизиться до 25°C , якщо швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і повітря.

✎23. Охоронець заповідника виявив тушу вбитого зубра. Для доведення вини затриманого бракон'єра треба уточнити час, коли було вбито тварину. Відомо, що в момент виявлення злочину температура туші зубра становила 31°C , а через годину після цього – 29°C . Температура повітря того дня становила 21°C . Швидкість охолодження туші пропорційна різниці температур туші і повітря. Як слід діяти охоронцю, якщо відомо, що нормальна температура тіла живої тварини 37°C .

✎24. Посудина об'ємом 20 л містить повітря (80% азоту і 20% кисню). У посудину втікає 0,1 л азоту за секунду, який неперервно перемішується, і витікає така ж кількість суміші. Через який час у посудині буде 99% азоту?

✎25. В кімнаті об'ємом 200 м^3 міститься 0,15% вуглекислого газу. Вентилятор подає за хвилину 20 м^3 повітря, яке містить 0,04% вуглекислого газу. Через який час кількість вуглекислого газу в повітрі кімнати зменшиться втричі?

✎26. Експериментально підтверджено, що швидкість радіоактивного розпаду речовини пропорційна її кількості з деяким коефіцієнтом $-k < 0$ (закон радіоактивного розпаду). Визначити півперіод розпаду речовини – час, за який розпадається половина речовини.

✎27. Використовуючи закон радіоактивного розпаду, визначити, через який час залишиться 1% радіоактивної речовини від її початкової кількості, якщо за 30 днів розпалося 50% початкової кількості.

✎28. Використовуючи закон радіоактивного розпаду, визначити, через скільки років розпадеться половина кількості радію, якщо впродовж року з кожного граму радію розпадається 0,44 мг.

✎29. Матеріальна точка рухається по прямій зі швидкістю, обернено пропорційною пройденому шляху. В початковий момент руху точка була на відстані 5 м від початку відліку шляху й мала швидкість 20 м/с. Знайти шлях, який пройшла точка, та її швидкість через 10 с після початку руху.

✎30. Рух човна сповільнюється під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна становить 2 м/с, а його швидкість через 4 с становить 1 м/с. визначити, через скільки секунд швидкість човна дорівнюватиме 0,25 м/с і який шлях він може пройти до зупинки.

✎31. Тіло масою m ковзає по горизонтальній площині під дією поштовху, який надав йому початкової швидкості v_0 . Визначити закон руху тіла залежно від часу і знайти відстань, яку тіло здатне пройти до повної зупинки, якщо на нього діє сила тертя, пропорційна масі тіла.

✎32. Тіло падає у повітрі без початкової швидкості ($v_0 = 0$). Опір повітря пропорційний квадрату швидкості руху тіла. Визначити закон руху тіла залежно від часу.

✎33. Тіло кинуто вертикально вгору з початковою швидкістю v_0 . Визначити закон руху тіла залежно від часу, вважаючи, що воно рухається тільки під дією сили тяжіння.

✎34. Електрон рухається в однорідному електричному полі з напруженістю E . Знайти траєкторію руху електрона, якщо в початковий момент часу відомі швидкість v_0 і напрям його руху.

✎35. Частина (ступінь) масою m багатоступінчастої космічної ракети падає з великої висоти H на Землю з початковою швидкістю $v_0 = 0$. Нехтуючи опором повітря, знайти швидкість і час падіння ступеня ракети на Землю.

✎36. Тіло опускається в рідину. Сила опору пропорційна швидкості. Знайти закон руху тіла залежно від часу, якщо воно опускається в рідину без початкової швидкості.

✎37. Підводний човен масою m , що перебував у стані спокою, одержав невелику від'ємну плавучість P і занурюється на глибину. Опір води пропорційний швидкості занурення і дорівнює kSv , де k – коефіцієнт пропорційності, S – площа горизонтальної проекції човна, v – швидкість занурення. Визначити швидкість занурення і шлях, пройдений човном за час t .

✎38. Снаряд вилітає з гармати зі швидкістю 800 м/с під кутом 45° до горизонту. Нехтуючи опором повітря, знайти найбільшу висоту, на яку підніметься снаряд, і місце його падіння.

✎39. Снаряд вилітає з гармати зі швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Знайти рівняння руху снаряда, припускаючи, що опір повітря дорівнює $, де k – коефіцієнт опору, v – швидкість руху.$

40. Знайти закон руху і визначити період T коливань математичного маятника довжиною нитки l і масою кульки m з амплітудою коливань A при малих відхиленнях.

Відповіді: 1. $y = x^3 - 8$. 2. $y^2 = 4x + 12$. 3. $y = \frac{1}{x} + 1$. 4. $y = \frac{2}{x^2}$. 5.

$x^2 + y^2 = 1$. 6. $y^2 = 4x - 4$. 9. $y = 5 \ln x + 3$. 10. $y = 3e^{-x^2}$. 11. $xy = 2$. 12.

$y = \frac{1}{x} - x^2$. 13. $y^2 - x^2 = C$. 14. $y = C(x^2 + y^2)$. 20.

$y^2 + 2xy + 3x^2 = Ce^{-2\sqrt{2}\arctg \frac{x+y}{\sqrt{2x}}}$. 21. $687,5^\circ C$. 22. 80 хв. 23.

$T(t) = 21 + 10e^{t \ln 0,8}$; $T(t) = 37^\circ C$ при $t = \frac{\ln 1,6}{\ln 0,8} \approx -2,1$ год. 24.

$x(t) = 20 - 4e^{-0,005t}$; $x(t) = 19,8$ при $t = 200 \ln 20$ с. 25.

$x(t) = 0,08 + 0,22e^{-\frac{t}{10}}$; $x(t) = 0,1$ при $t = 10 \ln 11 \approx 24$ хв. 26.

$x(t) = x(0)e^{-kt}$; $x(t) = \frac{1}{2}x(0)$ при $t = \frac{\ln 2}{k}$. 27. $x(t) = x(0)2^{-\frac{t}{30}}$;

$x(t) = 0,01x(0)$ при $t = \frac{60}{\lg 2} \approx 200$ днів. 28. $x(t) = x(0)(1 - 0,00044)^t$;

$x(t) = \frac{1}{2}x(0)$ при $t = \frac{\ln 0,5}{\ln(1 - 0,00044)} \approx 1600$ років. 29.

$s(t) = \sqrt{25 + 200t}$; $s(10) - s(0) = 40$ м; $v(10) = \frac{20}{9}$ м/с. 10. $v(t) = 2^{1-\frac{t}{4}}$;

$s(+\infty) = \frac{8}{\ln 2}$. 31. $s(t) = v_0 t - \frac{k}{2} t^2$; $s = \frac{v_0^2}{2k}$ при $t = \frac{v_0}{k}$. 32.

$s(t) = \frac{m}{k} \ln ch \left(\sqrt{\frac{kg}{m}} t \right)$. 33. $s(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. 34.

$x = \frac{eE}{2mv_0^2 \sin^2 \alpha} y^2 + y \operatorname{ctg} \alpha$. 35. $v = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+H-s} - \frac{2gR^2}{R+H}}$;

$$t_k = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{R+H}{2g}} \left(\sqrt{RH} + (R+H) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{H}{R}} \right). \quad 36.$$

$$s(t) = \frac{m^2 g}{k^2} \left(e^{-\frac{k}{m} t} - 1 \right) + \frac{mg}{k} t. \quad 37. \quad v(t) = \frac{P}{kS} \left(1 - e^{-\frac{kS}{m} t} \right);$$

$$x(t) = \frac{P}{kS} \left(t - \frac{m}{kS} \left(1 - e^{-\frac{kS}{m} t} \right) \right). \quad 38. \quad y_{\max} = \frac{400^2}{g} \approx 16,3 \quad \text{KM};$$

$$x_{\text{падіння}} = \frac{800^2}{g} \approx 65 \quad \text{KM}. \quad 39. \quad x(t) = \frac{mv_0}{k} \cos \alpha \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right),$$

$$y(t) = \frac{m}{k^2} (kv \sin \alpha + mg) \left(1 - e^{-\frac{k}{m} t} \right) - \frac{mg}{k} t. \quad 40. \quad s(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right);$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

📖 Практичне заняття № 7

⌘ Контрольна робота

(зразок)

✎1. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову:

$$(1 + e^x)yy' = e^x, y(0) = 1.$$

✎2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
 $y'' - 5y' - 6y = 3x + 1.$

✎3. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(2; 0)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці цієї кривої пропорційний квадрату абсциси точки дотику з коефіцієнтом пропорційності $k = 3$.

✎4. В електронагрівальну піч з температурою середовища $T_c = 1000^\circ\text{C}$ помістили заготовку з температурою $T_0 = 200^\circ\text{C}$. Через дві години температура заготовки підвищилася до $T_1 = 500^\circ\text{C}$. Знайти температуру заготовки через 4 години, якщо відомо, що швидкість зміни температури заготовки пропорційна різниці температури середовища і температури заготовки.

Рекомендована література

Основна

1. Бак С. М. Диференціальні та інтегральні рівняння: Навч. посіб. 2-ге вид., випр. і доп. Вінниця: ФОП Рогальська І. О., 2018. 360 с.
2. Бак С. М. Робочий зошит студента з диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики (для студентів предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика)). Вінниця, 2024. 33 с. URL: <https://dspace.vspu.edu.ua/handle/123456789/16620>
3. Килимник І. М., Яримбаш Д. С. Диференціальні рівняння: навч. посіб. Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2024. 212 с.
4. Ляшенко В. П., Набок Т. А., Скотнікова Л. М. Диференціальні рівняння: навч. посіб. Кременчук: КрНУ ім. М. Остроградського, 2025. 166 с.

Додаткова

1. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах: Навч. посіб. Київ: Либідь, 2003. 504 с.
2. Томусяк А.А., Ковтонюк М.М. Диференціальні рівняння: У 2-х ч.: Навч. посіб. Вінниця: ПП «ТД «Едельвейс і К»», 2009. Ч. 1. 248 с.
3. Томусяк А.А., Ковтонюк М.М. Диференціальні рівняння: У 2-х ч.: Навч. посіб. Вінниця: ТОВ «фірма «Планер»», 2012. Ч. 2. 388 с.
4. Хохлова Л. Г., Хома Н. Г. Диференціальні рівняння: навч. посіб. Тернопіль: ТНПУ ім. В. Гнатюка, 2023. 71 с.

Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Бібліотечний фонд кафедри математики та інформатики в університетському репозиторії. URL: <https://dspace.vspu.edu.ua/collections/860ee2c1-610e-4cd9-babf-0fe65f1b1ab2>
2. Сайт «Математичний аналіз і диференціальні рівняння вивчаю сам». URL: <https://kovtonyuk.com/>

Електронне навчальне видання

Бак Сергій Миколайович

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

для студентів предметної спеціальності
А4.09 Середня освіта (Інформатика)

21001, м. Вінниця, вул. Острозького, 32