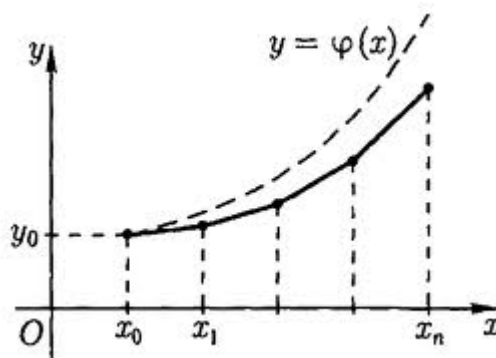


Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет математики, фізики і комп'ютерних наук

Кафедра математики та інформатики

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
з диференціальних рівнянь та рівнянь
математичної фізики

для студентів предметної спеціальності
014.09 Середня освіта (Інформатика)



Вінниця 2024

*Затверджено рішенням кафедри математики та інформатики
ВДПУ імені Михайла Коцюбинського, протокол №1 від 19 серпня
2024 року.*

Рецензенти: доктор педагогічних наук,
професор **Ковтонюк М. М.**,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Тиошенко О. З.**

Бак С. М. Робочий зошит студента з диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики (для студентів предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика)) [Електронне видання]. Вінниця, 2024. 33 с.

Індивідуальний робочий зошит студента

Дисципліна: диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики

Розділи: Звичайні диференціальні рівняння 1-го порядку. Звичайні диференціальні рівняння вищого порядку. Диференціальні рівняння з частинними похідними. Класичні рівняння математичної фізики.

Автор-укладач: доктор фізико-математичних наук, професор
Бак Сергій Миколайович

Передмова

Робочий зошит з диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики призначений для використання студентами предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика) при вивченні розділів «Звичайні диференціальні рівняння 1-го порядку», «Звичайні диференціальні рівняння вищого порядку», «Диференціальні рівняння з частинними похідними. Класичні рівняння математичної фізики».

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних розділів, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю.

Робочий зошит складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання та зразків текстів контрольних робіт. До кожного заняття подано запитання для самопідготовки.

Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

Робочий план студента

Робочий план студента складений на основі навчальної програми з диференціальних рівнянь.

Таблиця 1. Розподіл годин

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	денна форма					
	усьог о	зокрема				
		ЛК	ПЗ	ЛЗ	ІЗ	СР
1	2	3	4	5	6	7
Розділ 1. Звичайні диференціальні рівняння 1-го порядку						
Тема 1. Диференціальні рівняння першого порядку	12	4	4	0	0	4
Тема 2. Наближені методи розв'язування задачі Коші	8	2	2	0	0	4
Разом за розділом 1	20	6	6	0	0	8
Розділ 2. Звичайні диференціальні рівняння вищого порядку						
Тема 1. Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку	9	4	1	0	0	4
Тема 3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	8	2	1	0	0	5
Тема 4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами	9	2	2	0	0	5
Разом за розділом 2	26	8	4	0	0	14
Розділ 3. Диференціальні рівняння з частинними похідними. Класичні рівняння математичної фізики						
Тема 1. Класифікація диференціальних рівнянь з частинними похідними	11	4	2	0	0	5
Тема 2. Класичні рівняння математичної фізики гіперболічного типу	11	4	2	0	0	5
Тема 3. Класичні рівняння математичної фізики параболічного типу	11	4	2	0	0	5
Тема 4. Класичні	11	4	2	0	0	5

рівняння математичної фізики еліптичного типу						
Разом за розділом 3	44	16	8	0	0	20
Усього годин	90	30	18	0	0	42

Таблиця 2. Розподіл рейтингових балів за видами діяльності

№	Вид діяльності	Коефіцієнт вартості (бали)	Кількість робіт	Результат (бали)	
1.	Домашні завдання	1	10	10	
2.	Конспект	10	1	10	
3.	Контрольна робота	40	1	40	
4.	Колоквіум	20	1	20	
Усього за семестр:				80	
Залік				20	
Підсумковий рейтинговий бал				100	

Таблиця 3. Шкала оцінювання: сто балова, ECTS, розширена

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за розширеною шкалою
		<i>Для екзамену, заліку, курсової роботи, практики</i>
90-100	A	ВІДМІННО
80-89	B	ДУЖЕ ДОБРЕ
75-79	C	ДОБРЕ
60-74	D	ЗАДОВІЛЬНО
50-59	E	ДОСТАТНЬО
35-49	FX	НЕЗАДОВІЛЬНО З МОЖЛИВІСТЮ ПОВТОРНОГО СКЛАДАННЯ
1-34	F	НЕПРИЙНЯТНО З ОBOB'ЯЗКОВИМ ПОВТОРНИМ ВИВЧЕННЯМ ДИСЦИПЛІНИ

Практичне заняття № 1

Тема: Звичайні диференціальні рівняння. Неповні диференціальні рівняння 1-го порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними

Запитання для самопідготовки:

1. Яке рівняння називається диференціальним? Наведіть приклади.
2. У чому різниця між звичайними диференціальними рівняннями і рівняннями в частинних похідних?
3. Дайте означення розв'язку диференціального рівняння.
4. Що собою представляє інтегральна крива?
5. У чому полягає задача Коші для диференціального рівняння першого порядку?
6. Дайте означення загального розв'язку диференціального рівняння.
7. Як розв'язати неповне диференціальне рівняння $y' = f(x)$?
8. Дайте означення диференціального рівняння з відокремлюваними змінними. Як їх розв'язують?

№1. Перевірити, чи є задана функція розв'язком відповідного рівняння:

1.1. $yy' = x, y = x$.

1.2. $y' - 3y = 0, y = 5e^{3x}$.

1.3. $xy' + y = \cos x, y = \frac{\sin x}{x}$.

1.4. $y'' = 2y' - y, y = e^x$.

$$1.5. y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0, y = 2x + 3x^2.$$

$$1.6. a^2yy' + b^2x = 0, x = a \sin t, y = b \cos t.$$

$$1.7. (1 + xy)y' + y^2 = 0, x = te^t, y = e^{-t}.$$

2. Скласти диференціальне рівняння за даним його розв'язком. Знайти той розв'язок, який задовольняє задану початкову умову, та побудувати графік відповідної інтегральної кривої:

$$2.1. y = Cx^2, y(2) = 3.$$

$$2.2. y = Ce^x, y(0) = 1.$$

$$2.3. y = e^{2x}(C + x), y(0) = 0.$$

$$2.4. x^2 + 2y^2 = C^2, y(-1) = 5.$$

$$2.5. y = \sin(x + C), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$2.6. y = C \sin x + \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

3. Розв'язати неповне диференціальне рівняння 1-го порядку:

$$3.1. y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}.$$

$$3.2. y' = \cos(3x + 2).$$

$$3.3. y' = \sin 5x.$$

$$3.4. y' = e^{2x+4}.$$

$$3.5. y' = \frac{1}{2 + 3x}.$$

$$3.6. y' = \frac{1}{\sqrt{2 - 5x}}.$$

$$3.7. y' = \cos 3x, y(0) = 0$$

$$3.8. y' = \sin 2x, y(0) = 1$$

$$3.9. y' = \frac{1}{x^2 + 1}, y(0) = 0$$

$$3.10. y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, y(0) = 1$$

$$3.11. y' = 2^x, y(0) = \frac{1}{\ln 2}$$

$$3.12. y' = x^5 + x^3, y(0) = 0$$

$$3.13. y' = \operatorname{tg} x, y(0) = 1$$

$$3.14. y' = \cos^2 x \sin 2x.$$

$$3.15. y' = (\arcsin x)^2.$$

$$3.16. y' = \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)}.$$

$$3.17. y' = \sqrt{x^2 + a^2}.$$

$$3.18. y' = \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}.$$

$$3.19. y' = x^4 \cos x.$$

$$3.20. y' = \sin x \sin 2x \sin 4x.$$

$$3.21. y' = \frac{x}{(x^2 + 1)^3}.$$

$$3.22. y' = \frac{1 - \sqrt{x^2 + x + 1}}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

$$3.23. y' = e^x \cos x.$$

4. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$4.1. y' = e^{ax+by}.$$

$$4.2. y' = \frac{1}{2y}.$$

$$4.3. y' = 1 + y^2.$$

$$4.4. x^2 y dx + x^3 dy = 0.$$

$$4.5. (y - x^2 y) dy = (x - xy^2) dx.$$

$$4.6. e^{-y^2} dx - y dy = 0.$$

$$4.7. y' = (2y + 1) \operatorname{ctg} x.$$

$$4.8. y' = \sqrt{4 - x^2}.$$

$$4.9. xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2.$$

$$4.10. x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0.$$

✎5. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову:

$$5.1. y' / \sin x = y \ln y, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$$

$$5.2. (1 + e^x)yy' = e^x, y(0) = 1.$$

$$5.3. y' \operatorname{tg} x = y + 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$5.4. \sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx, y(0) = \frac{\pi}{4}.$$

$$5.5. y' = e^{x+y}, y(0) = 0.$$

$$5.6. (1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx, y(0) = 0.$$

$$5.7. \frac{yy'}{x} + e^y = 0, y(1) = 0.$$

$$5.8. y' = e^{x+y} + e^{x-y}, y(0) = 0.$$

✎6. В електронагрівальну піч з температурою середовища $T_c = 1000^\circ\text{C}$ помістили заготовку з температурою $T_0 = 200^\circ\text{C}$. Через дві години температура заготовки підвищилася до $T_1 = 500^\circ\text{C}$. Знайти температуру заготовки через 4 години, якщо відомо, що швидкість зміни температури заготовки

пропорційна різниці температури середовища і температури заготовки.

7. Температура тіла впродовж 20 хвилин знизилася від 100°C до 60°C . Температура повітря $T_n = 20^{\circ}\text{C}$. Знайти час, за який температура тіла знизиться до 25°C , якщо швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і повітря.

8. Охоронець заповідника виявив тушу вбитого зубра. Для доведення вини затриманого бракон'єра треба уточнити час, коли було вбито тварину. Відомо, що в момент виявлення злочину температура туші зубра становила 31°C , а через годину після цього – 29°C . Температура повітря того дня становила 21°C . Швидкість охолодження туші пропорційна різниці температур туші і повітря. Як слід діяти охоронцю, якщо відомо, що нормальна температура тіла живої тварини 37°C .

Відповіді: 1.1.–1.7. Так. 2.2. $y' = y$, $y = e^x$. 2.4. $2x + 4yy' = 0$, $\frac{x^2}{51} + \frac{2y^2}{51} = 1$. 3.1. $y = \ln|x + \sqrt{x^2 - 9}| + C$. 3.2. $y = \frac{1}{3}\sin(3x + 2) + C$. 3.3. $y = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$. 3.4. $y = \frac{1}{2}e^{2x+4}$. 3.5. $y = \frac{1}{3}\ln|2 + 3x| + C$. 3.6. $y = -\frac{2}{5}\sqrt{2 - 5x} + C$. 3.10. $y = \arcsin x + 1$. 3.13. $y = -\ln|\cos x| + 1$. 4.2. $y^2 = x + C$. 4.4. $y = \frac{C}{x}$. 5.2. $y^2 = 2\ln\frac{1+e^x}{2} + 1$. 5.8. $\operatorname{arctg} e^y = e^x + \frac{\pi}{4} - 1$. 6. $687,5^{\circ}\text{C}$. 7. 80 хв. 8. $T(t) = 21 + 10e^{t\ln 0,8}$; $T(t) = 37^{\circ}\text{C}$ при $t = \frac{\ln 1,6}{\ln 0,8} \approx -2,1$ год.

Практичне заняття № 2

Тема: Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.

Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку.

Рівняння в повних диференціалах

Запитання для самопідготовки:

1. Дайте означення однорідного диференціального рівняння 1-го порядку. Як їх розв'язують?
2. Яке рівняння називається лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку?
3. У чому полягає суть методу Бернуллі?
4. У чому полягає суть методу Лагранжа?
5. Дайте означення диференціального рівняння в повних диференціалах. Як їх розв'язують?

1. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$1.1. y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}.$$

$$1.2. y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}.$$

$$1.3. xdy - ydx = ydy.$$

$$1.4. y' = \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

$$1.5. (x + y)dx - (x - y)dy = 0.$$

$$1.6. (x^2 + 2xy)dx + xydy = 0.$$

$$1.7. xy' = y^2 + 2x^2.$$

$$1.8. y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x}.$$

$$1.9. xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y.$$

$$1.10. x^2 - y^2 + 2xyy' = 0.$$

2. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову:

$$2.1. y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}, y(1) = 0.$$

$$2.2. y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, y(1) = 1.$$

$$2.3. \left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx = \left(\frac{x}{y} - 1\right) e^{\frac{x}{y}} dy, y(0) = 2.$$

$$2.4. xydy - y^2 dx = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}} dx, y(1) = 0.$$

$$2.5. xy' = x \sin \frac{y}{x} + y, y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$2.6. y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, y(1) = 2.$$

$$2.7. xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}, y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$2.8. xy' = x e^{\frac{y}{x}} + y, y(1) = 0.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$3.1. y' + y = x.$$

$$3.2. y' - y = e^x.$$

$$3.3. y' + 2y = x^2 + 2x.$$

$$3.4. y' + 2xy = 2x e^{-x^2}.$$

$$3.5. x^2 y' - xy = 1.$$

$$3.6. xy' - y = x^2 \cos x.$$

$$3.7. xy' - y = x^3 (3 \ln x - 1).$$

$$3.8. (x^2 + 1)y' + 4xy = 3.$$

$$3.9. xy' + 2y = x^2.$$

$$3.10. (x^2 + y)dx = xdy.$$

$$3.11. (x^2 + 2x + 1)y' - (x + 1)y = x - 1.$$

$$3.12. (x + 1)dy - (2y + (x + 1)^4)dx = 0.$$

$$3.13. (1 + y^2)dx + xydy = \sqrt{1 + y^2} \sin y dy.$$

$$3.14. (1 + x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x.$$

$$3.15. y' \sin x - y \cos x = -\frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

4. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову:

$$4.1. y' + xy = x^3, y(0) = -2.$$

$$4.2. x \ln x y' + y = 2 \ln x, y(e) = 0.$$

$$4.3. y' \cos x - y \sin x = 1, y(0) = 1.$$

$$4.4. y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1.$$

$$4.5. (x^2 + x)y' = y + x^2 + x, y(0) = 1.$$

$$4.6. y' + y \cos x = \sin x \cos x, y(0) = 1.$$

$$4.7. y' \sqrt{1 - x^2} + y = \arcsin x, y(0) = 0.$$

$$4.8. y' \sin x - y \cos x = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$4.9. x(x^3 + 1)y' + (2x^3 - 1)y = \frac{x^3 - 2}{x}, y(1) = 1.$$

$$4.10. (1 + x^2) \ln(1 + x^2)y' - 2xy = x \ln(1 + x^2), y(\sqrt{e - 1}) = 1.$$

5. Перевірити, чи є дане диференціальне рівняння рівнянням у повних диференціалах. Знайти його загальний розв'язок:

$$5.1. (x + y)dx + (x - y)dy = 0.$$

$$5.2. (x - y)dx - (x + y)dy = 0.$$

$$5.3. (2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0.$$

$$5.4. (x - y)dx + (2y - x + 1)dy = 0.$$

$$5.5. (x + 2y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$$

$$5.6. (x^3 + 3xy^2)dx + (y^3 + 3x^2y)dy = 0.$$

$$5.7. x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0.$$

$$5.8. 3x + y - 2 + y'(x - 1) = 0.$$

$$5.9. 2x + 2y - 1 + y'(2x + y - 2) = 0.$$

$$5.10. \left(1 + x\sqrt{x^2 + y^2}\right)dx + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)ydy = 0.$$

$$5.11. 3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0.$$

$$5.12. y' = \frac{2x - y - 4}{2y + x + 5}.$$

$$5.13. ydy = (xdy + ydx)\sqrt{1 + y^2}.$$

$$5.14. y'(y + 2x)^2 = 4(y + 2)^2.$$

$$5.15. xy' \cos y + \sin y = 0.$$

З6. Перевірити, чи є дане диференціальне рівняння рівнянням у повних диференціалах. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову:

$$6.1. (\sin xy + xy \cos xy)dx + x^2 \cos xy dy = 0, y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$6.2. \frac{xdy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx, y(1) = 1.$$

$$6.3. 2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0, y(0) = 1.$$

$$6.4. \frac{(x + 2y)dx + ydy}{(x + y)^2} = 0, y(1) = 0.$$

$$6.5. \left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 y}\right)dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2}dy, y(1) = 1.$$

$$6.6. \frac{2x-y}{x^2+y^2}dx + \frac{2y+x}{x^2+y^2}dy = 0, y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$6.7. \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0, y(1) = 1.$$

$$6.8. (\cos(x+y^2) + 3y)dx + (2y\cos(x+y^2) + 3x)dy = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

✎7. Експериментально підтверджено, що швидкість радіоактивного розпаду речовини пропорційна її кількості з деяким коефіцієнтом $-k < 0$ (закон радіоактивного розпаду). Визначити півперіод розпаду речовини – час, за який розпадається половина речовини.

✎8. Використовуючи закон радіоактивного розпаду, визначити, через який час залишиться 1% радіоактивної речовини від її початкової кількості, якщо за 30 днів розпалося 50% початкової кількості.

✎9. Використовуючи закон радіоактивного розпаду, визначити, через скільки років розпадеться половина кількості радію, якщо впродовж року з кожного граму радію розпадається 0,44 мг.

Відповіді: 1.2. $e^{\frac{y}{x}} + \ln|x| + C = 0$. 1.6. $\frac{x}{x+y} + \ln|x+y| = C$. 3.3.

$y = \frac{1}{4}(2x^2 + 2x - 1) + Ce^{-2x}$. 3.8. $y = \frac{x^3 + 3x + C}{(x^2 + 1)^2}$. 5.1. $\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C$.

5.3. $x^2 + y^2 - xy + x - y = C$. 5.6. $\frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{y^4}{4} = C$. 5.10.

$x + \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3} - \frac{y^2}{2} = C$. 6.3. $x^2 \cos^2 y + y^2 = 1$. 6.5. $x^2 + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 1$. 7.

$$x(t) = x(0)e^{-kt}; \quad x(t) = \frac{1}{2}x(0) \quad \text{при} \quad t = \frac{\ln 2}{k}. \quad 8. \quad x(t) = x(0)2^{\frac{t}{30}};$$

$$x(t) = 0,01x(0) \quad \text{при} \quad t = \frac{60}{\lg 2} \approx 200 \text{ днів.} \quad 9. \quad x(t) = x(0)(1 - 0,00044)^t;$$

$$x(t) = \frac{1}{2}x(0) \quad \text{при} \quad t = \frac{\ln 0,5}{\ln(1 - 0,00044)} \approx 1600 \text{ років.}$$

Практичне заняття № 3

Тема: Наближені методи розв'язування задачі Коші для диференціальних рівнянь першого порядку

Запитання для самопідготовки:

1. Сформулюйте теореми існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння першого порядку, розв'язаного відносно похідної?
2. У чому полягає суть методу послідовних наближень Пікара?
3. Як наближено розв'язують задачу Коші для диференціального рівняння 1-го порядку з використанням розкладання розв'язку в степеневий ряд?
4. У чому полягає суть методу ламаних Ейлера?

✓1. Методом послідовних наближень Пікара знайти n -е наближення до розв'язку задачі Коші:

1.1. $y' = 2x - y, y(0) = 2, n = 3.$

1.2. $y' = x - y, y(0) = 1, n = 3.$

1.3. $y' = 2y - 2x^2 - 3, y(0) = 2, n = 2.$

1.4. $y' = 2x^3 - y - 2x, y(0) = 1, n = 2.$

1.5. $y' = x^3 + y - e^x, y(0) = 1, n = 3.$

$$1.6. \quad xy' = 2x - y, \quad y(1) = 2, \quad n = 3.$$

$$1.7. \quad y' = x^3 - y^2 - 2x, \quad y(1) = 1, \quad n = 2.$$

$$1.8. \quad y' = \sin 2x + \cos y, \quad y(0) = 0, \quad n = 3.$$

$$1.9. \quad y' = x^2 - y^2, \quad y(-1) = 0, \quad n = 3.$$

$$1.10. \quad y' = x - y^2, \quad y(0) = 0, \quad n = 3.$$

2. Побудувати оцінку розв'язку задачі Коші многочленом третього степеня:

$$2.1. \quad y' = \ln y, \quad y(1) = e^2.$$

$$2.2. \quad y' = x - 2y, \quad y(0) = 1.$$

$$2.3. \quad y' = 2x - y, \quad y(0) = 2.$$

$$2.4. \quad y' = x^2 - y^2, \quad y(-1) = 0.$$

$$2.5. \quad y' = x - y^2, \quad y(0) = 1.$$

$$2.6. \quad y' = 2x^3 - y^2 - 2x, \quad y(0) = 1.$$

$$2.7. \quad xy' = x - 2y, \quad y(1) = 1.$$

$$2.8. \quad y' = \sin x + \cos 2y, \quad y(0) = 0.$$

$$2.9. \quad y' = x^3 + y^2 - e^x, \quad y(0) = 1.$$

$$2.10. \quad y' = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad y(0) = 1.$$

3. Знайти наближений розв'язок задачі Коші, скориставшись методом ламаних Ейлера з кроком $h = 0,1$. Побудувати ламану Ейлера:

$$3.1. \quad y' = 3x - y, \quad y(1) = 1, \quad [1; 2].$$

$$3.2. \quad y' = x + \cos y, \quad y(2) = 3, \quad [2; 3].$$

$$3.3. \quad y' = y, \quad y(0) = 1, \quad [0; 1].$$

$$3.4. \quad y' = \frac{1}{2}xy, \quad y(0) = 1, \quad [0; 1].$$

$$3.5. y' = \frac{x}{y}, y(1) = 2, [1; 2].$$

$$3.6. y' = x^2 + y^2, y(0) = 0, [0; 1].$$

$$3.7. y' = x - y^2, y(0) = 1, [0; 1].$$

$$3.8. y' = 2x + \cos y, y(1) = 2, [1; 2].$$

$$3.9. y' = \sin 2x + \cos y, y(0) = 0, [0; 1].$$

$$3.10. y' = \ln y, y(1) = e, [1; 2].$$

Відповіді: 1.1. $y_3(x) = 2 - 2x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{12}$. 1.5. $y_3(x) = \frac{x^6}{120} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} + x^2 + 3x + 4 - 3e^x$. 2.1. $P_3(x) = e^2 + 2(x-1) + \frac{(x-1)^2}{e^2} - \frac{(x-1)^3}{3e^4}$.
2.2. $P_3(x) = 1 - 2x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3$.

Практичне заняття № 4

Тема: Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

Запитання для самопідготовки:

1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння.
2. Знаходження загального розв'язку у випадку різних дійсних коренів характеристичного рівняння.
3. Знаходження загального розв'язку у випадку різних коренів характеристичного рівняння, серед яких є комплексні.
4. Знаходження загального розв'язку у випадку наявності кратних коренів характеристичного рівняння.

✎1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

1.1. $y'' - 8y' - 9y = 0$.

1.2. $y'' - 2y' - 3y = 0$.

1.3. $y'' - 4y' - 5y = 0$.

1.4. $y'' - 5y' + 6y = 0$.

1.5. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

1.6. $y'' - 4y' + 3y = 0$.

1.7. $y'' - 5y' + 4y = 0$.

1.8. $y'' + 5y' + 6y = 0$.

1.9. $y'' + 5y' + 4y = 0$.

1.10. $y'' + 4y' + 3y = 0$.

1.11. $y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$.

1.12. $y''' + 9y'' + 23y' + 15y = 0$.

1.13. $y''' - 3y'' - 3y' + y = 0$.

1.14. $2y''' - 4y'' - 4y' + 2y = 0$.

1.15. $y''' - y'' - 16y' + 16y = 0$.

1.16. $y''' - 2y'' - 3y' + 6y = 0$.

1.17. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$.

1.18. $y^{IV} - 10y'' + 9y = 0$.

1.19. $y^{IV} - 4y''' + y'' + 6y' = 0$.

1.20. $y^{IV} + 9y''' + 23y'' + 15y' = 0$.

✎2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

2.1. $y'' - 2y' + y = 0$.

2.2. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

2.3. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

2.4. $y'' + 2y' + y = 0$.

2.5. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

$$2.6. y''' - 2y'' + y' = 0.$$

$$2.7. y^{IV} + 8y''' + 24y'' + 32y' + 16y = 0.$$

$$2.8. y^{IV} + 2y''' - 3y'' - 4y' + 4y = 0.$$

$$2.9. y^{IV} - 2y'' + y = 0.$$

$$2.10. y^{IV} - 18y'' + 81y = 0.$$

З3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$3.1. y'' - 2y' + 2y = 0.$$

$$3.2. y'' - 4y' + 5y = 0.$$

$$3.3. y'' - 4y' + 13y = 0.$$

$$3.4. y'' - 6y' + 25y = 0.$$

$$3.5. y'' - 6y' + 13y = 0.$$

$$3.6. y''' - 2y'' + 2y' = 0.$$

$$3.7. y''' - 4y'' + 13y' = 0.$$

$$3.8. y^{IV} + 5y'' + 4y = 0.$$

$$3.9. y^{IV} - 6y''' + 25y'' = 0.$$

$$3.10. y^{IV} + 8y'' - 9y = 0.$$

З4. Знайти розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$4.1. y'' - 2y' - 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$4.2. y'' - 4y' - 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

$$4.3. y'' + 5y' + 4y = 0, y(1) = 1, y'(1) = 0.$$

$$4.4. y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$4.5. y'' + 4y' + 4y = 0, y(1) = 1, y'(1) = 0.$$

$$4.6. y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

$$4.7. y'' - 2y' + y = 0, y(1) = 2, y'(1) = 3.$$

$$4.8. y'' - 4y' + 5y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$4.9. y'' - 6y' + 25y = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$4.10. y'' - 6y' + 13y = 0, y(\pi) = 1, y'(\pi) = 2.$$

Відповіді: 1.4. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$. 1.11. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$. 1.20.
 $y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-3x} + C_4 e^{-5x}$. 2.3. $y = (C_1 + C_2 x) e^{3x}$. 2.7.
 $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3) e^{-2x}$. 3.3. $y = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. 3.6.
 $y = C_1 + e^x (C_2 \cos x + C_3 \sin x)$. 3.8. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \cos 2x +$
 $+ C_4 \sin 2x$. 3.9. $y = C_1 + C_2 x + e^{3x} (C_3 \cos 4x + C_4 \sin 4x)$. 4.6.
 $y = (x+1) e^{2x}$.

Практичне заняття № 5

Тема: Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

Запитання для самопідготовки:

1. Як знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку, якщо відома фундаментальна система розв'язків відповідного однорідного рівняння?
2. Інтегрування неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, права частина яких є многочленом.
3. Інтегрування неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, права частина яких має вигляд $e^{\alpha x} P_m(x)$.

4. Інтегрування неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, права частина яких має вигляд $P_m(x)\cos \beta x + Q_l(x)\sin \beta x$.
5. Інтегрування неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, права частина яких має вигляд $e^{\alpha x}(P_m(x)\cos \beta x + Q_l(x)\sin \beta x)$.

З1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих:

1.1. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.

1.2. $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^{3x}$.

1.3. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

1.4. $y'' - 6y' + 13y = e^{3x} \cos 2x$.

1.5. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin x$.

1.6. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

1.7. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

1.8. $y'' - y = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

1.9. $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$.

1.10. $y'' - 4y' + 4y = (x^2 + 1)e^{2x}$.

1.11. $y''' - 7y'' - 10y' + 16y = x^2$.

1.12. $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^3 e^x$.

1.13. $y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{x^4}$.

1.14. $y^{IV} - 18y'' + 81y = x^4$.

1.15. $y^{IV} + 2y'' + y = \sin x$.

2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів:

2.1. $y'' - 2y' - 3y = x^2 + x + 1.$

2.2. $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 10x + 2.$

2.3. $y'' - y = x + 1.$

2.4. $y'' - 2y' = x^2 + 1.$

2.5. $y'' - 3y' + 2y = x^3.$

2.6. $y''' - 2y'' = x - 2.$

2.7. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2x + 3.$

2.8. $y''' + 3y'' = x.$

2.9. $y''' - 4y' = x^2.$

2.10. $y''' - 7y'' + 6y = x^2.$

2.11. $y^{IV} + y'' = x^2 + x.$

2.12. $y^V - 4y''' = x^2 - 1.$

2.13. $y'' - 4y = e^{2x}.$

2.14. $y'' + y = 4e^x.$

2.15. $y'' + 7y' = e^{-7x}.$

2.16. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x.$

2.17. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 2e^x.$

2.18. $y'' - 4y' + 4y = xe^x.$

2.19. $y'' + 2y' - 3y = x^2e^x.$

2.20. $y'' + 4y' + 4y = x^2e^{-2x}.$

3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів:

3.1. $y'' - 3y' + 2y = \sin x.$

3.2. $y'' - 3y' + 2y = \cos x.$

3.3. $y'' + y = 4\sin x.$

$$3.4. y'' - 2y' + 2y = 2\sin x.$$

$$3.5. y'' - 6y' + 13y = 4\sin x.$$

$$3.6. y'' - 4y' + 5y = 3\cos x.$$

$$3.7. y''' - y = \sin x.$$

$$3.8. y^{IV} + 8y'' + 16y = \cos x.$$

$$3.9. y'' - 3y' + 2y = x \cos x.$$

$$3.10. y'' - 9y = e^{3x} \cos x.$$

$$3.11. y'' - y' = e^x \sin x.$$

$$3.12. y'' + 4y' + 5y = 10e^{-2x} \cos x.$$

$$3.13. y''' - 2y' + 4y = e^x \sin x.$$

$$3.14. y'' - y = xe^x \sin x.$$

$$3.15. y'' - 4y' + 5y = xe^{2x} \cos x.$$

$$3.16. y^{IV} - y = 5e^x \sin x.$$

4. Знайти розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє початкові умови:

$$4.1. y'' - 2y' - 3y = x^2 + x + 1, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$4.2. y'' - 4y' - 5y = x - 1, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

$$4.3. y'' + 5y' + 4y = 2x + 3, y(1) = 1, y'(1) = 0.$$

$$4.4. y'' - 6y' + 9y = e^x, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$4.5. y'' + 4y' + 4y = 2e^{2x}, y(1) = 1, y'(1) = 0.$$

$$4.6. y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}, y(0) = 1, y'(0) = 3.$$

$$4.7. y'' - 2y' + y = xe^x, y(1) = 2, y'(1) = 3.$$

$$4.8. y'' - 4y' + 5y = \sin x, y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

$$4.9. y'' - 6y' + 25y = \cos 4x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$4.10. y'' - 6y' + 13y = x \sin 2x, y(\pi) = 1, y'(\pi) = 2.$$

Відповіді: 1.2. $y = C_1 e^x + \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4} + C_2 \right) e^{3x}.$ 1.5.

$y = e^{2x} \left(\left(\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{x}{2} + C_1 \right) \cos x + \left(C_2 - \frac{1}{4} \cos 2x \right) \sin x \right).$ 1.8.

$y = \left(C_1 - \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^x) \right) e^{-x} + \left(C_2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + e^x) \right) e^x.$ 2.3.

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - x - 1.$ 2.5. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{x^3}{2} + \frac{9}{4} x^2 + \frac{21}{4} x + \frac{45}{8}.$ 2.19.

$y = C_1 e^{-3x} + \left(\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{16} + \frac{x}{32} + C_2 \right) e^x.$ 3.2.

$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x.$ 3.5.

$y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{4}{15} \sin x + \frac{2}{15} \cos x.$

📖 Практичне заняття № 6

Тема: Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку

✎1. Перевірити, чи є розв'язками рівняння $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

в області $x > 0, y > 0, z > 0$ функції $u = u(x, y, z)$:

1.1. $u = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2}.$ 1.2. $u = xyz.$ 1.3. $u = \frac{y}{x} e^{\frac{xz}{y^2}}.$

✎2. Довести, що функція $u(x, y) = x + y + f(xy)$, де $f(xy)$ – довільна неперервно диференційовна функція, є розв'язком рівняння $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = x - y.$

✎3. Довести, що функція $u = \sqrt{x^2 + y^2} f\left(\arctg \frac{y}{x} + \ln \sqrt{x^2 + y^2}\right)$, де $f(z)$ – неперервно диференційовна функція, є розв'язком рівняння $(x+y)\frac{\partial u}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial u}{\partial y} = u$.

✎4. Знайти розв'язки рівняння $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Із множини розв'язків виділити той, який задовольняє умову $u(0, y) = py^2$.

✎5. Знайти той розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 1$, який задовольняє умову $u(x, 1) = x$.

✎6. Знайти розв'язок задачі Коші $y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 - x^2$,
 $u(0, y) = \frac{1}{y^2}$.

✎7. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$7.1. y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x - y.$$

$$7.2. e^x \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = ye^x.$$

$$7.3. 2x\frac{\partial z}{\partial x} + (y-x)\frac{\partial z}{\partial y} = x^2.$$

$$7.4. xy\frac{\partial z}{\partial x} - x^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz.$$

$$7.5. xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0.$$

✎8. Знайти поверхню $z = z(x, y)$, яка проходить через указану лінію, а функція $z(x, y)$ задовольняє дане рівняння:

$$8.1. y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x, \quad x=0, z=y^2.$$

$$8.2. x \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2, \quad y=1, z=x^2.$$

$$8.3. xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0, \quad y=x^2, z=x^3.$$

$$8.4. x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy, \quad x=2, z=y^2 + 1.$$

$$8.5. x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x - 3y), \quad x=1, yz+1=0.$$

Відповіді: 1.1. Так. 1.2. Ні. 1.3. Так. 4. $u = \Phi(x^2 + y^2)$;

$$u = p \cdot (x^2 + y^2). \quad 5. \quad u = \frac{x}{y} + \ln y. \quad 6. \quad u = x^2 - y^2. \quad 7.1.$$

$$\Phi(x^2 - y^2, x - y + z) = 0. \quad 7.3. \quad \Phi\left(x^2 - 4z, \frac{(x+y)^2}{x}\right) = 0. \quad 7.5.$$

$$\Phi\left(\frac{x}{y}, z^2 + xy\right) = 0. \quad 8.1. \quad y^2 - x^2 - \ln \sqrt{y^2 - x^2} = z - \ln |y|. \quad 8.3.$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^6 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = z^2 + xy. \quad 8.5. \quad 2xy + 1 = x + 3y + \frac{1}{z}.$$

Практичне заняття № 7-8

Тема: Диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними

№1. Перевірити, чи є вказана функція розв'язком заданого рівняння:

$$1.1. u = \ln(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$1.2. u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

✎2. У кожній області, де зберігається тип рівняння, звести його до канонічного вигляду:

$$2.1. y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.2. y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.3. \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2y \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.4. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$2.5. xy \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

✎3. Визначити тип рівняння і звести його до канонічного вигляду:

$$3.1. 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$3.2. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

$$3.3. 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0.$$

$$3.4. 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} + u = 0.$$

$$3.5. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial y} - u = 0.$$

✎4. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$4.1. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad 4.2. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 + y. \quad 4.3. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

$$4.4. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2y \frac{\partial u}{\partial x}. \quad 4.5. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial u}{\partial y}.$$

5. Розв'язати задачу Коші для рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, t > 0, \text{ якщо:}$$

$$5.1. u(x, 0) = \sin x, \quad u_t'(x, 0) = 0, \quad a = 1.$$

$$5.2. u(x, 0) = 0, \quad u_t'(x, 0) = A \sin x, \quad A = \text{const}.$$

$$5.3. u(x, 0) = u_t'(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, \quad a = 1.$$

$$5.4. u(x, 0) = h^2 \frac{\sin x}{x}, \quad u_t'(x, 0) = 0.$$

$$5.5. u(x, 0) = 0, \quad u_t'(x, 0) = \begin{cases} \frac{a}{100}, & x \in (0, l), \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (0, l). \end{cases}.$$

6. Розв'язати мішану задачу для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ при даних початковій та крайових умовах:}$$

$$6.1. u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \frac{l}{2}, \\ l - x, & \frac{l}{2} < x < l, \end{cases} \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

$$6.2. u(x, 0) = \frac{1}{4}(\pi - 2x), \quad 0 < x < \pi, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad a = 1.$$

$$6.3. u(x, 0) = 3 \sin \frac{\pi x}{l} - 2 \sin \frac{3\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

$$6.4. u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \quad u_x'(0, t) = 0, \quad u(l, t) = u_0 = \text{const}.$$

$$6.5. u(x, 0) = \begin{cases} \frac{200}{l}x, & 0 < x \leq \frac{l}{2}, \\ 100, & \frac{l}{2} < x < l, \end{cases} \quad u(0, t) = u(l, t) = 100^0.$$

Відповіді: 1.1. Так. 1.2. Так. 4.1. $u = xC_1(y) + C_2(y)$. 4.2.

$$u = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2 y}{2} + xC_1(y) + C_2(y). \quad 4.3. \quad u = \frac{1}{x}C_1(y) + C_2(x). \quad 4.4.$$

$$u = C_1(x)e^{y^2} + C_2(y). \quad 4.5. \quad u = C_1(x) + C_2(x)e^{2y}. \quad 5.1. \quad u = \sin x \cos t. \quad 5.3.$$

$$u = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+(x-t)^2} + \frac{1}{1+(x+t)^2} + \operatorname{arctg}(x+t) - \operatorname{arctg}(x-t) \right). \quad 5.5.$$

$$u = \varphi(x+at) - \varphi(x-at), \quad \text{де} \quad \varphi(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{z}{200}, & 0 \leq z \leq l, \\ \frac{l}{200}, & z > l. \end{cases} \quad 6.1.$$

$$u = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{(2n-1)\pi}{l} x. \quad 6.2. \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-4n^2 t} \sin 2nx}{2n}.$$

$$6.3. \quad u = 3e^{-\frac{\pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi}{l} x - 2e^{-\frac{9\pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{3\pi}{l} x. \quad 6.4. \quad u = u_0 +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} t} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \text{де} \quad C_n = \frac{2}{l} \int_0^l (\varphi(x) - u_0) \cos \frac{\pi(2n-1)}{2l} x dx. \quad 6.5.$$

$$u = \frac{100x}{l} + \frac{400}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{a^2 n^2}{l^2} t} \sin \frac{(2n-1)\pi}{l} x.$$

📖 Практичне заняття № 9

⌘ Контрольна робота

(зразок)

✎1. Знайти розв'язок рівняння, який задовольняє початкову умову:

$$(1 + e^x)yy' = e^x, y(0) = 1.$$

✎2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
 $y'' - 5y' - 6y = 3x + 1.$

✎3. Розв'язати задачу Коші для рівняння коливань струни
 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\infty < x < +\infty, t > 0,$ якщо $u(x, 0) = u_t'(x, 0) = \frac{1}{1 + x^2}, a = 1.$

✎4. Розв'язати мішану задачу для рівняння теплопровідності
 $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при даних початковій та крайових умовах:

$$u(x, 0) = 3\sin \frac{\pi x}{l} - 2\sin \frac{3\pi x}{l}, 0 < x < l, u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Рекомендована література

Основна:

1. Бак С. М. Диференціальні та інтегральні рівняння: Навч. посіб. 2-ге вид., випр. і доп. Вінниця: ФОП Рогальська І. О., 2018. 360 с.
2. Бак С. М. Робочий зошит студента з диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики (для студентів предметної спеціальності 014.09 Середня освіта (Інформатика)). Вінниця, 2022. 44 с.
3. Іванчов М.І. Вступ до теорії рівнянь у частинних похідних: Текст лекцій. Львів: Тріада плюс, 2004. 178 с.
4. Конет І.М. Диференціальні рівняння математичної фізики: Навч. посіб. Кам'янець-Подільський: Вид-тво «Абетка-Світ», 2008. 128 с.
5. Томусяк А.А., Ковтонюк М.М. Диференціальні рівняння: У 2-х ч.: Навч. посіб. Вінниця: ПП «ТД «Едельвейс і К»», 2009. Ч. 1. 248 с.
6. Томусяк А.А., Ковтонюк М.М. Диференціальні рівняння: У 2-х ч.: Навч. посіб. Вінниця: ТОВ «фірма «Планер»», 2012. Ч. 2. 388 с.

Додаткова:

1. Головач Г.П., Калайда О.Ф. Збірник задач з диференціальних і інтегральних рівнянь. Київ: Техніка, 1997. 285 с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
3. Лавренюк С.П. Курс диференціальних рівнянь. Львів: Вид. НТЛ, 1997. 216 с.
4. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах: Навч. посіб. Київ: Либідь, 2003. 504 с.
5. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: Підручник. Київ: Либідь, 2003. 600 с.
6. Шкіль М.І., Сотниченко М.А. Звичайні диференціальні рівняння. Київ: Вища школа, 1992. 303 с.

Навчальне видання

Бак Сергій Миколайович

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА РІВНЯНЬ
МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

для студентів предметної спеціальності
014.09 Середня освіта (Інформатика)

Формат 60x84/16.
Папір офсетний. Гарнітура Book Antiqua.
Ум. друк. арк. 1,4