

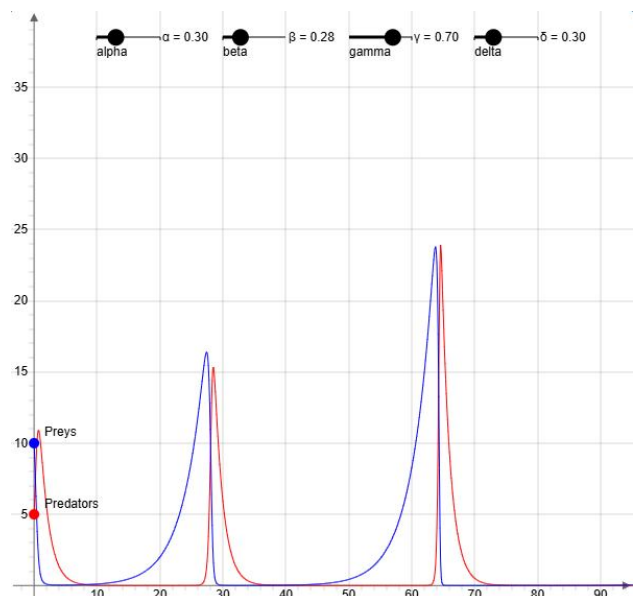
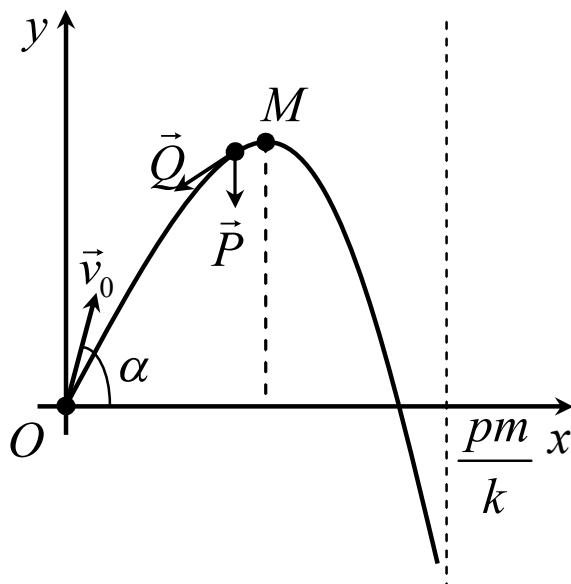
Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет математики, фізики і комп'ютерних наук

Кафедра математики та інформатики

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА

*з математичного моделювання природничих і
соціально-економічних процесів*

(для студентів спеціальності Е7 Математика)



Вінниця 2026

*Схвалено і рекомендовано до видання вченою радою факультету
математики фізики і комп'ютерних наук,
протокол №2 від 30.09.2026 року.*

Рецензенти: доктор педагогічних наук,
професор **Ковтонюк М. М.**,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Панасенко О. Б.**

Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного моделювання природничих і соціально-економічних процесів (для студентів спеціальності Е7 Математика) [Електронне видання]. 2-е вид. Вінниця, 2026. 52 с.

Індивідуальний робочий зошит студента

Дисципліна: математичне моделювання природничих і соціально-економічних процесів

Розділи: Основні поняття математичного моделювання.
Математичне моделювання природничих процесів.
Математичне моделювання соціально-економічних процесів

Автор-укладач: доктор фізико-математичних наук, професор
Бак Сергій Миколайович

Передмова

Робочий зошит з математичного моделювання природничих і соціально-економічних процесів призначений для використання студентами спеціальності Е7 Математика при вивченні розділів «Основні поняття математичного моделювання», «Математичне моделювання природничих процесів» та «Математичне моделювання соціально-економічних процесів».

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних розділів, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю.

Робочий зошит складається з практичних занять з прикладами, добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання та зразка тексту контрольної роботи.

Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

Робочий план студента

Робочий план студента складений на основі навчальної програми з додаткових розділів диференціальних рівнянь.

Таблиця 1. Розподіл годин

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	денна форма здобуття освіти					
	усього	у тому числі				
		ЛК	ПЗ	ЛЗ	ІЗ	СР
1	2	3	4	5	6	7
1-й семестр						
<i>Розділ 1. Основні поняття математичного моделювання</i>						
Тема 1. Математичні моделі	17	2	1	0	0	14
Тема 2. Основні принципи математичного моделювання	18	2	1	0	0	15
Разом за розділом 1	35	4	2	0	0	29
<i>Розділ 2. Математичне моделювання природничих процесів</i>						
Тема 1. Математичне моделювання фізичних явищ і процесів	25	6	4	0	0	15
Разом за розділом 2	25	6	4	0	0	15
Усього годин за 1-й семестр	60	10	6	0	0	44
2-й семестр						
<i>Розділ 2. Математичне моделювання природничих процесів (продовження)</i>						
Тема 2. Диференціальні моделі в задачах геометрії	23	2	4	0	0	17
Тема 3. Математичне моделювання в хімії, біології, екології та медицині	23	2	4	0	0	17
Разом за розділом 2	46	4	8	0	0	34
<i>Розділ 3. Математичне моделювання соціально-економічних процесів</i>						
Тема 1. Моделі ринку та міжгалузевого балансу	26	2	6	0	0	18

Тема 2. Моделі процесів економічного зростання та макроекономічної нестабільності	24	2	4	0	0	18
Тема 3. Математична модель динаміки формування компетентностей у процесі навчання	24	2	4	0	0	18
Разом за розділом 3	74	6	14	0	0	54
Усього годин за 2-й семестр	120	10	22	0	0	88
Разом за рік	180	20	28	0	0	132

Таблиця 2. Теми лекцій

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
	1-й семестр	
1.	Математичні моделі	2
2.	Основні принципи математичного моделювання	2
3.	Математичне моделювання фізичних явищ і процесів	6
	Усього годин за 1-й семестр	10
	2-й семестр	
4.	Диференціальні моделі в задачах геометрії	2
5.	Математичне моделювання в хімії, біології, екології та медицині	2
6.	Моделі ринку та міжгалузевого балансу	2
7.	Моделі процесів економічного зростання та макроекономічної нестабільності	2
8.	Математична модель динаміки формування компетентностей у процесі навчання	2
	Усього годин за 2-й семестр	10
	Разом за рік	20

Таблиця 3. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
	1-й семестр	
1.	Математичні моделі	2
2.	Математичне моделювання фізичних явищ і процесів	4
	Усього годин за 1-й семестр	6
	2-й семестр	
3.	Диференціальні моделі в задачах геометрії	4
4.	Математичне моделювання в хімії, біології, екології та медицині	4
5.	Математичне моделювання соціально-економічних процесів	4
6.	Контрольна робота	2
7.	Захисти проєктів	8
	Усього годин за 2-й семестр	22
	Разом за рік	28

Таблиця 4. Теми можливих проєктів

№ з/п	Назва теми
1.	Моделі росту популяції живих організмів
2.	Моделі озерних екосистем
3.	Моделі гідродинаміки
4.	Моделі типу Моно-Ієрусалимського
5.	Математичне моделювання виробництва
6.	Моделі типу Леонтєва-Форда
7.	Глобальні еколого-економічні моделі
8.	Моделі теплопровідності та фільтрації
9.	Моделі випадкових процесів
10.	Математичні моделі біомедичних процесів
11.	Математичні моделі технологічних процесів
12.	Математичні моделі технічних систем
13.	Моделі електродинамічних процесів
14.	Моделі фінансових і страхових процесів
15.	Математичні моделі дискретних систем (скінченні автомати, мережі Петрі, машини Тюринга)

16.	Моделювання систем масового обслуговування
-----	--

Таблиця 5. Розподіл балів за видами контролю та самостійної роботи

№	Вид поточного контролю та самостійної роботи	Кількість балів
1.	Домашні завдання	10
2.	Конспект	10
3.	Контрольна робота	20
4.	Захист проєкту	20
5.	Колоквіум	10
Загальна кількість балів за поточний контроль		70
Підсумковий контроль (екзамен)		30
Загальна кількість балів		100

Таблиця 6. Шкала оцінювання: стобальна, ECTS, розширена

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за розширеною шкалою
		<i>Для екзамену, заліку, курсової роботи, практики</i>
90-100	A	ВІДМІННО
80-89	B	ДУЖЕ ДОБРЕ
75-79	C	ДОБРЕ
60-74	D	ЗАДОВІЛЬНО
50-59	E	ДОСТАТНЬО
35-49	FX	НЕЗАДОВІЛЬНО З МОЖЛИВІСТЮ ПОВТОРНОГО СКЛАДАННЯ
1-34	F	НЕПРИЙНЯТНО З ОBOB'ЯЗКОВИМ ПОВТОРНИМ ВИВЧЕННЯМ ДИСЦИПЛІНИ

Практичне заняття № 1-3

Тема: Математичні моделі. Математичне моделювання фізичних явищ і процесів

I. Етапи побудови математичних моделей

Побудова математичної моделі передбачає виконання таких двох основних етапів:

1. *Постановка задачі та її системний аналіз.* Треба чітко визначити умову задачі: що дано (аргументи) і що треба знайти (результати). Після цього провести змістовний аналіз задачі: уточнити мету розв'язування задачі (проблеми), її компоненти, визначити за яких умов можна отримати необхідний результат, а за яких умов – ні, які результати будуть вважатися правильними.

2. *Формалізація задачі і побудова математичної моделі.* Розгорнутий зміст (опис задачі) необхідно формалізувати: замінити всі змістовні терміни символами (змінними і константами), а всі змістовні твердження – математичними виразами. Далі, виходячи зі змісту (опису задачі), встановити зв'язки між аргументами та результатами у вигляді певних математичних співвідношень: формул, рівнянь, нерівностей, їх сукупностей або систем.

Ці етапи можна деталізувати і доповнити дослідженням побудованої моделі. Відповідно до цього можна виділити такі *етапи*:

I етап. Формулювання проблеми та змістовна постановка задачі.

II етап. Створення концептуальної моделі (сформульований у термінах конкретних проблемних областей чи наук (фізики, хімії, біології тощо) перелік основних питань, припущень, гіпотез відносно властивостей і поведінки об'єкта моделювання).

III етап. Формалізація і математична постановка задачі.

IV етап. Вибір методів розв'язування та безпосереднє розв'язання задачі.

V етап. Перевірка адекватності моделі реальній дійсності (верифікація моделі).

VI етап. Аналіз результатів моделювання.

Приклад 1. Наведемо приклад побудови математичної моделі руху човна.

Змістовна постановка. Човен штовхнули від берега і при початковій швидкості відпустили його. Необхідно дослідити рух човна.

Концептуальна постановка. Розглядається поступальний рух човна (усі його точки рухаються однаково, тому для вивчення такого руху досить вивчити рух однієї його точки) з початковою швидкістю, під дією сили тяжіння, архімедової (виштовхувальної) сили і сили опору води. Човен тримається на плаву (рух по вертикалі відсутній), тому архімедова сила зрівноважує силу тяжіння. Розробку моделі будемо здійснювати при таких припущеннях:

- човен здійснює поступальний рух у горизонтальній площині;
- човен приймемо за матеріальну точку (тіло, розмірами якого можна знехтувати) деякої маси, положення якої збігається з центром мас;
- рух човна під дією прикладених сил описується основним рівнянням динаміки (другим законом Ньютона);
- величини сили опору води прямо пропорційна швидкості човна і протилежна за напрямом.

Потрібно визначити швидкість човна як функцію від часу.

Формалізація і математична постановка. Нехай m – маса човна, $v = v(t)$ – його швидкість в момент часу t , $v_0 = v(0)$ – початкова швидкість човна, тоді сила опору води $F = -kv$, де k – коефіцієнт пропорційності.

За другим законом Ньютона ($F = ma = m \frac{dv}{dt}$) складаємо рівняння:

$$m \frac{dv}{dt} = -kv.$$

Таким чином, задача зводиться до знаходження розв'язку задачі Коші:

$$m \frac{dv}{dt} = -kv, \quad v(0) = v_0.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = 0$ має вигляд $v(t) = Ce^{\frac{-k}{m}t}$.

Враховуючи початкову умову, одержуємо розв'язок задачі Коші:

$$v(t) = v_0 e^{\frac{-k}{m}t}.$$

II. Теплові явища

Приклад 2. В електронагрівальну піч з температурою середовища $T_c = 1000^\circ\text{C}$ помістили заготовку з температурою $T_0 = 200^\circ\text{C}$. Через дві години температура заготовки підвищилася до $T_1 = 500^\circ\text{C}$. Знайти температуру заготовки через 4 години, якщо відомо, що швидкість зміни

температури заготовки пропорційна різниці температури середовища і температури заготовки.

Розв'язання.

Нехай $T(t)$ – температура заготовки в момент часу t . Тоді $\frac{dT}{dt}$ – швидкість зміни температури заготовки. За умовою складаємо диференціальне рівняння нагрівання заготовки

$$\frac{dT}{dt} = k(T_c - T) = k(1000 - T).$$

Відокремлюючи змінні, маємо

$$\begin{aligned}\frac{dT}{1000 - T} &= k dt; \\ \int \frac{dT}{1000 - T} &= k \int dt; \\ -\ln|1000 - T| &= kt + C_1; \\ T &= 1000 - Ce^{-kt}.\end{aligned}$$

Сталу C і коефіцієнт k знайдемо з крайових умов:

$$\begin{cases} T(0) = 200, \\ T(2) = 500; \end{cases} \begin{cases} 1000 - Ce^0 = 200, \\ 1000 - Ce^{-2k} = 500; \end{cases} \begin{cases} C = 800, \\ k = -\frac{1}{2} \ln \frac{5}{8}. \end{cases}$$

Отже, температура заготовки змінюється за законом

$$T = 1000 - 800 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{\frac{t}{2}}.$$

Знайдемо температуру заготовки через 4 години

$$T(4) = 1000 - 800 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 = 687,5(^{\circ}C).$$

- ✎1. Використовуючи запропоновану в прикладі 1 схему, побудувати математичну модель вільного падіння тіла.
- ✎2. Використовуючи запропоновану в прикладі 1 схему, побудувати математичну модель тіла, кинутого під кутом до горизонту.
- ✎3. В електронагрівальну піч з температурою середовища $T_c = 1000^{\circ}C$ помістили заготовку з температурою $T_0 = 200^{\circ}C$. Через дві години температура заготовки підвищилася до

$T_1 = 500^{\circ}\text{C}$. Знайти температуру заготовки через 4 години, якщо відомо, що швидкість зміни температури заготовки пропорційна різниці температури середовища і температури заготовки.

4. Температура тіла впродовж 20 хвилин знизилася від 100°C до 60°C . Температура повітря $T_n = 20^{\circ}\text{C}$. Знайти час, за який температура тіла знизиться до 25°C , якщо швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла і повітря.

5. Охоронець заповідника виявив тушу вбитого зубра. Для доведення вини затриманого бракон'єра треба уточнити час, коли було вбито тварину. Відомо, що в момент виявлення злочину температура туші зубра становила 31°C , а через годину після цього – 29°C . Температура повітря того дня становила 21°C . Швидкість охолодження туші пропорційна різниці температур туші і повітря. Як слід діяти охоронцю, якщо відомо, що нормальна температура тіла живої тварини 37°C .

6. Порожниста залізна куля перебуває в стаціонарному тепловому стані, тобто коли температура в різних точках тіла різна, але в кожній окремій точці з часом вона не змінюється. Внутрішній радіус кулі 6 см, зовнішній – 10 см, температура внутрішньої поверхні 200°C , зовнішньої – 20°C . Визначити температуру в точках, які лежать на відстані 9 см від центра кулі.

7. Циліндричну котушку виготовлено з мідного дроту. При проходженні електричного струму через котушку виділяється

теплота. Вивести формулу для температури $T = T(t)$ усталеного режиму як функції часу t .

III. Витікання рідини крізь отвір у посудині

Витікання рідини крізь отвір у посудині

Швидкість витікання рідини крізь малий отвір у посудині, який розташований на відстані h нижче від рівня рідини в посудині, без урахування тертя дорівнювала б швидкості вільного падіння тіла з висоти h , тобто $\sqrt{2gh}$. З урахуванням тертя залежність швидкості v від h визначається законом Торрічеллі: $v = \mu\sqrt{2gh}$, де g – прискорення вільного падіння, μ – емпіричний коефіцієнт витрат, який залежить від рідини (для води $\mu = 0,62$, для гасу $\mu = 0,6$).

8. У дні вертикальної циліндричної посудини висоти H і радіуса основи R , заповненої водою, утворився невеликий отвір площі S . Через який час через отвір витече вся вода, якщо чверть води витікає через t_1 с.

9. Посудину, площа поперечного перерізу якої є відомою функцією висоти h ($S = S(h)$), наповнена до рівня H . У дні посудини є отвір площею σ , крізь який рідина витікає. Визначити час t , за який рівень рідини знизиться від початкового H до довільного h ($0 \leq h \leq H$), і час $t_{\text{вс}}$, за який витече вся рідина.

10. Круглий циліндричний чан із вертикальною віссю діаметром $2R$ і заввишки H наповнено рідиною. Вода витікає крізь круглий отвір діаметром $2a$ в дні чана. Визначити час $t_{\text{вс}}$, за який витече вся рідина.

11. Визначити час витікання всього гасу з заповненої циліндричної залізничної цистерни довжиною $L = 12$ м і

діаметром $D = 2,6$ м через коротку зливну трубку з площею поперечного перерізу $\omega = 20$ см² у нижній частині цистерни.

✎12. Посудину, що має форму півкулі радіусом 2 м, заповнено водою. За який час витече вся вода крізь круглий отвір радіусом 0,1 м, вирізаний у дні посудини?

IV. Закон радіоактивного розпаду

Приклад 3 (задача про півперіод радіоактивного розпаду). Експериментально підтверджено, що швидкість радіоактивного розпаду речовини пропорційна її кількості. Визначити півперіод розпаду речовини – час, за який розпадається половина речовини.

Розв'язання.

Позначимо через $x(t)$ – кількість радіоактивної речовини в момент часу t . Тоді $x'(t)$ – швидкість зміни кількості речовини, тобто швидкість розпаду. Нехай в початковий момент часу $x(0) = x_0$. Оскільки за умовою

$$x'(t) = -kx, \quad k > 0,$$

то

$$x = Ce^{-kt}.$$

З початкової умови $x(0) = x_0$ одержуємо, що $C = x_0$, а отже, закон зміни кількості радіоактивної речовини з часом має вигляд

$$x(t) = x_0 e^{-kt}.$$

Тоді півперіод розпаду знайдемо з рівняння

$$\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-kt},$$
$$t = \frac{\ln 2}{k}.$$

✎13. Експериментально підтверджено, що швидкість радіоактивного розпаду речовини пропорційна її кількості з деяким коефіцієнтом $-k < 0$ (закон радіоактивного розпаду). Визначити півперіод розпаду речовини – час, за який розпадається половина речовини.

✎14. Використовуючи закон радіоактивного розпаду, визначити, через який час залишиться 1% радіоактивної

речовини від її початкової кількості, якщо за 30 днів розпалося 50% початкової кількості.

✎15. Використовуючи закон радіоактивного розпаду, визначити, через скільки років розпадеться половина кількості радію, якщо впродовж року з кожного граму радію розпадається 0,44 мг.

✎16. Швидкість розпаду радію пропорційна наявній його кількості. З досвіду відомо, що впродовж року вага одного грама радію меншає на 0,435 мг. Визначити півперіод розпаду радію.

V. Рух

Приклад 4. На матеріальну точку масою m діє стала сила, яка надає точці прискорення a . Навколишнє середовище чинить рухомій точці опір, пропорційний швидкості її руху. Визначити закон зміни швидкості руху матеріальної точки залежно від часу, якщо в початковий момент часу точка була в стані спокою.

Розв'язання.

Позначимо через $v(t)$ – швидкість руху матеріальної точки в момент часу t . В початковий момент часу $v(0)=0$. За умовою в будь-який момент часу t на матеріальну точку діє сила

$$F = ma - kv(t).$$

За другим законом Ньютона ця сила надає точці прискорення

$$\frac{F}{m} = \frac{ma - kv(t)}{m}.$$

Прискорення в момент часу t є швидкістю зміни швидкості, тобто похідною швидкості

$$v'(t) = \frac{ma - kv(t)}{m} = -\frac{k}{m}v(t) + a.$$

Одержали лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку. Його загальний розв'язок має вигляд

$$v(t) = \frac{m}{k}a + Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Сталу C знайдемо з початкової умови $v(0)=0$:

$$\frac{m}{k}a + C = 0, \quad C = -\frac{m}{k}a.$$

Таким чином, швидкість матеріальної точки змінюється за законом

$$v(t) = \frac{m}{k}a \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right).$$

Приклад 5. Початкова швидкість поїзда дорівнює v_0 . Його прискорення прямо пропорційне силі тяги $F = b - kv(t)$, де $v(t)$ – швидкість поїзда в момент часу t , b і k – сталі, та обернено пропорційне його масі m . Знайти залежність сили тяги від часу.

Розв’язання.

Оскільки прискорення поїзда – це похідна його швидкості, то за умовою маємо рівняння

$$v'(t) = a = \frac{F}{m} = \frac{b - kv(t)}{m}.$$

Одержали лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку. Його загальний розв’язок має вигляд

$$v(t) = \frac{b}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Сталу C знайдемо з початкової умови $v(0) = v_0$:

$$\frac{b}{k} + C = v_0, \quad C = v_0 - \frac{b}{k}.$$

Таким чином, швидкість поїзда змінюється за законом

$$v(t) = \frac{b}{k} + \left(v_0 - \frac{b}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t},$$

а отже, залежність сили тяги від часу визначається рівністю

$$F(t) = (b - kv_0) e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Приклад 6. Тіло падає у повітрі без початкової швидкості ($v_0 = 0$). Опір повітря пропорційний квадрату швидкості руху тіла. Визначити закон руху тіла залежно від часу.

Розв’язання.

Нехай $s(t)$ – шлях, пройдений тілом за час t , m – маса тіла. На тіло діють сила тяжіння $\vec{P} = m\vec{g}$ і сила опору повітря $\vec{Q} = -k\vec{v}^2$, напрямлена протилежно до вектора швидкості. За другим законом Ньютона одержуємо диференціальне рівняння 2-го порядку

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = mg - k \left(\frac{ds}{dt} \right)^2.$$

Якщо $t = 0$, то $s = 0$ і $\frac{ds}{dt} = 0$. Оскільки останнє рівняння явно не містить s , то можна понизити його порядок за допомогою заміни

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Тоді рівняння руху набуде вигляду

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2.$$

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні, маємо

$$\frac{mdv}{mg - kv^2} = dt,$$

звідки

$$t = \frac{1}{g} \int \frac{dv}{1 - \frac{k}{mg} v^2} = \sqrt{\frac{m}{kg}} \operatorname{Arcth} \sqrt{\frac{k}{mg}} v + C_1.$$

Оскільки $v = 0$ при $t = 0$, то $C_1 = 0$. Звідси

$$t = \sqrt{\frac{m}{kg}} \operatorname{Arcth} \sqrt{\frac{k}{mg}} v,$$

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{kg}{m}} t \right),$$

або

$$ds = \sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{th} \left(\sqrt{\frac{kg}{m}} t \right) dt.$$

Інтегруючи останню рівність, одержуємо

$$s = \frac{m}{k} \ln \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{kg}{m}} t \right) + C_2.$$

Оскільки $s = 0$ при $t = 0$, то $C_2 = 0$.

Отже, закон руху тіла має вигляд

$$s = \frac{m}{k} \ln \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{kg}{m}} t \right).$$

Приклад 7. Частина (ступінь) масою m багатоступінчастої космічної ракети падає з великої висоти H на Землю з початковою швидкістю $v_0 = 0$. Нехтуючи опором повітря, знайти швидкість і час падіння ступеня ракети на Землю.

Розв'язання.

Позначимо через $s(t)$ – шлях, пройдений ступенем ракети за час t , R – радіус Землі. На ступінь ракети діє сила земного тяжіння, обернено пропорційна квадрату відстані від нього до центра Землі. Тому за другим законом Ньютона одержуємо рівняння руху ступеня ракети (диференціальне рівняння 2-го порядку)

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = mg \left(\frac{R}{R + H - s(t)} \right)^2. \quad (1)$$

Оскільки швидкість $v = \frac{ds}{dt}$, то

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}.$$

Звідси маємо

$$\begin{aligned} v dv &= \frac{gR^2}{(R + H - s)^2} ds, \\ v^2 &= \frac{2gR^2}{R + H - s} + C_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Сталу C_1 знайдемо з початкової умови $v(0) = v_0 = 0$:

$$C_1 = -\frac{2gR^2}{R + H}.$$

Таким чином, швидкість падіння ступеня ракети в момент часу t визначається рівністю

$$v = \sqrt{\frac{2gR^2}{R + H - s} - \frac{2gR^2}{R + H}}.$$

Звідси одержуємо (при $s = H$) кінцеву швидкість ступеня ракети в момент падіння на Землю

$$v_k = \sqrt{\frac{2gRH}{R + H}}. \quad (3)$$

Знайдемо час падіння ступеня ракети. Для цього рівняння руху (1) запишемо у вигляді

$$\frac{dv}{dt} = g \left(\frac{R}{R + H - s} \right)^2,$$

а з рівняння (2) виразимо

$$\frac{R}{R + H - s} = \frac{v^2 - C_1}{2gR}.$$

Тоді рівняння руху набуде вигляду

$$\frac{dv}{dt} = g \left(\frac{v^2 - C_1}{2gR} \right)^2,$$

$$\frac{4gR^2}{(v^2 - C_1)^2} dv = dt.$$

Звідси

$$t = 4gR^2 \int \frac{dv}{(v^2 - C_1)^2} = 4gR^2 \left(\frac{v}{-2C_1(v^2 - C_1)} + \frac{1}{2(-C_1)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \frac{v}{\sqrt{-C_1}} \right) + C_2.$$

Тут ми скористалися рекурентною формулою

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1}.$$

Сталу C_2 знайдемо з початкової умови $v(0) = v_0 = 0$: $C_2 = 0$.

Таким чином, час падіння визначається рівністю

$$t = 4gR^2 \left(\frac{v}{\frac{4gR^2}{R+H} \left(v^2 + \frac{2gR^2}{R+H} \right)} + \frac{1}{2 \left(\frac{2gR^2}{R+H} \right)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \frac{v}{\sqrt{\frac{2gR^2}{R+H}}} \right).$$

І остаточно при $v = v_k$ одержуємо час падіння ступеня ракети на Землю

$$t_k = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{R+H}{2g}} \left(\sqrt{RH} + (R+H) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{H}{R}} \right). \quad (4)$$

З формул (3) і (4) випливає, що

$$v_\infty = \lim_{H \rightarrow +\infty} v_k = \sqrt{2gR},$$

причому, якщо $H \ll R$, то

$$v_k \approx \sqrt{2gH},$$

$$t_k \approx \sqrt{\frac{H}{2g}}.$$

17. Матеріальна точка рухається по прямій зі швидкістю, обернено пропорційною пройденому шляху. В початковий момент руху точка була на відстані 5 м від початку відліку шляху й мала швидкість 20 м/с. Знайти шлях, який пройшла точка, та її швидкість через 10 с після початку руху.

✎18. Рух човна сповільнюється під дією опору води, який пропорційний швидкості човна. Початкова швидкість човна становить 2 м/с , а його швидкість через 4 с становить 1 м/с . визначити, через скільки секунд швидкість човна дорівнюватиме $0,25\text{ м/с}$ і який шлях він може пройти до зупинки.

✎19. Тіло масою m ковзає по горизонтальній площині під дією поштовху, який надав йому початкової швидкості v_0 . Визначити закон руху тіла залежно від часу і знайти відстань, яку тіло здатне пройти до повної зупинки, якщо на нього діє сила тертя, пропорційна масі тіла.

✎20. Тіло падає у повітрі без початкової швидкості ($v_0 = 0$). Опір повітря пропорційний квадрату швидкості руху тіла. Визначити закон руху тіла залежно від часу.

✎21. Тіло кинуте вертикально вгору з початковою швидкістю v_0 . Визначити закон руху тіла залежно від часу, вважаючи, що воно рухається тільки під дією сили тяжіння.

✎22. Частина (ступінь) масою m багатоступінчастої космічної ракети падає з великої висоти H на Землю з початковою швидкістю $v_0 = 0$. Нехтуючи опором повітря, знайти швидкість і час падіння ступеня ракети на Землю.

✎23. Тіло опускається в рідину. Сила опору пропорційна швидкості. Знайти закон руху тіла залежно від часу, якщо воно опускається в рідину без початкової швидкості.

✎24. Підводний човен масою m , що перебував у стані спокою, одержав невелику від'ємну плавучість P і занурюється на глибину. Опір води пропорційний швидкості занурення і дорівнює kSv , де k – коефіцієнт пропорційності, S – площа

горизонтальної проекції човна, v – швидкість занурення. Визначити швидкість занурення і шлях, пройдений човном за час t .

✎25. Снаряд вилітає з гармати зі швидкістю 800 м/с під кутом 45° до горизонту. Нехтуючи опором повітря, знайти найбільшу висоту, на яку підніметься снаряд, і місце його падіння.

✎26. Парашутист спускається на парашуті, який має форму півсфери радіусом $R=4$ м. Маса парашутиста разом із масою парашута дорівнює 82 кг. Знайти швидкість v парашутиста через 2 с після початку спускання й шлях, який він пройшов за час t . Вважати, що сила опору повітря $Q = 0,00081Sv^2$, де S – площа найбільшого перерізу парашута, перпендикулярного до напрямку руху.

✎27. Снаряд вилітає з гармати зі швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Знайти рівняння руху снаряда, припускаючи, що опір повітря дорівнює kv , де k – коефіцієнт опору, v – швидкість руху.

✎28. Знайти закон руху і визначити період T коливань математичного маятника довжиною нитки l і масою кульки m з амплітудою коливань A при малих відхиленнях.

✎29. Вузька трубка обертається зі сталою кутовою швидкістю ω навколо перпендикулярної до неї вертикальної осі. В початковий момент часу на відстані a_0 від осі всередині трубки лежить кулька масою m . Вважаючи, що тертя немає і в початковий момент швидкість кульки відносно трубки дорівнювала нулю, визначити закон руху кульки відносно трубки.

VI. Електрика

Приклад 8. Електрон рухається в однорідному електричному полі з напруженістю E . Знайти траєкторію руху електрона, якщо в початковий момент часу відомі швидкість v_0 і напрям його руху.

Розв'язання.

Нехай e – заряд електрона, а m – його маса. Виберемо прямокутну систему координат на площині так, щоб напрям осі Ox збігався з напрямом вектора напруженості поля, а початок координат збігався з положенням електрона в момент часу $t=0$: $x(0)=y(0)=0$. Позначимо через α – кут між напрямом початкової швидкості та додатним напрямом осі Ox . Тоді проекції вектора швидкості $\vec{v}$ в початковий момент часу на осі координат $v_x(0)=v_0 \cos \alpha$, $v_y(0)=v_0 \sin \alpha$. Проекції вектора напруженості поля на осі координат $E_x=E$, $E_y=0$. Проекції сили $\vec{F}$, яка діє на електрон в будь-якій точці електричного поля, визначаються рівностями

$$F_x = eE_x = eE, \quad F_y = eE_y = 0.$$

Тоді за другим законом Ньютона рівняння руху електрона в заданому полі мають вигляд

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = eE, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{e}{m} Et + C_1, \\ \frac{dy}{dt} = C_2. \end{cases}$$

Сталі C_1 і C_2 знайдемо з початкових умов: $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \cos \alpha$, $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \sin \alpha$:

$$C_1 = v_0 \cos \alpha, \quad C_2 = v_0 \sin \alpha.$$

Таким чином,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{e}{m} Et + v_0 \cos \alpha, \\ \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{e}{2m} Et^2 + v_0 \cos \alpha \cdot t + C_3, \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t + C_4. \end{cases}$$

Сталі C_3 і C_4 знайдемо з початкових умов $x(0)=y(0)=0$:

$$C_3 = C_4 = 0.$$

Отже, координати електрона змінюються за законом

$$\begin{cases} x = \frac{e}{2m} Et^2 + v_0 \cos \alpha \cdot t, \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t. \end{cases}$$

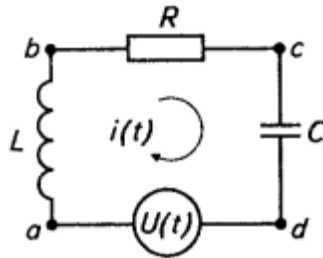
Виключивши з системи змінну t , одержимо рівняння траєкторії електрона

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2 \sin^2 \alpha} y^2 + y \operatorname{ctg} \alpha.$$

30. Електрон рухається в однорідному електричному полі з напруженістю E . Знайти траєкторію руху електрона, якщо в початковий момент часу відомі швидкість v_0 і напрям його руху.

31. Сила струму в електричному колі з омичним опором R і коефіцієнтом самоіндукції L задовольняє диференціальне рівняння: $L \frac{dI}{dt} + RI = E$, де E – електрорушійна сила. Знайти залежність сили струму $I(t)$ від часу, якщо E змінюється за синусоїдним законом: $E = E_0 \sin \omega t$ і $I(0) = 0$.

32. Послідовний коливальний контур складається з послідовно з'єднаних:



джерела струму, напруга якого змінюється за законом $u(t) = E \sin(\nu t + \varphi)$; опору R ; індуктивності L і ємності C ($E > 0, R > 0, C > 0, L > 0, \nu > 0, \varphi$ – сталі). Знайти силу струму в контурі за усталеного режиму й частоту $\nu_{\text{рез}}$ джерела струму (резонансну частоту), коли амплітуда коливань струму в усталеному режимі найбільша.

33. Конденсатор ємністю C розряджається через коло з опором R і коефіцієнтом самоіндукції L . Визначити закон зміни напруги на обкладках конденсатора $U = U(t)$, якщо

$U(t_0) = u_0$, а сила струму $I = I(t)$ у колі в початковий момент часу t_0 становить $I(t_0) = i_0$.

Відповіді: 3. $687,5^0 C$. 4. 80 хв. 5. $T(t) = 21 + 10e^{t \ln 0,8}$; $T(t) = 37^0 C$

при $t = \frac{\ln 1,6}{\ln 0,8} \approx -2,1$ год. 6. $T(r) = \frac{2700}{r} - 250$, $T(9) = 50^0 C$. 7.

$$T = T_0 + \frac{q}{kS} \left(1 - e^{-\frac{kS}{cV\rho}} \right). \quad 8. \quad t_{ns} = (4 + 2\sqrt{3})t_1. \quad 9. \quad t = \frac{1}{\sigma\mu\sqrt{2g}} \int_h^H \frac{S(x)}{\sqrt{x}} dx,$$

$$t_{ns} = \frac{1}{\sigma\mu\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh. \quad 10. \quad t_{ns} = \frac{2R^2\sqrt{H}}{a^2\mu\sqrt{2g}}. \quad 13. \quad x(t) = x(0)e^{-kt};$$

$$x(t) = \frac{1}{2}x(0) \quad \text{при} \quad t = \frac{\ln 2}{k}. \quad 14. \quad x(t) = x(0)2^{-\frac{t}{30}}; \quad x(t) = 0,01x(0) \quad \text{при}$$

$$t = \frac{60}{\lg 2} \approx 200 \quad \text{днів.} \quad 15. \quad x(t) = x(0)(1 - 0,00044)^t; \quad x(t) = \frac{1}{2}x(0) \quad \text{при}$$

$$t = \frac{\ln 0,5}{\ln(1 - 0,00044)} \approx 1600 \quad \text{років.} \quad 17. \quad s(t) = \sqrt{25 + 200t};$$

$$s(10) - s(0) = 40 \quad \text{м;} \quad v(10) = \frac{20}{9} \quad \text{м/с.} \quad 18. \quad v(t) = 2^{1-\frac{t}{4}}; \quad s(+\infty) = \frac{8}{\ln 2}. \quad 19.$$

$$s(t) = v_0 t - \frac{k}{2} t^2; \quad s = \frac{v_0^2}{2k} \quad \text{при} \quad t = \frac{v_0}{k}. \quad 20. \quad s(t) = \frac{m}{k} \ln ch \left(\sqrt{\frac{kg}{m}} t \right). \quad 21.$$

$$s(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad 22. \quad v = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+H-s} - \frac{2gR^2}{R+H}};$$

$$t_k = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{R+H}{2g}} \left(\sqrt{RH} + (R+H) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{H}{R}} \right). \quad 23.$$

$$s(t) = \frac{m^2 g}{k^2} \left(e^{-\frac{k}{m} t} - 1 \right) + \frac{mg}{k} t. \quad 24. \quad v(t) = \frac{P}{kS} \left(1 - e^{-\frac{kS}{m} t} \right);$$

$$x(t) = \frac{P}{kS} \left(t - \frac{m}{kS} \left(1 - e^{-\frac{kS}{m}t} \right) \right). \quad 25. \quad y_{\max} = \frac{400^2}{g} \approx 16,3 \quad \text{км};$$

$$x_{\text{падіння}} = \frac{800^2}{g} \approx 65 \quad \text{км}. \quad 26. \quad v(2) \approx 19,47 \quad \text{м/с}. \quad 27.$$

$$x(t) = \frac{mv_0}{k} \cos \alpha \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right), \quad y(t) = \frac{m}{k^2} (kv \sin \alpha + mg) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) - \frac{mg}{k} t. \quad 28.$$

$$s(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right); \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad 29. \quad x(t) = a_0 \operatorname{ch} \omega(t - t_0). \quad 30.$$

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2 \sin^2 \alpha} y^2 + y \operatorname{ctg} \alpha. \quad 31.$$

$$I(t) = \frac{E_0}{L(\omega^2 + \alpha^2)} (-\omega \cos \omega t + \alpha \sin \omega t + \omega e^{-\alpha t}), \quad \alpha = \frac{R}{L}. \quad 32.$$

$$\tilde{I}(t) = A(v) \cos(vt + \varphi + \alpha), \quad A(v) = \frac{E}{L \sqrt{\frac{(q - v^2)^2}{v^2} + p^2}}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{pv}{v^2 - q},$$

$$v_{\text{рез}} = \sqrt{q}, \quad p = \frac{R}{L}, \quad q = \frac{1}{LC}.$$

📖 Практичне заняття № 4-5

Тема: Диференціальні моделі в задачах геометрії

Приклад 1 (задача Лейбніца). Знайти криву, якщо довжина її дотичної дорівнює a .

Розв'язання.

Нехай $A(x; y)$ – довільна точка на шуканій кривій $y = y(x)$. Тоді рівняння дотичної до шуканої кривої в цій точці має вигляд

$$\tilde{y} - y = y'(\tilde{x} - x).$$

Знайдемо точку перетину дотичної з віссю Ox :

$$\tilde{y} = 0, \quad \tilde{x} = x - \frac{y}{y'},$$

$$B\left(x - \frac{y}{y'}; 0\right).$$

Тоді довжина дотичної

$$AB = \sqrt{\frac{y^2}{y'^2} + y^2} = a.$$

Звідси

$$y'^2 = \frac{y^2}{a^2 - y^2},$$

або

$$y' = \pm \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Відокремлюючи змінні, одержимо

$$\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = \pm dx.$$

Інтегруючи останнє рівняння, маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy &= \left| \sqrt{a^2 - y^2} = t, \right. \\ &\quad \left. -y dy = t dt \right| = - \int \frac{t^2 dt}{a^2 - t^2} = \\ &= \int \left(1 + \frac{a^2}{t^2 - a^2} \right) dt = t + \frac{a}{2} \ln \left| \frac{t - a}{t + a} \right| + C = \\ &= \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 - y^2} - a}{\sqrt{a^2 - y^2} + a} \right| + C = \pm x. \end{aligned}$$

Останнє рівняння задає сім'ю шуканих кривих.

Приклад 2. Знайти ізогональні траєкторії пучка прямих з центром у початку координат.

Розв'язання.

Пучок заданих прямих описується рівнянням $y = ax$, де a - довільна стала. Диференціальні рівняння цього пучка мають вигляд:

$$y' = a. \quad (1)$$

Нехай шукані ізогональні траєкторії утворюють кут α із заданими прямими. Покладемо $\operatorname{tg} \alpha = k$. Нехай $(x; y)$ - довільна точка шуканих траєкторій, тоді замінивши в рівнянні (1) y' на $\frac{y' - k}{1 + ky'}$, одержимо диференціальні рівняння шуканої сім'ї ізогональних траєкторій

$$\frac{y' - k}{1 + ky'} = a.$$

З іншого боку, $a = \frac{y}{x}$, а тому

$$\frac{y' - k}{1 + ky'} = \frac{y}{x},$$

або

$$y' = \frac{y + kx}{x - ky}.$$

Одержали однорідне рівняння. Зробимо заміну

$$y = ux.$$

Тоді

$$u'x + u = \frac{u + k}{1 - ku},$$

або

$$u'x = \frac{k + ku^2}{1 - ku}.$$

Відокремлюючи змінні, одержуємо

$$\frac{1}{k} \frac{1 - ku}{1 + u^2} du = \frac{dx}{x},$$

звідки

$$\frac{1}{k} \left(\int \frac{du}{1 + u^2} - \frac{k}{2} \int \frac{d(1 + u^2)}{1 + u^2} \right) = \int \frac{dx}{x},$$

або

$$\frac{1}{k} \operatorname{arctg} u + \ln |C| = \frac{1}{2} \ln(1 + u^2) + \ln |x| = \ln(|x| \sqrt{1 + u^2}).$$

Оскільки $u = \frac{y}{x}$, то останнє рівняння набуває вигляду

$$\frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \ln |C|,$$

або

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |C| e^{\frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}.$$

Перейдемо в останній рівності до полярних координат

$$\rho = |C| e^{\frac{\varphi}{k}}. \quad (2)$$

Таким чином, шуканими ізогональними траєкторіями є логарифмічні спіралі (2).

Зауважимо, що для одержання рівняння ортогональних траєкторій потрібно замінити y' на $-\frac{1}{y'}$.

✎1. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(2; 0)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці цієї кривої пропорційний квадрату абсциси точки дотику з коефіцієнтом пропорційності $k = 3$.

✎2. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 4)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці цієї кривої обернено пропорційний ординаті точки дотику з коефіцієнтом пропорційності $k = 2$.

✎3. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 2)$, якщо кожна дотична до неї перетинає пряму $y = 1$ в точці з абсцисою, що дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

✎4. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 2)$, якщо відрізок будь-якої її дотичної, який знаходиться між осями координат, ділиться в точці дотику у відношенні $2:1$ (відраховуючи від осі Oy).

✎5. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(0; 1)$, якщо відрізок будь-якої її нормалі дорівнює 1.

✎6. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 0)$, якщо довжина відрізка осі абсцис, який відтинає її нормаль, на 2 більше абсциси точки дотику.

✎7. Знайти криву, яка проходить через точку M_0 , якщо відрізок її нормалі між осями координат ділиться точкою кривої у відношенні $m:n$:

7.1. $M_0(2; -1)$, $m:n = 1:2$.

7.2. $M_0(-2; 3)$, $m:n = 1:3$.

7.3. $M_0(0; 1)$, $m:n = 2:3$.

7.4. $M_0(1; 0)$, $m : n = 3 : 2$.

7.5. $M_0(2; -1)$, $m : n = 3 : 1$.

8. Знайти криву, яка проходить через точку M_0 , якщо відрізок її дотичної між точкою дотику та віссю Oy ділиться в точці перетину з віссю Ox у відношенні $m : n$ (відраховуючи від осі Oy):

8.1. $M_0(2; -1)$, $m : n = 1 : 1$.

8.2. $M_0(1; 2)$, $m : n = 2 : 1$.

8.3. $M_0(1; -1)$, $m : n = 3 : 1$.

8.4. $M_0(2; 1)$, $m : n = 1 : 2$.

8.5. $M_0(1; -1)$, $m : n = 1 : 3$.

9. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 3)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці цієї кривої обернено пропорційний абсцисі точки дотику з коефіцієнтом пропорційності $k = 5$.

10. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(0; 3)$, якщо в кожній її точці тангенс кута нахилу дотичної до неї пропорційний добутку координат точки дотику з коефіцієнтом пропорційності $k = -2$.

11. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 2)$, якщо площа трикутника, утвореного радіус-вектором будь-якої точки кривої, дотичною в цій точці та віссю абсцис, дорівнює 2.

12. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 0)$, якщо площа трапеції, утвореної дотичною, осями координат і ординатою точки дотику, дорівнює $\frac{3}{2}$.

13. Знайти ортогональні траєкторії ліній сім'ї гіпербол $xy = a$.

- ✎14. Знайти ортогональні траєкторії ліній сім'ї кіл $x^2 + y^2 = 2ax$.
- ✎15. Знайти ортогональні траєкторії ліній сім'ї кіл $x^2 + y^2 = 2ay$.
- ✎16. Знайти ортогональні траєкторії ліній сім'ї парабол $y^2 + 2ax = 0, a > 0$.
- ✎17. Знайти ізогональні траєкторії ліній сім'ї гіпербол $xy = a, \alpha = 45^\circ$.
- ✎18. Знайти ізогональні траєкторії ліній сім'ї кіл $x^2 + y^2 = 2ax, \alpha = 60^\circ$.
- ✎19. Знайти ізогональні траєкторії ліній сім'ї парабол $y^2 = 4ax, a > 0, \alpha = 30^\circ$.
- ✎20. Знайти ізогональні траєкторії ліній сім'ї еліпсів $3x^2 + y^2 = a, a > 0, \alpha = 45^\circ$.

Відповіді: 1. $y = x^3 - 8$. 2. $y^2 = 4x + 12$. 3. $y = \frac{1}{x} + 1$. 4. $y = \frac{2}{x^2}$. 5. $x^2 + y^2 = 1$. 6. $y^2 = 4x - 4$. 9. $y = 5 \ln x + 3$. 10. $y = 3e^{-x^2}$. 11. $xy = 2$. 12. $y = \frac{1}{x} - x^2$. 13. $y^2 - x^2 = C$. 14. $y = C(x^2 + y^2)$. 20. $y^2 + 2xy + 3x^2 = Ce^{-2\sqrt{2}\arctg\frac{x+y}{\sqrt{2}x}}$.

Практичне заняття № 6-7

Тема: Математичне моделювання в хімії, біології, екології та медицині

Приклад 1. Нехай маємо послідовні хімічні реакції $A \rightarrow B \rightarrow C$. Експериментально встановлено, що швидкість зміни концентрації сполуки B з часом дорівнює $k_1[A_0]e^{-k_1t} - k_2[B]$, де стала швидкості першої реакції $k_1 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ дм}^3 \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{хв}^{-1}$, $[A_0]$ – вихідна концентрація речовини A , стала швидкості другої реакції $k_2 = 8 \cdot 10^{-2} \text{ дм}^3 \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{хв}^{-1}$, $[B]$ – концентрація речовини B в момент часу t від початку реакції.

Визначити концентрацію речовини B через 200 хв від початку реакції ($t = 0$), якщо вихідна концентрація речовини A становила $1 \text{ моль}^{-1} \cdot \text{дм}^3$, а концентрація речовини B дорівнювала нулю.

Розв'язання.

Позначимо через $x(t)$ концентрацію речовини B в момент часу t від початку реакції. Тоді за умовою одержуємо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = k_1[A_0]e^{-k_1t} - k_2x = k_1e^{-k_1t} - k_2x,$$

$$\frac{dx}{dt} + k_2x = k_1e^{-k_1t}.$$

Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 1-го порядку. Розв'яжемо його методом Лагранжа. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд

$$x = Ce^{-k_2t}.$$

Будемо шукати розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді $x = C(t)e^{-k_2t}$. Підставляючи його і рівняння, одержуємо

$$C'(t)e^{-k_2t} - k_2C(t)e^{-k_2t} + k_2C(t)e^{-k_2t} = k_1e^{-k_1t},$$

звідки

$$C'(t) = k_1e^{(k_2-k_1)t},$$

$$C(t) = \frac{k_1}{k_2 - k_1}e^{(k_2-k_1)t} + C.$$

Отже, загальний розв'язок даного неоднорідного рівняння має вигляд

$$x = \left(\frac{k_1}{k_2 - k_1}e^{(k_2-k_1)t} + C \right) e^{-k_2t} = \frac{k_1}{k_2 - k_1}e^{-k_1t} + Ce^{-k_2t}.$$

За умовою задачі маємо початкову умову $x(0) = 0$, з якої одержуємо

$$C = -\frac{k_1}{k_2 - k_1}.$$

Таким чином, закон зміни концентрації речовини B має вигляд

$$x = \frac{k_1}{k_2 - k_1}(e^{-k_1t} - e^{-k_2t}),$$

звідки знаходимо концентрацію речовини B через 200 хв від початку першої реакції

$$x(200) = \frac{3 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-2}}(e^{-3 \cdot 10^{-2} \cdot 200} - e^{-8 \cdot 10^{-2} \cdot 200}) = 0,6(e^{-6} - e^{-16}) \approx 1,487 \cdot 10^{-3} \text{ моль}^{-1} \cdot \text{дм}^3.$$

Приклад 2. У посудину, в якій міститься a (л) води, неперервно зі швидкістю v (л/хв) вливається розчин солі концентрацією b (кг/л). У посудині розчин перемішується, і суміш витікає з тією ж швидкістю. Визначити, скільки солі буде в посудині через час t (хв).

Розв'язання.

Позначимо через $m(t)$ (кг) – кількість солі в посудині через час t (хв) після початку процесу. Визначимо, як змінюється кількість солі в посудині за проміжок часу $[t; t + \Delta t]$.

За час Δt у посудину увіллється $v\Delta t$ (л) розчину. В цій кількості розчину міститься $bv\Delta t$ (кг) солі. За той самий час із посудини виллється $v\Delta t$ (л) розчину.

В момент часу t у посудині було $m(t)$ (кг) солі, а отже, в $v\Delta t$ (л) розчину, який витікає, містилося $\frac{m(t)}{a}v\Delta t = \frac{v}{a}m(t)\Delta t$ (кг) солі, якби за час Δt кількість солі в посудині не змінювалася. Оскільки за цей час дана кількість солі зміниться на деяку величину α ($\alpha \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$), то з посудини за час Δt витече $\frac{v}{a}(m(t) + \beta)\Delta t$ (кг) солі, де $0 < \beta < \alpha$, $\beta \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Таким чином, в розчині, який утворюється внаслідок вливання в посудину за проміжок часу $[t; t + \Delta t]$, міститься $bv\Delta t$ (кг) солі, а в розчині, який витікає за той самий час, міститься $\frac{v}{a}(m(t) + \beta)\Delta t$ (кг) солі. Приріст кількості солі за цей час становить

$$m(t + \Delta t) - m(t) = bv\Delta t - \frac{v}{a}(m(t) + \beta)\Delta t.$$

Обидві частини цієї рівності розділимо на Δt і перейдемо до границі при $\Delta t \rightarrow 0$. Враховуючи, що $\beta \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$, одержуємо диференціальне рівняння 1-го порядку

$$m'(t) = bv - \frac{v}{a}m(t).$$

Його загальний розв'язок має вигляд

$$m(t) = ab + Ce^{-\frac{v}{a}t}.$$

Оскільки в початковий момент часу в посудині солі не було, то маємо початкову умову $m(0) = 0$, з якої знайдемо сталу C :

$$ab + C = 0, \quad C = -ab.$$

Отже, кількість солі в посудині в момент часу t визначається рівністю

$$m(t) = ab \left(1 - e^{-\frac{v}{a}t} \right).$$

Приклад 3. Знайти закон зміни загальної кількості живих організмів у колонії, яка розвивається в умовах конкурентної боротьби, недостатньої кількості місця і їжі, передачі інфекцій.

Розв'язання.

Нехай $x(t)$ – кількість організмів у колонії в момент часу t , Δx – приріст їх кількості за час Δt . Будемо вважати, що $x(t)$ є неперервно диференційовною функцією змінної t . Приріст кількості організмів залежить від їх розмноження (народжуваності) і смертності. Розмноження організмів є прямо пропорційним їхній кількості з деяким коефіцієнтом пропорційності k_1 . Оскільки конкуренція і передача інфекцій посилюється з ростом кількості зустрічей між членами колонії, яка пропорційна добутку $x \cdot x$, то природно вважати, що смертність також є пропорційною x^2 з деяким коефіцієнтом пропорційності k_2 . Отже,

$$\Delta x = (k_1 x - k_2 x^2) \Delta t.$$

Поділимо обидві частини на Δt і перейдемо до границі, коли $\Delta t \rightarrow 0$. Отримаємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dx}{dt} = k_1 x - k_2 x^2,$$

звідки

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x(k_1 - k_2 x)} &= dt, \\ \frac{1}{k_1} \left(\int \frac{dx}{x} + \int \frac{k_2 dx}{k_1 - k_2 x} \right) &= \int dt, \\ \ln|x| - \ln \left| x - \frac{k_1}{k_2} \right| &= k_1 t + \ln|C|, \\ \frac{x}{x - \frac{k_1}{k_2}} &= C e^{k_1 t}, \\ x &= \frac{k_1}{k_2} \frac{C e^{k_1 t}}{C e^{k_1 t} - 1}. \end{aligned}$$

Частинний розв'язок $x=0$ відповідає відсутності організмів у колонії, а $x = \frac{k_1}{k_2}$ – їхній максимально можливій кількості.

Якщо $x(0) = x_0$ – початкова кількість організмів, то

$$x_0 = \frac{k_1}{k_2} \frac{C}{C - 1},$$

звідки

$$C = \frac{k_2 x_0}{k_2 x_0 - k_1}.$$

Таким чином, закон зміни загальної кількості живих організмів у колонії має вигляд

$$x(t) = \frac{k_1 x_0 e^{k_1 t}}{k_2 x_0 e^{k_1 t} - k_2 x_0 + k_1}.$$

✎1. Розглянемо реакцію радіолізу (розкладу хімічної речовини під дією іонізуючого випромінювання). Відомо, що швидкість радіолізу якоїсь речовини A пропорційна густині випромінювання D (безрозмірна величина) та концентрації речовини з деяким коефіцієнтом $-k_0$. Густина випромінювання зменшується за експоненціальним законом $D = D_0 e^{-kt}$. Визначити закон зміни речовини A , якщо вихідна концентрація речовини A дорівнювала 1 моль/л, $k = 0,01 \text{ с}^{-1}$, $k_0 D_0 = 0,01 \text{ с}^{-1}$.

✎2. Розглянемо проходження хімічних реакцій $A \rightarrow B$, $A + B \rightarrow C$. Експериментально встановлено, що швидкість зміни концентрації сполуки A з часом дорівнює $-k_1[A] - k_2[A][B]$, швидкість зміни концентрації сполуки B дорівнює $k_1[A] - k_2[A][B]$, швидкість зміни концентрації сполуки C дорівнює $k_2[A][B]$, де $k_1 = 0,2 \text{ хв}^{-1}$ і $k_2 = 0,2 \text{ моль}^{-1} \cdot \text{хв}^{-1}$. Вихідна концентрація речовини A становить 1 моль/л. Визначити, якою має бути вихідна концентрація речовини B , щоб через 1 хв концентрація речовини A становила 0,7 моль/л, і якою будуть концентрації всіх реагуючих речовин через 1 хв.

✎3. Посудина об'ємом 20 л містить повітря (80% азоту і 20% кисню). У посудину втікає 0,1 л азоту за секунду, який

неперервно перемішується, і витікає така ж кількість суміші. Через який час у посудині буде 99% азоту?

4. В кімнаті об'ємом 200 м^3 міститься 0,15% вуглекислого газу. Вентилятор подає за хвилину 20 м^3 повітря, яке містить 0,04% вуглекислого газу. Через який час кількість вуглекислого газу в повітрі кімнати зменшиться втричі?

5. У лекційній аудиторії об'ємом 200 м^3 повітря після лекції містить 0,1% вуглекислоти. Кондиціонер подає свіже повітря, що містить 0,04% вуглекислого газу, в кількості $a \text{ м}^3/\text{хв}$. Припустивши, що змішування чистого повітря з забрудненим відбувається миттєво, обчислити, якою має бути величина a , щоб після 10 хвилин перерви вміст вуглекислого газу в аудиторії не перевищував 0,06%.

6. Дослідити радіоактивний розпад речовини, яка спадає за показниковим законом, а також хімічні системи, які підлягають дії основного закону хімічної кінетики (закону діючих мас) в залежності від кількості реагуючої речовини в одиниці об'єму.

7. З експерименту відомо, що швидкість розмноження бактерій у разі достатнього запасу їжі пропорційна їх кількості. Визначити, за який час кількість бактерій збільшиться в m разів порівняно з початковою кількістю.

8. Швидкість розмноження деяких бактерій пропорційна кількості бактерій у розглядуваний момент часу. Кількість бактерій подвоюється впродовж трьох годин. Знайти закон зміни кількості бактерій і визначити у скільки разів збільшиться кількість бактерій впродовж 9 годин.

9. Швидкість розмноження деяких бактерій пропорційна в певний момент часу кількості бактерій у момент, що розглядається, поділений на 10. Знайти залежність кількості

бактерій від часу, якщо в початковий момент часу $t = 0$ їх було 1000.

✎10. Деякі бактерії розмножуються пропорційно їхній кількості, але в той самий час продукти їхньої життєдіяльності знищують їх пропорційно кількості бактерій і продуктів їхньої життєдіяльності. Швидкість утворення продуктів життєдіяльності теж є пропорційною кількості бактерій. Довести, що кількість бактерій N спочатку зростає до деякого максимального значення M , а потім спадає до нуля; у момент часу t вона подається формулою $N = M(1 - th^2kt)$, де час t змінюється від моменту, коли $N = M$.

✎11. Через 12 год після початку дослідів кількість деякої популяції бактерій зросла втричі. Визначити, в скільки разів збільшиться число бактерій через три доби.

✎12. У культурі пивних дріжджів швидкість приросту діючого ферменту пропорційна наявній його кількості x . Початкова кількість ферменту – a . Через 1 год вона подвоїлась. У скільки разів вона збільшиться через 3 год?

✎13. Швидкість збільшення площі молодого листка вікторії-регії, який має форму круга, пропорційна радіусу листка й кількості сонячного світла, що падає на нього. Кількість сонячного світла пропорційна площі листка й косинусу кута між напрямом променів і вертикаллю до листка, який лінійно залежить від часу. Визначити залежність між площею S листка та часом t , якщо о 6 год ця площа дорівнювала 1600 см², а о 18 год того самого дня – 2500 см². Вважати, що кут між напрямом сонячного променя й вертикаллю о 6 год і о 18 год становить 90°, а опівдні – 0°.

✎14. Швидкість зростання кількості населення $x(t)$ деякого міста дорівнює $0,1x(1-10^{-6}x)$. Через скільки років населення усього міста зросте від 100000 до 300000?

✎15. Швидкість зростання кількості населення пропорційна кількості населення. Знайти закон зростання населення держави, в якій у 1990 році було 50 млн населення, яка кількість населення буде у 2100 році?

✎16. У ставку живуть риби двох видів: карасі і щуки. Карасі харчуються зеленими рослинами ставка, а щуки – карасями. Визначити закон зміни чисельності карасів і щук у ставку з плином часу.

✎17. Популяція алігаторів у водоймі нараховує 100 особин. Показник народжуваності популяції $\alpha = 0,005$, а смертності – $\beta = 0$. Через скільки років популяція алігаторів подвоїться?

✎18. Припустимо, що популяція риб чисельністю $x(t)$ в ставку атакована хворобою в момент часу t . Таким чином, відтворення риб припиняється, а показник смертності стає пропорційним $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Початково у ставку було 900 рибин, а через

6 тижнів залишилася 441 рибина. Через який час вимре вся риба в ставку?

✎19. Дослідити динаміку зміни чисельності $N(t)$ ізольованої популяції в залежності від величини $\mu(t)$ – у випадку коли швидкість росту популяції не залежить від чисельності попереднього покоління, або від величини $\mu(t-\tau)$ – у випадку коли швидкість росту популяції залежить від чисельності попереднього покоління, або від величини $\mu(N(t), f(t-\tau))$ – у

випадку коли загальна кількість метаболіту в популяції залежить від всієї її передісторії.

✎20. Знайти точки рівноваги системи (повна модель Лотки-Вольтерри для взаємодії двох популяцій виду «хижак-жертва»).

В кожному випадку дослідити характер стійкості:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - 2x - 3y), \\ \frac{dy}{dt} = -y(4 - 5x - 6y); \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(2 - 2x - y), \\ \frac{dy}{dt} = -y(3 - x - 2y). \end{cases}$$

✎21. Дослідити на стійкість тривіальну точку спокою системи (модель динаміки інфекційних захворювань):

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -7y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1^2 - y_2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = -y_1 - y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = \sin y_1 - y_2. \end{cases}$$

Відповіді: 1. $x(t) = e^{e^{-0,01t}-1}$. 3. $x(t) = 20 - 4e^{-0,005t}$; $x(t) = 19,8$ при

$t = 200 \ln 20$ с. 4. $x(t) = 0,08 + 0,22e^{-\frac{t}{10}}$; $x(t) = 0,1$ при $t = 10 \ln 11 \approx 24$

хв. 5. $a = 20 \ln 3 \approx 22$ м³/хв. 7. $t = \frac{\ln m}{k}$. 9. $x = 1000e^{0,1kt}$. 12. $x = a \cdot 2^t$,

збільшиться у 8 разів. 13. $S = \frac{160000}{\left(9 - \sin \frac{\pi}{12}(t-12)\right)}$. 14. $t = 20 \ln 3$. 17.

Через 138,6 років. 18. Через 20 тижнів.

Практичне заняття № 8-9

Тема: Математичне моделювання соціально-економічних процесів

Приклад 1. Економісти встановили, що швидкість зростання інвестованого капіталу у будь-який момент часу t пропорційна величині капіталу із коефіцієнтом пропорційності, узгодженому відсотку R неперервно зростаючого капіталу. Знайти закон зростання капіталу, враховуючи величину початкової ($t = 0$) інвестиції K_0 .

Розв'язання.

Позначимо через $K(t)$ величину інвестованого капіталу в момент часу t . Тоді $\frac{dK}{dt}$ – швидкість зростання інвестованого капіталу у будь-який момент часу t і за умовою одержуємо диференціальне рівняння

$$\frac{dK}{dt} = rK(t), \quad r = \frac{R}{100}$$

з початковою умовою $K(0) = K_0$. Його загальний розв'язок має вигляд

$$K = Ce^{rt}.$$

З початкової умови $C = K_0$ і, отже, закон зростання капіталу має вигляд

$$K = K_0 e^{rt}.$$

Приклад 2. Нехай протягом деякого часу селянин продає на ринку фрукти, причому продає їх після збору врожаю, з тижневими перервами. Тоді при відповідних запасах фруктів у селянина тижнева пропозиція буде залежати як від очікуваної ціни наступного тижня, так і від передбачуваної зміни ціни наступного тижня. Якщо наступного тижня передбачається, що ціна впаде, а в подальшому підніметься, то пропозиція буде стримуватися за умови перевищення очікуваного підвищення цін над витратами зберігання. При цьому пропозиції товару найближчого тижня тим менші, чим більшими очікуються в подальшому підвищення цін. І навпаки, якщо наступного тижня ціна буде високою, а потім очікується її спад, то пропозиція збільшиться тим більше, чим більше очікується зниження цін у подальшому.

Якщо позначити через P ціну на фрукти наступного тижня, а через P' – так звану тенденцію формування ціни (похідну ціни з часом), то як попит, так і пропозиція будуть функціями цих величин. При цьому, як показує практика, залежно від різних факторів попит і пропозиція можуть бути різними функціями ціни і тенденції формування ціни. В окремому випадку одна з таких функцій задається

лінійною залежністю, математично записаною співвідношенням $y = aP' + bP + c$, де a, b, c — деякі дійсні сталі. Тоді якщо, наприклад, спочатку фрукти коштували 1 грн за 1 кг, через t тижнів ціна уже була $P(t)$ грн за 1 кг, а попит D і пропозиція S визначались відповідно співвідношеннями

$$D = 4P' - 2P + 39, S = 44P' + 2P - 1,$$

то з рівності попиту і пропозиції одержуємо рівняння:

$$4P' - 2P + 39 = 44P' + 2P - 1,$$

$$40P' = -4P + 40,$$

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{1}{10}(P - 10).$$

Відокремлюючи змінні, маємо:

$$\frac{dP}{P - 10} = -\frac{1}{10}dt,$$

$$\int \frac{dP}{P - 10} = -\frac{1}{10} \int dt,$$

$$\ln|P - 10| = -\frac{1}{10}t + \ln|C|,$$

$$P = Ce^{-\frac{t}{10}} + 10.$$

Сталу C знайдемо з початкової умови:

$$P(0) = 1,$$

$$C + 10 = 1, \text{ сталу } C = -9.$$

Отже, ціна на фрукти змінюється за законом

$$P = -9e^{-\frac{t}{10}} + 10.$$

Приклад 3. Ринок томатів у Вінниці можна описати такими функціями:

$$Q_d = 500 - 12P, Q_s = 230 + 3P.$$

Яка цінова еластичність попиту і пропозиції томатів у Вінниці, якщо ринок перебуває в рівновазі? Який характер стійкості рівноваги на цьому ринку?

Розв'язання.

Знайдемо рівноважну ціну P^* і рівноважний об'єм продажів Q^* :

$$Q_d = Q_s,$$

$$500 - 12P = 230 + 3P, 15P = 270,$$

$$P^* = 18, Q^* = 230 + 54 = 284.$$

Обчислимо еластичності попиту і пропозиції за умови рівноваги ринку:

$$\eta_d(18) = \frac{P}{Q_d} \frac{dQ_d}{dP} \Big|_{P=18} = \frac{P}{500 - 12P} \cdot (-12) \Big|_{P=18} =$$

$$= \frac{-12 \cdot 18}{500 - 12 \cdot 18} = -\frac{216}{284} = -\frac{54}{71} > -1;$$

$$\eta_s(18) = \frac{P}{Q_s} \frac{dQ_s}{dP} \bigg|_{P=18} = \frac{P}{230 + 3P} \cdot 3 \bigg|_{P=18} =$$

$$= \frac{3 \cdot 18}{230 + 3 \cdot 18} = \frac{54}{284} = \frac{27}{142} < 1.$$

Отже, попит і пропозиція є нееластичними за ціною. Оскільки $|\eta_d| > \eta_s$, то рівновага на ринку томатів є стабільною.

Приклад 4. Економіка країни поділяється на дві виробничі галузі (промисловість та сільське господарство). За минулий рік повний випуск промислових виробництв у вартісній формі мав таку структуру:

800 млн євро для виробничих потреб промисловості;

400 млн євро для виробничих потреб сільського господарства;

800 млн євро для споживання населення (відповідно до попиту на цю продукцію).

Повний випуск сільськогосподарської продукції у вартісній формі розподілявся таким чином:

300 млн євро для виробничих потреб промисловості;

350 млн євро для виробничих потреб сільського господарства;

600 млн євро для споживання населення відповідно до попиту на цю продукцію.

На наступний рік прогнозується зростання попиту населення на вітчизняну продукцію, в тому числі на промислові вироби – до 1000 млн євро, а на сільськогосподарську продукцію – до 800 млн євро. Який повний випуск промислової продукції та повний випуск сільськогосподарської продукції зможуть задовольнити новий попит?

Розв'язання.

Маємо задачу планового балансу. Для розв'язання задачі потрібно побудувати модель Леонтьєва.

1) Складемо схему міжгалузевого балансу:

Галузі-виробники	Галузі-споживачі		Кінцева продукція (споживання)	Валова продукція
	1	2		
1 – промисловість	$x_{11} = 800$	$x_{12} = 400$	$y_1 = 800$	x_1
2 – сільське господарство	$x_{21} = 300$	$x_{22} = 350$	$y_2 = 600$	x_2

Обчислимо валову продукцію (сумарний обсяг продукції) кожної галузі:

$$x_1 = x_{11} + x_{12} + y_1 = 2000,$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} + y_2 = 1250.$$

2) Складемо матрицю Леонтьєва. Для цього знайдемо коефіцієнти прямих матеріальних витрат:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i, j = 1, 2;$$

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{800}{2000} = 0,4; \quad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{400}{1250} = 0,32;$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{300}{2000} = 0,15; \quad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{350}{1250} = 0,28.$$

Отже, матриця Леонтьєва має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,32 \\ 0,15 & 0,28 \end{pmatrix}.$$

3) Побудуємо модель Леонтьєва ($x = Ax + y$) із урахуванням прогнозованого попиту:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + y_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0,4x_1 + 0,32x_2 + 1000, \\ x_2 = 0,15x_1 + 0,28x_2 + 800. \end{cases}$$

4) Знайдемо розв'язок системи:

$$\begin{cases} 0,6x_1 - 0,32x_2 = 1000, \\ -0,15x_1 + 0,72x_2 = 800; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,6x_1 - 0,32x_2 = 1000, \\ -0,6x_1 + 2,88x_2 = 3200; \end{cases}$$

$$2,56x_2 = 4200, \quad x_2 = 1640,625 \approx 1640,6;$$

$$x_1 = (0,32x_2 + 1000) : 0,6 = 1525 : 0,6 = 2541\frac{2}{3} \approx 2541,7.$$

Отже, для задоволення прогнозованого попиту повний випуск промислової продукції має складати 1640,6 млн євро, а сільськогосподарської – 2541,7 млн євро.

Приклад 5. Чи є продуктивною модель Леонтьєва з матрицею коефіцієнтів прямих матеріальних витрат (матрицею Леонтьєва):

$$A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}?$$

Розв'язання.

Знайдемо власні значення матриці A , тобто корені характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 0,8 - \lambda & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 - 1,5\lambda + 0,5 = 0,$$

$$\lambda_1 = 0,5; \lambda_2 = 1.$$

Отже, множина всіх її власних значень $\sigma(A) = \{0,5; 1\}$ і число Фробеніуса $\lambda_A = 1$. За критерієм продуктивності моделі Леонтьєва це означає, що модель Леонтьєва із заданою матрицею A непродуктивна.

Приклад 6. Якщо в моделі Солоу виробнича функція одиниці праці має вигляд $Y = K^{\frac{1}{2}}$, норма заощаджень дорівнює 0,2, норма амортизації дорівнює 0,1, а темп приросту трудових ресурсів дорівнює 0, то чому дорівнює стаціонарний (рівноважний) рівень капіталооснащеності праці?

Розв'язання.

Оскільки в умові задачі йдеться про виробничу функцію одиниці праці, то це фактично означає, що задано виробничу функцію $f(k) = k^{\frac{1}{2}}$. Також за умовою норма заощаджень $s = 0,2$, норма амортизації $\delta = 0,1$, а темп приросту трудових ресурсів $n = 0$.

Для визначення стаціонарного рівня капіталооснащеності праці скористаємося рівнянням накопичення капіталу:

$$k'(t) = sf(k(t)) - (n + \delta)k(t),$$

$$k'(t) = 0,2k^{\frac{1}{2}}(t) - 0,1k(t).$$

Оскільки стаціонарний рівень капіталооснащеності праці визначається із співвідношення $k'(t) = 0$, то маємо рівняння:

$$0,2k^{\frac{1}{2}} - 0,1k = 0,$$

звідки знаходимо стаціонарний рівень капіталооснащеності $k^* = 4$.

Приклад 7. Нехай економіка, яка описується моделлю Хікса, має такі параметри: $c_1 = 0,5$, $c_2 = 0,15$, $v = 1,3$. З'ясувати динамічні властивості національного доходу.

Розв'язання.

Обчислимо коефіцієнти w і s (ослаблений інвестиційний коефіцієнт і коефіцієнт схильності до заощаджень):

$$w = v - c_2 = 1,15;$$

$$s = 1 - c = 1 - (c_1 + c_2) = 0,35.$$

Перевіримо їх співвідношення відповідно до таблиці:

Структурні сталі ($c = c_1 + c_2$, $w = v - c_2$, $s = 1 - c$)		Зміна Y_t у часі
I.	$w < (1 - \sqrt{s})^2$	Неколивальна згасаюча
II.	$(1 - \sqrt{s})^2 < w < 1$	Коливальна згасаюча

III.	$1 < w < (1 + \sqrt{s})^2$	Коливальна вибухова
IV.	$(1 + \sqrt{s})^2 < w$	Неколивальна вибухова

Оскільки

$$1 < w = 1,15 < (1 + \sqrt{s})^2 = (1 + \sqrt{0,35})^2 \approx 2,53,$$

то траєкторія національного доходу є коливальною вибуховою.

✎1. Інвестиція величиною 10 тис. доларів зростає неперервно із швидкістю пропорційною 5%. Знайти:

- а) значення інвестиції у довільний час t ;
- б) чому буде дорівнювати інвестований капітал через 8 років?
- в) через скільки років інвестиція буде дорівнювати 20 тис. доларів?

✎2. Розглядається ринок деякого (одного) товару. Нехай ціна P товару, величини попиту Q_d і пропозиції Q_s змінюються в часі.

Модель ринку діє згідно з таким припущеннями:

1) у кожний момент часу ціна товару встановлюється таким чином, що попит повністю поглинає пропозицію: $Q_d = Q_s$;

2) залежність величин попиту й пропозиції від ціни P та її похідної вважається лінійною, причому $Q_d = \alpha + aP + a_1 \frac{dP}{dt}$,

$$Q_s = \beta + bP.$$

Знайти закон зміни ціни товару в часі.

✎3. Відносно попиту кількості одиниць Q_d певного товару ціною P за кожну одиницю, відомо, що еластичність товару, яка визначається за формулою $\eta_d = \frac{P}{Q_d} \cdot \frac{dQ_d}{dP}$, стала і дорівнює

$-\frac{1}{2}$. Знайти функцію попиту на цей товар.

4. Еластичність попиту на певні вироби змінюється з часом із зміною ціни кожного виробу за законом $\eta_d = \frac{P}{P-10}$. Визначити

функцію попиту $Q_d = f(P)$, якщо $0 < P < 10$ і $Q_d = 15$, коли $P = 7$.

5. Еластичність попиту товару $\eta_d = \frac{Q_d - 200}{Q_d}$. Визначити

функцію ціни від попиту $P = f(Q_d)$, якщо $0 < Q_d < 200$ і $P = 5$, коли $Q_d = 190$.

6. Ринок винограду у Києві можна описати такими функціями:

$$Q_d = 600 - 10P, \quad Q_s = 320 + 4P.$$

Яка цінова еластичність попиту і пропозиції винограду у Києві, якщо ринок перебуває в рівновазі? Який характер стійкості рівноваги на цьому ринку?

7. Відомо, що еластичність попиту на сіль дорівнює $-0,5$. На ринку було продано 400 кг солі за ціною 28 грн за кілограмову пачку. Яка кількість солі була б продана, якби ціна пачки становила 30 грн?

8. На початку 2025 року шоколад продавався за ціною 50 грн за плитку. Еластичність попиту на цей шоколад дорівнює -2 . На скільки потрібно було б змінити ціну шоколадних плиток, щоб величина попиту зросла з 50 штук на день до 100?

9. Відомо, що еластичність попиту на цукор дорівнює $-1,1$. На ринку було продано 500 кг цукру за ціною 30 грн за кілограмову пачку. Яка кількість цукру була б продана, якби ціна пачки становила 29 грн?

10. Висів поліпшеного сорту пшениці дасть змогу фермерові знизити його сумарні витрати на 2% і збільшити врожай на 6%.

Проте збільшення пропозиції пшениці на ринку призведе до зменшення її ціни на 4%. Чи є попит на пшеницю еластичним? Чи буде фермер мати прибуток?

✎11. Еластичність попиту за доходом на продовольчі товари дорівнює 0,8. Спочатку населення витратило 50% своїх доходів на продовольчі товари. Припустимо, що доходи збільшилися на 10%. Визначити частку витрат на продовольчі товари в доходах населення.

✎12. Економіка країни поділяється на дві виробничі галузі (промисловість та сільське господарство). За минулий рік повний випуск промислових виробництв у вартісній формі мав таку структуру:

400 млн євро для виробничих потреб промисловості;

300 млн євро для виробничих потреб сільського господарства;

500 млн євро для споживання населення (відповідно до попиту на цю продукцію).

Повний випуск сільськогосподарської продукції у вартісній формі розподілявся таким чином:

400 млн євро для виробничих потреб промисловості;

250 млн євро для виробничих потреб сільського господарства;

500 млн євро для споживання населення відповідно до попиту на цю продукцію.

На наступний рік прогнозується зростання попиту населення на вітчизняну продукцію, в тому числі на промислові вироби – до 800 млн євро, а на сільськогосподарську продукцію – до 750 млн євро. Який повний випуск промислової продукції та повний випуск

сільськогосподарської продукції зможуть задовольнити новий попит?

13. Чи є продуктивною модель Леонтьєва з матрицею коефіцієнтів прямих матеріальних витрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} ?$$

14. Чи є продуктивною модель Леонтьєва з матрицею коефіцієнтів прямих матеріальних витрат

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} ?$$

15. Якщо в моделі Солоу виробнича функція одиниці праці має вигляд $Y = 0,8K^{\frac{1}{2}}$, норма заощаджень дорівнює 0,3, норма амортизації дорівнює 0,1, а темп приросту трудових ресурсів дорівнює 0,5, то чому дорівнює стаціонарний (рівноважний) рівень капіталооснащеності праці?

16. Якщо в моделі Солоу виробнича функція одиниці праці має вигляд $Y = 0,75K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$ (для визначення $f(k)$ треба поділити на L), норма заощаджень дорівнює 0,25, норма амортизації дорівнює 0,15, а темп приросту трудових ресурсів дорівнює 0,25, то чому дорівнює стаціонарний (рівноважний) рівень капіталооснащеності праці?

17. Виробнича функція в моделі Солоу має вигляд: $f(k) = 0,9k^{\frac{2}{3}}$. Норма вибуття капіталу (норма амортизації) становить 10%, чисельність населення зростає на 2% за рік.

Якою є норма збереження ($\tilde{s}^* = \frac{(n + \delta)\tilde{k}^*}{f(\tilde{k}^*)} = \frac{f'(\tilde{k}^*)}{f(\tilde{k}^*)}\tilde{k}^*$) за «золотим правилом» ($f'(\tilde{k}^*) = n + \delta$)?

✎18. Виробнича функція в моделі Солоу має вигляд: $f(k) = 0,72k^{\frac{1}{2}}$. Норма вибуття капіталу (норма амортизації) становить 9%, чисельність населення зростає на 1% за рік. Якою є норма збереження за «золотим правилом»?

✎19. Виробнича функція в моделі Солоу має вигляд: $Y = 10K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}}$, а капітал у середньому – термін служби 50 років. Населення залишається незмінним при нормі заощаджень 0,128. Визначити стаціонарний рівень капіталооснащеності і продуктивність праці.

✎20. Виробнича функція в моделі Солоу має вигляд: $Y = K^{0,3}L^{0,7}$. Відношення капітал–випуск дорівнює 3. Випуск зростає з темпом 3% за рік. Норма вибуття дорівнює 4%.

а) визначити граничну продуктивність капіталу;

б) якщо економіка перебуває у стійкому стані, то чому дорівнює норма заощадження?

в) якщо економіка досягла рівня запасу капіталу, який відповідає «золотому правилу», то якою буде величина граничної продуктивності капіталу і відношення капітал–випуск?

г) якою має бути норма заощадження, щоб економіка досягла стійкого стану, що відповідає «золотому правилу»?

✎21. Нехай економіка, яка описується моделлю Хікса, має такі параметри: $c_1 = 0,3$, $c_2 = 0,6$, $\nu = 1,4$. З'ясувати динамічні властивості національного доходу.

22. Для моделі ділового циклу Хікса акселератор $\nu = 0,4$, показники схильності до споживання $c_1 = 0,75$, $c_2 = 0$, автономні інвестиції $A_0 = 0$. Побудувати загальну траєкторію ділової активності, якщо $Y_0 = 50$. Дати економічне тлумачення можливих наслідків.

Відповіді: 1. а) $10^4 e^{0,05t}$; б) 14918,25 доларів; в) 13,86 р. 2.

$$P = \frac{\beta - \alpha}{a - b} + C e^{\frac{b-a}{a_1} t} . \quad 3. \quad Q_d = \frac{C}{\sqrt{P}} . \quad 4. \quad Q_d = 50 - 5P . \quad 5. \quad P = 100 - 0,5Q_d . \quad 6.$$

$\eta_d = -0,5$, $\eta_s = 0,2$; рівновага ринку стійка. 8. Знизити приблизно на 15 грн. 16. $k^* \approx 0,32$. 21. Траєкторія національного доходу є коливальною згасаючою.

📖 Практичне заняття № 10

⚙️ Контрольна робота (зразок)

✍️1. Снаряд вилітає з гармати зі швидкістю v_0 під кутом α до горизонту. Знайти рівняння руху снаряда, припускаючи, що опір повітря дорівнює kv , де k – коефіцієнт опору, v – швидкість руху.

✍️2. Знайти криву, яка проходить через точку $M_0(1; 2)$, якщо відрізок будь-якої її дотичної, який знаходиться між осями координат, ділиться в точці дотику у відношенні 2:1 (відраховуючи від осі Oy).

✍️3. Через 12 год після початку дослідів кількість деякої популяції бактерій зросла втричі. Визначити, в скільки разів збільшиться число бактерій через три доби.

✍️4. Ринок томатів у Вінниці можна описати такими функціями:

$$Q_d = 500 - 12P, \quad Q_s = 230 + 3P.$$

Яка цінова еластичність попиту і пропозиції томатів у Вінниці, якщо ринок перебуває в рівновазі? Який характер стійкості рівноваги на цьому ринку?

📖 Практичне заняття № 11-14

Тема: Захисти проєктів

Рекомендована література

Основна

1. Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного моделювання природничих і соціально-економічних процесів (для студентів спеціальності Е7 Математика) [Електронне видання]. Вінниця, 2026. 50 с.
2. Бак С., Ковтонюк Г. Побудова та аналіз математичної моделі динаміки формування компетентностей у процесі навчання. Математика, інформатика, фізика: наука та освіта. 2026. Т. 3, № 1. С. 11-21. DOI: <https://doi.org/10.31652/3041-1955-2026-03-01-02>
3. Балтовський О.О., Форос Г.В, Сіфоров О.І. Основи математичного моделювання. Одеса: Одеський держ. унів. внутр. справ, 2023. 125 с.
4. Ляшенко І.М., Коробова М.В., Столяр А.М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів: навч. посіб.. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2006. 304 с.
5. Махней О.В. Математичне моделювання: навч. посіб. Івано-Франківськ: ФОП Супрун В.П., 2015. 372 с.
6. Маценко В.Г. Математичне моделювання: навч. посіб. Чернівці: Чернівецький національний університет, 2014. 519 с.

Додаткова

1. Бак С. М. Диференціальні та інтегральні рівняння: Посібник 2-ге вид., випр. і доп. Вінниця: ФОП Рогальська І. О., 2018. 360 с.
2. Бак С. М. Основи теорії солітонів. Навчальний посібник (для студентів спеціальності 111 Математика). 2-е вид., випр. і доп. Вінниця: ФОП Рогальська І. О., 2024. 100 с.
3. Богданова Н. В., Богданов О. В. Математичне моделювання систем і процесів. Конспект лекцій: Навчальний посібник. Електронне мережне навчальне видання. Київ: КПП ім. Ігоря Сікорського, 2022. 85 с.

4. Жученко А. І., Ладієва Л. Р., Піргач М. С., Жураковський Я. Ю. Математичне моделювання процесів і систем: навч. посіб. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 351 с.
5. Математичне моделювання динамічних систем і процесів: Інструктивно-методичні матеріали для самостійної роботи здобувачів закладів вищої освіти другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 122 Комп'ютерні науки/ Укладачі: Таміла Коломієць, Василь Михайленко, Анатолій Погоруї, Світлана Постова, Анатолій Франовський. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. Івана Франка, 2024. 60 с.
6. Неділько С. А. Математичні методи в хімії. Підручник для студентів хімічних спеціальностей. Київ: «Либідь», 2005. 256 с.
7. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах: Навч. посіб. Київ: Либідь, 2003. 504 с.

Електронне навчальне видання

Бак Сергій Миколайович

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
З МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИРОДНИЧИХ І
СОЦІАЛЬНО-ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Формат 60x84/16.
Гарнітура Book Antiqua.
Ум. друк. арк. 2,4