РОЗДІЛ 1
ІСНУВАННЯ І ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗЧИСЛЕННИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

1.1. Існування біжучих і стоячих хвиль в системах осциляторів

Бак С. М., Ковтонюк Г. М.

1.1.1. Біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. У 1953 році один із найвидатніших фізиків XX століття Енріко Фермі попросив двох своїх колег (по Лос-Аламоській лабораторії) Станіслава Улама і Джона Пасту розв'язати одну з нелінійних задач на ЕОМ. Вони повинні були дослідити питання про термалізацію енергії в нелінійних дискретно навантажених струнах на прикладі коливання 64 важок, пов'язаних одна з одною пружинками (рис. 1.1), які при відхиленні від положення рівноваги на Δl отримували силу повернення, рівну $k\Delta l + \alpha(\Delta l)^2$. Тут k і α – сталі коефіцієнти. При цьому нелінійний доданок передбачався малим у порівнянні з основною силою $k\Delta l$. Створюючи початкове коливання, дослідники хотіли подивитися, як ця початкова мода буде розподілятися по всіх інших модах.

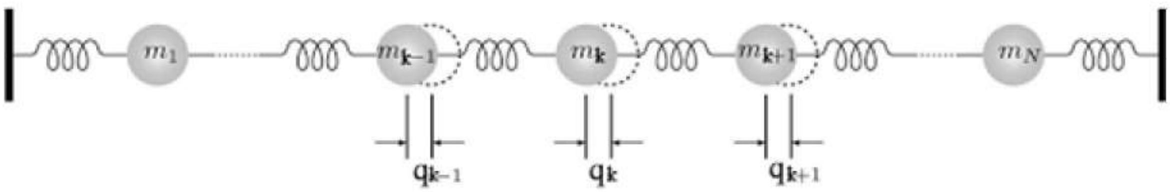

Рис. 1.1. Ланцюг зв'язаних важок

Передбачалося, що енергія в кінці кінців рівномірно розподілиться між модами, тобто по всій довжині хвилі, тим самим відбудеться термалізація енергії. У 1954 році після проведення розрахунків цієї задачі на ЕОМ очікуваного результату вони не отримали, але виявили, що перекачування енергії в дві або три моди на початковому етапі розрахунку дійсно відбувається, але потім спостерігається повернення до початкового стану. Про цей парадокс, пов'язаний з поверненням початкового коливання, стало відомо кільком математикам і фізикам. Зокрема, про цю задачу дізналися американські фізики Мартін Крускал і Норман Забускі ([34]), які вирішили продовжити обчислювальні експерименти з моделлю, запропонованою Фермі. Виявилося, що в ланцюжку виникають особливі хвилі – солітони, які не дають енергії рівномірно розподілятися по всій її довжині. Це було виявлено тільки через 11 років.

Результати досліджень Енріко Фермі, Джона Пасти і Станіслава Улама [14] дали поштовх для багатьох наступних досліджень систем типу Фермі-Пасти-Улама. До подібних систем також належить повністю інтегровний ланцюг Тоди (див. [31]). Разом з тим ланцюг Тоди є єдиною відомою цілком інтегровною системою типу ФПУ. Для всіх інших подібних систем існуючі результати переважно стосуються точних або наближених часткових їх розв'язків.

Зауважимо, що один з перших строгих результатів для більш загальних (нескінченниих) систем типу ФПУ був одержаний Жеро Фрізеке і Джонатаном Ваттісом у 1994 році ([15]). Вчені встановили умови існування відокремлених біжучих хвиль з певними припущеннями, які стосуються потенціалів взаємодії між частинками. Зокрема, встановлені умови задовольняють потенціали типу Леннарда–Джонса, Тоди та ін. Для доведення існування відокремлених біжучих хвиль вони використали метод умовної мінімізації і принцип концентрованої компактності ([19]).

Існування надзвукових відокремлених біжучих хвиль з іншими припущеннями було встановлено Дідьє Сметсом і Майклом Віллемом в праці [29] у 1997 році. Для доведення основного результату вони застосували одну із версій теореми про гірський перевал, в якій відсутня так звана умова Пале–Смейла.

Переглянувши останній підхід, Олександр Панков і Клаус Пфлюгер у 2000 році довели існування періодичних біжучих хвиль за допомогою стандартної теореми про гірський перевал (з умовою Пале-Смейла), а існування відокремлених біжучих хвиль – за допомогою методу періодичних апроксимацій (див. [25]).

У 2005 році вийшла монографія Олександра Панкова [23], в якій можна знайти найбільш повний на той час огляд результатів про існування розв’язків і, зокрема, існування біжучих хвиль в системах ФПУ. Панков розглядав одновимірний нескінченний ланцюг зв’язаних частинок, які взаємодіють зі своїми попередньою і наступною сусідніми частинками. Динаміка такого ланцюга описується нескінченною системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$m_n \ddot{q}_n = U'_{n+1}\left(q_{n+1} - q_n\right) - U'_n\left(q_n - q_{n-1}\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $q_n = q_n(t)$ – координата n-ї частинки в момент часу t, m_n – маса n-ї частинки, U_n – потенціал взаємодії між сусідніми n-ою та $(n-1)$-ю частинками. Панков досить детально дослідив не тільки питання існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль, але й питання коректності задачі Коші та існування періодичних розв’язків. Зауважимо, що у цьому випадку біжучою хвилею є розв’язок вигляду

$$q_n\left(t\right) = u\left(n - ct\right),$$

де функція $u\left(s\right)$, $s = n - ct$, називається *профільною* функцією або *профілем* хвилі (вона визначає форму хвилі), а стала c задає *швидкість* хвилі.

У 2006 році Імран Батт і Джонатан Ваттіс в статті [11] показали, що двовимірна ґратка типу ФПУ може бути використана для моделювання передачі (трансмісії) електричного заряду. Ця ґратка представляє собою мережу повторюваних секцій електричної установки. При цьому кожна секція складається з двох ідентичних лінійних *індукторів* (відповідають за створення робочого магнітного потоку) і нелінійного *конденсатора* (накопичує заряд і блокує постійний струм, пропускаючи змінний струм). Взаємне розташування вузлів ґратки, які визначаються за розташуванням конденсаторів, показано на рис. 1.2.

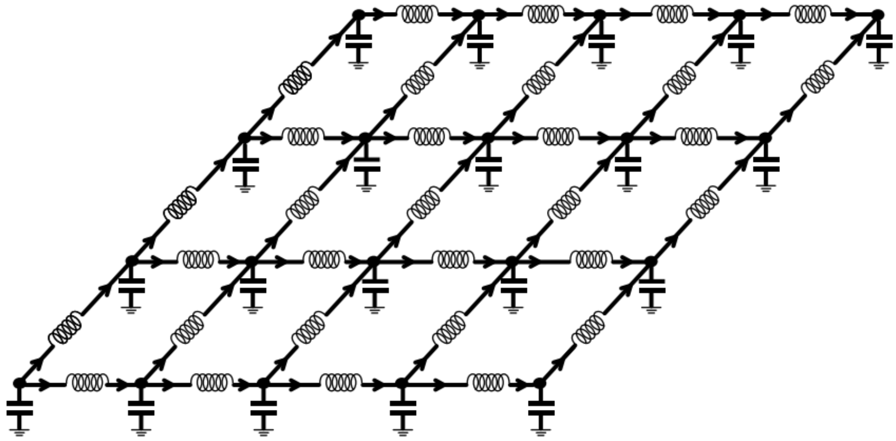

Рис.1.2. Двовимірна ґратка електричної передачі

Основні їх результати стосуються дослідження дискретних бризерів для двовимірної ґратки ФПУ та одержані за допомогою асимптотичних методів.

Аналогічні результати для двовимірної гексагональної ґратки ФПУ (рис. 1.3) вони одержали вже у наступному році в статті [12].

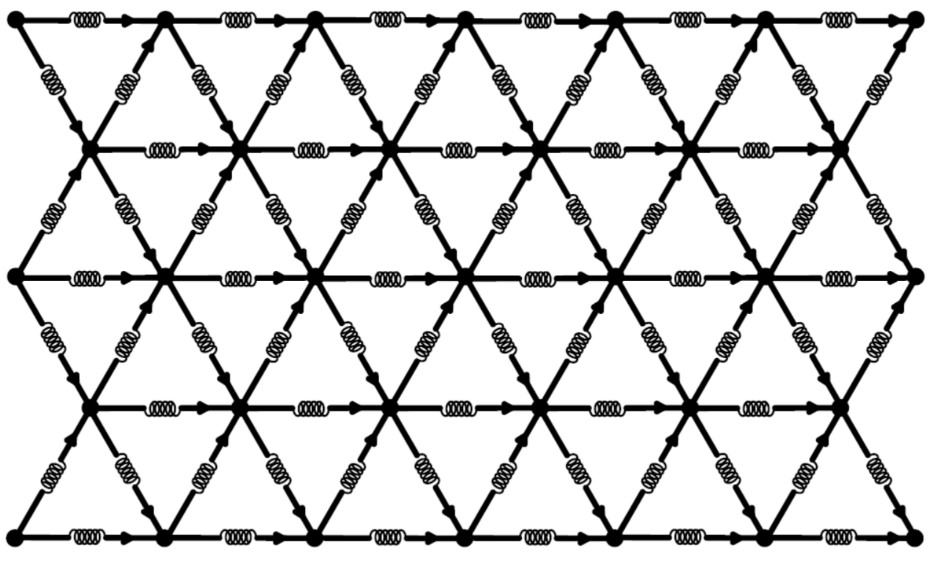

Рис. 1.3. Двовимірна гексагональна ґратка електричної передачі

У 2009 році Йі Ксянг, Джонатан Ваттіс, Хаді Сузанто та Лінда Каммінгс розглянули механічну пружинну ґратку, що описується двовимірною системою типу ФПУ, і побудували асимптотичне наближення бризера для цієї системи ([33]).

У 2012 році один із співавторів цього підрозділу (див. [36]) встановив умови існування періодичних біжучих хвиль в нескінченних системах типу ФПУ на двовимірній ґратці. В системах, які він розглядав, враховувалася лише локальна взаємодія, тобто кожна частинка взаємодіяла з чотирма своїми найближчими сусідами (по два по вертикалі і по горизонталі). Динаміка такої системи описується такою системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\ddot{q}_{n,m} = U'\left(q_{n+1,m} - q_{n,m}\right) - U'\left(q_{n,m} - q_{n-1,m}\right) +$$
$$+U'\left(q_{n,m+1} - q_{n,m}\right) - U'\left(q_{n,m} - q_{n,m-1}\right),\ \ (n,\, m) \in \mathbb{Z}^2.$$

Зауважимо, що у цьому випадку біжучою хвилею є розв'язок вигляду

$$q_{n,m}(t) = u\left(n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct\right),$$

де функція $u(s)$, $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$, називається *профільною* функцією або *профілем* хвилі, а стала c задає швидкість хвилі, вектор $\vec{l}\left(\cos\varphi, \sin\varphi\right)$ – хвильовий вектор (визначає напрям поширення хвилі).

У цій роботі вивчалися біжучі хвилі, які мали періодичний профіль відносних зміщень (тобто похідна профілю хвилі), тоді як сам профіль біжучої хвилі може бути не обов'язково періодичним. Для одержання основних результатів він використав варіаційний підхід. Зокрема, за допомогою теореми про гірський перевал було встановлено існування надзвукових періодичних біжучих хвиль з монотонними профілями, а за допомогою теореми про зачеплення – існування дозвукових періодичних біжучих хвиль.

У 2018 році авторами цього підрозділу (див. [2]) було встановлено існування відокремлених надзвукових біжучих хвиль з монотонними профілями для систем вигляду (1.9). Для одержання основних результатів було використано метод періодичних апроксимацій. Суть цього методу полягає в тому, що відокремлені біжучі хвилі будуються за допомогою граничного переходу в періодичних біжучих хвилях, коли період прямує до нескінченності.

У 2019 році Олександр Панков ([24]) розглянув системи типу ФПУ з нелокальною взаємодією, в яких кожна частинка взаємодіє з $2M$ сусідами:

$$\ddot{q}_j = \sum_{m=1}^{M}\left[U_m'\left(q_{j+m}-q_j\right)-U_m'\left(q_j-q_{j-m}\right)\right],\ \ j\in\mathbb{Z},$$

для яких за допомогою варіаційного підходу встановив умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль.

У 2020 році автори цього підрозділу (див. [5; 9]) за допомогою варіаційного підходу дослідили питання існування несталих періодичних і відокремлених надзвукових біжучих хвиль для систем вигляду:

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{n,m} &= W_1'\left(q_{n+1,m}-q_{n,m}\right)-W_1'\left(q_{n,m}-q_{n-1,m}\right)+\\ &+W_2'\left(q_{n,m+1}-q_{n,m}\right)-W_2'\left(q_{n,m}-q_{n,m-1}\right),\ \ (n,\,m)\in\mathbb{Z}^2,\end{aligned}$$

де W_1 і W_2 – потенціали взаємодії сусідніх частинок. У цій статті періодичні умови та граничні умови накладалися вже на сам профіль хвилі, а не на його похідну, як це робилося у попередніх їх працях. Розглянемо більш детально результати цих статей.

Біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама з нелінійностями типу Амброзетті-Рабіновіца. Будемо вивчати систему типу Фермі–Пасти–Улама на двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ – координата (n,m)-ї частинки (осцилятора) в момент часу t. Передбачається, що кожна частинка нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{n,\,m} &= W_1'\left(q_{n+1,\,m}-q_{n,\,m}\right)-W_1'\left(q_{n,\,m}-q_{n-1,\,m}\right)+\\ &+W_2'\left(q_{n,\,m+1}-q_{n,\,m}\right)-W_2'\left(q_{n,\,m}-q_{n,\,m-1}\right),\,(n,\,m)\in\mathbb{Z}^2.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Будемо шукати розв'язки системи (1.1) у вигляді біжучих хвиль:

$$q_{n,m}(t)=u(n\cos\varphi+m\sin\varphi-ct),\tag{1.2}$$

де $\vec{l}\,(\cos\varphi, \sin\varphi) -$ фіксований *хвильовий вектор*, який задає напрям поширення хвилі. Функція $u(s)$ неперервного аргументу $s \in \mathbb{R}$ називається *профілем* біжучої хвилі. Стала c представляє собою *швидкість* хвилі. Якщо $c > 0$, то хвиля зміщується вправо, а якщо $c < 0$, то вліво. Для профілю $u(s)$ біжучої хвилі, де $s = n\cos\varphi + m\sin\varphi - ct$, рівняння (1.1) набуде вигляду

$$\begin{aligned} c^2 u''(s) &= W_1'\big(u(s+\cos\varphi) - u(s)\big) - W_1'\big(u(s) - u(s-\cos\varphi)\big) + \\ &+ W_2'\big(u(s+\sin\varphi) - u(s)\big) - W_2'\big(u(s) - u(s-\sin\varphi)\big). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Спочатку будемо вивчати періодичні та відокремлені біжучі хвилі в рівнянні (1.3). Зокрема, профіль періодичної хвилі задовольняє умову періодичності

$$u(s+2k) = u(s),\ s \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

а профіль відокремленої хвилі задовольняє крайові умови на нескінченності

$$\lim_{s\to\pm\infty} u(s) = u(\pm\infty) = 0. \tag{1.5}$$

Позначимо через E_k гільбертів простір

$$E_k = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u'(s+2k) = u'(s),\ u(0) = 0\}$$

зі скалярним добутком

$$(u,v)_k = \int_{-k}^{k} u'(s)v'(s)ds\,,$$

а через X_k – гільбертів простір

$$X_k = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u(s+2k) = u(s),\ u(0) = 0\}$$

з тим самим скалярним добутком, що й в E_k і відповідною нормою $\|u\|_k = (u, u)^{\frac{1}{2}}$. Цей простір є замкненим підпростором простору E_k. Більше того, $u \in E_k$ належить X_k тоді і тільки тоді, коли похідна u' має нульове середнє значення, тобто

$$\langle u' \rangle := \int_{-k}^{k} u'(s)ds = 0.$$

Це означає, що X_k є 1-ковимірним підпростором простору E_k. А ортогональне доповнення є власне підпростір E_k, породжений функцією $h_0(s) = s$.

Позначимо через E гільбертів простір

$$E = \left\{u \in H^1_{loc}\left(\mathbb{R}\right) : u' \in L^2\left(\mathbb{R}\right), u\left(0\right) = 0\right\}$$

зі скалярним добутком

$$\left(u, v\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u'\left(s\right) v'\left(s\right) ds$$

і відповідною нормою $\left\|u\right\| = \left(u, u\right)^{\frac{1}{2}}$. Через $\left\|\cdot\right\|_*$ позначимо норму на просторі E^*, який є спряженим (дуальним) до простору E. Простір E є 1-ковимірним підпростором гільбертового простору

$$\tilde{E} = \{u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u' \in L^2\left(\mathbb{R}\right)\}$$

зі скалярним добутком

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u'(s) v'(s) ds + u(0) v(0).$$

Нехай X замикання простору $C_0^\infty\left(\mathbb{R}\right)$ по відношенню до норми

$$\left\|u\right\| = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|u'(s)\right|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, що X є замкненим підпростором простору $\tilde{E}$, а тому функції з X задовольняють умову (1.5).

Далі означимо оператори

$$(Au)(s) := u(s + \cos\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\cos\varphi} u'(\tau) d\tau,$$

$$(Bu)(s) := u(s + \sin\varphi) - u(s) = \int\limits_{s}^{s+\sin\varphi} u'(\tau) d\tau.$$

Ці оператори є обмеженими лінійними операторами, що задовольняють нерівності (див. |дисертація|, Лема 6.1).

$$\|Au\|_{L^\infty(-k,k)} \le l_1(k)\cdot\|u\|_k\,,\ \|Au\|_{L^2(-k,k)} \le |\cos\varphi|\cdot\|u\|_k\,, \tag{1.6}$$

$$\|Bu\|_{L^\infty(-k,k)} \le l_2(k)\cdot\|u\|_k\,,\ \|Bu\|_{L^2(-k,k)} \le |\sin\varphi|\cdot\|u\|_k\,, \tag{1.7}$$

де

$$l_1(k) = \begin{cases} |\cos\varphi|\sqrt{\left[\dfrac{1}{2k}\right]+1}, & 0<2k<1, \\ |\cos\varphi|, & 2k\ge 1, \end{cases}$$

та

$$l_2(k) = \begin{cases} |\cos\varphi|\sqrt{\left[\dfrac{1}{2k}\right]+1}, & 0<2k<1, \\ |\sin\varphi|, & 2k\ge 1, \end{cases}$$

де $\left[\dfrac{1}{2k}\right]$ – ціла частина $\dfrac{1}{2k}$.

Припустимо, що виконуються умови:

(i_1) $W_i(r)=\dfrac{c_i}{2}r^2+f_i(r),\ i=1,2$, *де* $f_i\in C^1(\mathbb{R})$, $f_i(0)=f_i'(0)=0$ *і* $f_i'(r)=o(|r|)$ *при* $r\to 0$;

(ii_1) *існують такі* $r_0\in\mathbb{R}$ *і* $\mu>2$, *що* $f_i(r_0)>0$ *і* $\mu f_i(r)\le rf_i'(r),\ r\in\mathbb{R}$.

Останню нерівність називають *нерівністю Амброзетті-Рабіновіца*.

На просторах X_k та X розглянемо відповідно функціонали

$$J_k(u)=\int_{-k}^{k}\left\{\frac{c^2}{2}|u'(s)|^2 - W_1\big(Au(s)\big) - W_2\big(Bu(s)\big)\right\}ds,$$

$$J(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{c^2}{2}|u'(s)|^2 - W_1\big(Au(s)\big) - W_2\big(Bu(s)\big)\right\}ds.$$

Неважко переконатися, що ці функціонали є неперервно диференційовними на відповідних просторах, а їхні похідні визначаються формулами

$$\left\langle J_k'(u),h\right\rangle = \int_{-k}^{k}\big[c^2u'(s)h'(s) - c_1^2Au(s)Ah(s) - c_2^2Bu(s)Bh(s) -$$

$$-f_1'(Au(s))Ah(s)-f_2'(Bu(s))Bh(s)\big],\ u,h\in X_k,$$

$$\langle J'(u),h\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\big[c^2u'(s)h'(s)-c_1^2Au(s)Ah(s)-c_2^2Bu(s)Bh(s)-$$

$$-f_1'(Au(s))Ah(s)-f_2'(Bu(s))Bh(s)\big],\ u,h\in X.$$

Легко бачити, що критичні точки цих функціоналів у просторах X_k та X є розв'язками рівняння (1.3), що задовольняють умови (1.4) та (1.5) відповідно.

За допомогою теореми про гірський перевал і методу періодичних апроксимацій відповідно, одержуються наступні результати.

Теорема 1.1. *Нехай виконуються умови* (i_1), (ii_1). *Тоді для будь-яких* $k>0$ *і* $c^2>a:=\max\{c_1,c_2,0\}$ *рівняння (1.3) має несталий розв'язок* u, *що задовольняє умову (1.4).*

Перевіримо виконання умов теореми про гірський перевал для функціоналу J_k.

Лема 1.1. *За виконання умов теореми 6.1* функціонал J_k задовольняє умову Пале–Смейла.

Доведення. Нехай $\{u_n\}\subset X_k$ послідовність Пале–Смейла функціоналу $\mathrm{J_k}$ рівня b. Тоді для достатньо великих n,

$$b+1+\frac{1}{\mu}\|u_n\|_k\geq J_k(u_n)-\frac{1}{\mu}\langle J_k'(u_n),u_n\rangle=$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\int\limits_{-k}^{k}\left(c^2|u_n'(s)|^2-c_1|Au_n(s)|^2-c_2|Bu_n(s)|^2\right)ds+$$

$$+\int\limits_{-k}^{k}\left[\frac{1}{\mu}\Big(f_1'\big(Au_n(s)\big)Au_n(s)+f_2'\big(Bu_n(s)\big)Bu_n(s)\Big)-f_1\big(Au_n(s)\big)-f_2\big(Bu_n(s)\big)\right]ds.$$

Відповідно до умови леми другий і третій інтеграли є невід'ємними і тому, за лемою 6.1 ([41]), маємо

$$b+1+\frac{1}{\mu}\|u_n\|_k\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\left(c^2-a\right)\|u_n\|_k^2.$$

А це означає, що послідовність $\{u_n\}$ є обмеженою у просторі X_k.

Тоді, переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), $u_n \to u$ слабко в X_k, а отже, $Au_n \to Au$ і $Bu_n \to Bu$ слабко в X_k, і сильно в $L^2(-k, k)$ і $C([-k, k])$. Прямим обчисленням показується, що

$$c^2 \|u_n - u\|_k^2 = \int_{-k}^{k} c^2 |u_n'(s) - u'(s)|^2 \, ds =$$

$$= \langle J_k'(u_n) - J_k'(u), u_n - u \rangle + c_1 \|Au_n - Au\|_{L^2(-k,k)}^2 + c_2 \|Bu_n - Bu\|_{L^2(-k,k)}^2 +$$

$$+ \int_{-k}^{k} \left(f_1'(Au_n(s)) - f_1'(Au(s)) \right) \left(Au_n(s) - Au(s) \right) ds +$$

$$+ \int_{-k}^{k} \left(f_2'(Bu_n(s)) - f_2'(Bu(s)) \right) \left(Bu_n(s) - Bu(s) \right) ds .$$

Як і вище, всі доданки в правій частині останньої рівності збігаються до нуля. Таким чином, $\|u_n - u\|_k \to 0$ при $n \to \infty$, і лему доведено. □

Лема 1.2. *За виконання умов теореми 1.1 існують такі $r_0 > 0$ і $\alpha_0 > 0$, які не залежать від k, що $\inf\limits_{\|u\|_k = r_0} J_k(u) > \alpha_0$.*

Доведення. Подамо функціонал J_k у вигляді

$$J_k(u) = \frac{1}{2} \Psi_k(u) - S_k(u),$$

де

$$\Psi_k(u) = \int_{-k}^{k} \left[c^2 |u'(s)|^2 - c_1 |Au(s)|^2 - c_2 |Bu(s)|^2 \right] ds ,$$

$$S_k(u) = \int_{-k}^{k} \left[f_1(Au(s)) + f_2(Bu(s)) \right] ds .$$

Тоді за лемою 6.1 ([41]) маємо

$$J_k(u) + S_k(u) = \frac{1}{2} \Psi_k(u) \ge \frac{c^2 - a}{2} \|u\|_k^2 .$$

Покажемо, що $S_k(u) = o\left(\|u\|_k^2\right)$. Згідно умови $\left(i_1\right)$, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $|r| \le \delta$

$$\max\left\{f_1(r),\ f_2(r)\right\} \le \frac{\varepsilon r^2}{2}.$$

Покладемо

$$r_0 = \frac{\delta}{\max\left\{l_1(k),\ l_2(k)\right\}},$$

і візьмемо $u \in X_k$ з нормою $\|u\|_k = r_0$. Тоді, враховуючи цю лему, для майже всіх s маємо

$$\left|Au(s)\right| \le \|Au\|_{L^\infty(-k,\ k)} \le l_1(k)\|u'\|_k \le \delta\ ,$$

$$\left|Bu(s)\right| \le \|Bu\|_{L^\infty(-k,\ k)} \le l_2(k)\|u'\|_k \le \delta\ .$$

Отже,

$$S_k(u) \le \frac{\varepsilon}{2}\int_{-k}^{k}\left[\left(Au(s)\right)^2 + \left(Bu(s)\right)^2\right]ds \le \frac{\varepsilon}{2}\|u\|_k^2.$$

В силу довільності ε, маємо

$$S_k(u) = o\left(\|u\|_k^2\right).$$

Зокрема, якщо вибрати ε так, щоб $0 < \varepsilon < c^2 - a$, то одержимо

$$J_k(u) \ge \left(c^2 - a - \varepsilon\right)\frac{r_0^2}{2} > 0$$

і лему доведено. □

Лема 1.3. *За виконання умов теореми 1.1 існує елемент* $e \in X_k$ *з нормою* $\|e\|_k > r_0$ *такий, що* $J_k\left(e\right) \le 0$.

Доведення. За лемою 3.1 ([41]), для всіх r

$$\min\left\{f_1(r),\ f_2(r)\right\} \ge d|r|^\mu - d_0.$$

Нехай $u \in X_k \setminus \{0\}$ та $r > 0$. Тоді маємо

$$J_k(ru)=\frac{1}{2}\int_{-k}^{k}\left\{c^2r^2\left|u'(s)\right|^2-c_1r^2\left|Au(s)\right|^2-c_2r^2\left|Bu(s)\right|^2\right\}ds-$$

$$-\int_{-k}^{k}\left\{f_1\left(Aru(s)\right)+f_2\left(Bru(s)\right)\right\}ds\le$$

$$\le\frac{r^2}{2}\int_{-k}^{k}\left[c^2\left|u'(s)\right|^2-c_1\left|Au(s)\right|^2-c_2\left|Bu(s)\right|^2\right]ds-$$

$$-dr^{\mu}\int_{-k}^{k}\left[\left|Au(s)\right|^{\mu}+\left|Bu(s)\right|^{\mu}\right]ds+4kd_0.$$

Оскільки $\mu>2$, то $J_k(ru)\to-\infty$ при $r\to+\infty$, а отже, існує таке $r_0=r_0(u)>0$, що $J_k(ru)\le 0$ для всіх $r>r_0$ і лему доведено. □

Доведення теореми 1.1. Леми 1.1 – 1.3 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про гірський перевал ([32]). Отже, J_k має ненульову критичну точку $u\in X_k$, яка є розв'язком задачі (1.3), (1.4). Несталість розв'язку очевидна. Теорему доведено. □

Теорема 1.2. *Нехай виконуються умови* (i_1), (ii_1) *і* $c^2>a:=\max\{c_1,c_2,0\}$. *Тоді рівняння (1.3) має несталий розв'язок* u, *що задовольняє умову (1.5).*

Доведення. Міркуючи аналогічно, як у підрозділі 6.2 дисертації [41], неважко довести, що функціонал J задовольняє геометрію гірського перевалу в просторі E. Оскільки існує такий елемент $e\in X$, що $J(e)<0$, то функціонал J задовольняє геометрію гірського перевалу і в просторі X. Тоді за теоремою С.3 ([23]), існує послідовність Пале-Смейла $\{u_n\}\subset X$ рівня b, тобто $J(u_n)\to b$ і $J'(u_n)\to 0$ у просторі X^*.

Як і вище, послідовність $\{u_n\}$ обмежена в X. Більше того, як і в лемі 6.11, маємо, що $\|u_n\|$ обмежена знизу додатною сталою, а отже, $\|u_n\| \not\to 0$. Тому можна вважати, що $u_n \to u$ слабко в X. Далі, як і в лемі 6.12 ([41]), для будь-якого $r > 0$ існують $\theta > 0$, підпослідовність послідовності $\{u_n\}$ (як і раніше позначатимемо через $\{u_n\}$) та $\{\eta_n\} \subset \mathbb{R}$, такі, що

$$\int_{\eta_n - r}^{\eta_n + r} \left[|Au_n(s)|^2 + |Bu_n(s)|^2 \right] ds \geq \theta.$$

Замінюючи $u_n(s)$ на $u_n(s - \eta_n)$, одержуємо

$$\int_{-r}^{r} \left[|Au_n(s)|^2 + |Bu_n(s)|^2 \right] ds \geq \theta$$

і нова послідовність $\{u_n\}$ залишається послідовністю Пале-Смейла. Згідно теореми вкладення, $Au_n \to Au$ і $Bu_n \to Bu$ у просторі $L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R})$, тобто рівномірно на відрізках і, отже,

$$\int_{-r}^{r} \left[|Au(s)|^2 + |Bu(s)|^2 \right] ds \geq \theta > 0 .$$

А це означає, що $u \neq 0$.

Далі, як і в доведенні леми 6.13 ([41]), беремо $g \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ і показуємо, що $\langle J'(u), g \rangle = 0$, тобто u – нетривіальна критична точка функціоналу J, а отже, розв’язок рівняння (1.3), що задовольняє умови (1.5). Несталість розв’язку очевидна. Теорему доведено. □

Біжучі хвилі в системах типу Фермі-Пасти-Улама із насичуваними нелінійностями. Тепер розглянемо більш детально результати авторів цього підрозділу, одержані в статтях [3; 4; 7; 8]. Будемо вивчати рівняння (1.3) із так званими *насичуваними* нелінійностями. Це означає, що на нескінченності $W_i'(r)$ ростуть як $const \cdot r$, тобто потенціали $W_i(r)$ є асимптотично квадратичними на нескінченності $(i = 1, 2)$.

Далі будемо вивчати два види біжучих хвиль: періодичні і відокремленні. Але у цьому випадку періодична хвиля має періодичні профілі відносних зміщень, тобто періодичну похідну профілю:

$$u'(s+2k) = u'(s),\ s \in \mathbb{R}, \tag{1.8}$$

де $k > 0$ – деяке число. Зауважимо, що профіль такої хвилі не обов'язково періодичний.

Профіль відокремленої хвилі задовольняє умови на нескінченності:

$$\lim_{s\to\pm\infty} u'(s) = u'(\pm\infty) = 0. \tag{1.9}$$

Всюди далі припускається, що виконуються умови:

(i_2) $W_i(r) = \dfrac{c_i^2}{2} r^2 + f_i(r)$, *де* $c_i \in \mathbb{R}$, $f_i \in C^1(\mathbb{R})$, *причому* $f_i(0) = f_i'(0) = 0$ *і* $f_i'(r) = o(r)$ *при* $r \to 0$, $i = 1,2$;

(ii_2) *існує скінченна границя* $\lim\limits_{r\to\pm\infty} \dfrac{f_i'(r)}{r} = l$ *та функції* $g_i(r) = f_i'(r) - lr$ *обмежені* $(i = 1,2)$;

(iii_2) $f_i(r) \geq 0$ *для всіх* $r \in \mathbb{R}$ *і для будь-якого* $r_0 > 0$ *існує* $\delta_0 = \delta_0(r_0) > 0$ *таке, що* $\dfrac{1}{2} r f_i'(r) - f_i(r) \geq \delta_0$ *для* $|r| \geq r_0$ $(i = 1,2)$.

Зауваження 1.1. *Зроблені припущення зокрема означають, що функції* $f_i(r)$ *зростаючі при* $r \geq 0$ *і спадні при* $r \leq 0$, *а* $G_i(r) < 0$ *для всіх* $r \neq 0$, $i = 1,2$.

Для спрощення записів покладемо

$$h_i(r) := f_i'(r) = lr + g_i(r),\ i = 1,2,$$

та

$$G_i(r) := \int_0^r g_i(\rho)\, d\rho,\ i = 1,2,$$

і додатково припустимо, що виконується одна з умов:

(iv_2) $G_i(r) \to -\infty$ *при* $r \to \pm\infty$ $(i = 1,2)$;

або

$$(v_2)\ c^2\left(\frac{\pi n}{k}\right)^2 - 4\left(c_1^2 + l\right)\sin\left(\frac{\pi n}{2k}\cos\varphi\right) - 4\left(c_2^2 + l\right)\sin^2\left(\frac{\pi n}{2k}\sin\varphi\right) \neq 0 \text{ для всіх}$$

$n \in \mathbb{N}$.

Як і вище, на просторі E_k розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \int_{-k}^{k}\left[\frac{c^2}{c}(u'(s))^2 - \frac{c_1^2}{2}(Au(s))^2 - \frac{c_2^2}{2}(Bu(s))^2 - f_1(Au(s)) - f_2(Bu(s))\right]ds. \quad (1.10)$$

Неважко переконатися, що J_k – функціонал класу C^1 на E_k, а його похідна визначається формулою

$$\left\langle J_k'(u), h\right\rangle = \int_{-k}^{k}\left[c^2u'(s)h'(s) - c_1^2 Au(s)Ah(s) - c_2^2 Bu(s)Bh(s) - \right.$$
$$\left. - f_1'(Au(s))Ah(s) - f_2'(Bu(s))Bh(s)\right]$$

для $u, h \in E_k$. Більше того, критичні точки функціоналу J_k є розв’язками рівняння (1.3), що задовольняють умову (1.8).

Таким чином, для встановлення існування розв’язків рівняння (1.3), що задовольняють умову (1.8), достатньо довести існування нетривіальних критичних точок функціоналу J_k. Для цього буде використано спеціальну форму теореми про гірський перевал (див. |Willem, Pankov|).

Нехай на гільбертовому просторі H з нормою $\|\cdot\|$ заданий функціонал $I : H \to \mathbb{R}$ класу C^1. Кажуть, що I задовольняє *умову Пале-Смейла,* якщо виконується така умова:

(PS) якщо $\{u_n\} \subset H$ *така послідовність, що* $\left\{I(u_n)\right\}$ *обмежена та* $I'(u_n) \to 0,\ n \to \infty,$ *то* $\{u_n\}$ *містить збіжну послідовність.*

Зауважимо, що при перевірці цієї умови можна, без обмеження загальності, вважати, що числова послідовність $\{I(u_n)\}$ збігається, оскільки з обмеженої числової послідовності можна виділити збіжну послідовність.

Послідовність $\{u_n\}$ точок гільбертового простору H називається *послідовністю Пале-Смейла* функціоналу I на деякому рівні b, якщо $I(u_n) \to b$ та $I'(u_n) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Тоді, враховуючи сказане вище, умову Пале-Смейла можна переформулювати таким чином:

(PS) будь-яка послідовність Пале-Смейла $\{u_n\} \subset H$ *містить збіжну підпослідовність.*

Якщо існують $e \in H$ *і* $r > 0$, *такі, що* $\|e\| > r$ *і*

$$\beta := \inf_{\|u\|=r} I(u) > I(0) \geq I(e),$$

то кажуть, що функціонал I задовольняє *геометрію гірського перевалу.*

Наступну теорему типу теореми про гірський перевал можна знайти в [10] (Теорема 10).

Теорема 1.3. *Нехай на гільбертовому просторі H заданий функціонал I:* $H \to \mathbb{R}$ *класу* C^1*, який задовольняє умову Пале-Смейла та геометрію гірського перевалу І припустимо, що* $P: H \to H$ *таке неперервне відображення, що*

$$I(Pu) \leq I(u)$$

для всіх $u \in H$, *причому* $P(0) = 0$ *і* $P(e) = e$. *Тоді існує критична точка* $u \in \overline{PH}$ *(замикання PH) функціоналу I з критичним значенням*

$$I(u) = b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0.1]} I(\gamma(t)) \geq \beta,$$

де
$$\Gamma := \left\{ \gamma \in \left([0,1], H\right) : \gamma(0) = 0, \ \gamma(1) = e \right\}.$$

Покладемо

$$(Pu)(s) := \int_0^s |u'(t)|\,dt.$$

Зауваження 1.2. *Неважко перевірити, що P неперервно відображає простір E_k в себе і PE_k складається із неспадних функцій.*

Далі нам знадобиться така величина:

$$c_0 = c_0(\varphi) := \sqrt{c_1^2 \cos^2 \varphi + c_2^2 \sin^2 \varphi.}$$

Наступна теорема встановлює існування періодичних біжучих хвиль з неспадними і незростаючими профілями.

Теорема 1.4. *Нехай виконуються умови $(i_2)-(iii_2)$ та (iv_2) або (v_2). Тоді, якщо $\varphi \in \left[\pi n, \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}, k > 0,$ і $c_0^2 < c^2 < c_0^2 + l$, то рівняння (1.3) має нестаті як неспадні, так і незростаючі розв'язки, які задовольняють умову (1.8).*

Зауважимо, що з точки зору фізики, зростаючі хвилі є *хвилями розширення,* а спадні — *хвилями стиснення.*

Зауваження 1.3. *Оскільки ми розглядаємо монотонні хвилі, то можемо припустити, що умови теореми 1.4 виконуються для $r \geq 0$ (відповідно для $r \leq 0$), та отримати неспадні (відповідно, незростаючі) біжучі хвилі. З іншого боку, при доведенні теореми можна припустити, що потенціали $f_i(r)$ є парними функціями.*

Для зручності подамо функціонал J_k у вигляді:

$$J_k(u) = \frac{1}{2} Q_k(u,u) - \int_{-k}^{k} \left[G_1(Au(s)) + G_2(Bu(s))\right] ds, \tag{1.11}$$

де

$$Q_k(u,h) = \int_{-k}^{k} \left[c^2 u'(s) v'(s) - (c_1^2 + l) Au(s) Ah(s) - (c_2^2 + l) Bu(s) Bh(s)\right] ds.$$

Тоді похідну можна записати у вигляді

$$\left\langle J_k{}'(u),h\right\rangle = Q_k(u,k) - \int_{-k}^{k}\left[g_1(Au(s))Ah(s) + g_2(Bu(s))Bh(s)\right]ds \qquad (1.12)$$

для $u,h \in E_k$.

Нехай

$$\sigma(\xi) := c^2\xi^2 - 4(c_1^2 + l)\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\cos\varphi\right) - 4(c_2^2 + l)\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\sin\varphi\right)$$

та $\xi_n = \dfrac{\pi n}{k}$, де $n = 1,2,\ldots$. Покладемо

$$e_0(s) = s,\ e_n^{(1)}(s) = \sin(\xi_n s),\ e_n^{(2)}(s) = \cos(\xi_n s) - 1,$$

де $n = 1,2,\ldots$ Тоді система функцій

$$\left\{e_0, e_n^{(1)}, e_n^{(2)} : n = 1,2,\ldots\ .\right\},$$

є повною ортогональною системою в E_k. Ця система є також ортогональною по відношенню до білінійної форми Q_k. Крім того,

$$Q_k(e_0,e_0) = 2k(c^2 - c_0^2 - l)$$

та

$$Q_k(e_n^{(1)},e_n^{(1)}) = Q_k(e_n^{(2)},e_n^{(2)}) = k\sigma(\xi_n),\ n = 1,2,\ldots\ .$$

Нехай

$$E_k^- := span\left\{e_0, e_n^{(1)}, e_n^{(2)} : \sigma\left(\xi_n\right) < 0\right\},$$

$$E_k^0 = span\left\{e_n^{(1)}, e_n^{(2)} : \sigma\left(\xi_n\right) = 0\right\}$$

та

$$E_k^+ = span\left\{e_n^{(1)}, e_n^{(2)} : \sigma\left(\xi_n\right) > 0\right\}.$$

Ці підпростори є взаємно ортогональними щодо скалярного добутку і білінійної форми Q_k, та

$$E_k = E_k^- \oplus E_k^0 \oplus E_k^+.$$

Підпростори E_k^- та E_k^0 є скінченновимірними, а E_k^+ – нескінченновимірний. Очевидно, що форма Q_k від'ємно визначена на E_k^-, додатно визначена на E_k^+, і нульова на E_k^0.

Позначимо через u^-, u^0 та u^+ ортогональні проекції елемента $u \in E_k$ відповідно на підпростори E_k^-, E_k^0 та E_k^+.

Лема 1.4. *За виконання умов теореми 1.4 функціонал J_k задовольняє умову Пале-Смейла.*

*Доведення.*Нехай $\{u_n\} \subset E_k$ – послідовність Пале-Смейла функціоналу J_k, тобто $\{J_k(u_n)\}$ обмежена і $J_k{}'(u_n) \to 0,\ n \to \infty$.

Доведемо спочатку, що послідовність $\{u_n\}$ обмежена. Оскільки форма Q_k додатно (відповідно, від'ємно) визначена на E_k^+ (відповідно, E_k^-), то існує $\alpha > 0$ таке, що

$$\pm Q_k(u,u) \geq \alpha \|u\|_k^2$$

для всіх $u \in E_k^{\pm}$. Далі, оскільки $J_k'(u_n) \to 0,\ n \to \infty$, то

$$\left\| J_k{}'(u_n) \right\|_{k,*} \leq 1$$

для всіх досить великих *n*. Таким чином, з рівності (1.12) з $u = u_n$ та $h = u_n^{\pm}$ маємо, що

$$\alpha \left\| u_n^{\pm} \right\|_k^2 \leq \left\| u_n^{\pm} \right\|_k + \int_{-k}^{k} \Big[\left| g_1\left(Au_n(s) \right) \right| \left| Au_n^{\pm}(s) \right| + \left| g_2\left(Bu_n(s) \right) \right| \left| Bu_n^{\pm}(s) \right| \Big] ds$$

для всіх досить великих *n*. Звідси за припущеннями (ii_2) та нерівностями (1.6), (1.7) одержуємо, що

$$\alpha \left\| u_n^{\pm} \right\|_k^2 \leq C \left\| u_n^{\pm} \right\|_k$$

з деяким $C > 0$. Отже, послідовності $\{u_n^+\}$ та $\{u_n^-\}$ обмежені.

У випадку, коли виконується (v_2), маємо, що $E_k^0 = \{0\}$, і, отже, $\{u_n\} = \{u_n^+ + u_n^-\}$ обмежена послідовність.

Нехай тепер виконується умова (iv_2). Оскільки послідовність $\{u_n^- + u_n^+\}$ обмежена, то залишається показати, що $\{u_n^0\} \subset E_k^0$ є також обмеженою. Припустимо протилежне. Тоді, переходячи до підпослідовності, можна вважати, що $\left\|u_n^0\right\|_k \to \infty$. За означенням підпростору E_k^0, можна u_n^0 подати у вигляді

$$u_n^0(s) = \beta_n \sin\left(\xi^0 s + \varphi_n\right),$$

де $\left|\beta_n\right| \to \infty$, а $\xi^0 \neq 0$ є добутком деякого натурального числа на $\dfrac{\pi}{k}$ і таке, що $\sigma(\xi^0) = 0$.Тоді

$$Au_n^0(s) = 2\beta_n \sin\left(\frac{\xi^0}{2}\cos\varphi\right)\cos\left(\xi^0\left(s + \frac{1}{2}\cos\varphi\right) + \varphi_n\right),$$

$$Bu_n^0(s) = 2\beta_n \sin\left(\frac{\xi^0}{2}\sin\varphi\right)\cos\left(\xi^0\left(s + \frac{1}{2}\sin\varphi\right) + \varphi_n\right).$$

Це означає, що існують дві сталі $\delta > 0, \gamma > 0$ і підмножини $M_n \subset [-k;k]$ міри δ, такі, що $\left|Au_n^0(s)\right| + \left|Bu_n^0(s)\right| \geq \gamma\left|\beta_n\right|$ на M_n.

Рівність (1.11) означає, що

$$J_k(u_n) = \frac{1}{2}\left[Q_k\left(u_n^+, u_n^+\right) + Q_k\left(u_n^-, u_n^-\right)\right] -$$

$$-\int_{-k}^{k}\left[G_1\left(Au_n^+(s) + Au_n^-(s) + Au_n^0(s)\right) + G_2\left(Bu_n^+(s) + Bu_n^-(s) + Bu_n^0(s)\right)\right]ds. \qquad (1.13)$$

За зауваженням 1.1., $G_i(r) < 0$ *на* $\mathbb{R}$, а нерівності (1.6) і (1.7) показують, що послідовності $\{Au_n^+(s) + Au_n^-(s)\}$ та $\{Bu_n^+(s) + Bu_n^-(s)\}$ є обмеженими в $L^\infty(-k;k)$. Отже,

$$-\int_{-k}^{k}\left[G_1\left(Au_n^+(s) + Au_n^-(s) + Au_n^0(s)\right) + G_2\left(Bu_n^+(s) + Bu_n^-(s) + Bu_n^0(s)\right)\right]ds \geq$$

$$\geq -\int_{M_n} \left[G_1\left(Au_n^+(s) + Au_n^-(s) + Au_n^0(s) \right) + G_2\left(Bu_n^+(s) + Bu_n^-(s) + Bu_n^0(s) \right) \right] ds \to +\infty .$$

Оскільки всі інші доданки в правій частині (1.13) є обмеженими, то $J_k(u_n) \to +\infty$.Одержали протиріччя, яке і доводить, що $\{u_n^0\} \subset E_k^0$ обмежена.

Отже, послідовність Пале-Смейла $\{u_n\}$ обмежена.

Обмеженість послідовності $\{u_n\}$ означає, що переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), $u_n \to u$ слабко E_k, а отже, $Au_n \to Au$ *і* $Bu_n \to Bu$ слабко в E_k, і сильно в $L^\infty(-k;k)$ і $C([-k,k])$. Прямим обчисленням показується, що

$$\|u_n - u\|_k^2 = \int_{-k}^{k} \left(c^2 (u_n'(s) - u'(s) \right)^2 - c^2 (u_n(s) - u(s))^2) ds =$$

$$= \left\langle J_k'(u_n) - J_k'(u), u_n - u \right\rangle + c_1^2 \|Au_n - Au\|_{L^2(-k,k)}^2 + c_2^2 \|Bu_n - Bu\|_{L^2(-k,k)}^2 +$$

$$+ \int_{-k}^{k} (f_1'(Au_n(s)) - f_1'(Au(s)))(Au_n(s) - Au(s)) ds +$$

$$+ \int_{-k}^{k} (f_2'(Bu_n(s)) - f_2'(Bu(s)))(Bu_n(s) - Bu(s)) ds.$$

Очевидно, що всі доданки в правій частині останньої рівності збігаються до нуля, а отже, $\|u_n - u\|_k \to 0$ при $n \to \infty$. Лему доведено. □

Лема 1.5. *За виконання умов теореми 1.1 функціонал* J_k *задовольняє умову Пале-Смейла.*

Доведення. З умови (i_2) випливає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $r_0 > 0$, що $|f_i(r)| \leq \varepsilon r^2$ при $r \leq r_0$ (i=1, 2). Тоді, враховуючи нерівності (1.6) та (1.7), при $\|u\|_k \leq r_0$, маємо

$$J_k(u) \geq \int_{-k}^{k} \left\{ \frac{c^2}{2}|u'(s)|^2 - \frac{c_1^{\ 2}}{2}|Au(s)|^2 - \varepsilon|Au(s)|^2 - \frac{c_2^{\ 2}}{2}|Bu(s)|^2 - \varepsilon|Bu(s)|^2 \right\} ds \geq$$

$$\geq \frac{c^2}{2}\|u\|_k^2 - \frac{c_1^{\ 2}}{2}|\cos\varphi|^2\|u\|_k^2 - \varepsilon|\cos\varphi|^2\|u\|_k^2 - \frac{c_2^{\ 2}}{2}|\sin\varphi|^2\|u\|_k^2 - \varepsilon|\sin\varphi|^2\|u\|_k^2 =$$

$$= \frac{c^2 - c_0^2 - 2\varepsilon}{2}\|u\|_k^2 .$$

Тепер, вибираючи ε достатньо малим, одержуємо, що існує таке $\beta > 0$, що $J_k(u) \geq \beta > 0$ при $\|u\|_k = r_0$.

Покажемо тепер, що існує такий елемент $e \in E_k$, що $J_k(e) < 0$. Нехай $e_0(s) = s$ і $\tau > 0$. З умови (ii_2) випливає, що $|G_i(r)| \leq C|r|$ з деякою сталою $C > 0$. Тоді рівність (1.11) означає, що

$$J_k(\tau e_0) \leq k\left(c^2 - c_0^2 - l\right)\tau^2 + 2k\left(|\cos\varphi| + |\sin\varphi|\right)|\tau.|$$

Таким чином, $J_k(\tau e_0) < 0$ для достатньо великих $|\tau|$, а отже, існує таке τ_0, що $J_k(\tau_0 e_0) < 0$. Тепер залишається взяти $e = \tau_0 e_0$ і лему доведено. □

Доведення теореми 1.4. Нехай умови теореми виконуються для $r \geq 0$. Леми 1.4 та 1.5 показують, що для функціонал J_k виконуються майже всі умови теореми 1.3. Залишається тільки перевірити виконання нерівності $J_k(Pu) \leq J_k(u)$ для всіх $u \in E_k$.

Нехай $\varphi \in \left[2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right]$, $n \in \mathbb{Z}$. Оскільки

$$(APu)(s) = \int_{s}^{s+\cos\varphi} (Pu)'(\tau)d\tau = \int_{s}^{s+\cos\varphi} |u'(\tau)d\tau| \geq \left| \int_{s}^{s+\cos\varphi} u'(\tau)d\tau \right|$$

і

$$(BPu)(s) = \int_{s}^{s+\sin\varphi} (Pu)'(\tau)d\tau = \int_{s}^{s+\sin\varphi} |u'(\tau)d\tau| \geq \left| \int_{s}^{s+\sin\varphi} u'(\tau)d\tau \right|,$$

то

$$(APu)(s) \geq |(APu)(s)| \geq (Au)(s)$$

і

$$(BPu)(s) \geq \left|(BPu)(s)\right| \geq (Bu)(s).$$

Оскільки, згідно зауваження 1.1, потенціали $f_i(r)$ є неспадними, то

$$J_k(Pu) = \int_{-k}^{k} \Big[c^2 \left((Pu)'(s)\right)^2 - c_1^2 \left(APu(s)\right)^2 - c_2^2 \left(BPu(s)\right)^2 -$$

$$- f_1\left(APu(s)\right) - f_2\left(BPu(s)\right) \Big] ds =$$

$$= \int_{-k}^{k} \Big[c^2 \left(u'(s)\right)^2 - c_1^2 \left(APu(s)\right)^2 - c_2^2 \left(BPu(s)\right)^2 - f_1\left(APu(s)\right) - f_2\left(BPu(s)\right) \Big] ds \leq$$

$$\leq \int_{-k}^{k} \Big[c^2 \left(u'(s)\right)^2 - c_1^2 \left(Au(s)\right)^2 - c_2^2 \left(Bu(s)\right)^2 - f_1\left(Au(s)\right) - f_2\left(Bu(s)\right) \Big] ds = J_k(u).$$

Таким чином, за теоремою 1.3 існує нетривіальна критична точка $u \in PE_k$ функціоналу J_k така, що $J_k(u) \geq \beta$ *з* $\beta > 0$ з леми 1.1. Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in PE_k \subset E_k$, яка є розв'язком задачі (1.3), (1.8). Крім того, за зауваженням 1.2 цей розв'язок неспадний і не сталий в силу означення простору E_k.

Випадок $r \geq 0$ аналогічний (із заміною *P* на –*P*). При цьому одержуються незростаючі розв'язки.

Легко бачити, що при $\varphi \in \left[\pi + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$, у випадку $r \geq 0$ одержуються незростаючі хвилі, а у випадку $r \leq 0 -$неспадні. Теорему доведено. □

Далі будемо розглядати випадок выдокремлених біжучих хвиль, профіль яких є розв'язком рівняння (1.3), що задовольняє умови на нескінченності (1.9). Такі хвилі є в деякому сенсі граничним випадком розглянутих вище періодичних біжучих хвиль при $k \to \infty$. Тому їх буде побудовано за допомогою граничного переходу при $k \to \infty$ в критичних точках функціоналу

J_k. Цей метод називають методом періодичних апроксимацій.

Позначимо через E гільбертів простір

$$E = \left\{ u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}) : u' \in L^2(\mathbb{R}),\ u(0) = 0 \right\}$$

зі скалярним добутком

$$(u,v)_{\tilde{E}} = \int_{+\infty}^{-\infty} u'(s)v'(s)ds + u(0)v(0).$$

Всюди далі припускається, що виконуються умови $(i_2)-(iii_2)$.

На просторі E розглянемо функціонал

$$J(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{c^2}{2}(u'(s))^2 - \frac{c_1^2}{2}(Au(s))^2 - \frac{c_2^2}{2}(Bu(s))^2 - f_1(Au(s)) - f_2(Bu(s)) \right] ds. \quad (1.14)$$

Неважко переконатися, що $J-$ функціонал класу C^1 на E, а його похідна визначається формулою

$$\left\langle J'(u), h \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[c^2 u'(s)h'(s) - c_1^2 Au(s)Ah(s) - c_2^2 Bu(s)Bh(s) - \right.$$

$$\left. - f_1'(Au(s))Ah(s) - f_2'(Bu(s))Bh(s) \right] ds$$

для $u, h \in E$. Більше того, критичні точки функціоналу J є розв'язками рівняння (1.3), що задовольняють умови (1.9).

Наступна теорема встановлює існування відокремлених біжучих хвиль з неспадними і незростаючими профілями.

Теорема 1.5. *Нехай виконуються умови* $(i_2)-(iii_2)$. *Тоді, якщо* $\varphi \in \left[\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi \right]$, $n \in \mathbb{Z}$ *і* $c_0^2 < c^2 < c_0^2 + l$, *то рівняння (1.3) має несталі як неспадні, так і незростаючі розв'язки, які задовольняють умови (1.9).*

Далі нам знадобляться такі дві леми (див. |Панков, Ротос|, Лема 2 і Лема 3). Перша з них є одним із варіантів принципу концентрованої компактності Ліонса [19].

Лема 1.6. *Нехай послідовність* $\{u_n\} \subset E_{k_n}$, $k_n \to \infty$ *, така, що* $\|u_n\|_{k_n}$ *обмежена. Тоді виконується одна з таких двох можливостей:*

(a) (нерозпливання) для будь-якого $\sigma > 0$ *існує* $\eta > 0$, підпослідовність послідовності $\{u_n\}$ *(з тим самим позначенням) та послідовність* $\{\zeta_n\} \subset \mathbb{R}$*, такі, що*

$$\int_{\zeta_n-\sigma}^{\zeta_n+\sigma} \left(|Au_n(s)|^2 + |Bu_n(s)|^2 \right) ds \geq \eta; \tag{1.15}$$

або

(b) (розпливання) $\|Au_n\|_{L^p(-k_n,k_n)} + \|Bu_n\|_{L^p(-k_n,k_n)} \to 0$ *для всіх* $p > 2$.

Крім того, якщо додатково виконується умова (i_2), $c > c_0$ *і* $\|J_k(u_n)\|_{k_n,*} \to 0$*, то у випадку (b) маємо, що* $\|(u_n)\|_{k_n} \to 0$.

Друга лема дає верхню рівномірну оцінку для значення гірського перевалу функціоналу J_k.

Лема 1.7. *Нехай виконуються умови* $(i_2)-(iii_2)$*, і* $c_0^2 < c^2 < c_0^2 + l$*. Тоді існує така додатна стала K, що значення гірського перевалу* b_k *функціоналу* J_k *задовольняє нерівність*

$$b_k \leq K \tag{1.16}$$

для всіх $k > 1$.

Доведення теореми 1.5. Зафіксуємо довільну послідовність $\{k_n\}, k_n \to \infty$, і виберемо послідовність $\{c_n\}, c_n \to c$ так, щоб теорема 1.4 гарантувала існування біжучої хвилі з неспадним профілем $u_n \in E_{k_n}$ та швидкістю c_n ($c_n = c$ у випадку умови (iv_2)). Далі ми будемо часто переходити до підпослідовності без зміни позначення. Також позначимо через $\tilde{J}_{k_n}$ функціонал J_{k_n} з c заміненим на c_n.

Методом від супротивного покажемо, що послідовність $\{\|u_n\|_{k_n}\}$ обмежена. Припустимо протилежне. Тоді, переходячи до підпослідовності, можна вважати, що $\|u_n\|_{k_n} \to \infty$. За лемою 1.6, для $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{k_n}}$ маємо, що виконується одна з двох можливостей: *(a)* (нерозпливання) або *(b)* (розпливання).

Припустимо, що виконується нерозпливання. Необмежуючи загальності можна вважати, що в рівності (2.13): $\zeta_n = 0$. Оскільки $\|v_n\|_{k_n} = 1$, то, переходячи до підпослідовності, можна вважати, що $v_n \to v$ слабко в $H^1_{loc}(\mathbb{R})$ і рівномірно на кожному скінченному інтервалі. Більше того, $v \in E$ та $\|v\| \le 1$, і нерозпливання означає, що v не є сталою.

Нехай тепер $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Тоді для всіх достатньо великих n: $2k_n$-періодизація h_n функції h є коректно визначеною і належить простору E_{k_n}, причому

$$0 = \frac{1}{\|u_n\|_{k_n}} \left\langle \tilde{J}_k'(u_n), h_n \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[c_n^2 v_n'(s) h'(s) - (c_1^2 + l) A v_n(s) A h(s) - (c_2^2 + l) B v_n(s) B h(s) \right] ds -$$

$$- \frac{1}{\|u_n\|_{k_n}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[g_1(A u_n(s)) + g_2(B u_n(s)) \right] ds.$$

Оскільки функції g_i є обмеженими, то другий інтеграл в правій частині останньої рівності прямує до нуля. Тому, переходячи до границі при $n \to \infty$, одержуємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[c_n^2 v_n'(s) h'(s) - (c_1^2 + l) A v(s) A h(s) - (c_2^2 + l) B v(s) B h(s) \right] ds = 0 .$$

Це означає, що

$$(Lv)(s) := -c^2 v''(s) + \left(c_1^2 + l\right)\left(v(s + \cos\varphi) + v(s - \cos\varphi) - 2v(s)\right) +$$

$$+ \left(c_2^2 + l\right)\left(v(s + \sin\varphi) + v(s - \sin\varphi) - 2v(s)\right) = 0 .$$

Оператор L є псевдодиференціальним оператором з символом $\sigma(\xi)$, введеним у попередньому підрозділі. Очевидно, що $Lv'=0$ та $v'\in L^2(\mathbb{R})\setminus\{0\}$. З іншого боку, використовуючи перетворення Фур'є, одержуємо, що $\sigma(\xi)\hat{v}'(\xi)=0$ і, отже, $v'=0$. Отримали протиріччя, яке виключає нерозпливання.

Тепер покажемо методом від супротивного, що для v_n розпливання також неможливе. У цьому випадку маємо, що

$$\|Av_n\|_{L^p(-k_n,k_n)}+\|Bv_n\|_{L^p(-k_n,k_n)}\to 0\ (n\to\infty)$$

для всіх $p>2$. Зафіксуємо довільне таке p. Маємо, що

$$0=\frac{1}{\|u_n\|_{k_n}^2}\left\langle \tilde{J}_k'(u_n),h_n\right\rangle=$$

$$=\int_{-k_n}^{k_n}\left[c_n^2v_n'(s)^2-c_1^2(Av_n(s))^2-c_2^2(Bv_n(s))^2\right]ds-$$

$$-\int_{-k_n}^{k_n}\left[\frac{h_1(Au_n(s))}{Au_n(s)}(Av_n(s))^2+\frac{h_2(Bu_n(s))}{Bu_n(s)}(Bv_n(s))^2\right]ds.$$

Оскільки $c_n\to c$, то $2\alpha_0:=\inf(c_n\to c_0)>0$ і, отже,

$$2\alpha_0=2\alpha_0\|v_n\|_{k_n}^2\le\int_{-k_n}^{k_n}\left[\frac{h_1(Au_n(s))}{Au_n(s)}(Av_n(s))^2+\frac{h_2(Bu_n(s))}{Bu_n(s)}(Bv_n(s))^2\right]ds. \quad (1.17)$$

За припущенням (i_2), існує таке $r_0>0$, що $\dfrac{h_i(r)}{r}\le\alpha_0$ при $|r|\le r_0$. Нехай $D_n=\{s\in[-k_n,k_n]:\max\left\{|Au_n(s)|,|Bu_n(s)|\le r_0\right\}$ *і* $CD_n=[-k_n,k_n]\setminus D_n$. Тоді

$$\int_{D_n}\left[\frac{h_1(Au_n(s))}{Au_n(s)}(Av_n(s))^2+\frac{h_2(Bu_n(s))}{Bu_n(s)}(Bv_n(s))^2\right]ds\le$$

$$\le\alpha_0\int_{D_n}\left[(Av_n(s))^2+(Bv_n(s))^2\right]ds\le$$

$$\le\left[\|Av_n\|_{L^2(-k_n,k_n)}^2+\|Bv_n\|_{L^2(-k_n,k_n)}^2\right]\le\alpha_0\|v_n\|_{k_n}^2=\alpha_0\,.$$

Звідси враховуючи рівність (1.17), одержуємо, що

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{CD_n} \left[\frac{h_1(Au_n(s))}{Au_n(s)} (Av_n(s))^2 + \frac{h_2(Bu_n(s))}{Bu_n(s)} (Bv_n(s))^2 \right] ds \geq \alpha_0. \qquad (1.18)$$

З іншого боку, за припущенням (ii_2), існує така стала $\alpha_1 > 0$, що $|h_i(r)| \leq \alpha_1 |r|$ для всіх r. Таким чином, за нерівністю Гельдера маємо

$$\int_{CD_n} \left[\frac{h_1(Au_n(s))}{Au_n(s)} (Av_n(s))^2 + \frac{h_2(Bu_n(s))}{Bu_n(s)} (Bv_n(s))^2 \right] ds \geq$$

$$\leq \alpha_1 \left(meas(CD_n) \right)^{\frac{p-2}{p}} \left(|Av_n|^{\frac{2}{p}}_{L^p(-k_n,k_n)} + |Bv_n|^{\frac{2}{p}}_{L^p(-k_n,k_n)} \right), \qquad (1.19)$$

де $meas$ позначає міру Лебега. З нерівності (1.18), враховуючи (1.17), одержуємо, що $meas(CD_n) \to \infty$. Тоді, за припущенням (iii_2), маємо

$$b_{k_n} = \tilde{J}_{k_n}(u_n) = \tilde{J}_{k_n}(u_n) - \frac{1}{2} \left\langle \tilde{J}'_{k_n}(u_n), u_n \right\rangle =$$

$$= \int_{-k_n}^{k_n} \left[\frac{1}{2} h_1(Au_n(s)) Au_n(s) - f_1(Au_n(s)) \right] ds +$$

$$+ \int_{-k_n}^{k_n} \left[\frac{1}{2} h_2(Bu_n(s)) Bu_n(s) - f_2(Bu_n(s)) \right] ds \geq$$

$$\geq \int_{CD_n} \left[\frac{1}{2} h_1(Au_n(s)) Au_n(s) - f_1(Au_n(s)) \right] ds +$$

$$+ \int_{CD_n} \left[\frac{1}{2} h_2(Bu_n(s)) Bu_n(s) - f_2(Bu_n(s)) \right] ds \geq 2\delta_0 meas\left(CD_n\right) \to \infty.$$

Отримали протиріччя, оскільки за лемою 1.7, b_k обмежено зверху. Отже, розпливання також неможливе, а це означає, що припущення про необмеженість послідовності $\{\|u_n\|_{k_n}\}$ хибне.

Обмеженість $\{\|u_n\|_{k_n}\}$ означає, що переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), існують $\varsigma_n \in \mathbb{R}$ і функція $u \neq 0$ такі, що $u_n(\cdot + \varsigma) \to u$ слабко в $H^1_{loc}(\mathbb{R})$ і рівномірно на кожному скінченному інтервалі. Більше того, обмеженість $\{\|u_n\|_{k_n}\}$ означає, що $\|u\|$ скінченна і, отже, $u \in E$. Неважко перевірити, що u є неспадною критичною точкою функціоналу J і, отже, розв'язком рівняння (1.3), що задовольняє умову (1.9).

Доведення у випадку незростаючих розв'язків аналогічне. Теорему доведено. □

1.1.2. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона. Дискретні нескінченновимірні динамічні системи широко використовуються для моделювання складних квантових і оптичних явищ. Серед таких систем найбільш відомими є системи типу Фермі–Пасти–Улама, дискретні нелінійне рівняння типу Шредінгера, дискретні рівняння типу Клейна-Ґордона. Серед розв'язків таких систем особливої уваги заслуговують розв'язки у вигляді біжучих і стоячих хвиль. В статтях [1; 17; 18; 35; 40] для рівнянь типу Клейна-Ґордона досліджено питання існування біжучих хвиль. В статтях [6; 21; 22; 26; 37; 38] досліджувалось питання існування стоячих хвиль для дискретних нелінійних рівнянь типу Шредінгера. В той же час для рівнянь типу Клейна-Ґордона відомі декілька праць [16; 20; 39; 42], в перших двох з яких вивчалося питання стійкості стоячих хвиль. Розглянемо більш детально результати одного з авторів цього підрозділу зі статті [42].

Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона із насичуваними нелінійностями.

Будемо вивчати дискретні нелінійні рівняння типу Клейна-Ґордона, які описують динаміку нескінченного ланцюга лінійно зв'язаних осциляторів:

$$\ddot{q}_n - (\Delta q)_n + m^2 q_n + f(q_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.20}$$

де $q_n = q_n(t)$ – узагальнена координата n-го осцилятора в момент часу t, $(\Delta q)_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n$ – одновимірний дискретний оператор Лапласа, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ калібровно інваріантна функція, тобто

$$f\left(e^{i\omega t}z\right)=e^{i\omega t}f(z) \tag{1.21}$$

для всіх $\omega\in\mathbb{R}$. Припустимо, що $f\left(\mathbb{R}\right)\subset\mathbb{R}$. Рівняння (1.20) представляють собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь. Далі будемо розглядати *насичувані* нелінійності $f(z)$. Прикладом таких нелінійностей є

$$f(u)=\frac{\nu|u|^{p}}{1+\mu|u|^{p}}u,\ \mu>0,\nu>0,\ p>1.$$

Будемо шукати розв’язки системи (1.20) у вигляді стоячих хвиль

$$q_n\left(t\right)=u_n\exp\left(-i\omega t\right), \tag{1.22}$$

де $\left(u_n\right)\subset\mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega\in\mathbb{R}$ – частотою. Такі розв’язки іноді називають *бризерами* або *лакунарними солітонами*.

Підставляючи стоячу хвилю (1.22) в рівняння (1.20), одержуємо систему

$$\left(Lu\right)_n+\omega^2u_n=f\left(u_n\right),\ \ n\in\mathbb{Z}, \tag{1.23}$$

де $\left(Lu\right)_n=\left(\Delta u\right)_n-m^2u_n$.

Будемо вивчати стоячі хвилі двох видів: з k-періодичною амплітудою та амплітудою, яка збігається до нуля (локалізовані хвилі), тобто

$$u_{n+k}=u_n,\ \ n\in\mathbb{Z}, \tag{1.24}$$

де k – деяке натуральне число, то

$$\lim_{n\to\pm\infty}u_n=0 \tag{1.25}$$

відповідно.

Нехай $F\left(t\right)$ первісна функція для функції $f\left(t\right)$, тобто $F\left(t\right)=\int\limits_0^t f\left(s\right)ds.$

Тоді всюди далі припустимо, що виконуються такі умови:

$\left(i_3\right)$ $f\left(t\right)=o\left(t\right), t\to0;$

$\left(ii_3\right)$ $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\dfrac{f\left(t\right)}{t}=l<\infty;$

$\left(iii_3\right)$ $f\in C^1(\mathbb{R})$ і $f\left(t\right)t<f'\left(t\right)t^2, t\neq0;$

(iv_3) $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2}f(t)t-F(t)\right)=\infty.$

З системою (1.23) пов'язується функціонал

$$J(u)=\frac{1}{2}\left(Lu+\omega^2 u,\,u\right)-\sum_{n\in\mathbb{Z}}F(u_n),$$

визначений на гільбертовому просторі $l^2=l^2(\mathbb{Z})$ зі скалярним добутком $(u,\,v)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}u_n v_n$ та нормою $\|u\|=\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}|u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Зазначимо, що кожний елемент простору l^2 автоматично задовольняє умову (1.25).

Нехай $k\geq 2$ – натуральне число. Тоді через l_k^2 позначимо простір всіх k-періодичних послідовностей $\{u_n\}$, які задовольняють умову (1.24). Це скінченновимірний простір зі скалярним добутком $(u,\,v)_k=\sum\limits_{n\in Q_k}u_n v_n$ та нормою $\|u\|_k=\left(\sum\limits_{n\in Q_k}|u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, де $Q_k=\left\{n\in\mathbb{Z}:-\left[\frac{k}{2}\right]\leq n\leq k-\left[\frac{k}{2}\right]-1\right\}$, $\left[\frac{k}{2}\right]$ – ціла частина $\frac{k}{2}$.

На просторі l_k^2 розглянемо функціонал

$$J_k(u)=\frac{1}{2}\left(L_k u+\omega^2 u,\,u\right)_k-\sum_{n\in Q_k}F(u_n),$$

де L_k – оператор L, який діє в просторі l_k^2.

Іноді ми також будемо розглядати простори l^p та l_k^p $(1\leq p\leq\infty)$ з нормами

$$\|u\|_{l^p}=\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ \|u\|_{l_k^p}=\left(\sum_{n\in Q_k}|u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

з відомою зміною при $p=\infty$. Нагадаємо, що при $1\leq p\leq q\leq\infty$

$$\|u\|_{l^q}\leq\|u\|_{l^p},\ \|u\|_{l_k^q}\leq\|u\|_{l_k^p}. \tag{1.26}$$

Зауваження 1.4. Оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі l^2, а його спектр збігається з відрізком $\left[-m^2-4,-m^2\right]$ і є абсолютно неперервним. Причому за виконання умов (i_3), (ii_3) функція $\frac{f(t)}{|t|}$ строго зростаюча, тоді як функція $\frac{1}{2}f(t)t-F(t)$ строго зростає при $t \geq 0$ і строго спадає при $t \leq 0$, а отже, є невід'ємною.

За зроблених припущень функціонали J_k та J належать класу C^1, а їх похідні визначаються формулами

$$\left\langle J_k'(u),h\right\rangle=\left(L_k u+\omega^2 u,h\right)_k-\sum_{n\in Q_k} f(u_n)h_n,\ u,h\in l_k^2, \tag{1.27}$$

$$\left\langle J'(u),h\right\rangle=\left(Lu+\omega^2 u,h\right)-\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(u_n)h_n,\ u,h\in l^2. \tag{1.28}$$

Крім того, критичні точки J_k та J є розв'язками рівняння (1.23), що задовольняють відповідно умови (1.24) та (1.25).

Для функціоналів J_k та J означимо відповідні *многовиди Нехарі*

$$N_k:=\left\{u\in l_k^2 \mid \left\langle J_k'(u),u\right\rangle=0,\ u\neq 0\right\}\subset l_k^2$$

та

$$N:=\left\{u\in l^2 \mid \left\langle J'(u),u\right\rangle=0,\ u\neq 0\right\}\subset l^2.$$

Введемо позначення $I_k(u):=\left\langle J_k'(u),u\right\rangle$ та $I(u):=\left\langle J'(u),u\right\rangle$. Це C^1-функціонали, похідні яких визначаються формулами

$$\left\langle I_k'(u),h\right\rangle=2\left(L_k u+\omega^2 u,h\right)_k-\sum_{n\in Q_k}\left(f(u_n)+f'(u_n)u_n\right)h_n, \tag{1.29}$$

$$\left\langle I'(u),h\right\rangle=2\left(Lu+\omega^2 u,h\right)-\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left(f(u_n)+f'(u_n)u_n\right)h_n. \tag{1.30}$$

Лема 1.8. *Нехай виконуються умови* $(i_3)-(iii_3)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ *та* $\omega^2 - l < m^2 + 4$. *Тоді множини* N_k *та* N *є непорожніми замкненими* C^1*-підмноговидами відповідно у просторах* l_k^2 *та* l^2, *на яких* $I_k'(u) \neq 0$ *та* $I'(u) \neq 0$. *Крім того, існує* $\beta_0 > 0$, *яке не залежить від* k *і таке, що* $\|u\|_k \geq \beta_0$, $u \in N_k$, *та* $\|u\| \geq \beta_0$, $u \in N$.

Доведення. Розглянемо випадок N_k (інший випадок аналогічний). Спочатку покажемо, що многовид N_k непорожній. Нехай $\delta \in \left(\omega^2, l + m^2 + 4\right)$ і E_δ – спектральний підпростір оператора $L_k + \omega^2$ в просторі l_k^2, що відповідає відрізку $[0, \delta]$. Оскільки $\omega^2 \in \sigma\left(L_k + \omega^2\right)$, то $E_\delta \neq \{0\}$. Нехай $v \in E_\delta \setminus \{0\}$. За умовою (i_3)

$$\left\langle J_k'(tv), tv \right\rangle = t^2 \left(L_k v + \omega^2 v, v\right)_k - \sum_{n \in Q_k} f(tv_n) tv_n =$$

$$= t^2 \left(L_k v + \omega^2 v, v\right)_k - o\left(t^2\right) > 0$$

для достатньо малих $t > 0$. З іншого боку,

$$\left\langle J_k'(tv), tv \right\rangle = t^2 \left(L_k v + \omega^2 v, v\right)_k - \sum_{n \in Q_k} f(tv_n) tv_n \leq$$

$$\leq t^2 \left(\delta \|v\|_k^2 - \sum_{n \in Q_k} \frac{f(tv_n) v_n^2}{tv_n} \right).$$

За умовою (ii_3) сума в дужках збігається до $l\|v\|_k^2$, а тому $\left\langle J_k'(tv), tv \right\rangle < 0$ для достатньо великих $t > 0$. Тоді існує $t^* > 0$ таке, що $\left\langle J_k'(t^* v), t^* v \right\rangle = 0$ і $t^* v \in N_k$. Отже, $N_k \neq \varnothing$.

Нехай $u \in N_k$, тоді з рівностей (1.27), (1.29) та означення N_k, одержуємо

$$\left\langle I_k'(u), u \right\rangle = \left\langle I_k'(u), u \right\rangle - 2I_k(u) = \sum_{n \in Q_k} \left(f(u_n) u_n - f'(u_n) u_n^2 \right).$$

За умовою (iii_3) ця сума є від'ємною. Тому $I'_k(u) \neq 0$ і за теоремою про неявну функцію (див. [13], Теорема 4.2.1), N_k є C^1-підмноговидом в просторі l_k^2. Замкненість N_k очевидна.

Перейдемо тепер до другої частини леми. Нехай $\varphi(r) = \sup\limits_{|t|\le r} \frac{f(t)}{t}$. Це зростаюча функція від $r \ge 0$ і, згідно (i_3), $\varphi(r) \to 0$ при $r \to 0$. Нехай $u \in N_k$. Зазначимо, що оператор $L_k + \omega^2$ додатно визначений. Тоді з означення многовиду Нехарі і нерівностей (1.26) маємо

$$\omega^2 \|u\|_k^2 \le \left(L_k u + \omega^2 u,\, u\right)_k = \sum_{n \in Q_k} f(u_n) u_n \le$$

$$\le \varphi\left(\|u\|_{l_k^\infty}\right) \cdot \|u\|_k^2 \le \varphi\left(\|u\|_k\right) \cdot \|u\|_k^2 .$$

А це означає, що $\varphi\left(\|u\|_k\right) \ge \omega^2$. Оскільки функція φ зростаюча, то знайдеться $\beta_0 > 0$ таке, що $\|u\|_k \ge \beta_0$, $u \in N_k$. Лему доведено. □

Наслідок 1.1. *Якщо $I_k(v) \le 0$ (відповідно $I(v) \le 0$), то існує єдине $t^* \in (0, 1]$ таке, що $t^* v \in N_k$ (відповідно $t^* v \in N$), а також існує таке $v \in E_k \setminus \{0\}$ (відповідно $v \in E \setminus \{0\}$), що $J_k(v) < 0$ (відповідно $J(v) < 0$).*

З означень J_k та I_k випливає, що на N_k

$$J_k(u) = J_k(u) - \frac{1}{2} I_k(u) = \sum_{n \in Q_k} \left(\frac{1}{2} f(u_n) u_n - F(u_n) \right). \tag{1.31}$$

За умовою (iii_3) $J_k(u) \ge 0$, $u \in N_k$. Аналогічно, з означень J та I випливає, що на N_k

$$J(u) = J(u) - \frac{1}{2} I(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} f(u_n) u_n - F(u_n) \right) \tag{1.32}$$

та $J(u) \ge 0$, $u \in N$.

Лема 1.9. *Нехай виконуються умови* $(i_3)-(iii_3)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ *та* $\omega^2 - l < m^2 + 4$. *Тоді існує таке число* $\alpha_0 = \alpha_0(k) > 0$, *що* $J_k(u) \ge \alpha_0$ *для всіх* $u \in N_k$.

Доведення. Нехай $u \in N_k$, тоді має місце рівність (1.31). За лемою 1.8, $\|u\|_k \ge \beta_0 > 0$. Отже, існують $n_0 \in Q_k$ (залежне від u) і $\delta_0 = \delta_0(k, \beta_0) > 0$ (незалежне від u) такі, що $|u_{n_0}| \ge \delta_0$. Тоді, поклавши $\alpha_0 = \frac{1}{2} f(\delta_0)\delta_0 - F(\delta_0)$, за зауваженням 1.1 маємо, що $J_k(u) \ge \alpha_0$ для $u \in N_k$. Лему доведено. □

Тепер розглянемо дві задачі мінімізації

$$\inf\{J_k(u) : u \in N_k\} =: m_k, \tag{1.33}$$

$$\inf\{J(u) : u \in N\} =: \overline{m}. \tag{1.34}$$

Виявляється, що розв’язки цих задач є розв’язками системи (1.23) у відповідних просторах.

Лема 1.10. *Нехай виконуються умови* $(i_3)-(iii_3)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ *та* $\omega^2 - l < m^2 + 4$. *Тоді розв’язки задач (1.33) і (1.34) є розв’язками рівняння (1.23) в просторах* l_k^2 *та* l^2 *відповідно.*

Доведення. Розглянемо випадок задачі (1.34), інший випадок аналогічний. Нехай $u \in N$ розв’язок задачі мінімізації (1.34). Згідно методу множників Лагранжа, існує $\lambda \in \mathbb{R}$ таке, що

$$J'(u) + \lambda I'(u) = 0.$$

Оскільки $\langle J'(u), u\rangle = I(u) = 0$, то, враховуючи рівність (1.30), одержуємо

$$0 = \lambda\langle I'(u), u\rangle = \lambda \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} f(u_n)u_n - F(u_n) \right).$$

За умовою (iii_3) сума в правій частині останньої рівності від’ємна і, отже, $\lambda = 0$, що й доводить лему. □

Лема 1.11. *Нехай виконуються умови* $(i_3)-(iv_3)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ *та* $\omega^2 - l < m^2 + 4$. *Тоді задача (1.33) має розв’язок.*

Доведення. Нехай $\{u^j\} \subset N_k$ – мінімізуюча послідовність для J_k, тобто $J_k(u^j) \to m_k$. З рівності (1.31) маємо

$$J_k(u^j) = \sum_{n \in Q_k} \left(\frac{1}{2} f(u_n^j) u_n^j - F(u_n^j) \right). \tag{1.35}$$

Покажемо, що послідовність $\{u^j\}$ обмежена в l_k^2. Припустимо протилежне. Оскільки простір l_k^2 скінченновимірний, а l^∞-норма еквівалентна евклідовій нормі на l_k^2, то, переходячи до підпослідовності, маємо, що $\|u^j\|_{l^\infty} \to \infty$. Тоді, для наступної підпослідовності, для якої збережемо теж саме позначення $\{u^j\}$, існує $n_0 \in Q_k$ таке, що $u_{n_0}^j \to \infty$. Тоді за рівністю (1.35), враховуючи умову (iv_3), це означає, що $J_k(u^j) \to \infty$. Отримали суперечність, оскільки $J_k(u^j) \to m_k$ і, отже, послідовність $\{u^j\}$ обмежена.

Оскільки l_k^2 скінченновимірний простір та $\{u^j\}$ обмежена послідовність, то, переходячи до підпослідовності, ми можемо вважати, що $\{u^j\}$ збігається до $u \in l_k^2$. Але многовид Нехарі N_k замкнений і J_k неперервний функціонал, тому $u \in N_k$ і $J_k(u) = m_k$. Лему доведено. □

Наступна теорема встановлює існування періодичних розв'язків.

Теорема 1.6. *Нехай виконуються умови* $(i_3)-(iv_3)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ *та* $\omega^2 - l < m^2 + 4$. *Тоді для будь-якого* $k \geq 2$ *рівняння (1.23) має нетривіальний* k*-періодичний розв'язок* $u \in l_k^2$. *Більше того, якщо функція* f *непарна, то рівняння (1.23) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in l_k^2$, *один з яких невід'ємний.*

Доведення. Існування нетривіального k-періодичного розв'язку $u \in l_k^2$ випливає з леми 1.11.

Нехай f непарна функція. Тоді F парна і очевидно, що рівняння (1.23) має два нетривіальні розв'язки $\pm u \in l_k^2$. Легко бачити, що

$$\left(L|u|, |u|\right)_k \leq \left(Lu, u\right)_k .$$

Крім того, $f\left(|t|\right)|t| = f\left(t\right)t$ та $F\left(|t|\right) = F\left(t\right)$. А це означає, що

$$I_k\left(|u|\right) \leq I_k\left(u\right) = 0 .$$

З іншого боку,

$$\sum_{n\in Q_k}\left(\frac{1}{2}f\left(|u_n|\right)|u_n| - F\left(|u_n|\right)\right) = \sum_{n\in Q_k}\left(\frac{1}{2}f\left(u_n\right)u_n - F\left(u_n\right)\right) = m_k .$$

За наслідком 1.1, існує $t^* \in (0, 1]$ таке, що $u^* = t^*|u| \in N_k$. Тоді за зауваженням 1.1 та рівністю (1.31), маємо

$$J_k\left(u^*\right) \leq \sum_{n\in Q_k}\left(\frac{1}{2}f\left(u_n\right)u_n - F\left(u_n\right)\right) = m_k .$$

Таким чином, $J_k\left(u^*\right) = m_k$ та u^* невід'ємний розв'язок, і, отже, можна взяти $u = u^*$. Теорему доведено. □

Аналогічну лему до леми 1.11 для задачі (1.34) довести складно. Тому для одержання l^2-розв'язку рівняння (1.23) ми скористаємося методом періодичних апроксимацій, тобто перейдемо до границі при $k \to \infty$. Для цього знадобиться лема:

Лема 1.12. *Нехай виконуються умови* $(i_3)-(iv_3)$, $\omega^2 > m^2 + 4$ *та* $\omega^2 - l < m^2 + 4$. *І нехай* u^k *–* k*-періодичний розв'язок задачі (1.33). Тоді послідовності* $\{m_k\} = \left\{J_k\left(u^k\right)\right\}$ *та* $\left\{\left\|u^k\right\|_k\right\}$ *обмежені.*

Доведення. Крок 1. Спочатку нагадаємо, що спектр оператора L абсолютно неперервний і збігається з відрізком $\left[-m^2-4, -m^2\right]$. А отже, для будь-якого $\delta \in \left(\omega^2, l + m^2 + 4\right)$ спектральний підпростір оператора $L + \omega^2$ в просторі l^2, що відповідає відрізку $\left[0,\delta\right]$, ненульовий. Нехай $w\neq 0$ довільний вектор з цього підпростору. Тоді маємо

$$\begin{aligned} I\left(tw\right)=\left\langle J'\left(tw\right),tw\right\rangle=t^2\left(Lw+\omega^2 w,w\right)-\sum_{n\in\mathbb{Z}}f\left(tw_n\right)tw_n\leq \\ \leq t^2\left(\delta\left\|w\right\|^2-\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{f\left(tw_n\right)}{tw_n}w_n^2\right). \end{aligned} \tag{1.36}$$

За умовами $\left(i_3\right)$ та $\left(ii_3\right)$ існує стала $C>0$, яка не залежить від n і t, і така, що

$$\left|\frac{f\left(tw_n\right)}{tw_n}\right|\leq C$$

для всіх $n\in\mathbb{Z}$ і $t\in\mathbb{R}$. Отже, ряд в правій частині нерівності (1.36) збігається рівномірно по відношенню до $t\in\mathbb{R}$. Тому, згідно умови $\left(ii_3\right)$, сума цього ряду збігається до $l\left\|w\right\|^2$, і нерівність (1.36) означає, що $I\left(tw\right)<0$ для всіх достатньо великих $t>0$. Зафіксуємо довільне t з такою властивістю. Оскільки послідовності зі скінченним носієм щільні в l^2, то існує вектор $\tilde{w}\in l^2$ зі скінченним носієм достатньо близький до tw і такий, що $I\left(\tilde{w}\right)<0$. За наслідком 1.1 існує $t^*\in\left(0,1\right)$ таке, що $I\left(v\right)=0$, де $v=t^*\tilde{w}$. Оскільки v має скінченний носій, то $\operatorname{supp}v\subset Q_k$ для всіх достатньо великих k. Тоді для будь-якого такого k нехай $v^k\in l_k^2$ єдиний елемент такий, що $v_n^k=v_n$ для $n\in Q_k$. Легко бачити, що $I_k\left(v^k\right)=I\left(v\right)=0$ та $m_k\leq J_k\left(v^k\right)=J\left(v\right)$. Отже, послідовність $\left\{m_k\right\}$ обмежена.

Крок 2. Методом від супротивного доведемо, що $\left\{\left\|u^k\right\|_k\right\}$ також обмежена. Припустимо, що $\left\{\left\|u^k\right\|_k\right\}$ необмежена. Тоді, переходячи до підпослідовності (яку будемо так само позначати), можна вважати, що $\left\|u^k\right\|_k\to\infty$. Візьмемо $v^k=\dfrac{u^k}{\left\|u^k\right\|_k}$, тоді $\left\|v^k\right\|_k=1$ та виконується одна з таких двох умов:

$\left(a\right)$ *послідовність* $\left\{v^k\right\}$ *задовольняє умову* $\left\|v^k\right\|_{l_k^\infty}=\left\|u^k\right\|_{l^\infty}\to 0$ *при* $k\to\infty$*;*

(b) *існують такі* $\delta > 0$ *та* $x_k \in \mathbb{Z}$, *що* $\left| v_{x_k}^k \right| \geq \delta$ *для всіх* k.

Розглянемо перший випадок (умова (a)). Оскільки оператор L невід'ємний та

$$0 = \frac{1}{\left\| u^k \right\|_k^2} I_k\left(u^k\right) = \left(L_k v^k + \omega^2 v^k,\, v^k\right)_k - \sum_{n \in Q_k} \frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2,$$

то

$$\omega^2 = \omega^2 \left\| v^k \right\|_k^2 \leq \left(L_k v^k + \omega^2 v^k,\, v^k\right)_k = \sum_{n \in Q_k} \frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2. \tag{1.37}$$

За умовою (i) існує $t_0 > 0$ таке, що $\frac{f(t)}{t} \leq \frac{\omega^2}{2}$ при $t < |t_0|$. Нехай

$$A_k = \left\{ n \in Q_k : \left| u_n^k \right| < t_0 \right\},$$

$$B_k = \left\{ n \in Q_k : \left| u_n^k \right| \geq t_0 \right\}.$$

Тоді

$$\sum_{n \in A_k} \frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2 \leq \frac{\omega^2}{2} \sum_{n \in A_k} \left(v_n^k\right)^2 \leq \frac{\omega^2}{2} \left\| v^k \right\|_k^2 = \frac{\omega^2}{2}.$$

Звідси, враховуючи нерівність (1.37), одержуємо

$$\liminf_{k \to \infty} \sum_{n \in B_k} \frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2 = \varliminf_{k \to \infty} \sum_{n \in B_k} \frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2 \geq \frac{\omega^2}{2}. \tag{1.38}$$

З іншого боку, $\left| f(t) \right| \leq C_0 |u|$ з деякою сталою $C_0 > 0$ і за нерівністю Гельдера

$$\sum_{n \in B_k} \frac{f\left(u_n^k\right)}{u_n^k}\left(v_n^k\right)^2 \leq C_0 \left| B_k \right|^{\frac{p-2}{p}} \left\| v^k \right\|_{l_k^p}^{\frac{2}{p}} \tag{1.39}$$

для будь-якого $p > 2$, де $\left| B_k \right|$ – кількість елементів множини B_k. Легко перевірити, що

$$\left\| w \right\|_{l_k^p} \leq \left\| w \right\|_{l_k^\infty}^{\frac{p-2}{p}} \left\| w \right\|_k^{\frac{2}{p}}. \tag{1.40}$$

Тоді оскільки $\left\|v^k\right\|_{l_k^\infty} \to 0$, то нерівності (1.38), (1.39) і (1.40) показують, що $\left|B_k\right| \to \infty$. Нехай $\alpha_0 = \min\left\{\frac{1}{2} f\left(\pm t_0\right)\left(\pm t_0\right) - F\left(\pm t_0\right)\right\}$. Тоді з рівності (1.32) та зауваження 1.1 маємо

$$m_k = \sum_{n \in Q_k} \left(\frac{1}{2} f\left(u_n\right) u_n - F\left(u_n\right)\right) \geq \sum_{n \in B_k} \left(\frac{1}{2} f\left(u_n\right) u_n - F\left(u_n\right)\right) \geq$$

$$\geq \alpha_0 \left|B_k\right| \to \infty.$$

Одержали суперечність.

Розглянемо другий випадок (умова (b)). Згідно інваріантності рівняння (1.23) відносно дискретних зсувів, кратних k, можна вважати, що $x_k = 0$. Оскільки $\left\|v^k\right\|_k = 1$, то можна також вважати, що знайдеться елемент $v = \left\{v_n\right\}$ такий, що $v_n^k \to v_n$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ (переходячи до підпослідовності, якщо потрібно). Крім того, очевидно, що $v \in l^2$, $\|v\| \leq 1$ і $\left|v_0\right| \geq \delta$. Отже, $v \neq 0$.

Оскільки u^k – k-періодичний розв’язок рівняння (1.23), то

$$L v_n^k - \left(l - \omega^2\right) v_n^k = \frac{g\left(u_n^k\right)}{\left\|u^k\right\|_k}, \tag{1.41}$$

де $g(t) = f(t) - lt$ і за умовою $\left(ii_3\right)$ $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \frac{g(t)}{t} = 0.$ Якщо $v_n \neq 0$ для деяких $n \in \mathbb{Z}$, то $\left|u_n^k\right| \to \infty$. Переходячи до границі в рівності (1.41) при $k \to \infty$, маємо

$$L v_n - \left(l - \omega^2\right) v_n = 0,$$

тобто $v \in l^2$ — ненульовий власний вектор оператора L з власним значенням $l - \omega^2$. Але спектр оператора L в просторі l^2 є абсолютно неперервним. Знову отримали суперечність. Отже, послідовність $\left\{\left\|u^k\right\|_k\right\}$ обмежена. Лему доведено.

□

Основним результатом цього пункту є теорема:

Теорема 1.7. *Нехай виконуються умови* $(i_3)-(iv_3)$, $\omega^2 > m^2+4$ *та* $\omega^2 - l < m^2+4$. *Тоді рівняння (1.23) має нетривіальний розв'язок* $u \in l^2$. *Більше того, якщо функція* f *непарна, то рівняння (1.23) має два нетривіальні розв'язки* $\pm u \in l^2$, *один з яких невід'ємний.*

Доведення. Нехай $u^k \in l_k^2$ розв'язок рівняння (1.23). Тоді за лемою 1.12 послідовність $\left\{\left\|u^k\right\|_k\right\}$ обмежена та $\left\{u^k\right\}$ задовольняє одну з двох умов (a) або (b). В першому випадку нерівність (1.40) означає, що $\left\|u^k\right\|_{l_k^p} \to 0$ при $k\to\infty$ для будь-якого $p>2$. За умовою (i_3) для кожного $\varepsilon>0$ знайдеться $C_\varepsilon>0$ таке, що

$$\left|f(t)\right| \le \varepsilon|t| + C_\varepsilon |t|^{p-1}.$$

Оскільки u^k – k-періодичний розв'язок рівняння (1.23), то

$$\omega^2\left\|u^k\right\|_k^2 \le \left(L_k u^k + \omega^2 u^k,\, u^k\right)_k = \sum_{n\in Q_k} f\left(u_n^k\right)u_n^k \le \varepsilon\left\|u^k\right\|_k^2 + C_\varepsilon\left\|u^k\right\|_{l_k^p}^p.$$

Поклавши $\varepsilon = \dfrac{\omega^2}{2}$, одержуємо

$$\frac{\omega^2}{2}\left\|u^k\right\|_k^2 \le C_\varepsilon\left\|u^k\right\|_{l_k^p}^p \to 0$$

при $k\to\infty$. А це суперечить лемі 1.8 і, отже, виконання умови (a) неможливе.

Таким чином, виконується умова (b). Переходячи до підпослідовності і використовуючи інваріантність дискретних зсувів можна вважати, що $\left|u_0^k\right| \ge \delta$ з деяким $\delta>0$. Переходячи знову до підпослідовності, ми також можемо вважати, що існує послідовність $u=\{u_n\}$ така, що $u_n^k \to u_n$ для всіх $n\in\mathbb{Z}$. Легко бачити, що $u\in l^2$ та $u\ne 0$. Крім того, для рівняння (1.23) маємо поточкову збіжність і, отже, $u\in l^2$ – його нетривіальний розв'язок.

Друга частина теореми випливає з теореми 1.6. Теорему доведено. □

Зауваження 1.2. *Можна показати, що за виконання умов теореми 1.7,* $m_k \to \overline{m}$. *Крім того, розв'язок* $u \in l^2$*, одержаний у цій теоремі, є розв'язком задачі мінімізації (1.34), тобто* $J(u) = \overline{m}$.

Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона зі степеневими нелінійностями. Розглянемо більш детально результати статті [39]. У даній статті розглянемо дискретні рівняння типу Клейна-Ґордона

$$\ddot{q}_n - (\Delta q)_n + m^2 q_n - f(q_n) = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{1.42}$$

де $q_n = q_n(t)$ – узагальнена координата n-го осцилятора в момент часу t, $(\Delta q)_n = q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n$ – одновимірний дискретний оператор Лапласа.

Будемо вивчати рівняння (1) з нелінійностями вигляду

$$f(r) = d_n |r|^{2p} r, \quad \{d_n\} \subset \mathbb{R}, \; p \in \mathbb{N}.$$

Будемо шукати розв'язки системи (1.42) у вигляді стоячих хвиль

$$q_n(t) = u_n \exp(-i\omega t), \tag{1.43}$$

де $u_n \in \mathbb{R}$ називається амплітудою стоячої хвилі, а $\omega \in \mathbb{R}$ – частотою.

Підставляючи стоячу хвилю (1.43) в систему (1.42) і враховуючи, що $|\exp(-i\omega t)| = 1$, одержимо систему

$$-\Delta u_n - (\omega^2 - m^2) u_n = d_n |u_n|^{2p} u_n, \; n \in \mathbb{Z}. \tag{1.44}$$

Позначимо через $(Lu)_n = a_n u_{n+1} + a_{n-1} u_{n-1} + b_n u_n$ і розглянемо більш загальну систему

$$(Lu)_n - \omega^2 u_n = d_n |u_n|^{2p} u, \; n \in \mathbb{Z}. \tag{1.45}$$

Зауважимо, що оператор L є обмеженим і самоспряженим у просторі l_k^2. Його спектр $\sigma(L)$ має групову структуру, тобто $\sigma(L)$ є об'єднанням скінченного числа відрізків (див. [30]). Доповнення $\mathbb{R} \backslash \sigma(L)$ складається зі скінченного числа інтервалів, які називаються спектральними проміжками. Два з них напівскінченні. Якщо N=1, то скінченні проміжки не існують. Однак, у загальному випадку скінченні проміжки існують і найбільш цікавий випадок, коли ω^2 належить скінченному проміжку.

Всюди далі припускається, що виконується умова N-періодичності:

(i_4) *існує таке* $N \in \mathbb{N}$, *що коефіцієнти* a_n, b_n *і* d_n *є N-періодичними, тобто*

$$a_{n+N} = a_n,\ b_{n+N} = b_n \text{ і } d_{n+N} = d_n.$$

Будемо вивчати стоячі хвилі з kN-періодичною амплітудою (періодичні розв’язки) та амплітудою, яка на нескінченності збігається до нуля (локалізовані розв’язки), тобто

$$u_{n+kN} = u_n, \tag{1.46}$$

де k – фіксоване натуральне число, та

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{1.47}$$

відповідно.

З системою (1.45) пов’язується функціонал

$$J(u) = \frac{1}{2}\left(Lu - \omega^2 u, u\right) - \frac{1}{2p+2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n u_n^{2p+2},$$

визначений на гільбертовому просторі $l^2 = l^2(\mathbb{Z})$ із скалярним добутком

$$(u, v)_k = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n v_n .$$

Нагадаємо, що кожний елемент простору l^2 автоматично задовольняє умову (1.47).

Позначимо через l_k^2 скінченновимірний простір всіх kN-періодичних послідовностей зі скалярним добутком

$$(u, v)_k = \sum_{n\in Q_k} u_n v_n$$

та нормою

$$\|u\|_k = \left(\sum_{n\in Q_k} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

де

$$Q_k = \left\{ n \in \mathbb{Z} : -\left[\frac{kN}{2}\right] \le n \le kN - \left[\frac{kN}{2}\right] - 1 \right\},$$

і $\left[\dfrac{kN}{2}\right]$ – ціла частина $\dfrac{kN}{2}$.

На просторі l_k^2 розглянемо функціонал

$$J_k(u) = \frac{1}{2}\left(L_k u - \omega^2 u,\, u\right)_k - \frac{1}{2p+2} \sum_{n \in Q_k} d_n u_n^{2p+2},$$

де L_k – оператор L, який діє в просторі l_k^2.

За зроблених припущень функціонали J та J_k належать класу, а критичні точки цих функціоналів є розв'язками системи (1.45) з просторів l^2 та l_k^2 відповідно.

Таким чином, система (1.45) є системою рівнянь Ейлера-Лагранжа для функціоналів дії J та J_k у відповідних просторах. Ця система завжди має нульовий розв'язок, тому нас цікавлять нетривіальні критичні точки цих функціоналів.

Наступна лема дає нижні оцінки для критичних точок і відповідних критичних значень.

Лема 1.13. *Для будь-яких нетривіальних критичних точок функціоналів J та J_k правильні відповідно нерівності*

$$\|u\|^2 \ge \varepsilon_0,\ J(u) \ge \varepsilon,$$

$$\|u\|_k^2 \ge \varepsilon_0,\ J_k(u) \ge \varepsilon,$$

де $\varepsilon_0 = 2^{-\frac{1}{2p}} \delta^{\frac{1}{p}} l^{-\frac{1}{p}}$, $\varepsilon = 2^{-\frac{(8p+1)(p+1)}{2p(2p+1)}} \delta^{\frac{p+1}{p}} l^{-\frac{p+1}{p}} l_0$, $l = \sup\{d_n\}$ *і* $l_0 = \inf\{d_n\}$

Ще однією популярною мінімаксною теоремою є теорема про зачеплення.

Нехай H – гільбертів простір, $H = Y \oplus Z$. Нехай також $\rho > r > 0$ і $z \in Z$ такий елемент, що $\|z\| = r$. Позначимо

$$M := \left\{ u = y + \lambda z : y \in Y,\ \|u\| \le \rho,\ \lambda \ge 0 \right\}$$

і

$$M_0 := \left\{ u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| = \rho \ i\ \lambda \ge 0,\ або\ \|u\| \le \rho \ i\ \lambda = 0 \ \right\},$$

тобто M_0 – межа $M\left(\partial M\right)$. Нехай

$$N := \left\{ u \in Z : \|u\| = r \right\}.$$

Розглянемо C^1-функціонал I на H і припустимо, що

$$\beta := \inf_{u \in N} I\left(u\right) > \alpha := \sup_{u \in M_0} I\left(u\right).$$

В такому випадку говорять, що функціонал I задовольняє *геометрію зачеплення.*

Сформулюємо тепер теорему про зачеплення ([23], [28], [32]).

Теорема 1.8 (про зачеплення). *Нехай I – функціонал класу C^1 на гільбертовому просторі H, який задовольняє умову Пале-Смейла та геометрію зачеплення. Тоді існує така критична точка $u \in H$ функціоналу I, що критичне значення*

$$I(u) := b = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in M} I\left(\gamma(u)\right) \ge \beta,$$

де $\Gamma := \left\{ \gamma \in C\left(M, H\right) : \gamma\,|_{M_0} = id \right\}$. *При цьому*

$$I(u) \le \sup_{u \in M} I\left(u\right).$$

Виявляється, що функціонал J_k задовольняє умови теореми про зачеплення, а отже, має нетривіальні критичні точки, тобто правильна теорема:

Теорема 1.9. *Нехай виконується умова* $\left(i_4\right)$, $d_n > 0$ *для всіх* $n \in \mathbb{Z}$, $\omega^2 \in (a,b)$ *та* $b \ne +\infty$. *Тоді для будь-якого* $k \ge 1$ *система (1.45) має нетривіальний* kN-*періодичний розв'язок* $u \in l_k^2$.

Тепер за допомогою методу періодичних апроксимацій можна довести існування нетривіальних локалізованих розв'язків системи (1.45). Ці розв'язки є критичними точками функціоналу J. Однак цей функціонал не задовольняє умову Пале–Смейла і тому скористатися в даному випадку теоремою про зачеплення не вийде. Проте критичні точки функціоналу J можна побудувати за допомогою переходу до границі при $k \to \infty$ в критичних точках функціоналу J_k.

Теорема 1.10. *Нехай виконується умова* (i_4), $d_n > 0$ *для всіх* $n \in \mathbb{Z}$, $\omega^2 \in (a,b)$ *та* $b \neq +\infty$. *Тоді система (1.45) має нетривіальний розв'язок* $u \in l^2$.

Доведення. Нехай $u^{(k)} = \left(u_n^{(k)}\right) \in l_k^2$ нетривіальний kN-періодичний розв'язок рівняння (1.45), який існує за теоремою 1.9.

Зазначимо, що існують $\delta_0 > 0$ та $n_k \in \mathbb{Z}$ такі, що

$$\left|u_{n_k}^{(k)}\right| \geq \delta_0 . \tag{1.48}$$

Справді, у протилежному випадку $u^{(k)} \to 0$ в l^∞, а отже, $v^{(k)} = R_k u^{(k)} \to 0$ в l^∞. За теоремою 1, $\left\|v^{(k)}\right\|_{l^2} = \left\|u^{(k)}\right\|_k$ обмежена. Далі оскільки

$$\|v\|_{l^p}^p \leq \|v\|_{l^\infty}^{p-2} \|v\|_{l^2}^2 , \quad p > 2 , \tag{1.49}$$

то $v^{(k)} \to 0$ в l^p для всіх $p > 2$. А це означає, що $\left\|u^{(k)}\right\|_{l_k^p} \to 0$ для всіх $p > 2$.Тоді для відповідного критичного значення $b_k = J_k\left(u^{(k)}\right)$ маємо

$$0 < b_k = \frac{1}{4} \sum_{n \in Q_k} d_n \left(u_n^{(k)}\right)^4 \leq \frac{l}{4} \left\|u^{(k)}\right\|_{l_k^4}^4 \to 0,$$

що суперечить лемі 1.13.

В силу періодичності коефіцієнтів послідовність $\left\{u_{n+N}^{(k)}\right\}$ є також розв'язком рівняння (1.45). Тому можна вважати, що $0 \leq n_k \leq N-1$. Однак, таких значень скінченне число, тому, переходячи до підпослідовності (по k), можемо вважати, що всі ці номери співпадають, тобто $n_k = n_0$.

В силу обмеженості $\left\{u^{(k)}\right\}$, переходячи до підпослідовності (з тим самим позначенням), маємо $u_n^{(k)} \to u_n$ при $k \to \infty$ (для всіх $n \in \mathbb{Z}$). Крім того, за нерівністю (1.48),

$$\left|u_{n_0}\right| \ge \delta_0,$$

а отже, $u = \{u_n\}$ ненульова послідовність. Використовуючи граничний перехід, неважко показати, що $u = \{u_n\}$ є розв'язком рівняння (1.45).

Залишається показати, що $u = \{u_n\} \in l^2$. Справді, оскільки для будь-яких фіксованих $\tilde{n} \in \mathbb{Z}$ і достатньо великого k

$$\sum_{n=-\tilde{n}}^{\tilde{n}} \left|u_n^{(k)}\right|^2 \le \left\|u^{(k)}\right\|_k^2 \le C^2, \tag{1.50}$$

то переходячи в (1.50) до границі при $k \to \infty$, одержуємо

$$\sum_{n=-\tilde{n}}^{\tilde{n}} \left|u_n\right|^2 \le C^2.$$

В силу довільності $\tilde{n}$, маємо, що $u \in l^2$. Теорему доведено. □

Зауважимо, що якщо $b = +\infty$, то рівняння (1.45) має тільки тривіальний розв'язок.

Оскільки спектр оператора $-\Delta + m^2$ є відрізком $[m^2, 4 + m^2]$, то з теореми 1.9 одержуємо наслідок:

Наслідок 1.1. Нехай $d_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$ та $\omega^2 < m^2$. Тоді система (1.44) має нетривіальний розв'язок $u \in l^2$.

Список використаних джерел

1. Bak S. M. Peridoc traveling waves in chains of oscillators. *Communications in Mathematical Analysis*. 2007. Vol. 3, № 1. P. 19–26.
2. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50, № 1. P.75-87.

3. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of periodic traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. *Український математичний вісник*. 2021. Т. 18, № 4. С. 466-478.
4. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling solitary waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. *Український математичний вісник*. 2022. Т. 19, № 4. С. 450-461.
5. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Український математичний вісник*. 2020. Т. 17, № 3. С. 301-312.
6. Bak S., Kovtonyuk G. Existence of standing waves in DNLS with saturable nonlinearity on 2D lattice. *Communications in Mathematical Analysis*. 2019. Vol. 22, № 2. P. 18–34.
7. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of periodic traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 260, № 5 (February). P. 619-629.
8. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of traveling solitary waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice with saturable nonlinearities. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 270, № 3 (February). P. 397-406.
9. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam type systems on 2D–lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021. Vol. 252, № 4 (January). P. 453-462.
10. Berestycki H., Capuzzo-Dolcetta I., Nirenberg L. Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems. Nonlin. Diff. Eq. And Appl. 1995. Vol. 2. P. 553–572.
11. Butt I. A., Wattis J. A. D. Discrete breathers in a two-dimensional Fermi–Pasta–Ulam lattice. *J. Phys. A. Math. Gen.* 2006. Vol. 39. P. 4955–4984.
12. Butt I. A., Wattis J. A. D. Discrete breathers in a two-dimensional hexagonal Fermi–Pasta–Ulam lattice. *J. Phys. A. Math. Gen*. 2007. Vol. 40. P. 1239–1264.
13. Drabek P., Milota J. Methods of nonlinear analysis. Applications to differential equations. Basel: Birkhäuser, 2007. 568 p.
14. Fermi E., Pasta J., Ulam S., Tsingou M. Studies of nonliniear problems. *Los Alamos Sci. Lab. Rept*. LA-1940. 1955. Reprinted in *Lect. Appl. Math*. 1974. Vol. 15. 156 p.
15. Friesecke G., Wattis J. Existence theorem for solitary waves on lattices. *Comm. Math. Phys*. 1994. Vol. 161 (2). P. 391-418.
16. Ghimenti M., Le Coz S., Squassina M. On the stability of standing waves of Klein-Gordon equations in a semiclassical regime. *Discr. Cont. Dyn. Sys.*, 2013. Vol. 33, №6. P. 2389-2401.
17. Iooss G., Kirschgässner K. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. *Commun. Math. Phys*. 2000. Vol. 211. P. 439–464.
18. Kreiner C. F., Zimmer J. Heteroclinic travelling waves for the lattice sine–Gordon equation with linear pair interaction. *Discrete and continuous dynamical systems*. 2009. Vol. 25, № 3 (November). P. 915–931.
19. Lions P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variation. The locally compact case I, II. *Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non Lineaire*. 1984. Vol. 1. P. 223-238.
20. Morgante A. M., Johansson M., Kopidakis G., Aubry S. Standing waves in 1D nonlinear lattices. *Nonlinear and Disorder: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2001. P. 205-211.
21. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete NLS equations. *Nonlinearity*, 2006. Vol. 19. P. 27–40.
22. Pankov A. Gap solitons in periodic discrete nonlinear Shrödinger equation, II: Generalized Nehari manifold approach. *Discr. Cont. Dyn. Syst. A*. 2007. Vol. 19, № 2. P. 419–430.

23. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices. London – Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.
24. Pankov A. Traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam chains with nonlocal interaction. Disr. Cont. Dyn. Syst. Ser. S. 2019. Vol. 12, № 7 (November). P. 2097–2113.
25. Pankov A., Pflüger K. Traveling waves in lattice dynamical systems. Math. Meth. Appl. Sci. 2000. Vol. 23. P.1223–1235.
26. Pankov A., Rothos V. Periodic and decaying solutions in DNLS with saturable nonlinearity. *Proc. Royal Society A*, 2008. Vol. 464. P. 3219–3236.
27. Pankov A., Rothos V. Traveling waves in Fermi–Pasta–Ulam lattices with saturable nonlinearities. Discr. Cont. Dyn. Syst. 2011. Vol. 30, № 3 (July). P. 835–840.
28. Rabinowitz P. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. Providence, R. I. : American Math. Soc. 1986. 100 p.
29. Smets D., Willem M. Solitary waves with prescribed speed on infinite lattices. *J. Funct. Anal*. 1997. Vol. 149. P. 266-275.
30. Teschl G. Jacobi Operators and Completely Integrable Nonlinear Lattices. Providence, R. I. : American Math. Soc. 2000. 251 p.
31. Toda M. Theory of nonlinear lattices. Berlin: Springer–Verlag, 1989. 225 p.
32. Willem M. Minimax theorems. Boston: Birkhäuser Boston Inc. 1996. 162 p.
33. Xiang Y., Wattis J. A. D., Susanto H., Cummings L. J. Discrete breathers in a two-dimensional spring-mass lattice. *J. Phys. A: Math. And Theor.* 2009. Vol. 42. P. 1–26.
34. Zabusky N. J., Kruskal M. D. Interaction of “solutions” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.* 1965. Vol. 15. P. 240-243.
35. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів. *Математичні студії*. 2006. Т. 26, № 2. С. 140–153.
36. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. *Математичні студії*. 2012. Т. 37, № 1. С. 76-88.
37. Бак С. М. Існування стоячих хвиль в дискретному нелінійному рівнянні Шредінгера з кубічною нелінійністю на двовимірній ґратці. *Математичне та комп’ютерне моделювання*. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць, 2017. Вип. 16. С. 21-29.
38. Бак С. М. Існування стоячих хвиль для дискретного нелінійного рівняння типу Шредінгера із насичуваною нелінійністю. *Математичні студії*, 2010. Т. 33, №1. С. 78–84.
39. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона зі степеневими нелінійностями. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика та інформатика.* 2021. Том 39, № 2. С. 7-21.
40. Бак С. Н., Панков А. А. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках. *Український математичний вісник*, 2010. Т. 7, №2. С. 154–175.
41. Бак С. М. Дискретні нескінченновимірні гамільтонові системи на двовимірній ґратці : дис. ... докт. фіз.-мат. наук : 01.01.02. Вінниця, 2020. 336 с.
42. Бак С. М. Стоячі хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Ґордона із насичуваними нелінійностями. *Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць*. 2021. Вип. 22. С. 5-19.