УДК 517.97

Валентина Бондарева,
студентка факультету математики, фізики
і комп'ютерних наук
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

ПЕРІОДИЧНІ БІЖУЧІ ХВИЛІ В СИСТЕМІ ТИПУ ФЕРМІ-ПАСТИ-УЛАМА З НЕЛОКАЛЬНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ

Анотація. *У статті встановлено умови існування періодичних біжучих хвиль в системі типу Фермі-Пасти-Улама з нелокальною взаємодією.*

Ключові слова: *система Фермі-Пасти-Улама, нелокальна взаємодія, періодичні біжучі хвилі, критичні точки.*

Abstract. *The article establishes the conditions for the existence of periodic traveling waves in a system of the Fermi-Pasta-Ulam with nonlocal interaction.*

Keywords: *Fermi-Pasta-Ulam system, nonlocal interaction, periodic traveling waves, critical points.*

Для початку розглядаємо нескінченний ланцюг ідентичних частинок на прямій такий, що кожна частинка взаємодіє з M сусідами з двох боків. Динаміка цього ланцюга описується рівняннями:

$$\ddot{q}_j = \sum_{m=1}^{M} [U'_m(q_{j+m} - q_j) - U'_m(q_j - q_{j-m})], \quad j \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $q_j(t)$ – положення j-ї частинки в момент часу t. Потенціали U_m, $m = 1, 2, ..., M$, відображають взаємодію між частинкою та її сусідами так, що U_1 відповідає взаємодії з найближчими сусідами, U_2 з подальшими найближчими сусідами і т.д.

Коли $M = 1$, то система (1) є відомою ґраткою Фермі-Пасти-Улама (ФПУ), що показана та досліджена чисельно в новаторській роботі [6]. Від тоді ґратки типу ФПУ постійно викликають великий інтерес у фізичних і математичних спільнотах (див. [1–5], [8–14]).

Розв'язок системи (1) у вигляді біжучої хвилі має вигляд $q_j(t) = u(j - ct)$, де $u(s)$ і $c > 0$– представляють собою профільну функцію та швидкість хвилі відповідно.

Періодичним є профіль швидкості періодичної хвилі, тому ці хвилі мають профілі відносних зміщень, що є періодичними. Зауважимо, що профільна функція періодичної хвилі не завжди періодична.

Профільна функція біжучої хвилі є розв'язком такого диференціально-різницевого рівняння

$$c^2 u''(s) = \sum_{m=1}^{M} [U'_m(D_m^+ u(s)) - U'_m(D_m^- u(s))], \tag{2}$$

де

$$D_m^+ u(s) = u(s+m) - u(s)$$

і

$$D_m^- u(s) = u(s) - u(s-m).$$

Представимо потенціали взаємодії у вигляді

$$U_m(r) = \frac{a_m}{2} r^2 + V_m(r), m = 1, ..., M, \tag{3}$$

де $a_m \geq 0$ і $V_m \in C^1$ з $V_m(0) = V'_m(0) = 0$ для всіх $m = 1, 2, ..., M$,

Всюди далі припускається, що будуть виконуватися такі умови:

(A_1) *Швидкість звуку* c_0*, яка визначається рівністю*

$$c_0^2 = \sum_{m=1}^{M} a_m m^2$$

є додатною та $c > c_0$.

(A_2) $V'_m(r) = o(r)$ *так як* $r \to 0$ *для всіх* $m = 1, 2, ..., M$.

(A_3) *Усі функції* $V_m(r)$ $m = 1, 2, ..., M$, *є невід'ємними і хоча б одна з них, наприкладу,* V_{m_0}*, задовольняє умову*

$$\lim_{|r|\to\infty} r^{-2} V_{m_0}(r) = \infty.$$

Розглядаючи T*-періодичну задачу з цілим числом* T*, припустимо, крім того, що* $m_0 = 1$.

(A_4) *Усі функції* $|r|^{-1} V'_m(r)$ *неспадні і хоча б одна з них строго зростаюча.*

Зазначимо, що загалом не всі функції V_m є ненульовими.

Зауваження 1. *З припущення* (A_4)*, усі функції*

$$G_m(r) = \frac{1}{2} V'_m(r) r - V_m(r), \qquad m = 1, 2, ..., M,$$

неспадні при $r > 0$ *(відповідно незростаючі при* $r < 0$*). Для більш загальних умов доведення можна знайти в [7, лема 2.3]. Причому,* $G_{m_0}(r) > 0$ *для всіх* $r \neq 0$.

Шукатимемо розв’язок рівняння (2), який задовольняє умову

$$u'(s+T) = u'(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

де $T > 0$ – заданий період (періодичні хвилі).

Для $T > 0$ введемо простір

$$X_T = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u'(s+T) = u'(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad u(0) = 0\}.$$

Так як всі функції в $H^1_{loc}(\mathbb{R})$ неперервні, то умова $u(0) = 0$ має сенс. Скалярний добуток на X_T визначений наступним чином

$$(u, v)_T = \int_{I_T} u'(s) v'(s) ds.$$

Тут й далі $I_T = [-T/2, T/2]$. Через $\|\cdot\|_T$ позначимо норму на X_T, породжену скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_T$.

Також через X_T^+ позначимо конус неспадних функцій у X_T. Конуси всіх незростаючих функцій через $X_T^- = -X_T^+$. Всі ці конуси замкнені.

Зауваження 2. *Не важко здогадатися, що коли* $T \geq M$ *є цілим числом, тоді всі оператори* $D_m^{\pm}, m = 1, 2, ..., M$*, мають нетривіальні ядра в просторі* X_T *і*

$\ker D_1^{\pm} \subset \ker D_m^{\pm}, \quad m = 2,...,M$. *І навпаки, коли один із операторів має ненульове ядро в* X_T, $T \ge M$ *, тоді* T *є цілим числом.*

Із задачею (2), (4) зв'язаний функціонал енергії

$$J_T(u) = \int_{I_T} \left(\frac{c^2}{2}(u')^2 - \sum_{m=1}^{M} U_m(D_m^+ u) \right) ds =$$

$$= \int_{I_T} \left(\frac{c^2}{2}(u')^2 - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M} a_m^2 D_m^+ u - \sum_{m=1}^{M} V_m(D_m^+ u) \right) ds$$

на X_T . Це коректно визначений C^1-функціонал, а його критичні точки є розв'язками розглянутої нами задачі.

Простір X_T та функціонал J_T є інваріантними стосовно модифікованих зміщень

$$(S_a v)(s) = v(s+a) - v(a), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що кожен простір X_T включає тривіальні розв'язки виду $u(s) = ks$, $k \in \mathbb{R}$.

Основним результатом є така теорема:

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(A_1) - (A_4)$ *і* $c > c_0$. *Тоді існує* $T_c \ge M$ *таке, що для будь-якого нецілого* $T \ge T_c$ *задача* (2), (4) *має нетривіальний розв'язок у* X_T^+ (X_T^-). *Якщо* $m_0 = 1$ *в припущенні* (A_3), *то попереднє твердження правильне для всіх цілих* $T \ge T_c$.

Для доведення теореми використано один із варіантів теореми про гірський перевал з умовою Серамі замість умови Пале-Смейла ([10]).

Таким чином, у статті встановлено умови існування періодичних біжучих хвиль в системі типу Фермі-Пасти-Улама з нелокальною взаємодією.

Література:

1. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50, № 1. P.75–87.

2. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 252, № 5 (January). P. 453-462.
3. Butt I. A., Wattis J. A. D. Discrete breathers in a two-dimensional Fermi–Pasta–Ulam lattice. *J. Phys. A. Math. Gen*. 2006. Vol. 39. P. 4955–4984.
4. Fermi E., Pasta J., Ulam S. Studies of nonliniear problems. *Los Alamos Sci. Lab. Rept. LA-1940*. 1955. Reprinted in Lect. Appl. Math. 1974. Vol. 15. 156 p.
5. Friesecke G., Wattis J.A.D. Existence theorem for solitary waves on lattices. *Communications in Mathematical Physics.* 1994. Vol. 161. P. 391-418.
6. Friesecke G., Pego R. L. Solitary waves on FPU lattices, I. Qualitative properties, renormalization and continuum limit. *Nonlinearity.* 1999. Vol.12. P.1601-1627.
7. Liu S. On superlinear problems without the Ambrosetti-Rabinowitz condition. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications.* 2010. Vol.73. P.788-795.
8. Motreanu D., Motreanu V., Papageorgiou N. Topological and Variational Methods with Applications to Boundary Value Problems. New York: Springer, 2014. 459 p.
9. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi–Pasta–Ulam Lattices. London–Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.
10. Pankov A. Traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam chains with nonlocal interaction. *Discrete & Continuous Dynamical Systems – S.* 2019. Vol.12, № 7. P.2097-2113.
11. Pankov A., Rothos V. Traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam lattices with saturable nonlinearities. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*. 2011. Vol. 30, № 3. P.835-849.
12. Бак С. М. Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці: дис....докт. фіз.-мат. наук: 01.01.02. Вінниця, 2020. 336 с.
13. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірпній ґратці. *Математичні студії.* 2012. Т. 37, № 1. С. 76-88.
14. Бак С., Ковтонюк Г., Лисак Б. Періодичні біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама із насичуваними нелінійністями на двовимірній ґратці. *Актуальні проблеми математики, фізики, комп'ютерних наук і технологій* : зб. наук. пр. / С. В. Подолянчук (голова) [та ін.] ; Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [Електронне мережне наукове видання]. Вінниця, 2021. Вип. 18. С. 12-15.

Науковий керівник: докт. фіз.-мат. наук, професор Бак Сергій Миколайович.