

ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ ЛОКАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ, РОЗМІЩЕНИХ НА ДВОВИМІРНІЙ РЕШІТЦІ

Вступ. У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній решітці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n, m) -го осцилятора в момент часу t . Кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = -U'_{n,m}(q_{n,m}) + a_{n-1,m}(q_{n-1,m} - q_{n,m}) - a_{n,m}(q_{n,m} - q_{n+1,m}) + b_{n,m-1}(q_{n,m-1} - q_{n,m}) - b_{n,m}(q_{n,m} - q_{n,m+1}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (1)$$

Рівняння (1) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь.

Розглядаються такі розв'язки системи (1), що

$$\lim_{n,m \rightarrow \pm\infty} q_{n,m}(t) = 0, \quad (2)$$

тобто осцилятори знаходяться в стані спокою на нескінченності.

Питання коректності задачі Коші для ланцюгів нелінійних осциляторів вивчалось в [2], а для систем осциляторів на двовимірних решітках — не розглядалось.

Метою статті є одержання умов існування та єдиності локального розв'язку задачі Коші для нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній решітці.

Постановка задачі та основні припущення. Потенціал $U_{n,m}(r)$

запишемо у вигляді $U_{n,m}(r) = -\frac{d_{n,m}}{2}r^2 + V_{n,m}(r)$ і покладемо

$$c_{n,m} = d_{n,m} - a_{n-1,m} - a_{n,m} - b_{n,m-1} - b_{n,m}.$$

Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m} - V'_{n,m}(q_{n,m}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (3)$$

Враховуючи граничні умови (2), це рівняння зручно розглядати як диференціально-операторне рівняння

$$\ddot{q} = Aq - B(q) \quad (4)$$

де $(Aq)_{n,m} = a_{n-1,m}q_{n-1,m} + a_{n,m}q_{n+1,m} + b_{n,m-1}q_{n,m-1} + b_{n,m}q_{n,m+1} + c_{n,m}q_{n,m}$, (такі оператори вивчалися в [3, с. 506]), а нелінійний оператор B визначається формулою

$$(B(q))_{n,m} = V'_{n,m}(q_{n,m}), \quad (5)$$

в просторі дійсних послідовностей $q = \{q_{n,m}\}$ зі скалярним добутком

$$(q^{(1)}, q^{(2)}) = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} q_{n,m}^{(1)} q_{n,m}^{(2)}.$$

Позначимо цей простір $l_{2,2}$. Скалярний добуток і норму в $l_{2,2}$ позначатимемо $(\cdot, \cdot)$ і $\|\cdot\|$ відповідно.

Відмітимо, що рівняння (3) у просторі $l_{2,2}$ можна подати у гамільтоновому вигляді

$$\begin{cases} \dot{p} = -H'_q(p, q), \\ \dot{q} = H'_p(p, q); \end{cases}$$

з гамільтоніаном

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(\|p\|^2 - (Aq, q)) + \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} V_{n,m}(q_{n,m}),$$

де $p = \dot{q}$.

Гамільтоніан $H(p, q)$ задає повну енергію системи, тобто суму кінетичної і потенціальної енергії, причому $\frac{1}{2}\|p\|^2$ визначає кінетичну енергію,

а $\sum_{n,m \in \mathbb{Z}} V_{n,m}(q_{n,m}) - \frac{1}{2}(Aq, q)$ — потенціальну.

За означенням, розв'язком рівняння (4) вважається двічі неперервно диференційовна функція від t зі значеннями в $l_{2,2}$.

Припускається, що виконуються умови:

(i) послідовності $\{a_{n,m}\}$ і $\{c_{n,m}\}$ дійсних чисел обмежені;

(ii) $V_{n,m}(r)$ — функція класу C^1 на $\mathbb{R}$, причому $V_{n,m}(0) = V'_{n,m}(0) = 0$ і для будь-якого $R > 0$ існує таке $C = C(R) > 0$, що для всіх $n, m \in \mathbb{Z}$

$$|V'_{n,m}(r_1) - V'_{n,m}(r_2)| \leq C|r_1 - r_2|, \quad |r_1|, |r_2| \leq R. \quad (6)$$

З умови (i) випливає, що A є обмеженим самоспряженим оператором в $l_{2,2}$.

Лема 1. Нехай виконується умова (ii), тоді оператор B є обмеженим оператором в $l_{2,2}$. Більше того, оператор B є неперервним за Ліпшицем на кожній кулі простору $l_{2,2}$.

Задача Коші для рівняння (4) полягає у знаходженні розв'язку, який задовольняє початкові умови:

$$q(0) = q^{(0)}, \quad \dot{q}(0) = q^{(1)}. \quad (7)$$

Основний результат. Для отримання основного результату нам знадобиться теорема, яка є наслідком зі стандартного результату про існування та єдиність локального розв'язку ([4, с. 391—392]).

Розглянемо в банаховому просторі E нелінійне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \quad (8)$$

Теорема 1 (локальна). Нехай для будь-якого $R > 0$ існують $M_1 = M_1(R) > 0$ і $M_2 = M_2(R) > 0$ такі, що $\|f(x)\| \leq M_1$ при $\|x\| \leq R$ і $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M_2 \|x_1 - x_2\|$ при $\|x_1\|, \|x_2\| \leq R$.

Тоді для будь-якого $x_0 \in E$ існує t_0 таке, що рівняння (8) має один і тільки один розв'язок $x = x(t)$ в інтервалі $(-t_0; t_0)$, який задовольняє початкову умову $x(0) = x_0$.

Щоб скористатися теоремою 1 зведемо рівняння (4) до рівняння першого порядку в просторі $E = l_{2,2} \times l_{2,2}$

$$\dot{x} = Gx, \quad (9)$$

де $x = (q, p)$ і $Gx = (p, Aq - B(q))$ (стандартний прийом приведення рівняння другого порядку до системи першого порядку). Згідно леми 1, оператор G є неперервним за Ліпшицем в просторі E . Норма в E визначається рівністю:

$$\|x\|_E = \left(\|q\|^2 + \|p\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

З теореми 1 випливає основний результат статті про існування та єдиність локального розв'язку:

Теорема 2. Нехай виконуються умови (i) та (ii). Тоді для будь-яких $q^{(0)} \in l_{2,2}$ і $q^{(1)} \in l_{2,2}$ задача (4), (7) має єдиний розв'язок класу C^2 , який визначений на деякому інтервалі $(-t_0; t_0)$.

Доведення. Враховуючи обмеженість операторів A та B , для всіх $\|x\|_E \leq R$ маємо:

$$\begin{aligned} \|Gx\|_E &= \left(\|p\|^2 + \|Aq - B(q)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\|p\|^2 + \|Aq\|^2 - 2(Aq, B(q)) + \|B(q)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\|p\|^2 + \|Aq\|^2 + 2\|Aq\|\|B(q)\| + \|B(q)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\|p\|^2 + 2\|Aq\|^2 + 2\|B(q)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\|p\|^2 + C_1\|q\|^2 + C_2\|q\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(C_0\|p\|^2 + C_0\|q\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{C_0}\|x\|_E \leq \sqrt{C_0}R = M_1, \end{aligned}$$

де $C_0 = \max\{1; C_1 + C_2\}$, $M_1 = \sqrt{C_0}R$.

Аналогічно для $\|x_1\|_E, \|x_2\|_E \leq R$, де $x_1 = (q^{(1)}, p^{(1)})$, $x_2 = (q^{(2)}, p^{(2)}) \in E$,

враховуючи обмеженість оператора A і лему 1, маємо:

$$\begin{aligned}
 Gx_1 - Gx_2 &= \left(p^{(1)}, Aq^{(1)} - B(q^{(1)}) \right) - \left(p^{(2)}, Aq^{(2)} - B(q^{(2)}) \right) = \\
 &= \left(p^{(1)} - p^{(2)}, A(q^{(1)} - q^{(2)}) + B(q^{(2)}) - B(q^{(1)}) \right), \\
 \|Gx_1 - Gx_2\|_E &= \left(\|p^{(1)} - p^{(2)}\|^2 + \|A(q^{(1)} - q^{(2)}) + B(q^{(2)}) - B(q^{(1)})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \left(\|p^{(1)} - p^{(2)}\|^2 + \|A(q^{(1)} - q^{(2)})\|^2 + 2(A(q^{(1)} - q^{(2)}), B(q^{(2)}) - B(q^{(1)})) + \right. \\
 &\quad \left. + \|B(q^{(2)}) - B(q^{(1)})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \left(\|p^{(1)} - p^{(2)}\|^2 + 2\|A(q^{(1)} - q^{(2)})\|^2 + 2\|B(q^{(2)}) - B(q^{(1)})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \left(\|p^{(1)} - p^{(2)}\|^2 + 2C_1\|q^{(1)} - q^{(2)}\|^2 + 2C\|q^{(1)} - q^{(2)}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
 &\leq \left(C_0\|p^{(1)} - p^{(2)}\|^2 + C_0\|q^{(1)} - q^{(2)}\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \sqrt{C_0}\|x_1 - x_2\|_E = M_2\|x_1 - x_2\|_E,
 \end{aligned}$$

де $C_0 = \max\{1; 2C_1 + 2C\}$, $M_2 = \sqrt{C_0}$.

Таким чином, за теоремою 1 для $x_0 = (q^{(0)}, q^{(1)}) \in E$ існує t_0 таке, що рівняння (9) має єдиний розв'язок $x = x(t) = (q(t), p(t))$ в інтервалі $(-t_0; t_0)$, який задовольняє початкову умову $x(0) = x_0$, тобто

$$(q(0), \dot{q}(0)) = (q^{(0)}, q^{(1)}).$$

Теорему доведено. $\square$

Література:

1. Бак С.Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С.Н. Бак, А.А. Панков // Український математичний вісник. — 2010. — Т. 7, №2. — С. 154—175.
2. Бак С.Н. О динамических уравнениях системы линейно связанных нелинейных осцилляторов / С.Н. Бак, А.А. Панков // Український математичний журнал. — 2006. — №6. — Т.58. — С.723—729.
3. Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — М.: Наука, 1970. — 534 с.
4. Braun O.M. Nonlinear dynamics of the Frenkel-Kontorova model / O.M. Braun, Y.S. Kivshar // Physics Repts. — 1998. — 306. — P. 1—108.
5. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. — 2003. — Volume 3, №1 (February). — P. 105—114.
6. Srikanth P. On periodic motions of two-dimensional lattices / P. Srikanth // Functional analysis with current applications in science, technology and industry. — 1998. — Volume 377. — P. 118—122.

Стаття присвячена вивченню нескінченної системи диференціальних рівнянь, яка описує нескінченний ланцюг лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Отримано результат про існування та єдиність локального розв'язку задачі Коші.

Ключові слова: нелінійні осцилятори, двовимірна решітка, задача Коші, локальний розв'язок.