

УДК 514.144

Любов Тютюн,
канд. пед. наук, доцент,
доцент кафедри математики та інформатики
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ТЕОРЕМА ПАСКАЛЯ ТА ЇЇ ЧАСТИННІ ВИПАДКИ

Анотація. У статті досліджуються частинні випадки теореми Паскаля. Розглядаються особливості її застосування до розв'язування задач. Доведено обернену теорему Паскаля.

Ключові слова: шестивершинник, крива другого порядку, пряма Паскаля.

Abstract. The article examines special cases of Pascal's theorem. The features of its application to solving problems are considered. The converse of Pascal's theorem is proved.

Keywords: hexavertex, curve of the second order, Pascal's line.

Нехай маємо шестивершинник S_1CS_2ADB (рис. 1). Будемо називати протилежними такі дві сторони шестивершинника, які в замкнутій послідовності сторін шестивершинника відділені однаковим числом сторін (а саме двома) при обході їх як в одному (прямому), так і в другому (оберненому) порядку. Такими є пари сторін: S_1C і AD , CS_2 і DB , S_2A і BS_1 .

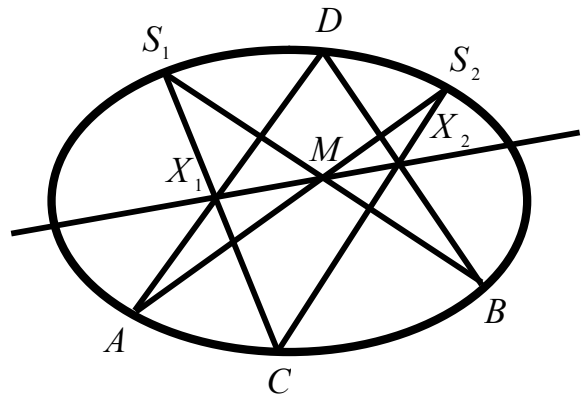


Рис. 1

Точки перетину пар протилежних сторін, які позначені на рисунку 1 буквами X_1 , X_2 і M , а саме:

$$S_1C \times AD = X_1, \quad CS_2 \times DB = X_2, \quad S_2A \times BS_1 = M.$$

Зазначимо, що якби не були вибрані вершини шестивершинника S_1CS_2ADB на кривій другого порядку, три точки перетину пар протилежних сторін X_1 , X_2 і M будуть лежати на одній прямій. Ця властивість шестивершинника, вписаного в криву другого порядку, носить назву *теореми Паскаля*.

Теорема Паскаля може бути сформульована так: *у будь-якому шестивершиннику, вершини якого належать кривій другого порядку, три точки перетину протилежних сторін лежать на одній прямій (пряма Паскаля).*

Ми знаємо, що вже п'ять точок повністю визначають криву другого порядку. Тому шість вершин вписаного шестивершинника повинні бути пов'язані деякою залежністю, яка і виражається в проєктивній формі теоремою Паскаля. Якщо п'ять точок (вершин) будемо вважати заданими і визначаючими криву другого порядку, то шоста точка (вершина) повинна задовольняти теоремі Паскаля. Тому останню можна розглядати як свого роду «проєктивний еквівалент» рівняння кривої другого порядку.

Легко переконатися також у справедливості оберненої теореми Паскаля, яку можна сформулювати так: *якщо три точки перетину протилежних сторін шестивершинника лежать на одній прямій, то його шість вершин належать одному і тому ж ряду другого порядку.*

Доведення цієї теореми можна провести, користуючись рисунком 1. Насправді, розглянемо шестивершинник S_1CS_2ADB , протилежні сторони якого перетинаються в точках X_1, M, X_2 , які лежать на одній прямій. П'ять вершин цього шестивершинника A, D, B, S_1, C визначають ряд другого порядку, якому вони належать. Припустимо, що сторона CS_2 даного шестивершинника перетинається з згадуваним рядом другого порядку в точці S'_2 (крім точки C). Тоді ми будемо мати шестивершинник $ADBS_1CS'_2$, вписаний в криву другого порядку. Застосовуючи до нього пряму теорему Паскаля, знаходимо те, що сторона S'_2A повинна проходити через точку M . В результаті, ця сторона співпадає з прямою MA , а точка S'_2 - з точкою S_2 .

Теорема Паскаля дозволяє за п'ятьма даними точками кривої другого порядку побудувати скільки завгодно нових точок тієї ж самої кривої.

Побудова. Нехай дано п'ять точок S_1, C, S_2, A, D кривої другого порядку (рис. 2).

Вважаючи ці точки вершинами вписаного в криву шестивершинника Паскаля, можемо провести сторони S_1C , CS_2 , S_2A , AD цього шестивершинника. Не вистачає тих двох сторін шестивершинника, які проходять шосту вершину. Цю шосту вершину B ми і будемо будувати, причому для визначеності задачі будемо шукати її на довільно вибраній прямій, яка проходить через вершину D . Ця пряма b перетинає один раз криву другого порядку в точці D . Будемо шукати другу точку перетину її з кривою, яку позначимо буквою B^1 . Іншими словами, пряма b є стороною шестивершинника і може бути застосована для побудови прямої Паскаля. Маємо дві точки цієї прямої:

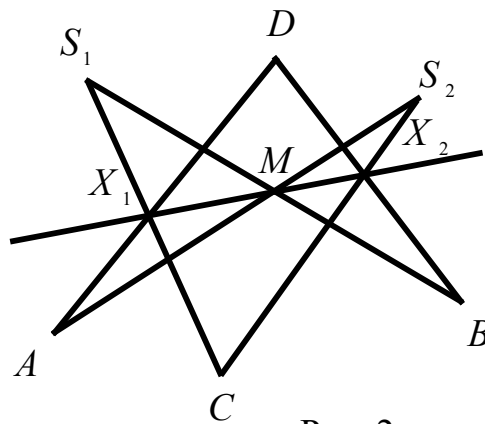


Рис. 2

$$X_1 = S_1C \times AD, \quad X_2 = CS_2 \times b.$$

У результаті, пряма Паскаля X_1X_2 побудована і перетинає сторону S_2A третьої пари протилежних сторін в точці M . Але, тоді пряма S_1M є другою стороною цієї пари і визначає шукану вершину B :

$$B = S_1M \times b.$$

Таким чином, можемо побудувати скільки завгодно точок кривої другого порядку, повертаючи пряму b навколо вершини D .

Розглянемо тепер питання про те, скільки різних прямих Паскаля визначають шість даних точок кривої другого порядку. Припустимо, що A, B, C, D, E, F . Число різних перестановок із шести елементів дорівнює: $P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$. Однак, при цьому підрахунку кожний шестивершинник, очевидно, перерахований шість раз (починаючи з кожної із його вершин, наприклад $ABCDEF, BCDEF A$). Крім того, кожний шестивершинник підрахований двічі, так як він може бути отриманий двома протилежними порядками обходу вершин (наприклад, $ABCDEF, FEDCDBA$). Тому число різних шестивершинників Паскаля дорівнює: $\frac{1}{2 \cdot 6} P_6 = 60$. Кожному із них відповідає своя пряма Паскаля.

Таким чином, будемо мати 60 прямих Паскаля, які визначаються шістьма даними точками кривої другого порядку.

Конфігурація Паскаля-Паппа. Розглянемо теорему Паскаля в тому окремому випадку, коли крива другого порядку розпадається на пару прямих. Нехай A, B, C, D, E, F - шість вершин шестивершинника Паскаля, розташованих по три на даних прямих p і q , які ми розглядаємо як криву другого порядку, що розпалась (рис. 3). Тоді ми маємо наступні три точки перетину пар протилежних сторін шестивершинника:

$$X = AB \times DE, \quad Y = BC \times EF, \quad Z = CD \times FA.$$

За теоремою Паскаля ці три точки лежать на одній прямій. Окремий випадок теореми Паскаля, що був розглянутий, був відомий ще стародавнім грецьким геометрам і носив назву теореми Паппа.

Розглядаючи рисунок 3, ми бачимо, що він має дев'ять точок (шість вершин і три точки перетину протилежних

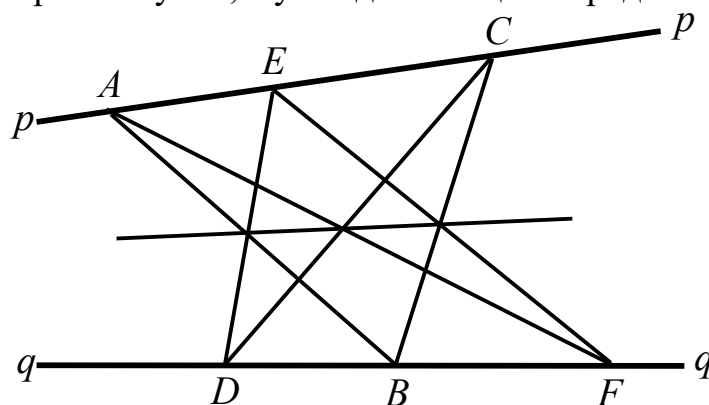


Рис. 3

сторін) і дев'ять прямих (шість сторін шестивершинника, дві дані прямі p і q і пряма Паскаля). При цьому через кожен точку проходять три прямі, а на кожній прямій лежать три точки. Тому ми маємо конфігурацію $\left(\frac{9}{3}\right)$, яку називають *конфігурацією Паскаля-Паппа*. Так як ця конфігурація правильна, то будь-яка пряма конфігурації може бути прийнята як пряма Паскаля.

Частинні випадки теореми Паскаля

1. Теорема Паскаля про шестивершинник, вписаний в криву другого порядку, може бути застосована і до многокутників з меншим числом вершин.

Для цього досить припустити, що дві які-небудь вершини шестивершинника співпадають. Сторона, що сполучає дві вершини, що співпали

(а отже, і дві точки кривої другого порядку), є дотичною до кривої, причому подвійна вершина многокутника є точкою дотику цієї сторони.

Враховуючи ці міркування, можемо застосовувати теорему Паскаля до випадків вписаного п'ятивершинника, чотиривершинника і тривершинника. Нехай, наприклад, в дану криву другого порядку вписаний п'ятивершинник $ABCDE$ (рис. 4).

Щоб застосувати до нього теорему Паскаля, будемо розглядати одну із його вершин, наприклад вершину D , як подвійну. Тоді всі шість вершин шестивершинника Паскаля в наявності і можуть бути пронумеровані, як це вказано на рисунку 4. В точці D співпадають дві вершини: 4 і 5.

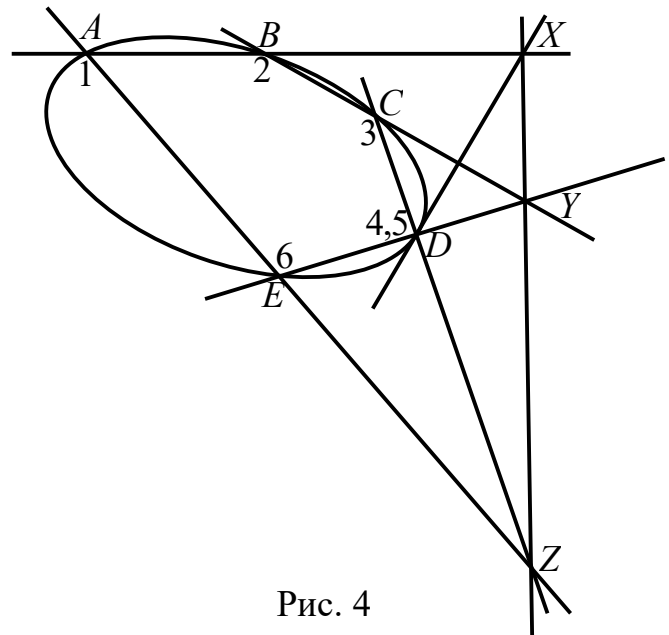


Рис. 4

Парами протилежних сторін, позначених за допомогою номерів вершин, є 1, 2 і 4, 5; 2, 3 і 5, 6; 3, 4 і 6, 1.

Згідно з сказаним вище сторона 4, 5 є дотичною до кривої другого порядку в точці D . Точки перетину X , Y і Z пар протилежних сторін повинні лежати на одній прямій (прямій Паскаля).

Таким чином, теорема Паскаля для п'ятивершинника сформулюється так: у будь-якому п'ятивершиннику, вписаному в криву другого порядку, точки перетину (Y і Z) двох пар несуміжних сторін і точка перетину (X) п'ятої сторони з дотичною в протилежній вершині лежать на одній прямій.

2. Розглянемо, тепер чотиривершинник $ABCD$, вписаний в криву другого порядку.

Припустимо, що дві з вершин (рис. 5) цього чотиривершинника є подвійними. Нехай, наприклад, подвійними є вершини A і C . Тоді, пронумерувавши вершини, ми позначимо точку A двома цифрами 1, 2, а точку C – цифрами 4, 5. Застосовуючи теорему Паскаля до отриманого таким чином «шестивершинника» 1, 2, 3, 4, 5, 6, матимемо три точки перетину пар протилежних сторін: $X = (1,2) \times (4,5)$, $Y = (2,3) \times (5,6)$, $Z = (3,4) \times (6,1)$.

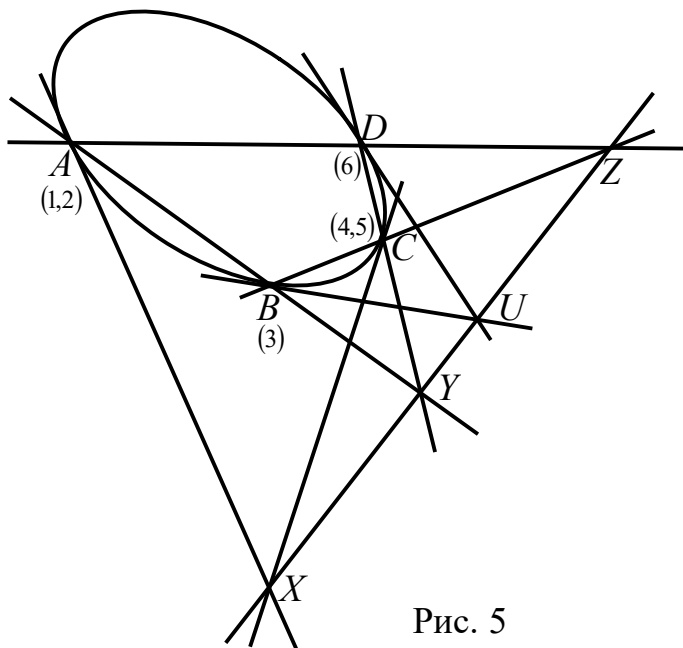


Рис. 5

Оскільки вершини 1 і 2 співпадають (в точці A), то сторона 1, 2 перетворюється в дотичну в цій точці. Аналогічно сторона 4, 5 є дотичною в точці C . Ці дотичні перетинаються в точці X . Дві інші пари протилежних сторін перетинаються в точках Y і Z .

Три точки X , Y і Z за теоремою Паскаля повинні лежати на одній прямій.

Сторони AB і CD , що перетинаються в точці Y , є також протилежними і для даного чотиривершинника $ABCD$. Те ж саме можна сказати і про пару сторін, що перетинаються в точці Z (BC і DA). Разом з тим третя пара «сторін» AX і CX є парою дотичних в протилежних вершинах A і C даного чотиривершинника. Отже, на прямій Паскаля повинні лежати точки перетину протилежних сторін вписаного чотиривершинника і точки перетину дотичних в протилежних вершинах. Оскільки ми могли б вважати подвійними точками вершини B і D чотиривершинника, то, очевидно, четверта точка U перетину дотичних в протилежних вершинах B і D повинна лежати на тій самій прямій Паскаля.

Отже, чотири точки X , Y , Z , і U повинні лежати на одній прямій. Звідси отримуємо теорему Паскаля для чотиривершинника в наступному вигляді: у будь-якому вписаному в криву другого порядку чотиривершиннику дві пари

протилежних сторін і дві пари дотичних в протилежних вершинах перетинаються у чотирьох точках, що лежать на одній прямій.

3. Переходимо до випадку вписаного тривершинника. В цьому випадку кожену вершину A , B і C тривершинника доводиться вважати подвійною точкою (рис. 6). Завдяки цьому всі шість вершин вписаного шестивершинника є в наявності і теорема Паскаля може бути застосована. З шести сторін цього шестивершинника три $[(2, 3), (4, 5)]$ і $(6, 1)]$ є одночасно і сторонами даного тривершинника (AB , BC і CA). Три інші сторони $[(1,2)$ $(3,4)$ і $(5, 6)]$ є дотичними у вершинах даного тривершинника (AX , BZ і CY).

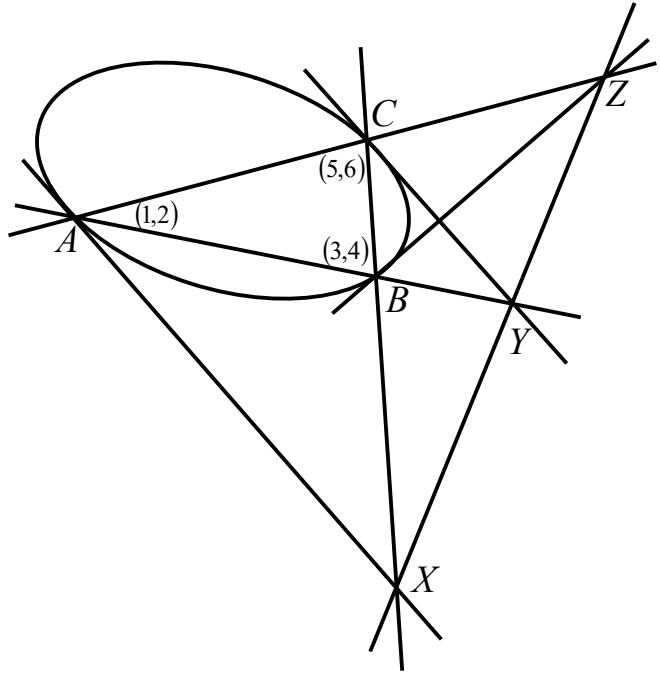


Рис. 6

Точки перетину протилежних сторін шестивершинника визначаються так:

$$X = (1,2) \times (4,5), \quad Y = (2,3) \times (5,6), \quad Z = (3,4) \times (6,1).$$

Із написаних формул видно, що ці точки є точками перетину сторін даного тривершинника ABC з дотичними в протилежних вершинах.

Три точки перетину сторін вписаного тривершинника з дотичними в протилежних вершинах лежать на одній прямій.

Частинні випадки теореми Паскаля знаходять численні застосування під час розв'язування задач, зокрема й задач на побудову за допомогою лише лінійки.

Так, наприклад, якщо крива другого порядку задана п'ятьма точками A , B , C , D , E , то в кожній з даних точок можна побудувати дотичну до кривої, використовуючи з цією метою теорему Паскаля для п'ятивершинника. Так, на

рисунку 5 показана побудова дотичної в точці D за допомогою прямої Паскаля. Інший приклад показано на рисунку 7. Дано три точки A , B і C кривої другого порядку і дотичні a і b в двох з них. Цими даними крива другого порядку (ряд точок другого порядку) цілком визначається. Насправді, приймаючи точки A і B за центри утворюючих пучків, встановлюємо проєктивну відповідність цих пучків за допомогою трьох пар відповідних прямих:

AB , AC і a (в пучкові A);
 b , BC і BA (в пучкові B).

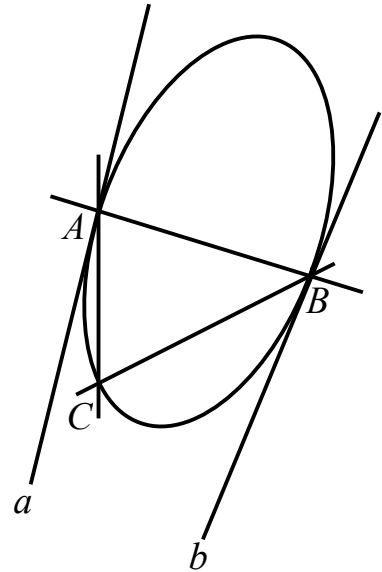


Рис. 7

Ця відповідність пучків A і B дає можливість побудувати скільки завгодно нових точок кривої другого порядку. У кожній з точок можемо побудувати дотичну, застосовуючи з цією метою теорему Паскаля для вписаного тривершинника.

Таким чином, враховуючи наведені вище міркування, можемо застосовувати теорему Паскаля до випадків вписаного в криву другого порядку п'ятивершинника, чотиривершинника і тривершинника. Як основну теорему Паскаля для загального випадку, так і її частинні випадки можна використати для розв'язування задач на побудову нових точок або дотичних до лінії другого порядку, заданої елементами, що її визначають.

Література:

1. Боровик В.Н., Яковець В.П. Курс вищої геометрії: Навчальний посібник. – Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. – 464 с.
2. Геометричні перетворення площини: Навчальний посібник / В.Н. Боровик, І.В. Зайченко, М.М. Мурач, В.П. Яковець. Суми: ВТД «Університетська книга», 2003. – 504 с.