

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського
Факультет математики, фізики і комп'ютерних наук

Кафедра математики та інформатики

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА

з математичного аналізу

III семестр

Числові та функціональні рди. Диференціальне числення
функцій багатьох змінних

для студентів предметної спеціальності
А4.04 Середня освіта (Математика)



Вінниця 2026

*Схвалено і рекомендовано до видання вченою радою факультету
математики фізики і комп'ютерних наук,
протокол №2 від 30.09.2026 року.*

Рецензенти: доктор педагогічних наук,
професор **Ковтонюк М. М.**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент **Панасенко О. Б.**

Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. III семестр. Числові та функціональні ряди. Диференціальне числення функцій багатьох змінних (для студентів предметної спеціальності А4.04 Середня освіта (Математика)) [Електронне видання]. Вінниця, 2026. 35 с.

Робочий зошит студента

Дисципліна: математичний аналіз

Розділи: Числові та функціональні ряди. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

Автор-укладач: доктор фізико-математичних наук,
професор **Бак С. М.**

Передмова

Робочий зошит з математичного аналізу призначений для використання студентами денної і заочної форм навчання фізико-математичних спеціальностей при вивченні розділів «Числові та функціональні ряди», «Диференціальне числення функцій багатьох змінних» в умовах кредитно-модульного навчання.

У **Робочому** зошиті подано робочий план студента з вказаних тем, наведено розрахунки рейтингових балів за видами поточного контролю.

Робочий зошит складається з практичних занять з добіркою типових завдань для аудиторного і самостійного опрацювання.

Після кожного розділу подано зразок контрольної роботи. Для допомоги у виконанні самостійної роботи в зошиті подано список рекомендованої літератури і шкалу оцінювання знань згідно з ECTS.

Робочий план студента

Робочий план студента складений на основі навчальної програми з математичного аналізу, затвердженої Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Назви розділів і тем	Кількість годин					
	денна форма					
	усього	зокрема				
		ЛК	ПЗ	ЛЗ	ІЗ	СР
1	2	3	4	5	6	7
3-й семестр						
Розділ 3. Числові та функціональні ряди						
Тема 1. Числові ряди та їх збіжність	11	2	2	0	0	7
Тема 2. Числові ряди з невід'ємними членами	10	1	2	0	0	7
Тема 3. Абсолютна та умовна збіжність числового ряду	10	1	2	0	0	7
Тема 4. Функціональні послідовності та ряди	11	2	2	0	0	7
Тема 5. Степеневий ряд	23	8	8	0	0	7
Разом за розділом 3	65	14	16	0	0	35
Розділ 4. Диференціальне числення функції багатьох змінних						
Тема 1. Границя і неперервність функції багатьох змінних	13	4	2	0	0	7
Тема 2. Диференційовність функції багатьох змінних	12	2	2	0	0	8
Тема 3. Властивості	12	2	2	0	0	8

диференційовних функцій багатьох змінних						
Тема 4. Частинні похідні та диференціали вищих порядків	12	2	2	0	0	8
Тема 5. Неявні функції багатьох змінних	12	2	2	0	0	8
Тема 6. Екстремум функції багатьох змінних	12	2	2	0	0	8
Тема 7. Умовний екстремум функції багатьох змінних	12	2	2	0	0	8
Разом за розділом 4	85	16	14	0	0	55
Усього годин за 3-й семестр	150	30	30	0	0	90

Розподіл балів за видами контролю та самостійної роботи

№	Вид поточного контролю та самостійної роботи	Кількість балів
1.	Домашні завдання	10
2.	Конспект	10
3.	Контрольна робота 1	20
4.	Контрольна робота 2	20
5.	Колоквіум	10
Загальна кількість балів за поточний контроль		70
Підсумковий контроль (екзамен)		30
Загальна кількість балів		100

Шкала оцінювання: стобальна, ECTS, розширена

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за розширеною шкалою
		<i>Для екзамену, заліку, курсової роботи, практики</i>
90-100	A	ВІДМІННО
80-89	B	ДУЖЕ ДОБРЕ
75-79	C	ДОБРЕ
60-74	D	ЗАДОВІЛЬНО
50-59	E	ДОСТАТНЬО
35-49	FX	НЕЗАДОВІЛЬНО З МОЖЛИВІСТЮ ПОВТОРНОГО СКЛАДАННЯ
1-34	F	НЕПРИЙНЯТНО З ОБОВ'ЯЗКОВИМ ПОВТОРНИМ ВИВЧЕННЯМ ДИСЦИПЛІНИ

Практичне заняття № 1

Тема: Числові ряди та їх збіжність

1. Записати п'ять перших членів ряду за відомою формулою загального члена u_n :

а) $u_n = \frac{3n+2}{n^2+4}$;

б) $u_n = \frac{(-1)^n(n-1)}{2^{n+3}}$;

в) $u_n = \frac{2+(-1)^n}{n^2+4}$;

г) $u_n = \begin{cases} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, & n = 2k-1; \\ \frac{1}{n^2}, & n = 2k. \end{cases}$

2. За даними першими членами знайти один з можливих виразів n -го члена таких рядів:

а) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \dots$;

б) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \dots$;

в) $1 - \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 4 \cdot 7} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13} - \dots$;

г) $\ln \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 7} + \ln \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 10} + \ln \frac{4 \cdot 10}{3 \cdot 13} + \dots$

3. Знайти n -у часткову суму S_n ряду і суму S ряду:

а) $\frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \dots + \frac{2}{5^n} + \dots$;

б) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right) + \dots$;

в) $\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots$;

г) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$;

д) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$;

е) $\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} + \dots$;

$$\epsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2 - 8n - 3};$$

$$\text{ж)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{36n^2 - 24n - 5};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right);$$

$$\text{и)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)};$$

$$\text{і)} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n} \cos \frac{3}{2^n};$$

$$\text{к)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}.$$

~~4~~4. Довести розбіжність ряду, використовуючи необхідну умову збіжності:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n;$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,001};$$

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1};$$

$$\text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n};$$

$$\text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + n^2 + 1}{n+2} \arcsin \frac{1}{n^2 + 2n + 3};$$

$$\text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)}.$$

~~5~~5. Користуючись критерієм Коші, довести збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, якщо:

$$\text{а)} u_n = \frac{\cos nx}{2^n};$$

$$\text{б)} u_n = \frac{\sin n\alpha}{n(n+1)};$$

$$\text{в)} u_n = \frac{\cos \alpha^n}{n^2};$$

$$\text{г)} u_n = \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}.$$

~~6~~6. Користуючись критерієм Коші, довести розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, якщо:

$$\text{а)} u_n = \frac{1}{2n};$$

$$\text{б)} u_n = \frac{n-2}{n^2+2};$$

$$\text{в)} u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}};$$

$$\text{г)} u_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Практичне заняття № 2

Тема: Числові ряди з невід'ємними членами

Завдання 1. Скориставшись ознакою порівняння, дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{n^2}{n+1}};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{4^n};$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right);$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 5}{n^2 + 4};$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + \cos n}{3^n + \sin n};$

є) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{n+1}}{\sqrt{n}};$

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3 + n + 1};$

з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1 + (-1)^n}{2}}{n^3 + 2};$

и) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} (2 + (-1)^n)}{\ln(1 + n)}.$

Завдання 2. Скориставшись ознакою Даламбера, дослідити на збіжність ряди:

а) $2 + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \dots + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)} + \dots;$

б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2^n (n-1)!};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n};$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n+1)};$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n+2)}{2^n (n+1)!};$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n};$

є) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 4^{3n}}.$

Завдання 3. Скориставшись ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n (1+n)};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n} + 2}{\sqrt{n} + 3} \right)^{\frac{3}{n^2}};$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n+1}{5n-3} \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{5}{6} \right)^{\frac{2n}{3}};$

$$\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{2n+1} \right)^n \arcsin^n \frac{1}{n}; \quad \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}}{(3n^2 + 2n + 1)^{\frac{n+3}{2}}};$$

$$\text{є) } \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \dots \quad \left(\sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4} \right);$$

$$\text{ж) } \sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} + \dots$$

4. Встановивши збіжність ряду, довести, що:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0;$$

$$\text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{(2n)!} = 0; \quad \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{4^{n^2}} = 0.$$

5. Скориставшись інтегральною ознакою Коші, дослідити на збіжність ряди:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1) \ln(\ln(n+1))};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2; \quad \text{г) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1};$$

$$\text{д) } \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{(5n^2 - 9) \ln(n-2)}.$$

Практичне заняття № 3

Тема: Абсолютна та умовна збіжність числових рядів

1. Довести абсолютну збіжність рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n^3}{2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(2n + \frac{\pi}{4}\right)}{n^3 \sqrt[n]{n+2}};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{2n+1} \right)^n; \quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(-n)^n}{\sqrt[4]{2n^6 + 3n + 1}};$$

$$\text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}} \arcsin \frac{\pi}{4n};$$

$$\text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \cos^3 n \cdot \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n^3+2};$$

$$\text{є)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln^2 n}{2^n};$$

$$\text{ж)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^2+2}{n^3+4n}} \cdot \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \right).$$

2. Довести, що задані ряди є умовно збіжними:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln^5 n}{n};$$

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n - \ln(n+1)};$$

$$\text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{n}};$$

$$\text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+2}};$$

$$\text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

3. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряди:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n+2}};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 \cdot 2^n}{3^n + 2};$$

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1)};$$

$$\text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \sin 2n}{n^2 - \ln n};$$

$$\text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n+1)\sqrt{n+2}} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n+1) \ln(\ln(n+2))};$$

$$\text{є)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cos \frac{1}{n}}{\sqrt[4]{n}};$$

$$\text{ж)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^n \text{ (скористатись}$$

ознакою Раабе).

4. Користуючись тим, що сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$, знайти суми рядів, отриманих з даного перестановкою його членів:

$$\text{а)} 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots;$$

$$\text{б)} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \dots;$$

$$\text{в)} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \dots.$$

✎5. Знаючи, що $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, знайти суми рядів:

а) $1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} - \frac{1}{6^2} + \dots$;

б) $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} - \frac{1}{6^2} + \dots$.

✎6. Скільки членів ряду треба взяти, щоб обчислити його суму з точністю до ε , якщо:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, $\varepsilon = 10^{-3}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, $\varepsilon = 10^{-3}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$, $\varepsilon = 10^{-3}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$, $\varepsilon = 10^{-3}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^2 + 2}}$, $\varepsilon = 10^{-6}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

📖 Практичне заняття № 4

Тема: Функціональні послідовності і ряди

✎1. Знайти граничну функцію $f(x)$ послідовності $(f_n(x))$ на множині E :

а) $(x^n - 3x^{n+2} + 2x^{n+3})$, $E = [0; 1]$;

б) $\left(x^4 \cos \frac{1}{nx}\right)$, $E = (0; +\infty)$;

в) $\left(\frac{nx^2}{x+3n+2}\right)$, $E = [0; +\infty)$;

г) $((x-1)\arctg x^n)$, $E = (0; +\infty)$;

д) $(n^3 x^2 e^{-nx})$, $E = [0; +\infty)$;

е) $n\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x\right)$, $E = (0; +\infty)$;

є) $n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$, $E = [1; 3]$;

$$\text{ж)} \left(n \left(x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{2n}} \right) \right), \quad E = (0; +\infty);$$

$$\text{з)} \left(n \arctg nx^2 \right), \quad E = (0; +\infty).$$

2. Знайти область збіжності (абсолютної і умовної) функціонального ряду:

$$\text{а)} \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \dots + \frac{n}{x^n} + \dots;$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n;$$

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n};$$

$$\text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n;$$

$$\text{д)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x(x+n)}{n} \right)^n;$$

$$\text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}};$$

$$\text{е)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2) \cdot \dots \cdot (1+x^n)};$$

$$\text{ж)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \cdot \dots \cdot (1+x^{2^{(n-1)}})};$$

$$\text{з)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2};$$

$$\text{и)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \sin \frac{x}{3^{n-1}}.$$

3. Довести, що якщо додатна числова послідовність (α_n) – нескінченно мала і $\forall n \geq n_0$ і $\forall x \in E: |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$, то функціональна послідовність $(f_n(x))$ збігається рівномірно до функції $f(x)$ на множині E .

4. Довести, що задана послідовність рівномірно збігається на вказаній множині:

$$\text{а)} \left(\sin(ne^{-nx}) \right), \quad [1; +\infty);$$

$$\text{б)} \left(\tg \left(\frac{n-1}{n} x \right) \right), \quad \left(0; \frac{\pi}{4} \right);$$

$$\text{в)} \left(\frac{nx^2}{n+2x} \right), \quad [1; 2];$$

$$\text{г)} \left(\frac{nx}{n^2 x^2 + 1} \right), \quad [1; +\infty);$$

$$\text{д)} \left(\frac{\ln(nx)}{nx^2} \right), \quad [1; +\infty);$$

$$\text{е)} \left(e^{-nx} \ln n \right), \quad (0; +\infty);$$

$$\text{е)} \left(\frac{\arctg nx}{\sqrt{n+x}} \right), \quad [0; +\infty);$$

$$\text{ж)} \left(\ln \left(1 + \frac{\cos nx}{\sqrt{n+x}} \right) \right), \quad [1; +\infty).$$

5. Користуючись ознакою Вейєрштрасса, довести рівномірну збіжність функціонального ряду:

- а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}, [0; +\infty);$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}, [-1; 1];$
 в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n - x^{-n}), \left[\frac{1}{2}; 2\right];$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, [0; +\infty);$
 д) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n(x^2 + \sin x)}, [1; +\infty);$ е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2 x) \cos(\pi n x)}{n\sqrt{n}}, R.$

6. Дослідити на неперервність і диференційовність функцію $f(x)$:

- а) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3};$ б) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, x \geq 2;$
 в) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}, x > 0;$ г) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x};$
 д) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{10^n};$
 е) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{n^2} x)}{a^{n^2}}, a \in (1; 2), a \in \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right).$

7. Знайти суму ряду:

- а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n};$
 б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)};$
 в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)};$
 г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$

8. Перевірити, чи виконується рівність $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ на множині E , якщо:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а) } f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}, \quad E = \mathbb{R}; & \text{б) } f_n(x) = \frac{\sin 2^n \pi x}{2^n}, \quad E = \mathbb{R}; \\
 \text{в) } f_n(x) = \sin^2 \frac{n}{x}, \quad E = [0; 2]; & \text{г) } f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}, \quad E = \mathbb{R}; \\
 \text{д) } f_n(x) = \frac{\cos nx}{1 + n^2}, \quad E = \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right); & \text{е) } f_n(x) = (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right), \quad E = \mathbb{R}^+.
 \end{array}$$

9. Перевірити, чи виконується рівність $\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x f_n(t) dt$

на множині $E = [a; b]$, якщо:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а) } f_n(x) = \frac{1}{x^{2n+1}} - \frac{1}{x^{2n-1}}, \quad E = (0; 1]; & \text{б) } f_n(x) = ne^{-nx}, \quad E = [\ln 2; \ln 5]; \\
 \text{в) } f_n(x) = \frac{\cos^2 nx}{n(n+1)}, \quad E = [0; 2\pi]; & \text{г) } f_n(x) = x^{2(n+1)} - x^{2n}, \quad E = [-1; 1]; \\
 \text{д) } f_n(x) = (n+1)x^n, \quad E = [-1; 1]; & \\
 \text{е) } f_n(x) = \frac{x}{(nx+1)((n-1)x+1)}, \quad E = [0; 2]. &
 \end{array}$$

Практичне заняття № 5

Тема: Степеневі ряди. Область збіжності

1. Знайти радіус збіжності R , інтервал і область збіжності степеневому ряду:

$$\begin{array}{ll}
 \text{а) } \frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{x^n}{n(n+2)} + \dots; & \\
 \text{б) } \frac{\ln 2}{1} x^2 + \frac{\ln 3}{2} x^3 + \dots + \frac{\ln(n+1)}{n} x^{n+1} + \dots; & \\
 \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{3^{n-1} n \sqrt{n}}; & \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)(x+3)^n}{3^{n+1}}; \\
 \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(x-5)^{n+1}}{(n+1)!}; & \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{n \cdot 4^n}; \\
 \text{є) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n} (n+1) \ln(n+1)}; & \text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n;
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n (x+2)^n; & \text{и) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}} (x+2)^n; \\
 &\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n, \quad a > 0, \quad b > 0; & \text{ї) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}, \quad a > 0, \quad b > 0.
 \end{aligned}$$

2. Знайти радіус збіжності і суму степеневого ряду:

$$\begin{aligned}
 &\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}; \\
 &\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (4x)^n; & \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} 3n x^{3n-1}; \\
 &\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}; & \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} x^{n+1}; \\
 &\text{є) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^{n-1}}; & \text{ж) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}; \\
 &\text{з) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^{3n-2}}{3n-2}; & \text{и) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3x-1)^n}{n(n+3)}.
 \end{aligned}$$

3. Знайти суму числового ряду:

$$\begin{aligned}
 &\text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{n!}; & \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n+1)}{n!}; \\
 &\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}; & \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n+1)^2}; \\
 &\text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}; & \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}; \\
 &\text{є) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2}; & \text{ж) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}; \\
 &\text{з) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}; & \text{и) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(3n+1)}.
 \end{aligned}$$

4. Самостійно побудувати рівномірно збіжний функціональний ряд, з допомогою диференціювання або інтегрування його записати числовий ряд при конкретних значеннях x :

$$\begin{aligned}
 &\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!};
 \end{aligned}$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!};$$

$$г) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1};$$

$$д) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

📖 Практичне заняття № 6

Тема: Розклад функцій у степеневі ряди

1. Розкласти функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 :

а) $f(x) = x^3 + 2x + 2, \quad x_0 = -1;$

б) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4, \quad x_0 = -1;$

в) $f(x) = x^6, \quad x_0 = -2;$

г) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 2, \quad n = 4;$

д) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}, \quad x_0 = 2;$

е) $f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4};$

є) $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}, \quad x_0 = 0;$

ж) $f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x_0 = 0; \quad x_0 = 1.$

2. Використовуючи відомі розклади функцій в степеневий ряд, розкласти функцію в ряд Маклорена:

а) $\frac{x^{10}}{1-x};$

б) $\frac{x^2}{(1+x)^2};$

в) $\frac{1}{(1-x^3)^2};$

г) $(1-x^2)^{-\frac{3}{2}};$

д) $\frac{5x-4}{x+2};$

е) $\frac{5-2x}{x^2-5x+6};$

є) $\frac{1}{1+x+x^2};$

ж) $\frac{1}{1-x-x^2};$

з) $\frac{1}{x^3+x^2+3x+3};$

и) $\ln \frac{2x+1}{x^2-4x+4};$

і) $(x^2+5) \ln \frac{9-x^2}{4-x^2};$

ї) $\ln(12-x-x^2);$

к) $\cos^2 x;$

л) $\sin 3x \sin 5x;$

м) $\sin^3 x.$

3. Використовуючи відомі розклади функцій в степеневий ряд, довести, що:

а) $\frac{1}{a+bx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^n}{a^{n+1}} x^n, \quad |x| < \left| \frac{a}{b} \right|, \quad ab \neq 0;$

б) $\frac{1}{x^2+a^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{2(n+1)}} x^{2n}, \quad |x| < |a|, \quad a \neq 0;$

в) $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{a^{2n+1} (2n)!!} x^{2n}, \quad |x| < a, \quad a > 0;$

$$\Gamma) \sqrt{a^2 + x^2} = a + \frac{x^2}{2a} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{a^{2n-1} (2n)!!} x^{2n}, \quad |x| < a, \quad a > 0;$$

$$\Delta) \ln(a + bx) = \ln a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^n \frac{x^n}{n}, \quad |x| < \frac{a}{|b|}, \quad a > 0, \quad b \neq 0.$$

4. Розкласти у ряд Маклорена функцію $f(x)$, скориставшись рядом Маклорена для її похідної, і знайти радіус збіжності цього ряду:

а) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

б) $f(x) = \arcsin x$;

в) $f(x) = (1+x) \ln(1+x)$;

г) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$;

д) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-x}{1+2x}$;

е) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}$;

є) $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$;

ж) $f(x) = \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{16+x^4}}$.

5. Розкласти у ряд Маклорена функцію і знайти радіус збіжності ряду:

а) $x \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 2}\right)$;

б) $x \ln\left(x^2 + \sqrt{9+x^4}\right)$;

в) $(x^2 - 1) \arcsin 2x^2$;

г) $x^2 \arccos 2x$;

д) $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

е) $x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$;

є) $\ln\left(\pi \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\right) + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$;

ж) $\frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$.

6. Розкласти функцію в ряд Тейлора в околі точки x_0 і знайти його радіус збіжності:

а) $\frac{1}{x^2 - 5x + 6}, \quad x_0 = 1$;

б) $\frac{1}{(x^2 - 6x + 18)^2}, \quad x_0 = 3$;

в) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 12x + 40}}, \quad x_0 = 6$;

г) $(x+1) \cos^2 x, \quad x_0 = -1$;

д) $\cos^4 x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{2}$;

е) $\ln(x^2 + 2x + 2), \quad x_0 = -1$;

є) $\ln(x^2 - 9x + 20), \quad x_0 = 3$.

7. Використовуючи інтегрування, знайти суму ряду:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n};$$

$$в) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1};$$

$$г) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$$

📖 Практичне заняття № 7

Тема: Застосування степеневих рядів

✍1. Обчислити із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

а) $\cos 1^0$; б) $\cos 10^0$; в) $\sin 10^0$; г) $\sin 1^0$;
 д) $\sqrt[3]{130}$; е) $\sqrt[3]{500}$; є) $\sqrt[3]{68}$; ж) $\sqrt[7]{129}$;
 з) $\ln 1,2$; и) $\ln 1,3$; і) $\ln 0,98$; ї) $\sqrt[10]{1000}$;
 к) $\sqrt{e}$; л) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$; м) $\arcsin \frac{1}{3}$; н) $\arctg \frac{\pi}{10}$.

✍2. Обчислити інтеграли із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-4}$:

а) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$; б) $\int_0^1 \sin x^2 dx$; в) $\int_0^{0,8} x^{10} \sin x dx$;
 г) $\int_0^{0,5} x \ln(1+x^2) dx$; д) $\int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx$; е) $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$;
 є) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctg x}{x} dx$; ж) $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$; з) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

✍3. Знайти похідну k -го порядку функції $f(x)$ у точці x_0 :

а) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $k = 7$, $x_0 = 0$;
 б) $f(x) = x^6 e^x$, $k = 10$, $x_0 = 0$;
 в) $f(x) = x^2 \ln(4+x^2)$, $k = 11$, $x_0 = 0$;
 г) $f(x) = \frac{1}{(x^2 - 6x + 18)^2}$, $k = 6$, $x_0 = 3$;
 д) $f(x) = \ln \frac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}}$, $k = 4$, $x_0 = 0$;

е) $f(x) = \ln \frac{x^2 - 2x + 3}{2 - x}$, $k = 7$, $x_0 = 1$.

4. Знайти границі:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^2 x}{x^2} \right)^{(n)}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + \ln(1 - x)}{x^2} \right)^{(n)}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{\arctg x}{x} \right)^2 \right)^{(n)}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\arctg x \cdot \ln(1 + x^2) \right)^{(n)}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x(1 - x^2)} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \right)^{(n)}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{\sqrt{1 + x^2}} \right)^{(n)}$.

5. Обчислити похибку наближеної рівності

$$\ln(n + 1) \approx \ln n + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k - 1)(2k + 1)^{2k-1}}$$

і обчислити $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 4$, $\ln 5$, $\ln 10$ з точністю до 10^{-4} .

Практичне заняття № 8

Контрольна робота №1 (зразок)

1. Знайти суму ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}$.

2. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$.

3. Скориставшись інтегральною ознакою Коші, дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n + 1)}$.

4. Розвинути функцію у ряд Маклорена: $f(x) = \ln(12 - x - x^2)$.

Практичне заняття № 9

Тема: Функції багатьох змінних. Границя і неперервність

1. Знайти значення функції $z = f(x; y)$ в точці $(x_0; y_0)$:

а) $z = \left(\frac{\operatorname{arctg}(x+y)}{\operatorname{arctg}(x-y)} \right)^2, \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right);$

б) $z = e^{\sin(x+y)}, \left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right);$

в) $z = y^{x^2-1} + x^{y^2-1}, (2; 2), (1; 2), (2; 1);$

г) $z = \sqrt{x^2 - y^2}, (5; -3).$

2. Знайти область визначення функції двох змінних:

а) $u = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y};$

е) $u = \ln xy;$

б) $u = \sqrt{1-x^2-y^2};$

є) $u = \ln x - \ln \sin y;$

в) $u = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}};$

ж) $u = \ln(x^2 + 4y^2 - 2x - 3);$

г) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}};$

з) $u = \ln \frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}.$

д) $u = \ln(y^2 - 4x + 8);$

3. Виразити площу $S = f(x; y)$ ромба як функцію його периметра x та суми y довжин його діагоналей.

4. Знайти функцію $V = f(x; y)$, якщо V – об'єм прямого кругового конуса, x – довжина його твірної, а y :

1) висота конуса; 2) довжина кола основи.

5. В кулю радіуса R вписана піраміда з прямокутною основою, вершина якої ортогонально проектується в точку перетину діагоналей основи. Об'єм піраміди є функцією сторін x і y її основи. Чи буде ця функція однозначною? Скласти для неї аналітичний вираз. Знайти область визначення функції.

6. Знайти сім'ї ліній рівня для кожної з функцій і побудувати їх графіки:

а) $z = x + y;$

в) $z = x^2 - y^2;$

б) $z = x^2 + y^2;$

г) $z = \sqrt{y-x};$

$$\text{д)} z = \ln(1 - x^2 - y^2);$$

$$\text{е)} z = \operatorname{arctg} \frac{2y}{x^2 + y^2 - 1};$$

$$\text{ж)} z = |x| + |y| - |x + y|;$$

$$\text{з)} z = \min(x, y);$$

$$\text{и)} z = \max(|x|, |y|).$$

$$\text{є)} z = \sqrt{1 - 2|x| - |y|};$$

7. Знайти область визначення функції трьох змінних, заданих формулами:

$$\text{а)} u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}};$$

$$\text{г)} u = \sqrt{8 - x^2 - 2y^2 - 4z^2};$$

$$\text{б)} u = \ln(1 - x - y - z);$$

$$\text{д)} u = \sqrt{1 - |x| - |y| - |z|};$$

$$\text{в)} u = \sqrt{z(2 - z)} + \ln(4 - x^2) - 3y;$$

$$\text{е)} u = \ln(2z^2 - 6x^2 - 3y^2 - 6);$$

$$\text{є)} u = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2} \cdot \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 4);$$

$$\text{ж)} u = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z - 1}.$$

8. Для функції $z = f(x, y)$ знайти повторні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right); \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right);$ і границю $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$, якщо вони існують у випадках:

$$\text{а)} f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}, \quad (1; 1); (0; 0); (+\infty; +\infty); (+\infty; -\infty);$$

$$\text{б)} f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, \quad (0; 0); \left(\frac{1}{\pi}; 0 \right); \left(\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi} \right); (+\infty; +\infty);$$

$$\text{в)} f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}, \quad (0; 0); (+\infty; +\infty); (+\infty; -\infty);$$

$$\text{г)} f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad (0; 0); (+\infty; +\infty); (0; +\infty); (0; 1);$$

$$\text{д)} f(x, y) = x^2 e^{-(x^2 - y)}, \quad (+\infty; +\infty); (0; +\infty); (+\infty; 0); (+\infty; -\infty);$$

$$\text{е)} f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, \quad (+\infty; +\infty); (0; 0); (\infty; 0); (0; \infty);$$

$$\text{є)} f(x, y) = \frac{\sin \pi x}{2x + y}, \quad (+\infty; +\infty); (+\infty; -\infty); (0; +\infty); (+\infty; 0);$$

$$\text{ж)} f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}, \quad (0; +\infty); (0; 0);$$

$$\text{з)} f(x, y) = \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}, \quad (+\infty; +\infty), (+\infty; 1); (+0; +0); (+0; +\infty).$$

9. Знайти границю функції $z = f(x, y)$ в точці $(0; 0)$, або довести, що вона не існує, якщо:

$$\text{а)} f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1};$$

$$\text{д)} f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)x^2 y^2}{1 - \cos(x^2 + y^2)};$$

$$\text{б)} f(x, y) = \frac{\sin(x^4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\text{е)} f(x, y) = (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}};$$

$$\text{в)} f(x, y) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}}{x^4 + y^4};$$

$$\text{є)} f(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x^3 + y^3} - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\text{г)} f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2};$$

$$\text{ж)} f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

10. Дослідити функції на неперервність і знайти точки розриву, якщо такі є:

$$\text{а)} f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0; \end{cases}$$

$$\text{б)} f(x, y) = \frac{2x - 3}{x^2 + y^2 - 4};$$

$$\text{в)} f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x + y}, & x + y \neq 0, \\ 3, & x + y = 0; \end{cases}$$

$$\text{г)} f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}, & (x, y) \notin \mathbb{Z}^2, \\ 1, & (x, y) \in \mathbb{Z}^2; \end{cases}$$

$$\text{д)} f(x, y) = \frac{\sin^2 x \sin y}{\sin^4 x + \sin^2 y};$$

$$\text{е) } f(x; y) = x \sin \frac{y^2}{x^2 + y^2};$$

$$\text{є) } f(x; y; z) = \frac{1}{\sin \pi x + \sin \pi y + \sin \pi z};$$

$$\text{ж) } f(x; y; z) = \frac{1}{\sqrt{8 - x^2 - 2y^2 - 4z^2}}.$$

Практичне заняття № 10

Тема: Диференційовність функції багатьох змінних. Повний диференціал

З1. Знайти частинні похідні за кожною з незалежних змінних та повні диференціали функцій:

$$\text{а) } z = x^3 y - y^3 x;$$

$$\text{е) } z = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right);$$

$$\text{б) } z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u};$$

$$\text{є) } z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y};$$

$$\text{в) } z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2};$$

$$\text{ж) } z = x^y;$$

$$\text{г) } z = (5x^2 y - y^3 + 7)^3;$$

$$\text{з) } z = \ln(x^2 + y^2).$$

$$\text{д) } z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}};$$

З2. Дослідити функцію $f(x, y)$ на диференційовність в точці $(0; 0)$:

$$\text{а) } f(x, y) = \sqrt[3]{xy};$$

$$\text{б) } f(x, y) = \cos \sqrt[3]{xy};$$

$$\text{в) } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3};$$

$$\text{г) } f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3};$$

$$\text{д) } f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{е) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{є) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{ж) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

3. Нехай $x = \rho^2 \cos \varphi$, $y = \rho^2 \sin \varphi$. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}.$$

4. Нехай $x = \rho \cos \alpha \cos \beta$, $y = \rho \cos \alpha \sin \beta$, $z = \rho \sin \alpha$. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \end{vmatrix}.$$

5. Знайти повний диференціал функції $z = f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) , якщо:

а) $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$, $x_0 = 3$, $y_0 = 4$, $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$;

б) $z = e^{xy}$, $x_0 = y_0 = 1$, $\Delta x = 1,15$, $\Delta y = 0,1$;

в) $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$, $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $\Delta x = 0,01$, $\Delta y = 0,03$;

Г) $z = \frac{x+3y}{y-3x}$, $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $\Delta x = 0,5$, $\Delta y = -0,5$.

6. Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено обчислити:

а) $\sqrt{1,98^2 + 1,01^2}$;

є) $1,94^2 \cdot e^{0,12}$;

б) $\sin 59^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$;

ж) $2,68^{\sin 0,05}$;

в) $0,97^{1,05}$;

з) $\ln(1,05) \cdot \operatorname{arctg} 0,99$;

г) $2,003^2 \cdot 3,998^3 \cdot 1,002^2$;

и) $\frac{\operatorname{tg} 46^\circ \operatorname{arccctg} 0,01}{(4,03)^{\frac{1}{2,02}}}$.

д) $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt{0,98} - 1)$;

е) $1,04^{2,02}$;

Практичне заняття № 11

Тема: Складена функція та її диференційовність. Похідна за напрямом. Градієнт

1. Знайти $\frac{dz}{dt}$ і dz , якщо:

а) $z = x^2 + xy + y^2$, $x = \sin t$, $y = \cos t$;

б) $z = \cos(2t + 4x^2 - y)$, $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{\sqrt{t}}{\ln t}$;

в) $z = e^{xy} \ln(x + y)$, $x = t^3$, $y = 1 - t^3$;

г) $z = \operatorname{arctg} \frac{t+1}{x}$, $x = e^{(1+t)^2}$;

д) $z = \arcsin \frac{t}{y}$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$;

е) $z = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$.

2. Знайти частинні похідні і повний диференціал складеної функції:

а) $z = x^2 - y^2$, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$;

б) $z = x^2 y - xy^2$, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$;

в) $u = y^2 + \sqrt{xz} + \frac{1}{\cos z}$, $x = t + v$, $y = \frac{t}{v}$, $z = tv$;

г) $p = u^2 \ln v$, $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$.

3. Знайти похідну функції по заданому напрямку вектора $\vec{l}$ в точці M_0 , якщо:

а) $f = 3x^2 + 5y^2$, $\vec{l} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $M_0(1; 1)$;

б) $f = x \sin(x + y)$, $\vec{l} = (-1; 0)$, $M_0\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $f = x^3 + 2xy^2 + 3yz^2$, $\vec{l} = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $M_0(3; 3; 1)$;

г) $f = \frac{x}{y} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^3$, $M_0(1; 1)$, $\vec{l}_1 = (1; -1; 1)$, $\vec{l}_2 = (1; 1; 0)$,
 $\vec{l}_1 = (1; 1; -1)$;

д) $f = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $M_0(1; 1; 1)$, $M(1; 5; 4)$, $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M}$.

4. Знайти градієнт функції f в точці M , якщо:

а) $f = 1 + x^2 y^3$, $M(-1; 1)$;

б) $f = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $M_1(1; 2)$, $M_2(0; 1)$;

в) $f = x + yz + x^2 yz$, $M_0(0; 0; 0)$, $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(1; 2; 3)$;

г) $f = \sin(x + y) + \cos yz - \operatorname{tg} zx$, $M_0(0; 0; 0)$, $M_1\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; 1\right)$,

$M_2\left(0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$.

5. Знайти кут між градієнтами функції f_1 в точці M_1 і f_2 в точці M_2 , якщо:

а) $f_1 = f_2 = \arcsin \frac{x}{x + y}$, $M_1(1; 1)$, $M_2(3; 4)$;

б) $f_1 = \sqrt{x^2 - y^2}$, $f_2 = x^3 + y^3 - 3xy$, $M_1 = M_2(4; 3)$;

г) $f_1 = f_2 = \sin(x + y + z) - \sin x - \sin y - \sin z$, $M_1(0; 0; 0)$,

$$M_2\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

д) $f_1 = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$, $f_2 = \sqrt[4]{x^4 + y^4 + z^4}$, $M_1(1; 0; 0)$, $M_2(1; 1; 1)$.

6. Знайти найбільше значення $\frac{\partial f}{\partial l}$ в точці M_0 , якщо:

а) $f = xy^2 - 3x^4y^5$, $M_0(1; 1)$;

б) $f = \frac{x + \sqrt{y}}{y}$, $M_0(2; 1)$;

в) $f = \ln xyz$, $M_0(1; -2; -3)$;

г) $f = 3x^2 - 6xy + y^2$, $M_0\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$.

📖 Практичне заняття № 12

Тема: Частинні похідні та диференціали вищих порядків

1. Знайти всі частинні похідні і диференціали другого порядку для функцій:

а) $z = \ln \frac{2 - y - x^2}{2 + y + x^2}$, $(1; 0)$;

б) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;

в) $z = \operatorname{zrctg} \frac{x + y}{1 - xy}$, $(0; 0)$;

г) $z = \sin^2(ax + by)$, $(0; 0)$;

д) $z = \arcsin xy$;

е) $z = \frac{x - y}{x + y}$;

є) $z = (\sin x)^{\cos y}$, $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$;

ж) $z = \operatorname{arctg} \sqrt{xy}$.

2. Знайти вказані частинні похідні:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$, якщо $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}$;

б) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, якщо $z = e^{xy^2}$;

в) $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, якщо $z = \ln(x^2 + y^2)$;

г) $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, якщо $u = e^{xyz}$;

д) $\frac{\partial^6 u}{\partial x \partial y^3 \partial z^2}$, якщо $u = x^m y^n z^p$;

е) $\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial z \partial t}$, якщо $f = \ln \sqrt{(x-y)^2 + (z-t)^2}$;

є) $\frac{\partial^{3n} u}{\partial x^n \partial y^n \partial z^n}$, якщо $f = x^{n+1} (y-1)^n (z+1)^{n-1}$.

3. Перевірити рівності:

а) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (рівняння Лапласа), якщо $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$;

б) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (рівняння теплопровідності), якщо

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}};$$

в) $i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (рівняння Шредінгера), якщо $u = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{ix^2}{4t}}$;

г) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = k^2 u$ (рівняння Гельмгольца), якщо

$$u = \frac{C_1 e^{-kr} + C_2 e^{kr}}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad k, C_1, C_2 - \text{сталі.}$$

4. Знайти всі похідні до другого порядку включно, перші і другі диференціали складної функції f , якщо:

а) $F = f(x^2 + y^2 + z^2)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

б) $F = f\left(x, \frac{x}{y}\right)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

в) $F = f(x, xy, xyz)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

- г) $F = f(x + y, x - y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
 д) $F = f(x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy), (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
 е) $F = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
 є) $F = f(t, t^2 - t, t^3 - t^2), t \in \mathbb{R}$;
 ж) $F = f(\sin t, \cos t), t \in \mathbb{R}$;
 з) $F = f(xy, x^2 y^2, x^3 + y^3), (x, y) \in \mathbb{R}^2$;
 и) $F = f(x^2 y, x^y), (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

5. Знайти n -й диференціал функції f , якщо:

- а) $f(x, y, z) = \sin(x + y) + \cos(y + z), n = 4$;
 б) $f(x, y, z) = e^{x+2y+3z}, n = 8$;
 в) $f(x, y, z) = \ln(x + y) - \lg z, n = 5$;
 г) $f(x, y, z) = (x + y + z)^{10} - (x + y)^9 - (x + z)^8 + x^6 + y^5 + z^4, n = 8$;
 $n = 9; n = 10$.

Практичне заняття № 13

Тема: Диференціювання неявних функцій, заданих рівнянням $F(x; y) = 0, F(x; y; z) = 0$. Дотична площина і нормаль

1. Виразити з рівняння $F(x; y) = 0$ y як неявну функцію від x :

- а) $y^4 - 4x^2 y^2 + \sin x = 0$; б) $e^{x^2+y^2} - x^6 - 5 = 0$;
 в) $\sin(x^2 + y^2) + 3x = 1$; г) $x^2 y^4 - 3y^3 + 6x^2 y^2 - 3y + x^2 = 0$
 (заміна $y^2 + 1 = t$).

2. Дослідити на неперервність і диференційовність неявну функцію $y = y(x)$, задану рівнянням $F(x; y) = 0$. Знайти похідні і диференціали першого і другого порядку в точці $M_0(x_0; y_0)$ або в довільній точці, якщо M_0 не вказана:

- а) $F(x; y) = x^2 y^2 + x^2 + y^2 - 1, M_0(0; 1)$;
 б) $F(x; y) = x^2 + xy + y^2 - 3, M_0(1; 1)$;
 в) $F(x; y) = x^2 y^2 - x^4 - y^4 - a^4$;

г) $F(x; y) = e^y + ax^2 e^{-y} - 2bx$;

д) $F(x; y) = x^y - y^x - 1$, $M_0(3; 2)$;

е) $F(x; y) = \sin xy - e^{xy} - x^2 y$;

є) $F(x; y) = x^2 \ln y - y^2 \ln x$;

ж) $F(x; y) = xe^{2y} - y \ln x - 8$;

з) $F(x; y) = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $M_0(2; 2)$;

и) $F(x; y) = 1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy})$;

і) $F(x; y) = \lg x \cdot 2^{y+1} \cdot 5^y - 2x^2$, $x = 10$.

З3. Дослідити на неперервність і диференційовність неявну функцію $z = z(x; y)$, задану рівнянням $F(x; y; z) = 0$. Знайти частинні похідні і диференціали першого і другого порядку в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ або в довільній точці, якщо M_0 не вказана:

а) $F(x; y; z) = z^3 + 3x^2 z - 2xy$;

б) $F(x; y; z) = x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5$;

в) $F(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14$, $M(1; 2; 3)$;

г) $F(x; y; z) = z^3 - xyz + y^2 - 8$, $M(1; 2; 2)$;

д) $F(x; y; z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - 9$, $M(1; -2; 1)$;

е) $F(x; y; z) = \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1$;

є) $F(x; y; z) = x + y + z - e^{-(x+y+z)}$.

З4. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в заданій точці:

а) $z = xy$, $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(2; 1; 2)$;

б) $z = x^2 + y^2$, $M(1; 1; 2)$;

в) $z = 2x^2 - 4y^2$, $M(-2; 1; 4)$;

г) $z = (x - y)^2 - x + 2y$, $M(1; 1; 1)$;

д) $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $M(-3; 4; 17)$;

е) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $M(0; 1; 0)$;

є) $z = \sin \frac{x}{y}$, $M(\pi; 1; 0)$;

ж) $z = e^{x \cos y}$, $M(1; 0; e)$.

5. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в заданій точці:

а) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 6$, $M(1; 2; -1)$;

б) $xy^2 + z^3 = 12$, $M(1; 2; 2)$;

в) $x^n + y^n + z^n = a^n$, $M(1; 1; 0)$;

г) $x^2y^2 + 2x + z^3 = 16$, $M(2; 1; 2)$;

д) $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z - 4$, $M(2; 3; 6)$;

е) $e^z - z + xy = 3$, $M(2; 1; 0)$;

є) $z = y + \ln\left(\frac{x}{z}\right)$, $M(1; 1; 1)$;

ж) $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$, $M(1; 1; 1)$.

6. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні в заданій точці:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (еліпсоїд);

б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ (двохполосний гіперболоїд);

в) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ (гіперболічний параболоїд);

г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (однополосний гіперболоїд);

д) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ (еліптичний параболоїд);

г) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (конус).

Практичне заняття № 14

Тема: Екстремум функції багатьох змінних. Найбільше і найменше значення функції. Умовний екстремум

1. Знайти стаціонарні точки функцій:

$$a) z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2;$$

$$б) z = xy(a - x - y);$$

$$в) z = \sin x + \sin y + \cos(x + y),$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4};$$

$$г) z = (2ax - x^2)(2by - y^2);$$

$$д) z = e^{2x}(x + y^2 + 2y);$$

$$е) z = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y};$$

$$е) u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z).$$

2. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$I. a) z = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y;$$

$$в) z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10;$$

$$б) z = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2;$$

$$г) z = 4(x - y) - x^2 - y^2;$$

$$II. a) z = 3(x^2 + y^2) - x^3 + 4y;$$

$$в) z = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3;$$

$$б) z = x^2y(4 - y);$$

$$г) z = y^3 - x^2 - 27y + 3x + 16;$$

$$III. a) z = x^4 + y^4 - 2x^2;$$

$$г) z = xy^4(1 + x - y);$$

$$б) z = (x^2 - 4y^2 + 2x)^2;$$

$$д) z = x^2y^3(6 - x - y);$$

$$в) z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2;$$

$$е) z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y;$$

$$е) z = xy^2(12 - x - y), \quad x > 0, \quad y > 0;$$

$$ж) z = x^2y^2 - 2xy^2 - 6x^2y + 12xy;$$

$$IV. a) z = xy \ln(x^2 + y^2);$$

$$д) z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)};$$

$$б) z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2);$$

$$е) z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2 + xy + y^2)}.$$

$$в) z = xy \ln(x^2 + y^2);$$

$$г) z = (5 - 2x + y)e^{x^2 - y};$$

3. Дослідити на екстремум функцію трьох змінних:

$$a) u = x^2 + y^2 + (z + 1)^2 - xy + x;$$

$$в) u = xy^2z^3(1 - x - y - z);$$

$$б) u = (x - 2y + 3)^2 + (2x - z)^2;$$

$$г) u = xyz(16 - x - y - 2z);$$

$$д) u = x^4 + y^4 + z^4 - 8(x^2 + y^2 + z^2);$$

$$е) u = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \quad (x > 0, y > 0, z > 0);$$

$$е) u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z);$$

$$ж) u = \frac{2x^2}{y} + \frac{y^2}{z} - 4x + 2z^2.$$

4. Знайти найбільше і найменше значення функції на заданій множині:

$$I. a) z = x - 2y - 3, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x + y \leq 1;$$

б) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2;$

в) $z = x^3 + y^3 - 3xy, \quad 0 \leq x \leq 2, |y| \leq 1;$

г) $z = x^2 y(4 - x - y), \quad x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 6;$

д) $z = e^{-x^2-y^2} (2x^2 + 3y^2), \quad x^2 + y^2 \leq 4;$

е) $z = x^2 + y^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (0 < b < a);$

є) $z = x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 2x;$

ж) $z = x^2 y, \quad x^2 + y^2 \leq 1;$

II. а) $u = x + 2y + 3z, \quad x + y \leq 3, x + y \leq z, 3x + 3y \geq z, x \geq 0, y \geq 0;$

б) $u = x + y + z, \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 1;$

в) $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 100;$

г) $z = (x - y^2)^3 \sqrt{(x - 1)^2}, \quad y^2 \leq x \leq 2.$

✎5. В кулю радіуса R вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.

✎6. З усіх трикутників з однаковою основою і тим же кутом при вершині знайти найбільший за площею.

✎7. Визначити розміри відкритого прямокутного акваріуму з заданою товщиною стінок d і об'ємом V , на виготовлення якого потрібно найменша кількість матеріалу.

✎8. У півсферу радіуса R вписати прямокутний паралелепіпед так, щоб його об'єм був найбільшим.

✎9. З усіх вписаних у коло радіуса R трикутників знайти той, що має найбільшу площу.

✎10. Дослідити задані функції на умовний екстремум при вказаних умовах зв'язку:

а) $z = xy, \quad x + y - 1 = 0;$

б) $z = x^2 + y^2, \quad 3x + 2y - 6 = 0;$

в) $z = \cos^2 x + \cos^2 y, \quad x - y - \frac{\pi}{4} = 0;$

г) $z = x^2 - y^2, \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0;$

д) $z = 5 - 3x - 4y, \quad x^2 + y^2 = 25;$

е) $z = x^2 + xy + y^2, \quad x^2 + y^2 = 1.$

11. Дослідити задані функції на умовний екстремум при вказаних умовах зв'язку:

а) $u = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2$, $x + y + z = 13$;

б) $u = x^m y^n z^p$ ($m > 0, n > 0, p > 0$), $x + y + z = 1$;

в) $u = \sin x \sin y \sin z$, $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, $x > 0, y > 0, z > 0$;

г) $u = \cos x \cos y \cos z$, $x + y + z = \pi$;

д) $u = x + y + z$, $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$, $x > 0, y > 0, z > 0$;

е) $u = xy^2 z^3$, $x + 2y + 3z = 6$.

Практичне заняття № 15

Контрольна робота №2 (зразок)

1. Знайти другі частинні похідні вказаної функції. Переконатися в тому, що $z''_{xy} = z''_{yx}$:

$$z = e^{x^2 - y^2}.$$

2. Замінюючи приріст функції диференціалом, наближено обчислити:

$$\sqrt{1,98^2 + 1,01^2}.$$

3. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до заданої поверхні S в точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$:

$$S: x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0, \quad M_0(2; 1; -1).$$

4. Дослідити на екстремум функцію: $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$.

Список рекомендованої літератури

Основна

1. Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. III семестр. Ряди. Вступ в аналіз функцій багатьох змінних (для студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)). Вінниця, 2022. 30 с.
2. Бак С. М. Робочий зошит студента з математичного аналізу. IV семестр. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних (для студентів предметної спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)). Вінниця, 2026. 34 с.
3. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу. Інтегральне числення функції однієї змінної. Ряди. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер», 2013. 289 с.
4. Практикум з диференціального числення функції багатьох змінних [електронне мережне наукове видання] / М. М. Ковтонюк, А. Я. Клімішина, І. М. Леонова, О. М. Соя. Вінниця: ВНТУ, 2023. 251 с.
5. Практикум з інтегрального числення функцій однієї змінної та рядів (з використанням чисельних методів і систем комп'ютерної математики): навчальний посібник / М. М. Ковтонюк, А. Я. Клімішина, І. М. Леонова, О. М. Соя, О. П. Косовець. Вінниця: ТОВ «ТВОРИ», 2025. 656 с.
6. Томусяк А.А., Вотякова Л.А. Аналіз функцій двох і трьох змінних (курс лекцій). Вінниця: ТОВ «Фірма «Планер», 2007. 229 с.

Додаткова

1. Безклубенко, І. С., Баліна О. І. Математичний аналіз: підручник: у 2 ч. Ч. 1. Київ: КНУБА, 2024. 224 с.
2. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.І. Математичний аналіз: Підручник. Київ: Знання, 2008. 421 с.
3. Ковтонюк М.М. Лекції з математичного аналізу. Метричні простори. Диференціальне числення функції багатьох змінних. Посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. Вінниця: «Едельвейс і К», 2008. 228 с.
4. Щерба А. І., Нестеренко А. М., Мірошкіна І. В., Щерба В. О. Математичний аналіз: навч. посіб. [Електронний ресурс]. Черкаси: ЧДТУ, 2023. 513 с.

Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Бібліотечний фонд кафедри математики та інформатики в університетському репозиторії. URL: <https://dspace.vspu.edu.ua/collections/860ee2c1-610e-4cd9-babf-0fe65f1b1ab2>
2. Сайт Ковтонюк М. М. URL: <https://kovtonyuk.com/>

Електронне навчальне видання

Бак Сергій Миколайович

Комп'ютерна верстка та набір Бака С.М.

РОБОЧИЙ ЗОШИТ СТУДЕНТА
з математичного аналізу, III семестр.
Числові та функціональні ряди. Диференціальне числення
функцій багатьох змінних

Для студентів предметної спеціальності
А4.04 Середня освіта (Математика)

21001, м. Вінниця, вул. Острозького, 32